

Septintos pratybos (Turing'o mašina)

Užduotis

Rasti Turing'o mašiną, skaičiuojančią funkciją $f(x)$. Visose užduotyse, jei nenurodyta kitaip, laikome, kad x yra netuščias žodis abėcėlėje $\{0, 1\}$.

1. $f(x) = 0$.
2. $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jei žodyje } x \text{ yra 3 ar daugiau nulių,} \\ 0, & \text{priešingu atveju.} \end{cases}$
3. Ženklas ' ∞ ' reiškia, kad funkcija neapibrėžta.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jei žodyje } x \text{ yra bent 2 vienetai,} \\ 0, & \text{jei žodyje } x \text{ yra mažiau kaip 2 vienetai ir yra bent 2 nuliai,} \\ \infty, & \text{priešingu atveju.} \end{cases}$$

4. Šioje užduotyje $x \geq 0$ yra sveikasis skaičius, juostoje užrašomas dvejetainiu pavidalu (negali prasidėti nuliais, nebent $x = 0$).

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{jei } x \geq 1, \\ 0, & \text{jei } x = 0. \end{cases}$$

5. Kokią funkciją skaičiuoja tokia Turing'o mašina:

	0	1	b
q_0	$q_1 0D$	$q_2 1N$	$q_0 bD$
q_1	$q_2 1N$	$q_1 1D$	$q_1 bD$

kur $F = \{q_2\}$?

Sprendimas

Visose užduotyse abėcėlė bus aibė $\Sigma = \{0, 1, b\}$, kur b yra tuščias simbolis. Žodis "ištrinti", kurį mes vartosime šią paskaitą, iš tikro reiškia "įrašyti tuščią simbolį".

Prisiminkime, kad mašina baigia darbą tik tuo atveju, kai pakliūna į galutinę būseną, todėl visada reikia nurodyti galutinių būsenų aibę F .

Spręsdami tokius uždavinius, iš pradžių pagalvojame, kaip mašina galėtų atlikti duotą funkciją, o paskui bandome tai užrašyti mašinos komandomis.

1. Viską triname, važiuodami į dešinę. Kai privažiuojame žodžio pabaigą, užrašom 0 ir sustojam. Mašina, kuri tai realizuoja, bus tokia: $F = \{q_1\}$,

	0	1	b
q_0	$q_0 bD$	$q_0 bD$	$q_1 0N$

2. Važiuojame į dešinę, skaičiuodami nulius. Juos skaičiuoti galime keisdami būsenas: randame pirmą nulį — pereiname į kitą būseną, jei būdami toje kitoje būsenoje randame dar vieną nulį — pereiname į trečią būseną, ir t.t. Pagal tai, kokioje būsenoje būdami privažiavome žodžio pabaigą, užrašome rezultatą: jei privažiavome būdami būsenoje, kuri reiškia, kad radome 3 nulius, užrašome 1, o jei ne, užrašome 0. Viską trinti galime vienu metu su nulių skaičiavimu. Tai realizuojanti mašina galėtų būti tokia: $F = \{q_2\}$,

	0	1	b
q_0	q_1bD	q_0bD	q_20N
q_1	q_3bD	q_1bD	q_20N
q_3	q_4bD	q_3bD	q_20N
q_4	q_4bD	q_4bD	q_21N

Komentariai:

- q_0 — ieškome pirmo nulio: vienetą triname, radę nulį keičiame būseną, radę žodžio pabaigą baigiame su atsakymu 0.
 - q_1 — analogiškai ieškome antro nulio,
 - q_3 — taip pat ieškome trečio nulio,
 - q_4 — jau radome 3 nulius. Triname viską iki žodžio galo ir užrašome atsakymą 1.
3. Šiame uždavinyje reikia skaičiuoti ir vienetų, ir nulius. Tai galima padaryti dviem būdais:
- a) Važiuodami į dešinę skaičiuojame vienetų. Jei privažiavę žodžio pabaigą esame būsenoje, reiškiančioje, kad radome 2 vienetų, tai atsakymas yra aiškus, jį užrašome ir grįždami atgal viską ištriname (arba grįždami atgal viską ištriname ir tada užrašome atsakymą). Jei ne, grįždami atgal skaičiuojame nulius (ir tuo pačiu triname), ir, pagal tai, kiek radome vienetų ir nulių, arba užrašome atsakymą ir stabdome mašinos darbą (jei funkcija apibrėžta), arba nestabdome mašinos darbo (jei funkcija neapibrėžta). Kaip matome, bet kuriuo atveju žodį teks perbėgti du kartus.
 - b) Vienu metu skaičiuojame ir vienetų, ir nulius (ir tuo pačiu triname). Šio metodo privalumas yra tas, kad žodį perbėgti (nuskaityti) reikės tik vieną kartą — mašinos veikimas užims dvigubai mažiau laiko, o mašinos sudėtingumas (būsenų skaičius) padidės nedaug (jei iš viso padidės).

Pateiksime sprendimą antruoju būdu. Namų darbams realizuokite ir pirmą būdą. Mašina galėtų būti tokia: $F = \{q_7\}$,

	0	1	b
q_0	q_2bD	q_1bD	—
q_1	q_4bD	q_3bD	q_1bD
q_2	q_5bD	q_4bD	q_2bD
q_3	q_3bD	q_3bD	q_71N
q_4	q_6bD	q_3bD	q_4bD
q_5	q_5bD	q_6bD	q_70N
q_6	q_6bD	q_3bD	q_70N

Komentariai: iškart triname, ir būseną parodo, kiek nulių ir vienetų jau radome. Spęsdami galime susidaryti būsenų lentelę, kurios pirmas stulpelis yra rastų nulių skaičius, o antras — vienetų:

	'0'	'1'
q_0	0	0
q_1	0	1
q_2	1	0
q_3	≥ 0	≥ 2
q_4	1	1
q_5	≥ 2	0
q_6	≥ 2	1

Jei radome du vienetus (būsena q_3) — triname viską iki žodžio galo ir užrašome vienetą. Jei priėję žodžio pabaigą matome, kad funkcijos rezultatas turi būti neapibrėžtas (būsenos q_1 , q_2 ir q_4) — važiuojame be galo į dešinę. Nebūtina apibrėžti $\delta(q_0, b)$, nes tokios komandos niekad neprireiks (gi žodis x yra netuščias).

4. Pažiūrėkime, kas atsitinka, atimant vienetą iš dvejetainio skaičiaus. Pavyzdžiui:

$$\begin{array}{r} 10100 \\ - \quad 1 \\ \hline 10011 \end{array}$$

Matome, kad visi skaičiaus gale iš eilės einantys nuliai virsta vienetais, pirmas nuo galo vienetas virsta nuliu, o kiti skaitmenys lieka nepakitę. Taigi, mašina galėtų veikti taip: visų pirma nuvažiuoti nieko nekeisdama iki skaičiaus pabaigos, o tada, važiuodama iš dešinės į kairę, visus nulius versti vienetais, kol randa pirmą vienetą, kurį pakeitusi nuliu baigia darbą. Bet dar reikia išnagrinėti atskirus atvejus, kuriems ši bendra schema netinka:

- Visų pirma, jei $x = 0$, atimties veiksmas neatliekamas. Ar $x = 0$, patikrinti yra nesunku, užtenka patikrinti pirmą skaitmenį. Jei tai 0, tai visas skaičius $x = 0$, nes nenulinis skaičius negali prasidėti nuliu. Taigi, algoritmą teks papildyti šiuo tikrinimu: jei pirmas skaitmuo yra 0, baigti darbą (nes tokiu atveju rezultatas ir turi būti 0, kuris ir lieka užrašytas juostoje, nieko nereikia keisti), priešingu atveju vykdyti aukščiau aprašytą algoritmą.
- Rezultatas, jei ne nulis, irgi negali prasidėti nuliu. O taip atsitiks, jei atliksime aukščiau aprašytą algoritmą, pavyzdžiui, skaičiui $x = 100$: juostoje liks užrašyta 011, nes, kaip matėme, vienetą pakeisime nuliu. Kaip to išvengti? Galimi du būdai:
 - Patikrinti tai prieš atliekant veiksmus. Toks atvejis bus tik tada, kai skaičiuje x yra vienintelis vienetas. Taigi, galime važiuodami į dešinę (vistik mums reikia nuvažiuoti iki skaičiaus pabaigos, tai tuo pačiu galime atlikti ir kai ką naudingo) ieškoti, ar rasime dar bent vieną vienetą. Jei taip, tai toliau atliksime aukščiau aprašytą algoritmą, o jei ne, tai atlikinėdami aukščiau aprašytą algoritmą mes vienetą ne keisime į nulį, bet ištrinsime iš viso. Žodžiu, mums reikės užrašyti komandomis du algoritmus: aukščiau aprašytą ir modifikuotą.

- ii. Patikrinti tai atlikus veiksmus. Įvykdę aukščiau aprašytą algoritmą mes nebaigiame darbo, o patikriname, ar užrašytas nulis nėra pirmas skaitmuo. Tam teks pavažiuoti per vieną poziciją į kairę ir patikrinti, ar ten tuščias simbolis, ar ne. Jei ne, galime baigti darbą, o jei taip, tai teks grįžti ir ištrinti užrašytą nulį, nes jis yra pirmas skaičiaus skaitmuo.
- c) Na ir dar reikia neužmiršti, kad nulis visgi gali būti pirmas rezultato skaitmuo tuo atveju, jei visas skaičius yra nulis. Bet tai gali atsitikti tik tada, kai $x = 1$. Šį atvejį irgi teks patikrinti atskirai, nes jei to nepadarysime, tai ištrinsime gautą pirmą skaitmenį nulį, ir juostoje nebeliks užrašyta nieko, o turi likti nulis. Irgi galime daryti dviem būdais:
- i. Pradžioje dar patikrinkime, ar yra antras skaitmuo. Jei nėra, tai skaičius $x = 1$, turėsime jį ištrinti, užrašyti nulį ir baigti, o jei yra, tai galėsime atlikti kurį nors iš aukščiau aprašytų algoritmų.
- ii. Patikrinkim, ar paskutinis skaitmuo yra vienetasis. Jei taip, pakeiskim jį nuliu ir baigim darbą. Iš tikro, jei $x = 1$, tai rezultatas bus lygus 0, kaip ir turėtų gautis. Jei $x > 1$, tai vėlgi gausime teisingą rezultatą. O jei paskutinis skaitmuo nėra vienetasis, tai galėsime atlikti kurį nors iš aukščiau aprašytų algoritmų.

Mašina, realizuojanti 4(b)ii ir 4(c)ii, galėtų būti tokia: $F = \{q_1\}$,

	0	1	b
q_0	$q_1 0N$	$q_2 1D$	—
q_2	$q_2 0D$	$q_2 1D$	$q_3 bK$
q_3	$q_4 1K$	$q_1 0N$	—
q_4	$q_4 1K$	$q_5 0K$	—
q_5	$q_1 0N$	$q_1 1N$	$q_6 bD$
q_6	$q_1 bN$	—	—

Komentariai:

- q_0 — jei nulis, reiškia $x = 0$, užrašome atsakymą 0 ir sustojam, jei ne, keičiam būseną į q_2 .
- q_2 — važiuojam į dešinę iki žodžio galo,
- q_3 — jei paskutinis skaitmuo yra vienetasis, užtenka jį pakeisti nuliu ir sustoti, o jei ne:
- q_4 — visus nulius keičiame į vienetus, o pirmą (nuo galo) sutiktą vienetą keičiame į nulį, ir visgi dar nesustojame, nes norime patikrinti, ar dar liko simbolių. Jei jų neliko, tai bus negerai, nes juostoje liks užrašytas skaičius su nuliu priekyje.
- q_5 — jei randame skaitmenį, tai viskas gerai, galime sustoti, o jei tuščią ląstelę, tai teks grįžti atgal ir:
- q_6 — ištrinti užrašytą nulį priekyje.

Mašina, realizuojanti 4(b)i ir 4(c)i, galėtų būti tokia: $F = \{q_1\}$,

	0	1	b
q_0	$q_1 0N$	$q_2 1D$	—
q_2	$q_3 0D$	$q_3 1D$	$q_4 bK$
q_3	$q_3 0D$	$q_3 1D$	$q_5 bK$
q_4	—	$q_1 0N$	—
q_5	$q_5 1K$	$q_6 0K$	—
q_6	$q_1 0N$	$q_1 1N$	$q_7 bD$
q_7	$q_1 bN$	—	—

Komentariai:

- q_0 — jei nulis, reiškia $x = 0$, užrašome atsakymą 0 ir sustojam, jei ne, keičiam būseną į q_2 .
- q_2 — tikriname, ar yra antras skaitmuo. Jei yra (randame 0 arba 1), tai pereiname į būseną q_3 , jei ne (randame b) — tai reikės grįžti ir vietoj vieneto užrašyti nulį. Tai padarysime būsenoje q_4 .
- q_3 — važiuojam į dešinę iki žodžio galo,
- q_4 — vietoj vieneto užrašome nulį ir baigiame darbą,
- q_5 — visus nulius keičiame į vienetus, o pirmą (nuo galo) sutiktą vienetą keičiame į nulį, ir visgi dar nesustojame, nes norime patikrinti, ar dar liko simbolių. Jei jų neliko, tai bus negerai, nes juostoje liks užrašytas skaičius su nuliu priekyje.
- q_6 — jei randame skaitmenį, tai viskas gerai, galime sustoti, o jei tuščią ląstelę, tai teks grįžti atgal ir:
- q_7 — ištrinti užrašytą nulį priekyje.

Mašina, realizuojanti 4(b)i ir 4(c)i, galėtų būti tokia: $F = \{q_1\}$,

	0	1	b
q_0	$q_1 0N$	$q_2 1D$	—
q_2	$q_3 0D$	$q_5 1D$	$q_4 bK$
q_3	$q_3 0D$	$q_5 1D$	$q_6 bK$
q_4	$q_4 1K$	$q_1 0N$	—
q_5	$q_5 0D$	$q_5 1D$	$q_4 bK$
q_6	$q_6 1K$	$q_1 bN$	—

Komentariai:

- q_0 — jei nulis, reiškia $x = 0$, užrašome atsakymą 0 ir sustojam, jei ne, keičiam būseną į q_2 .
- q_2 — tikriname, ar yra antras skaitmuo, ir tuo pačiu ieškome dar vieno vieneto. Jei yra antras skaitmuo, ir tai yra nulis, pereiname į būseną q_3 (važiavimo į dešinę ieškant vieneto būseną), jei tai vienetą — į būseną q_5 (važiavimo į dešinę jau radus vienetą būseną), o jei antro skaitmens nėra (randame b) — tai reikės grįžti ir vietoj vieneto užrašyti nulį. Tai padarysime būsenoje q_4 .
- q_3 — važiuojame į dešinę iki žodžio galo, ieškodami vieneto. Jei randame, pereiname į būseną q_5 , o jei privažiuojame skaičiaus pabaigą, taip jo ir neradę, tai reiškia, kad skaičiuje yra tik vienas vienetą, pats pirmas skaitmuo. Tokiu atveju visus nulius keisime vienetais, o vietoj to vieneto reikės parašyti b. Tai bus daroma būsenoje q_6 .

- q_4 — visus nulius keičiame i vienetus, o pirmą (nuo galo) sutiktą vienetą keičiame i nulį ir baigiame darbą.
- q_5 — važiuojame į dešinę iki žodžio galo, jau žinodami, kad radome antrą vienetą. Todėl galėsime (būsenoje q_4) visus nulius keisti i vienetus, o pirmą sutiktą vienetą keisti i nulį ir baigti darbą.
- q_6 — visus nulius keičiame i vienetus, o pirmą (nuo galo) sutiktą vienetą ištriname ir baigiame darbą.

5. Atsakymas:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jei } x \text{ prasideda vienetu,} \\ 01^n1y, & \text{jei } x = 01^n0y, \\ \infty, & \text{jei } x \text{ prasideda nuliu, ir daugiau nulių jame nėra.} \end{cases}$$

Čia 1^n žymi iš eilės einančių n vienetų seką.

Namų darbai.

1. Žr. užduoties 3 sprendimą.
2. $f(x) = \tilde{x}$, kur \tilde{x} yra žodis x , parašytas iš kito galo, pavyzdžiui, jei $x = 11101$, tai $\tilde{x} = 10111$. (Nurodymas. Lengviau sudaryti mašiną su didesne abėcėle $\Sigma = \{0, 1, *, b\}$).