Vigirdas Mackevičius

2. Sekos riba

Paskaitų konspektas

Intuityviai realiųjų skaičių *seka* vadinama realiųjų skaičių aibė, kurios elementai (vadinami *sekos nariais*) sunumeruoti natūraliaisiais skaičiais (pradedant galbūt ne vienetu, o kokiu nors kitu natūraliuoju skaičiumi), pvz., $\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}=\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$, $\{a_5,a_6,\dots\}$.

Pastaba. Griežtai skaičių seka apibrėžiama kaip funkcija $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. Jos reikšmės $f(n)$ vadinamos sekos nariais. Įprasta jas (reikšmes) žymėti kokia nors raide, kurios indeksas lygus argumentui, pvz., $x_n=f(n)$, $n\in\mathbb{N}$. Seką $\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$ mes trumpai žymėsime $\{x_n\}$.

Sakoma, kad skaičius x yra sekos $\{x_n\}$ riba, jei su „pakankamai dideliais“ eilės numeriais n sekos nariai x_n yra „kiek norima arti“ skaičiaus x. Griežtas apibrėžimas skamba taip:

2.1. Apibrėžimas. Sakoma, kad seka $\{x_n\}$ turi ribą $x\in\mathbb{R}$, jei su kiekvienu („kiek norima mažu“) $\varepsilon>0$, atsiras toks („pakankamai didelis“) eilės numeris $N\in\mathbb{N}$, kad $|x_n-x|<\varepsilon$ su visais $n>N$.

Tokiu atveju rašoma $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ (trumpai $\lim x_n=x$) arba $x_n\to x$, $n\to\infty$ (trumpai $x_n\to x$). Taip pat dar sakoma: x_n *konverguoja į* x arba x_n *artėja prie* x.

Taigi

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x :\Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}: |x_n-x|<\varepsilon,\ \text{kai } n>N.$$

Jei seka turi ribą, sakoma, kad ji *konverguoja*. Priešingu atveju sakoma, kad ji *diverguoja*.

Pastabos. 1. Kartais apibrėžime vietoj $N\in\mathbb{N}$ patogu imti $N\in\mathbb{R}$, turint omenyje, kad nelygybėje $n>N$ skaičiai n – tik *natūralieji*.

2. Dažnai ribos apibrėžimą patogu formuluoti naudojant aplinkos sąvoką. Skaičiaus $x\in\mathbb{R}$ ε-aplinka vadinamas intervalas $U_\varepsilon(x):=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$. Tada

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x :\Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}: x_n\in U_\varepsilon(x)\ \text{kai } n>N.$$

(„Sekos nariai x_n yra kiek norima mažoje skaičiaus x aplinkoje, kai sekos narių eilės numeriai n yra pakankamai dideli“.)

3. Kol as nagrinėjame tik *baigtines* ribas, t.y. ribas, kurių reikšmės – realieji skaičiai. Vėliau susipažinsime ir su *begalinėmis* ribomis $+\infty$, $-\infty$ ir ∞.

2.2. Pavyzdžiai. 1) Patikrinsime, kad $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Laisvai pasirinkime $\varepsilon>0$. Tada $|\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}<\varepsilon$, kai $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Iš čia matome, kad su bet kokiu $\varepsilon>0$ paėmę $N:=\frac{1}{\varepsilon}$ turėsime $|\frac{1}{n}-0|<\varepsilon$, kai $n>N$. Remiantis ribos apibrėžimu tai ir reiškia, kad $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

$\mathcal{VM}$-TEX, 2003 01 07

2) Imkime seką

$$x_n := \frac{3\sin n - 5\cos 2n}{\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Įsitikinsime, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Tada

$$|x_n - 0| = \left|\frac{3\sin n - 5\cos 2n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{3|\sin n| + 5|\cos 2n|}{\sqrt{n}}$$
$$\leqslant \frac{3+5}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

kai $n > (8/\varepsilon)^2$.

Taigi gavome, kad su bet kokiu $\varepsilon > 0$ paėmę $N := (8/\varepsilon)^2$, turėsime $|x_n - 0| < \varepsilon$ su visais $n > N$. Tai ir reiškia, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

3) Įsitikinsime, kad seka $x_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, (baigtinės) ribos neturi.

Tarkime, kad, priešingai, ši seka turi ribą x. Tada paėmus $\varepsilon = 1$, atsiras toks $N \in \mathbb{N}$, kad $|x_n - x| < 1$, kai $n > N$, arba

$$|x_n| = |(x_n - x) + x| \leqslant |x_n - x| + |x| < |x| + 1, \quad n > N,$$

t.y. $\sqrt{n} < |x| + 1$, kai $n > N$, ir (galutinai)

$$n < (|x| + 1)^2, \quad n > N.$$

Gavome prieštarą, nes natūraliųjų skaičių aibė nėra aprėžta.

4) Nagrinėkime seką $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Įsitikinsime (prieštaros būdu), kad ši seka ribos neturi.

Tarkime, kad $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Paėmus $\varepsilon = 1$, atsiras toks $N \in \mathbb{N}$, kad $|x_n - x| < 1$, kai $n > N$. Imdami $n_1 = 2k > N$, gauname

$$|x_{n_1} - x| = |1 - x| < 1,$$

o imdami $n_2 = 2k + 1 > N$, gauname

$$|x_{n_2} - x| = |-1 - x| = |1 + x| < 1.$$

Iš šių dviejų nelygybių turime

$$2 = (1 + x) + (1 - x) \leqslant |1 + x| + |1 - x| < 1 + 1 = 2,$$

t.y. $2 < 2$ – prieštara!

2.3. Apibrėžimas. Seka $\{x_n\}$ vadinama

a) aprėžta iš viršaus, jei jos reikšmių aibė aprėžta iš viršaus, t.y.

$$\exists M \in R : \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leqslant M;$$

b) aprėžta iš apačios, jei jos reikšmių aibė aprėžta iš apačios, t.y.

$$\exists\, M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N},\ \ x_n \geqslant M;$$

c) aprėžta, jei ji yra aprėžta ir iš viršaus, ir iš apačios, t.y.

$$\exists\, M_1, M_2 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N},\ \ M_1 \leqslant x_n \leqslant M_2.$$

Pastaba. Pastaruoju atveju pažymėję $M := \max\{|M_1|, |M_2|\}$ gausime paprastesnį „simetrišką“ aprėžtos sekos $\{x_n\}$ apibrėžimą:

$$\exists\, M \in R_+ : \forall n \in \mathbb{N},\ \ |x_n| \leqslant M.$$

2.4. Teiginys.

1) *Kiekviena konverguojanti seka yra aprėžta.*
2) *Konverguojanti seka gali turėti tik vieną ribą.*

Įrodymas. Tarkime, kad $x = \lim x_n$. Paimkime ribos apibrėžime $\varepsilon = 1$. Tada

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : |x_n - x| < 1, \text{ kai } n > N.$$

Iš čia (plg. su parnr.3.3 pavyzdžiu)

$$|x_n| \leqslant |x_n - x| + |x| < |x| + 1, \text{ kai } n > N.$$

Pažymėkime $M := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |x| + 1\}$. Tada

$$|x_n| \leqslant M,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

2) Tarkime, kad seka turi dvi ribas x ir y, $x < y$.

Paimkime ε lygų pusei atstumo tarp x ir y, t.y. $\varepsilon := (y - x)/2 > 0$. Tada

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon, \text{ kai } n > N_1,$$

ir

$$\exists\, N_2 \in \mathbb{N} : |x_n - y| < \varepsilon, \text{ kai } n > N_2.$$

Paimkime bet kokį $n_0 > \max\{N_1, N_2\}$. Tada

$$|x_{n_0} - x| < \varepsilon \text{ ir } |x_{n_0} - y| < \varepsilon.$$

Todėl

$$\begin{aligned} y - x &= |(x_{n_0} - x) + (y - x_{n_0})| \leqslant |x_{n_0} - x| + |x_{n_0} - y| \\ &< 2\varepsilon = y - x, \end{aligned}$$

ir gavome prieštarą. △

2.5. Teiginys. (Veiksmai su ribomis.) *Tarkime, kad* $x_n \to x$ *ir* $y_n \to y$, $n \to \infty$. *Tada*

a) $x_n + y_n \to x + y$, $n \to \infty$;

b) $x_n y_n \to xy$, $n \to \infty$;

c) jei $y \neq 0$, *tai* $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$, $n \to \infty$.

Įrodymas. a) Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Remiantis ribos apibrėžimu,

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kai } n > N_1,$$

ir

$$\exists\, N_2 \in \mathbb{N} : |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kai } n > N_2.$$

Pažymėkime $N := \max\{N_1, N_2\}$. Tada

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ir } |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kai } n > N.$$

Iš čia

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\leqslant |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ kai } n > N. \end{aligned}$$

Tai reiškia, kad $x_n + y_n \to x + y$, $n \to \infty$.

b) Įvertinsime skirtumą

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |(x_n y_n - x_n y) + (x_n y - xy)| \\ &= |x_n(y_n - y) + y(x_n - x)| \\ &\leqslant |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x|. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Kadangi seka $\{x_n\}$ aprėžta, tai

$$\exists\, M \in R_+ : |x_n| \leqslant M, \ n \in \mathbb{N}.$$

Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Tada

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N} : |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}, \text{ kai } n > N_1,$$

ir

$$\exists\, N_2 \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2(|y|+1)}, \text{ kai } n > N_2.$$

Tada iš $(*)$ su visais $n > N := \max\{N_1, N_2\}$ gauname

$$|x_n y_n - xy| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + |y| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|y|+1)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tai reiškia, kad $x_n y_n \to xy$, $n \to \infty$.

c) Įvertinsime skirtumą

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{x_n y - y_n x}{y_n y}\right| \\ &= \frac{|x_n y - xy + xy - y_n x|}{|y_n||y|} \\ &\leqslant \frac{|y||x_n - x| + |x||y_n - y|}{|y_n||y|} \\ &= \frac{|x_n - x|}{|y_n|} + \frac{|x||y_n - y||}{|y_n||y|}.\end{aligned} \tag{$**$}$$

Kadangi $y_n \to y \neq 0$, $n \to \infty$, tai

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N} : |y_n - y| < \frac{|y|}{2}, \ \text{kai } n \geqslant N_1.$$

Iš čia

$$|y_n| = |y - (y - y_n)| \geqslant |y| - |y - y_n| > |y| - \frac{|y|}{2} = \frac{|y|}{2}, \ \text{kai } n > N_1.$$

Todėl

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|y|}, \ \text{kai } n > N_1.$$

Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Tada

$$\exists\, N_2 \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \frac{\varepsilon|y|}{4}, \ \text{kai } n > N_2,$$

ir

$$\exists\, N_3 \in N : |y_n - y| < \frac{\varepsilon|y|^2}{4(|x|+1)}, \ \text{kai } n > N_3.$$

Tada, imdami $n > N := \max\{N_1, N_2, N_3\}$, iš $(**)$ turime

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\frac{x}{y}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tai reiškia, kad $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$, $n \to \infty$. △

2.6. Teiginys. (Perėjimas prie ribos nelygybėse.)

1) *Jei $x_n \to x$ ir $y_n \to y$, $x < y$, tai*

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : x_n < y_n, \ \textit{kai } n > N;$$

2) *jei $x_n \leqslant y_n$, $x_n \to x$ ir $y_n \to y$, tai $x \leqslant y$;*

3) *jei $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, $x_n \to x$ bei $z_n \to x$, tai ir $y_n \to x$.*[1]

[1] Ši savybė juokais dažnai vadinama „DPP“ – „dviejų policininkų principu“.

Įrodymas. 1) Pažymėkime $\varepsilon := \frac{y-x}{2} > 0$. Tada

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon \text{ ir } |y_n - y| < \varepsilon, \text{ kai } n > N,$$

ir todėl $x_n < x + \varepsilon = y - \varepsilon < y_n$, kai $n > N$.

2) Jei būtų priešingai, t.y. $x > y$, tai remdamiesi 1) dalimi turėtume, kad

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : x_n > y_n, \text{ kai } n > N, \text{ –}$$

prieštara!

3) Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Tada

$$\exists\, N_1 \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \varepsilon, \text{ kai } n > N_1,$$

ir

$$\exists\, N_2 \in \mathbb{N} : |z_n - x| < \varepsilon, \text{ kai } n > N_2.$$

Iš čia

$$x - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < x + \varepsilon, \text{ kai } n > N := \max\{N_1, N_2\},$$

t.y. $|y_n - x| < \varepsilon$, kai $n > N$. Pagal ribos apibrėžimą tai reiškia, kad $y_n \to x$, $n \to \infty$. △

2.7. Pavyzdžiai. 1) Visų pirma pastebėsime, kad iš nelygybių $x_n < y_n$, $n \in \mathbb{N}$, ir konvergavimo $x_n \to x$ bei $y_n \to y$ neišplaukia, kad $x < y$. Pavyzdžiui, $x_n = 0 < \frac{1}{n} = y_n$, $n \in \mathbb{N}$, bet $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

2) Nagrinėkime seką

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Įvertinsime jos narius iš abiejų pusių sekomis, kurių ribas galima lengvai paskaičiuoti ir įsitikinti, kad jos (laimei!) sutampa:

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$$
$$\leqslant y_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

t.y.

$$x_n := \frac{n}{n+1} \leqslant y_n \leqslant \frac{n}{n} = 1 =: z_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kadangi $x_n \to 1$ ir $z_n \to 1$, tai remiantis „DPP“ ir $y_n \to 1$.

2.8. Apibrėžimas. Tarkime, kad turime seką $\{x_n\}$ ir griežtai didėjančią natūraliųjų skaičių seką $\{n_k,\ k \in \mathbb{N}\}$: $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$. Seka $\{x_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$, vadinama sekos $\{x_n\}$ *posekiu* (arba *daline seka*). Jei sekos $\{x_n\}$ posekis $\{x_{n_k}\}$ turi ribą, tai ši riba vadinama sekos $\{x_n\}$ *daline riba*.

Pastabos. 1) Seka gali netureti ribos, bet gali turėti dalinę ribą. Pavyzdžiui, seka $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, neturi ribos, bet turi dvi dalines ribas (1 ir -1).

2) Jei seka $\{x_n\}$ turi ribą, tai visi jos posekiai turi tą pačią ribą. Taigi, konverguojančios sekos turi tik vieną dalinę ribą, sutampančią su jos riba.

2.9. Teiginys. (Vejerštraso teorema apie konverguojantį posekį.) *Kiekviena aprėžta seka $\{x_n\}$ turi konverguojantį posekį.*

Įrodymas. Kadangi sekos reikšmių aibė aprėžta, tai atsiras intervalas $[a, b]$, kuriame yra visos sekos narių reikšmės. Padalinkime šį intervalą į du vienodo ilgio intervalus – $[a, (a+b)/2)]$ ir $[(a+b)/2, b]$. Bent viename iš jų yra be galo daug sekos narių. Pažymėkime jį $[a_1, b_1]$ (jei į abu intervalus patenka be galo daug sekos narių, imame bet kurį iš jų). Imkime bet kurį sekos narį $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. Intervalą $[a_1, b_1]$ vėl padalinkime į du vienodo ilgio intervalus ir pažymėkime $[a_2, b_2]$ tą iš jų, į kurį patenka be galo daug narių. Imkime sekos narį $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ su eilės numeriu $n_2 > n_1$ – toks narys tikrai atsiras, nes intervale $[a_2, b_2]$ yra *be galo daug* sekos $\{x_n\}$ narių. Tęsdami toliau, gausime tokią įdėtųjų intervalų seką $\{[a_k, b_k]\}$ ir tokį sekos $\{x_n\}$ posekį $\{x_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$, kad

1) $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, $k \in \mathbb{N}$;
2) $b_k - a_k = (b-a)/2^k \to 0$, $k \to \infty$.

Remiantis įdėtųjų intervalų aksioma, atsiras taškas $x \in \mathbb{R}$, priklausantis visiems intervalams $[a_k, b_k]$, t.y. $a_k \leqslant x \leqslant b_k$, $k \in \mathbb{N}$. Kadangi $0 \leqslant b_k - x \leqslant b_k - a_k \to 0$, tai, remiantis „DPP“, $\lim_{k\to\infty}(b_k - x) = 0$ ir todėl $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty}(b_k - x) + x = x$. Panašiai $\lim_{k\to\infty} a_k = x$. Kadangi $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$, $k \in \mathbb{N}$, tai, remiantis „DPP“, ir $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Taigi sukonstravome konverguojantį sekos $\{x_n\}$ posekį $\{x_{n_k}\}$. △

2.10. Teorema. (Sekos konvergavimo Koši kriterijus.) *Tarkime, kad $\{x_n\}$ – skaičių seka. Tada šie du teiginiai yra ekvivalentūs:*

1) *Seka $\{x_n\}$ konverguoja (į kokį nors $x \in \mathbb{R}$);*
2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \varepsilon$, *kai* $m, n > N$ *(„sekos nariai yra kiek norima arti vienas nuo kito, kai jų eilės numeriai yra pakankamai dideli“).*

Pastaba. Sekos, pasižyminčios antrąja savybe, vadinamos *fundamentaliosiomis sekomis* arba *Koši sekomis*. Teorema tvirtina, kad realiųjų skaičių seka konverguoja tada ir tik tada, kai ji yra Koši seka. Ši realiųjų skaičių aibės savybė vadinama pilnumu. Šios savybės neturi, pavyzdžiui, racionaliųjų skaičių aibė. Tuo įsitikinti galima paėmus bet kokią konverguojančią racionaliųjų skaičių seką, kurios riba yra iracionalusis skaičius.

Įrodymas.

Būtinumas $(1 \Rightarrow 2)$. Tarkime, kad $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Tada $\exists N \in \mathbb{N} : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, kai $n > N$. Iš čia

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - x) - (x_m - x)| \\ &\leqslant |x_n - x| + |x_m - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ kai } n, m > N. \end{aligned}$$

Pakankamumas $(2 \Rightarrow 1)$. Pradžioje įsitikinsime, kad seka $\{x_n\}$ (kuriai išpildyta antroji sąlyga) yra aprėžta. Imdami $\varepsilon = 1$ gauname, kad

$$\exists N \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < 1, \text{ kai } m, n > N.$$

Tada

$$|x_n - x_{N+1}| < 1, \text{ kai } n > N,$$

arba

$$|x_n| = |(x_n - x_{N+1}) + x_{N+1}| \leqslant |x_n - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < |x_{N+1}| + 1, \text{ kai } n > N.$$

Pažymėkime

$$M := \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_N|, |x_{N+1}| + 1\}.$$

Tada akivaizdu, kad

$$|x_n| \leqslant M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Remiantis 2.9 teorema, seka $\{x_n\}$ turi konverguojantį posekį $\{x_{n_k}\}$. Pažymėkime $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Įsitikinsime, kad x yra ir visos sekos riba. Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Tada

$$\exists N \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kai } m, n > N.$$

Kita vertus,

$$\exists K \in \mathbb{N} : |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kai } k > K.$$

Paėmę bet kokį $k > K$, su kuriuo $n_k > N$, gauname

$$|x_n - x| = |(x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - x)| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ kai } n > N.$$

Tai ir reiškia, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. △

2.11. Pavyzdžiai. 1) Nagrinėkime seką $x_n := \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Naudodami Koši kriterijų, įsitikinsime, kad ši seka konverguoja.

Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Imdami $n > m$, įvertinsime skirtumą

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{\sin(m+1)}{2^{m+1}}\right| + \cdots + \left|\frac{\sin n}{2^n}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2^{m+1}}(1 - \frac{1}{2^{n-m}})}{1 - \frac{1}{2}} \\ &< \frac{1}{2^m} < \varepsilon, \end{aligned}$$

kai $m > N := \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. Taigi seka $\{x_n\}$ konverguoja.

2) Jau esame įsitikinę, kad seka $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, neturi ribos. Dabar dar kartą tuo įsitikinsime, tik šį kartą naudosime Koši kriterijų. Kadangi

$$|x_{n+1} - x_n| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = |(-1)^n(-1-1)| = 2,$$

tai imdami $\varepsilon = 2$ matome, kad sekos fundamentalumo sąlyga neišpildyta. (Iš tikrųjų, priešingu atveju su pakankamai dideliu N turėtume, kad $|x_m - x_n| < 2$, kai $m, n > N$. Bet ką tik įsitikinome, kad imdami $m = n+1 > n > N$ turime $|x_m - x_n| = 2$.) Taigi seka $\{x_n\}$ diverguoja.

3) Nagrinėkime seką $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Įsitikinsime, kad ji diverguoja. Tam nepakanka, kaip praeitame pavyzdyje, palyginti gretimus narius. Su visais $n \in \mathbb{N}$ turime

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Imdami $\varepsilon = 1/2$ matome, kad nagrinėjama seka netenkina fundamentalumo sąlygos. (Iš tikrųjų, priešingu atveju su pakankamai dideliu N turėtume, kad $|x_m - x_n| < 1/2$, kai $m, n > N$. Bet ką tik įsitikinome, kad imdami $m = 2n > n > N$ turime $|x_m - x_n| \geqslant 1/2$.) Taigi seka $\{x_n\}$ diverguoja.

2.12. Apibrėžimas. Seka $\{x_n\}$ vadinama

a) *didėjančia*, jei $x_{n+1} \geqslant x_n$ su visais $n \in \mathbb{N}$;

b) *mažėjančia*, jei $x_{n+1} \leqslant x_n$ su visais $n \in \mathbb{N}$;

c) *griežtai didėjančia*, $x_{n+1} > x_n$ su visais $n \in \mathbb{N}$;

d) *griežtai mažėjančia*, jei $x_{n+1} < x_n$ su visais $n \in \mathbb{N}$.

Didėjančios iš mažėjančios sekos vadinamos *monotoniškomis*.

2.13. Teiginys. *Didėjanti* (*mažėjanti*) *seka* $\{x_n\}$ *konverguoja tada ir tik tada, kai ji yra aprėžta iš viršaus* (*atitinkamai iš apačios*) *ir tokiu atveju*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n,$$

t.y. sekos riba yra lygi jos reikšmių aibės tiksliajam viršutiniam rėžiui (*atitinkamai*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n).$$

Įrodymas (didėjančiai sekai). „$\Longrightarrow$“. Jau įrodyta, nes *kiekviena* (nebūtinai monotoniška) konverguojanti seka yra aprėžta (2.4.1 teiginys).

„$\Longleftarrow$“. Tarkime, kad didėjanti seka $\{x_n\}$ yra aprėžta iš viršaus. Pažymėkime $a := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathbb{R}$. Įsitikinsime, kad $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Kadangi $a - \varepsilon$ nėra sekos $\{x_n\}$ reikšmių aibės supremumas, tai $\exists\, N \in \mathbb{N} : x_N > a - \varepsilon$. Tada dėl sekos monotoniškumo $\forall\, n > N$, $a - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant a < a + \varepsilon$, t.y. $|x_n - a| < \varepsilon$, kai $n > N$. Taigi $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. $\triangle$

2.14. Pavyzdžiai. 1) Įrodysime, kad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0, \quad \text{jei} \quad |q| > 1.$$

1 *atvejis*: $q > 1$. Pažymėkime $x_n := \frac{n}{q^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Įsitikinsime, kad ši seka yra mažėjanti pradedant pakankamai dideliu eilės numeriu. Nagrinėkime santykį

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)q^n}{q^{n+1}n} = \frac{n+1}{nq} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\frac{1}{q} \to \frac{1}{q} < 1, \quad n \to \infty.$$

Remiantis 2.6.1 teiginiu, atsiras toks $N \in \mathbb{N}$, kad $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, kai $n > N$, arba $x_{n+1} < x_n$, kai $n > N$. Tai reiškia, kad seka $\{x_n,\ n > N\}$ yra mažėjanti. Kadangi ši seka aprėžta iš apačios (apatinis rėžis – nulis), tai, remiantis 2.13 teiginiu, ji turi ribą. Pažymėkime $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Perėję rekurentinėje lygybėje

$$x_{n+1} = (1+\frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{q} \cdot x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

prie ribos, kai $n \to \infty$, gauname $x = \frac{1}{q}x$, t.y. $x = 0$.

2 *atvejis*: $q < -1$. Tada, remiantis pirmuoju atveju,

$$\left|\frac{n}{q^n}\right| = \frac{n}{|q|^n} \to 0 \quad n \to \infty \implies \frac{n}{q^n} \to 0 \quad n \to \infty.$$

2) Įrodysime, kad

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Kadangi $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$, mes turime įsitikinti, kad $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$ su pakankamai dideliais n. Turime

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon \iff \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon \iff n < (1+\varepsilon)^n \iff \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1.$$

Imdami 1 pavyzdyje $q = 1 + \varepsilon$, gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0 < 1 \implies \exists\, N \in \mathbb{N} : \frac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1, \text{ kai } n > N,$$

t.y. $\sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$, kai $n > N$, Tai ir reiškia, kad $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2') Kaip išvadą gausime, kad

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \forall\, a > 0.$$

1 *atvejis*: $a \geqslant 1$. Šiuo atveju $\exists\, N \in \mathbb{N} : a \leqslant N$. Tada

$$1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{n} \text{ kai } n \geqslant N.$$

Kadangi kraštinių narių ribos lygios 1, kai $n \to \infty$, tai pagal „DPP“ ir $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2 *atvejis*: $0 < a < 1$. Šiuo atveju

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \overset{\text{1 atv.}}{=\!=\!=} \frac{1}{1} = 1.$$

3) Įrodysime, kad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0, \quad q \in \mathbb{R}.$$

1 *atvejis*: $q > 0$. Pažymėkime $x_n := \frac{q^n}{n!}$. Tada

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{q^{n+1} n!}{(n+1)! q^n} = \frac{q}{n+1} \to 0 < 1, \quad n \to \infty.$$

Todėl atsiras toks $N \in \mathbb{N}$, kad $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, kai $n > N$, t.y. seka $\{x_n\}$ mažėja (pradedant $(N+1)$-uoju nariu). Todėl egzistuoja $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Perėję prie ribos lygybėje $x_{n+1} = \frac{q}{n+1} x_n$, gauname $x = 0 \cdot x = 0$.

2 *atvejis*: $q < 0$. Šiuo atveju

$$\left|\frac{q^n}{n!}\right| = \frac{|q|^n}{n!} \to 0 \quad n \to \infty \implies \frac{q^n}{n!} \to 0, \quad n \to \infty.$$

3 *atvejis*: $q = 0$. Akivaizdu (visi sekos nariai lygūs nuliui).

4) Įsitikinsime, kad egzistuoja (matematikoje labai svarbi!) riba

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Pažymėkime $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Mes įrodysime, kad seka $\{y_n\}$ yra mažėjanti ir todėl turi ribą, nes ji akivaizdžiai aprėžta iš apačios ($y_n \geqslant 1$). Iš čia išplauks, kad ir nagrinėjamoji seka $\{x_n\}$ turi (tą pačią) ribą: $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n/(1 + 1/n) = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Palyginkime gretimus sekos y_n narius:

$$\begin{aligned}
\frac{y_n}{y_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{(n+1)^{n+1}(n-1)^n}{n^{n+1} n^n} \\
&= \frac{(n^2-1)^n (n+1)}{n^{2n} n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n} \\
&\leqslant \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{n^2-1}} < \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{n^2}} = 1.
\end{aligned}$$

Priešpaskutinę nelygybę gavome pasinaudoję žinoma Bernulio nelygybe

$$(1 + x^n) \geqslant 1 + nx, \quad x > -1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Taigi $y_n < y_{n-1}$, $n > 1$, t.y. seka $\{y_n\}$ yra mažėjanti.

Pastaba. Kodėl mes tiesiogiai neįrodinėjome sekos $\{x_n\}$ ribos egzistavimo? Pasirodo, kad pati seka $\{x_n\}$ taip pat yra monotoniška, tačiau didėjanti (galima įrodyti panašiai). Deja, jos aprėžtumas iš viršaus nėra toks akivaizdus – jam įrodyti reikėtų papildomų pastangų. Todėl pasinaudoję pagalbine seka $\{y_n\}$ tą patį rezultatą gauname „pigiau“.

2.15. Apibrėžimas.

$$e := \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n \approx 2{,}7182818284\ldots.$$

2.16. Apibrėžimas. Tarkime, kad duota seka $\{x_n\}$. Sakoma, kad

1) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (arba $x_n \to +\infty$, $n\to\infty$), jei $\forall\,\Delta \in \mathbb{R}$, $\exists\, N \in \mathbb{N} : x_n > \Delta$, kai $n > N$;
2) $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ (arba $x_n \to -\infty$, $n\to\infty$), jei $\forall\,\Delta \in \mathbb{R}$, $\exists\, N \in \mathbb{N} : x_n < \Delta$, kai $n > N$;
3) $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ (arba $x_n \to \infty$, $n\to\infty$), jei $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

2.17. Apibrėžimas. Išplėstine realiųjų skaičių aibe (arba tiese) vadinama aibė $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$, kurioje, be įprastinių veiksmų ir tvarkos realių skaičių tiesėje $\mathbb{R}$, apibrėžti tokie veiksmai ir sąryšiai:

a) $-\infty < x < +\infty$, $x \in \mathbb{R}$;
b) $x + (\pm\infty) = \pm\infty$, $x \in \mathbb{R}$;
c) $x\cdot(\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, & x>0,\\ \mp\infty, & x<0.\end{cases}$;
d) $\sup A := +\infty$, jei aibė $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ nėra aprėžta iš viršaus arba $+\infty \in A$;
   $\inf A := -\infty$, jei aibė $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ nėra aprėžta iš apačios arba $-\infty \in A$.

2.18. Pastabos. 1) Baigtinių ir begalinių ribų sąvokas galima suvienodinti panaudojant aplinkos sąvoką. Taško $x \in \mathbb{R}$ ε-aplinka vadinamas intervalas $U_\varepsilon(x);= (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Taško $+\infty$ Δ-aplinka vadinamas intervalas $(\Delta, +\infty] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > \Delta\}$. Taško $-\infty$ Δ-aplinka vadinamas intervalas $[-\infty, \Delta) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < \Delta\}$. Tada bendras ribos apibrėžimas skamba taip:

Sakoma, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$, jei bet kokiai taško x aplinkai U egzistuoja toks $N \in \mathbb{N}$, kad $x_n \in U$, kai $n \in \mathbb{N}$.

2) Sekos dalinės ribos sąvoka be pakitimų apibrėžiama ir begalinių ribų atveju: jei sekos $\{x_n\}$ posekis $\{x_{n_k}\}$ turi ribą (baigtinę arba begalinę), tai ji vadinama sekos daline riba.

3) Išplėstinėje skaičių tiesėje lieka neapibrėžti reiškiniai $\pm\infty+(\mp\infty)$, $\pm\infty-(\pm\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$ ir pan.

2.19. Teiginys. *Tarkime, kad $\{x_n\}$ ir $\{y_n\}$ yra realiųjų skaičių sekos.*

a) *Jei $x_n \to +\infty$ ir $y_n \geqslant C \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tai $x_n + y_n \to +\infty$;*
b) *jei $x_n \to -\infty$ ir $y_n \leqslant C \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tai $x_n + y_n \to -\infty$;*
c) *jei $x_n > 0$, tai $x_n \to 0 \iff \frac{1}{x_n} \to +\infty$;*
   jei $x_n < 0$, tai $x_n \to 0 \iff \frac{1}{x_n} \to -\infty$;
   jei $x_n \neq 0$, tai $x_n \to 0 \iff \frac{1}{x_n} \to \infty$;
d) *$x_n \to +\infty$ ir $y_n \geqslant x_n \implies y_n \to +\infty$;*
e) *monotoniška seka $\{x_n\}$ aibėje $\overline{\mathbb{R}}$ visada turi ribą (baigtinę arba begalinę).*

Įrodymas. a) Laisvai pasirinkime $\Delta \in \mathbb{R}$. Tada $\exists N \in \mathbb{N} : x_n > \Delta - C$, kai $n > N$. Gauname

$$x_n + y_n > (\Delta - C) + C = \Delta, \text{ kai } n > N.$$

Tai ir reiškia, kad

$$x_n + y_n \to +\infty.$$

b) Analogiškai.

c) (atvejis $x_n > 0$). „$\Longrightarrow$“. Laisvai pasirinkime $\Delta \in \mathbb{R}$. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $\Delta > 0$. Tada $\exists N \in \mathbb{N} : 0 < x_n < \frac{1}{\Delta}$, kai $n > N$, tai yra $\exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{x_n} > \Delta$, kai $n > N$. Tai reiškia, kad $\frac{1}{x_n} \to +\infty$.

„$\Longleftarrow$“. Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Tada $\exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}$, kai $n > N$, t.y. $\exists N \in \mathbb{N}$: $-\varepsilon < 0 < x_n < \varepsilon$, kai $n > N$. Tai reiškia, kad $x_n \to 0$.

Likę du atvejai nagrinėjami analogiškai.

d) Laisvai pasirinkime $\Delta \in \mathbb{R}$. Tada $\exists n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant \Delta$, kai $n > N$. Todėl ir $y_n \geqslant \Delta$, kai $n > N$. Tai reiškia, kad ir $y_n \to +\infty$.

e) Jei seka aprėžta, tai ji turi ribą, priklausančią $\mathbb{R}$ (2.13 teiginys). Jei seka $\{x_n\}$ neaprėžta, tai, pavyzdžiui, didėjančios sekos atveju $\forall \Delta \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N} : x_N > \Delta$. Tada dėl sekos monotoniško didėjimo $x_n \geqslant x_N > \Delta$, kai $n > N$. Tai reiškia, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Δ

2.20. Apibrėžimas. Sekos $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, viršutine ir apatine ribomis vadinamos jos didžiausia ir mažiausia dalinės ribos (su sąlyga, kad jos egzistuoja). Jos žymimos atitinkamai $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ ir $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ (arba $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ ir $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$).

2.21. Teiginys. *Bet kokia seka $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, turi viršutinę ir apatinę ribas, kurios lygios atitinkamai*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$

ir

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

Pastaba. Ribos $s := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} x_k$ ir $i := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} x_k$ visada egzistuoja, nes sekos $i_n := \inf_{k\geqslant n} x_k$, $n \in \mathbb{N}$, ir $s_n := \sup_{k\geqslant n} x_k$, $n \in \mathbb{N}$, yra motoniškos.

Įrodymas (apatinei ribai). Pažymėkime

$$i_n := \inf_{k\geqslant n} x_k, \qquad i := \lim_{n\to\infty} i_n.$$

Toliau išskirsime du atvejus.

1 *atvejis*: $-\infty \leqslant i < +\infty$. Imkime bet kokią seką $\{j_n\}$, su kuria $j_n > i_n$, $n > N$, ir $j_n \to i$, $n \to \infty$. (Galima imti, pavyzdžiui, $j_n = i_n + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.) Kadangi $i_1 = \inf\{x_1, x_2, x_3, \ldots\} < j_1$, tai

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : i_1 \leqslant x_{n_1} < j_1.$$

Kadangi $i_{n_1+1} = \inf\{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, x_{n_1+3}, ...\} < j_{n_1+1}$, tai

$$\exists n_2 > n_1 : i_{n_1+1} \leqslant x_{n_2} < j_{n_1+1}.$$

Tęsdami toliau, gausime tokį sekos $\{x_n\}$ posekį $\{x_{n_k}\}$, kad

$$i_{n_{k-1}+1} \leqslant x_{n_k} < j_{n_{k-1}+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(Čia $n_0 := 1$.) Pereikime šioje nelygybėje prie ribos, kai $k \to \infty$. Kadangi kraštinių narių riba lygi i, tai (remiantis „DPP“) ir $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = i$, t.y. skaičius i yra sekos $\{x_n\}$ dalinė riba.

Dar reikia įsitikinti, kad skaičius i yra *mažiausia* sekos $\{x_n\}$ dalinė riba. Tam imkime bet kokį sekos $\{x_n\}$ posekį $\{x_{n_k}\}$, kuris turi ribą. Tada, perėję prie ribos nelygybėje $x_{n_k} \geqslant i_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, gauname $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \geqslant i$, t.y. bet kuri sekos $\{x_n\}$ dalinė riba yra ne mažesnė už i.

2 *atvejis*: $i = +\infty$. Tada $x_n \geqslant i_n \to i = +\infty$, $n \to \infty$. Todėl ir $x_n \to +\infty = i$, $n \to \infty$ (2.19.d teiginys). Taigi vienintelė (ir mažiausia) sekos dalinė riba yra lygi $i = +\infty$. △

2.22. Pavyzdžiai. 1) $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Kadangi

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = 1 \quad \text{ir} \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = -1,$$

tai seka turi dvi dalines ribas, lygias 1 ir -1. (Kitų dalinių ribų seka negali turėti, nes nurodyti posekiai – $\{x_{2k}\}$ ir $\{x_{2k+1}\}$ – „išsemia“ visą seką $\{x_n\}$.) Iš čia $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$ ir $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -1$.

2) $x_n = (-1)^n n$, $n \in \mathbb{N}$. Analogiškai $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$.

3) $x_n = n^{(-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$.

2.23. Išvada. *Seka* $\{x_n\}$ *turi ribą tada ir tik tada, kai* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. *Tokiu atveju*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Įrodymas. „$\Longrightarrow$“. Jei egzistuoja $x := \lim_{n\to\infty} x_n$, tai seka turi tik vieną dalinę ribą x. Todėl, remiantis 2.21 teiginiu, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = x$.

„$\Longleftarrow$“. Pažymėkime $x := \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. Naudodami ankstesnius pažymėjimus, turime nelygybę

$$i_n \leqslant x_n \leqslant s_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kadangi pagal prielaidą $i_n \to x$ ir $s_n \to x$, tai, remiantis „DPP“, ir $x_n \to x$. △