Matematinės analizės kursas

Funkcijos riba, išvestinė ir neapibrėžtinis integralas

Arūnas Grigelionis

1999 m. spalio 4 d.

Turinys

Įvadas

Trečiojo tūkstantmečio akivaizdoje informacijos srautas tampa nesuvaldomu be kompiuterio pagalbos. Priklausomai nuo informacijos pobūdžio, jai analizuoti naudojami įvairiausi kompiuterinių programų paketai. Jų įsisavinimui būtinas bent minimalus vartotojo matematinis pasiruošimas.

Šio kurso objektas – vieno kintamojo funkcijos tyrimas ir su tuo tampriai susijusios tolydumo, išvestinės, integralo, eilutės sąvokos. Visa tai talpinama po bendru *matematinės analizės* stogu.

Inžinerinės informatikos specialybės mokymo programoje matematinei analizei yra skiriami trys semestrai. Šį paskaitų konspektą paruošė Matematinės statistikos katedros dėstytojas A. Grigelionis.

Trumpas literatūros sąrašas:

1. Fichtengolcas G. Matematinės analizės pagrindai. 1-as ir 2-as tomai. Vilnius: Mintis, 1965, 422 ir 452 psl.

2. Iljinas V., Pozniakas E. Matematinės analizės pagrindai. 1-as ir 2-as tomai. Vilnius: Mokslas, 1981, 520 ir 402 psl.

3. Kabaila V. Matematinė analizė. 1-oji ir 2-oji dalys. Vilnius: Mokslas, 1983, 408 psl.; 1986, 482 psl.

4. Kubilius J. Realaus kintamojo funkcijų teorija. Vilnius: Mintis, 1970, 284 psl.

5. Misevičius E. Matematinė analizė. 1-a dalis. Vilnius: TEV, 1998, 357 psl.

6. Pekarskas V. Diferencialinis ir integralinis skaičiavimas. 1-a dalis. Kaunas, Technologija, 1996, 387 psl.

7. Rumšas P. Trumpas aukštosios matematikos kursas. Vilnius, Mokslas, 1976, 559 psl.

Skyrius 1

Skaičiai

1.1 Natūralieji skaičiai

Jau nuo mažens mes susipažįstame su skaičiais $1, 2, 3, 4, 5$ ir t.t. Pradinėse klasėse išmokstame sudėti, dauginti skaičius, atimti iš didesnio mažesnį, dalinti, jei „dalinasi". Tokių skaičių visuma vadinama *natūraliųjų skaičių aibe* ir žymima raide $\mathbb{N}$.

Tegu a, b, c — bet kokie trys natūralieji skaičiai. Žemiau išvardinamos gerai žinomos svarbiausios veiksmų su natūraliaisiais skaičiais savybės.

Sudėtis:

S1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (sudėties asociatyvumas);

S2) $a + b = b + a$ (sudėties komutatyvumas);

S3) skaičius 0, vadinamas *nuliu*, ypatingas tuo, kad $a + 0 = a$ (kaip taisyklė, pats nulis nepriskiriamas prie natūraliųjų skaičių, tačiau tai tik susitarimo reikalas);

Daugyba:

D1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (daugybos asociatyvumas);

D2) $a \cdot b = b \cdot a$ (daugybos komutatyvumas);

D3) natūralusis skaičius *vienetas*, žymimas 1, ypatingas tuo, kad $a \cdot 1 = a$;

D4) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (daugybos distributyvumas);

Tvarkos ryšio savybės:

T1) $a \leq a$;

T2) jei $a \leq b$ ir $b \leq c$, tai $a \leq c$ (tranzityvumas);

T3) jei $a \leq b$ ir $b \leq a$, tai $a = b$ (antisimetriškumas);

T4) arba $a \leq b$, arba $b \leq a$;

T5) jei $a \leq b$, tai $a + c \leq b + c$;

T6) jei $0 \leq a, 0 \leq b$, tai $0 \leq a \cdot b$.

Įvairioms reikmėms yra naudojamos įvairios skaičiavimo sistemos. Paprastai vartojama dešimtainė skaičiavimo sistema, kurioje kiekvienas natūralusis skaičius užrašomas dešimties skaitmenų $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ pagalba.

Kompiuterių moksle yra naudojama dvejetainė sistema, kurioje kiekvienas natūralusis skaičius užrašomas nulių ir vienetų pagalba. Pvz., skaičius 5 dešimtainėje sistemoje užrašomas kaip skaičius 101 dvejetainėje sistemoje. Taipogi yra vartojamos aštuntainė ir šešioliktainė skaičiavimo sistemos.

1.2 Sveikieji skaičiai

Bendru atveju lygtis

$$a + x = b$$

yra neišsprendžiama natūraliųjų skaičių aibėje $\mathbb{N}$. Kitaip sakant, natūraliesiems a ir b gali neatsirasti tokio natūraliojo skaičiaus x, kad būtų teisinga ši lygybė. Tuo tarpu tokį paprastą uždavinį tenka spręsti kas dieną. Norint kad jis visada turėtų sprendinį, natūraliųjų skaičių aibė "išplečiama" iki *sveikųjų* skaičių aibės.
Sveikųjų skaičių aibę žymėsime $\mathbb{Z}$ raide.

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\} = \{a \mid a = m - n, m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Sveikieji skaičiai, kaip ir natūralieji, pasižymi tomis pačiomis sudėties, daugybos, tvarkos savybėmis S1) - S3), D1) - D4) bei T1) - T6).
Be to, jie turi ir naują savybę, reikalingą, norint išspręsti lygtį:

Pav. 1.1: Sveikųjų skaičių vaizdavimas tiesėje

S4) kiekvienam $a \in \mathbb{Z}$ yra toks skaičius $b \in \mathbb{Z}$, kad $a + b = 0$.

Žymima $b := -a$ ir sakoma, kad sveikasis skaičius turi sau *priešingą*.

1.3 Racionalieji skaičiai

Sveikųjų skaičių nepakanka, sprendžiant lygtį

$$a \cdot x = c.$$

Tam tikslui pasiekti, tenka išplėsti sveikųjų skaičių aibę iki *racionaliųjų* skaičių aibės $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}.$$

Lyginant su sveikaisiais skaičiais, racionalieji turi naują savybę:

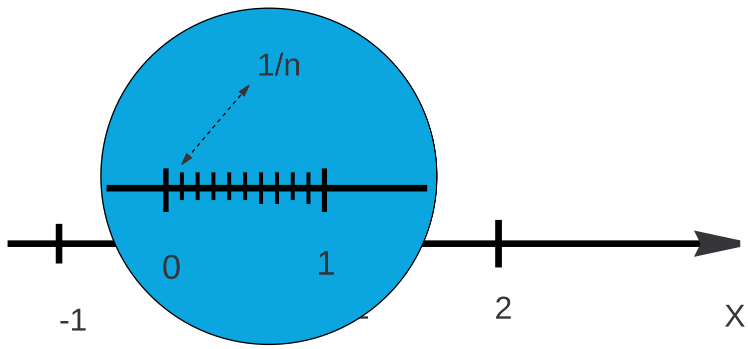
D5) kiekvienam nelygiam nuliui racionaliajam skaičiui a, egzistuoja "antrininkas" — racionalusis skaičius b toks, kad $a \cdot b = 1$.

Trumpesnis užrašas: $\forall a \in \mathbb{Q}, a \neq 0, \exists b \in \mathbb{Q} : a \cdot b = 1$.

Sakoma, kad b yra *atvirkštinis* skaičiui a. Žymima $b := a^{-1}$.
Racionaliuosius skaičius patogu užrašyti dešimtainės trupmenos pagalba. Galimi du atvejai: arba dešimtainė trupmena bus baigtinė (t.y. po kablelio bus tik baigtinis nenulinių skaitmenų skaičius), arba trupmena bus begalinė, tačiau periodinė.

Du pavyzdžiai:

1. $3/8 = 0.375$.
2. $2/7 = 0.2857142857142... = 0.(285714)$.



Pav. 1.2: Racionaliųjų skaičių vaizdavimas tiesėje

1.3.1 Racionaliųjų skaičių numeravimas

Visus teigiamus racionaliuosius skaičius galima išvardinti vienos sekos pagalba:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$$

Skaičius $\frac{m}{n}$ šioje sekoje turės numerį

$$1/2 \cdot (m+n-1) \cdot (m+n-2) + n.$$

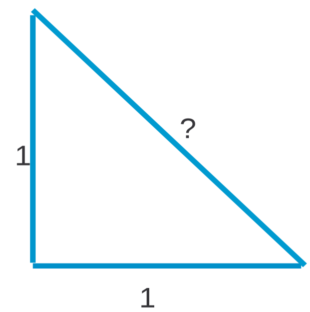
Taigi, kiekvienam teigiamam racionaliajam skaičiui yra priskiriamas konkretus numeris. Pastebėsime, kad siūlomoje skaičių sekoje kiekvienas racionalusis skaičius sutinkamas be galo daug kartų . Galima sugalvoti kitą numeravimo algoritmą, neturintį šio trūkumo.

Sakoma, kad racionaliųjų skaičių aibė yra *skaiti*.

1.3.2 Racionaliųjų skaičių vaizdavimas tiesėje

Norint pažymėti trupmeną $1/n, n \in \mathbb{N}$, pradinė vienetinė atkarpa dalijama į n lygių dalių ir imamas pirmosios iš gautų atkarpėlių dešinysis galas (žr. piešinį 1.2, kur $n = 10$).

Tada skaičiaus m/n vaizdas gaunamas atkarpos, kurios galai 0 ir $1/n$, pagalba, atidėjus pastarąją m kartų.



Pav. 1.3: Koks įžambinės ilgis?

1.4 Realieji skaičiai

1.4.1 Iracionalieji skaičiai

Norint išspręsti kvadratinę lygtį

$$x^2 = 2,$$

racionaliųjų skaičių nepakanka, t.y. nėra nė vieno racionaliojo skaičiaus x, kuris būtų šios lygties sprendinys.

Iš tiesų, jeigu toks skaičius atsirastų, tai jį galima būtų užrašyti trupmenos

$$x = m/n$$

pagalba, kur m ir n - tarpusavyje nesiprastinantys sveikieji skaičiai.

Pakėlę abi paskutinės lygybės puses kvadratu ir įstatę gautąją x^2 išraišką į pradinę lygtį, turėtume, kad $2 = m^2/n^2$, arba $m^2 = 2 \cdot n^2$. Bet tada m^2, o tuo pačiu ir pats m, būtų lyginiai skaičiai.

Tačiau, jeigu m dalinasi iš 2, tai m^2 turi dalintis iš $2 \cdot 2 = 4$. Tokiu atveju skaičius n^2, kuris yra lygus $m^2/2$, turi dalintis iš 2, o tai reikštų, kad ir n dalinasi iš dviejų.

Taigi, jei pradinė lygtis turėtų racionalųjį sprendinį, skaičiai m ir n abu būtų lyginiai. Bet mes juk darėme prielaidą , kad m ir n tarpusavyje nesiprastina.

Lygtis $x^2 = 2$ turi paprastą geometrinę prasmę: jos sprendinys x, remiantis Pitagoro teorema, yra stataus trikampio, pavaizduoto piešinyje 1.3, įžambinės ilgis. Įsitikinome, kad šis ilgis nėra racionalusis skaičius.

1.4.2 Realieji skaičiai

Skaičiai $\sqrt{2}, \pi$, natūraliojo logaritmo pagrindas — skaičius e yra iracionaliųjų skaičių pavyzdžiai. *Realiųjų* skaičių aibė žymima raide $\mathbb{R}$ ir apima tiek racionaliuosius, tiek iracionaliuosius skaičius. Ji turi visas aukščiau minėtas skaičių veiksmų ir tvarkos savybes S1)-S4), D1)-D5), T1)-T6).

Kiekvienas realusis skaičius gali būti užrašytas dešimtainės (bendru atveju, begalinės) trupmenos

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...,$$

pavidalu. Kaip jau buvo minėta anksčiau, baigtinės ir periodinės trupmenos reiškia racionaliuosius skaičius. Baigtinę trupmeną, pratęsus trupmeninę jos dalį begaliniu nulių skaičiumi, galima interpretuoti kaip periodinę. Neperiodinėmis dešimtainėmis trupmenomis yra užrašomi iracionalieji skaičiai.

Iracionaliojo skaičiaus pavyzdys:

$$a = 0, 123456789101112... \, .$$

Jis konstruojamas, vardijant po kablelio natūraliuosius skaičius jų didėjimo tvarka. Ši dešimtainė trupmena nėra periodinė.

Kiekviena geometrinė atkarpa turi ilgį, kuris nusakomas dešimtaine trupmena. Iš kitos pusės, kiekvieną dešimtainę trupmeną skaičių tiesėje atitinka "sava" atkarpa, prasidedanti nulio taške. Su šiuo teiginiu susijusi taip vadinama aibės $\mathbb{R}$ *tolydumo* savybė:

P) jei A ir B yra netušti aibės $\mathbb{R}$ poaibiai tokie, kad

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = \mathbb{R},$$

čia "$\cap$" reiškia aibių sankirtą, o "$\cup$" — aibių junginį, ir $a \le b$ visiems $a \in A$ ir $b \in B$, tai

arba aibėje A yra didžiausias elementas $a_{\max}$, t.y. toks, kad

$$a \le a_{\max} \quad \text{visiems} \quad a \in A,$$

arba aibėje B yra mažiausias elementas $b \le b_{\min}$ visiems $b \in B$.

Kas atsitiktų, jeigu sąlygos P) formulavime aibę $\mathbb{R}$ visur pakeisti aibe $\mathbb{Q}$?

Pažymėkime $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 < 2\}$ ir $B = \{b \in \mathbb{Q} \mid b^2 > 2\}$.
Tada

$$A \cup B = \mathbb{Q}, A \cap B = \emptyset$$

ir

$$a \leq b$$

visiems $a \in A$ ir $b \in B$.

Tačiau racionaliųjų skaičių tarpe aibė A neturi didžiausiojo, o aibė B — mažiausiojo elemento. Tokiu būdu, racionaliųjų skaičių aibė tolydumo savybės neturi.

1.4.3 Realiojo skaičiaus aproksimacija racionaliaisiais skaičiais

Neneigiamą realųjį skaičių

$$a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

galima priartinti racionaliųjų skaičių

$$a_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n \text{ ir } b_n = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n + \tfrac{1}{10^n}$$

pagalba.
Iš tiesų,

$$a_n \leq a \leq b_n$$

ir

$$a - a_n \leq \tfrac{1}{10^n}, \quad b_n - a \leq \tfrac{1}{10^n}.$$

Kai numeris n didėja, skirtumai tarp skaičiaus a ir jo priartinimų a_n, b_n nyksta.
Jei realusis skaičius neigiamas, t.y.

$$a = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...,$$

jį galima priartinti racionaliųjų skaičių

$$a_n = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n - \tfrac{1}{10^n}, b_n = -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$$

pagalba.

Pasinaudojant realiojo skaičiaus dešimtainiu priartinimu, nesunku pastebėti įdomią savybę:

Teiginys 1 .

Tegu a *ir* b, $a < b$ *— du realieji skaičiai. Tada būtinai atsiras toks racionalusis skaičius* r, *kad* $a < r < b$ *(automatiškai, tokių* r *bus be galo daug).*

Skyrius 2

Sekos

2.1 Svarbios realiųjų skaičių aibės

1. Išplėstoji realiųjų skaičių aibė $\bar{\mathbb{R}}$.

Tai realiųjų skaičių aibė su prijungtais papildomais dviem elementais, kurie žymimi $-\infty$ ir ∞ ir tenkina sąlygas:
a) $-\infty < a < \infty, \forall a \in \mathbb{R}$.
b) $a + \infty = +\infty, \quad a - \infty = -\infty, \quad \frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$ visiems $a \in \mathbb{R}$.
c) $a \cdot (+\infty) = +\infty, \quad a \cdot (-\infty) = -\infty,$ jei $a \in \mathbb{R}, \quad a > 0$
ir
$a \cdot (+\infty) = -\infty, \quad a \cdot (-\infty) = \infty,$
jei $a \in \mathbb{R}, a < 0$.

2. Intervalai.

$(a, b) := \{x \mid a < x < b\}$ — *atviras* intervalas;
$[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$ — *uždaras* intervalas (*segmentas*);
$(a, b] := \{x \mid a < x \leq b\}, \quad [a, b) := \{x \mid a \leq x < b\}$ — *pusiau atviri* intervalai.

Skaičius $b - a$ vadinamas intervalo *ilgiu*. Jei $a = -\infty$, arba jei $b = \infty$, sakoma, kad intervalas *begalinis*.

Priešingu atveju intervalas vadinamas *baigtiniu*.

Pastaba. Sandaugos $0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty)$, veiksmai $(\infty - \infty), (-\infty + \infty), (\infty : \infty)$ nėra apibrėžiami.

Pažymėjimas. Tegu $x \in \mathbb{R}$. Neneigiamas skaičius

$|x| := \begin{cases} x, & \text{jei} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{jei} \quad x < 0 \end{cases}$ yra vadinamas *x'o moduliu* arba *absoliučiuoju didumu*.

Geometriškai $|a - b|$ reiškia atstumą tarp taškų, žyminčių skaičius a ir b.

Tegu $\varepsilon > 0$. Skaičiaus a ε*– aplinka* vadinamas intervalas $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, t.y. aibė

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

2.2 Skaičių aibės rėžiai

Apibrėžimas 1 . *Sakysime, kad realiųjų skaičių aibė $A \subset \mathbb{R}$ aprėžta iš viršaus, jei atsiras realusis skaičius c, kuris yra nemažesnis už bet kurį aibės A elementą. Skaičius c vadinamas aibės A viršutiniu rėžiu.*

Pavyzdys. $A = [0, 1]$. Bet koks skaičius $c \geq 1$ bus aibės A viršutinis rėžis.

Apibrėžimas 2 . *Aibė $A \subset \mathbb{R}$ vadinama aprėžta iš apačios, jei $\exists c \in \mathbb{R}$ toks, kad $c \leq a$ visiems $a \in A$. Skaičius c vadinamas aibės A apatiniu rėžiu.*

Apibrėžimas 3 . *Aibė $A \subset \mathbb{R}$ vadinama aprėžta, jei ji aprėžta ir iš viršaus, ir iš apačios.*

Pavyzdžiai.

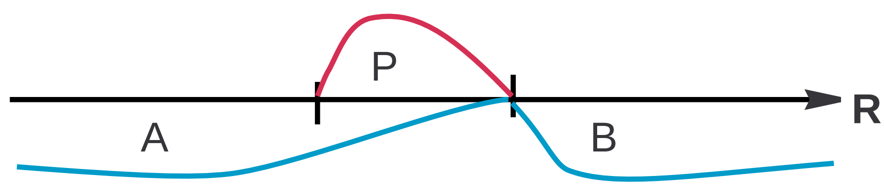
1. $A = [0, 1]$, $A = (0, 1)$ — aprėžtos aibės.
2. $A = \{a \mid a \leq 0\}$ — aprėžta iš viršaus.

Atkreipsime dėmesį, jei skaičius c yra aibės A viršutinis rėžis, tai visi skaičiai d, didesni už c, taip pat bus aibės A viršutiniais rėžiais.

Apibrėžimas 4 . *Sakoma, kad $c \in \mathbb{R}$ yra tikslusis viršutinis aibės A rėžis, jeigu c yra viršutinis aibės A rėžis ir $c \leq d$ kiekvienam aibės A viršutiniam rėžiui d.*

Žymima, $c = \sup A$.

Analogiškai apibrėžiamas tikslusis apatinis aibės A rėžis. Jis yra žymimas $\inf A$.



Pav. 2.1: Iliustracija teoremai apie tikslųjį viršutinį aibės rėžį.

Pavyzdys. $A = [0, 1]$, arba $(0, 1)$. Čia abiem atvejais $\sup A = 1, \inf A = 0.$

Pastaba. Kaip matyti iš pavyzdžio, tikslusis viršutinis (apatinis) rėžis gali priklausyti aibei A arba nepriklausyti jai.

Apibrėžimas 5 . *Tuo atveju , kai tikslusis viršutinis aibės A rėžis $\sup A$ priklauso pačiai aibei A, jis dar žymimas $\max A$;*

jei tikslusis apatinis rėžis priklauso pačiai aibei, tai vietoje $\inf A$ rašoma dar $\min A$.

Teorema 1 (Aibės tiksliojo rėžio egzistavimas). *Jei netuščia aibė $P \subset \mathbb{R}$ yra aprėžta iš viršaus, tai egzistuoja $\sup P$; jei tokia aibė aprėžta iš apačios, tai egzistuoja $\inf P$.*

Įrodymas:

Pagal apibrėžimą, aprėžta iš viršaus aibė P turi viršutinį rėžį. Raide B pažymėkime aibę visų aibės P viršutinių rėžių (žr. iliustraciją 2.1).

Galimi du atvejai:

1. $B \cap P \neq \emptyset$, t.y. aibės B ir P turi bendrų elementų. Tada aibė $B \cap P$ turės lygiai vieną elementą c, kuris ir bus aibės P tikslus viršutinis rėžis (jei būtų $c_1, c_2 \in B \cap P$, tai pagal šių aibių prasmę turėtume $c_1 \leq c_2$ ir $c_2 \leq c_1$ vienu metu, t.y. $c_1 = c_2$).

2. $B \cap P = \emptyset$, t.y. aibės B ir P neturi bendrų elementų. Tada aibė $A = R \setminus B$ neturi didžiausio skaičiaus $\max A$ (priešingu atveju jis būtų aibės P viršutinis rėžis ir priklausytų aibei $B \cap P$). Pagal realiųjų skaičių tolydumo aksiomą, aibėje B turi būti mažiausias skaičius, kuris ir bus aibės P tikslusis viršutinis rėžis.

Antroji teoremos dalis įrodoma analogiškai.

2.3 Skaičių sekos ribos sąvoka. Konverguojanti seka

Formaliai į skaičių seką galima žiūrėti kaip į funkciją, kuri apibrėžta natūraliųjų skaičių aibėje, o reikšmes įgyja realiųjų skaičių aibėje.

Rašant seką, argumentas figūruoja kaip indeksas:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

Dar žymima $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, arba $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Kartais numeracijai naudojama ir sveikųjų skaičių aibė. Tada žymima $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, arba $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Galimas ir kitokių aibių panaudojimas sekos elementų numeravimui.

Aritmetinė bei geometrinė progresijos yra sekų pavyzdžiai.

Pavyzdys. Seka $1, 2, 4, 8, 16, ...2^n, ...$ yra geometrinė progresija, kurios pirmasis narys lygus 1, 2-asis narys lygus 2, trečias — 4, o n-tasis narys lygus 2^{n-1}.

Dvi sekas galima sudėti, dauginti, atimti panariui, tokiu būdu gaunant naujas sekas.

Apibrėžimas 6 . *Sakoma, kad:*

seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *yra aprėžta iš viršaus, jei bus toks skaičius* M, *kad* $a_n \leq M$ *visiems natūraliesiems* $n \in \mathbb{N}$*;*

seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *yra aprėžta iš apačios, jei bus toks skaičius* M, *kad* $a_n \geq M$ *visiems natūraliesiems* $n \in \mathbb{N}$*;*

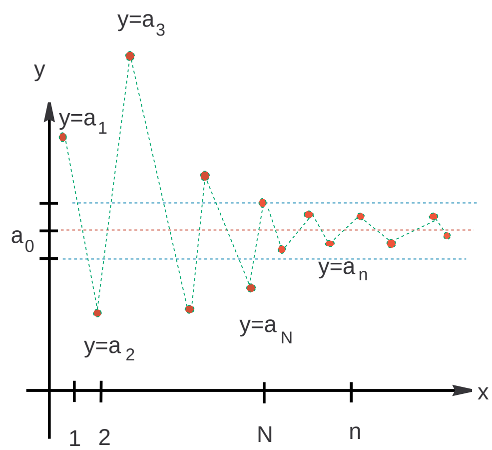
seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *yra aprėžta, jei bus toks skaičius* M, *kad* $|a_n| \leq M$ *visiems natūraliesiems* $n \in \mathbb{N}$*;*

Akivaizdu, kad seka bus aprėžta (aprėžta iš viršaus, aprėžta iš apačios) tada ir tik tada, kai bus aprėžta (aprėžta iš viršaus, aprėžta iš apačios) jos reikšmių aibė.

Pavyzdžiai:

1. Seka $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$, sudaryta iš natūraliųjų skaičių aibės, aprėžta iš apačios (kad ir vienetu).

2. Seka $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ aprėžta skaičiais 0 ir 1.



Pav. 2.2: Seka konverguoja...

Apibrėžimas 7 . *Sakoma, kad realiųjų skaičių seka* $\{a_n\}_{n\in N}$ *turi ribą* $a_0 \in \mathbb{R}$ *, jei kiekvienam* $\varepsilon > 0$ *atsiras toks numeris* N*, kad visiems numeriams* $n > N$ *bus* $|a_n - a_0| < \varepsilon$*.*

Tada skaičius a_0 *yra vadinamas sekos riba ir žymimas* $a_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$*, arba* $a_n \to a_0$*. Dar tokiu atveju sakoma, kad seka konverguoja.*

Teorema 2 . *Tegu* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— realiųjų skaičių seka.*

Tada

a) seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konverguoja į* $a_0 \in \mathbb{R}$ *tada ir tik tada, kai kiekvienam* $\varepsilon > 0$ *visi sekos nariai, išskyrus baigtinį jų skaičių, patenka į intervalą* $(a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$*;*

b) jei seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konverguoja, tai jos riba yra vienintelė;*

c) jei seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *konverguoja, tai ji yra aprėžta.*

Įrodymas:

a) jei seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguoja į a_0, tai pagal apibrėžimą, kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja numeris $N \in \mathbb{N}$ toks, kad, pradedant nuo sekančio po jo, $|a_n - a_0| < \varepsilon$ visiems n. Bet ši nelygybė reiškia, kad $a_n \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$ visiems natūraliesiems n, išskyrus jų baigtinį skaičių.

Iš kitos pusės, tegu kiekvienam $\varepsilon > 0$ visi sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nariai, išskyrus sekos pradžią, priklauso intervalui $a_n \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$. Raide N pažymėkime išskirtųjų pradinių sekos narių skaičių (priklausantį nuo ε). Tada visiems $n > N$ galios $a_n \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$, arba $|a_n - a_0| < \varepsilon$, o tai reiškia sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergavimą į skaičių a_0.

b) Tarkime, kad seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ turi dvi ribas $a_0^{'}$ ir $a_0^{''}$. Pasirenkame bet kokį $\varepsilon > 0$. Egzistuoja $N^{'}, N^{''} \in \mathbb{N}$ tokie, kad jei $n > N^{'}$, tai $\left|a_n - a_0^{'}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ ir jei $n > N^{''}$, tai $\left|a_n - a_0^{''}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tada, kai numeris $n > \max\left\{N^{'}, N^{''}\right\}$, bus

$\left|a_0^{'} - a_0^{''}\right| = \left|\left(a_0^{'} - a_n\right) + \left(a_n - a_0^{''}\right)\right| \leq \left|a_n - a_0^{'}\right| + \left|a_n - a_0^{''}\right| = \varepsilon.$

Kadangi ε gali b$\bar{\text{u}}$ti kiek norima mažas, turi b$\bar{\text{u}}$ti$\left|a_0^{'} - a_0^{''}\right| = 0,$ o tai reiškia, kad $a_0^{'} = a_0^{''}$.

c) Tegu $a_n \to a_0$. Tada atsiras toks $N \in \mathbb{N}$, kad visiems $n > N$ bus teisinga nelygybė $|a_n - a_0| < 1$. Pažymėkime

$M = \max\{1, |a_1 - a_0|, |a_2 - a_0|, ..., |a_N - a_0|\}.$

Tada $|a_n - a_0| < M$ visiems sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nariams.

Bet

$|a_n| - |a_0| \leq |a_n - a_0|$,

todėl

$|a_n| < M + |a_0|$

visiems $N \in \mathbb{N}$, o tai ir reiškia, kad seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ yra aprėžta.

Teorema 3 . *Tegu* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— konverguojančios realiųjų skaičių sekos ir* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0$.

Tada:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a_0 + b_0$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a_0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a_0 \cdot b_0$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_0}$, *jei* $a_n \neq 0, n = 0, 1, 2, ...$

Įrodymas:

a) Kadangi sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguoja, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja nat$\bar{\text{u}}$ralieji ska$\check{\text{r}}$iai N_1, N_2 tokie, kad:

visiems $n > N_1$ $|a_n - a_0| < \frac{\varepsilon}{2}$,

o visiems $n > N_2$ $|b_n - b_0| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Todėl, jei $N = \max\{N_1, N_2\}$, tai kai $n > N$,

$|(a_n + b_n) - (a_0 + b_0)| = |(a_n - a_0) + (b_n - b_0)| \leq |a_n - a_0| + |b_n - b_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Pagal apibrėžimą tai ir reiškia, kad

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a_0 + b_0.$

b) pamėginkite įrodyti patys.

c) visų pirma, galima pastebėti, kad $a_n \cdot b_n - a_0 \cdot b_0 = (a_n - a_0)(b_n - b_0) + a_0 (b_n - b_0) + b_0 (a_n - a_0)\,.$

Antra, kadangi sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguoja, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja natūralieji skaičiai N_1, N_2 tokie, kad

kai $n > N_1$, bus $|a_n - a_0| < \sqrt{\varepsilon}$,

o kai $n > N_2$, bus $|b_n - b_0| < \sqrt{\varepsilon}$.

Tegu $N = \max\{N_1, N_2\}$. Jei $n > N$, tai

$|(a_n - a_0)(b_n - b_0)| = |a_n - a_0| \cdot |b_n - b_0| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon,$

arba $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_0)(b_n - b_0) = 0.$

Todėl, pasinaudodami savybėmis a) ir b) , turėsime, kad

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n - a_0 \cdot b_0) = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_0)(b_n - b_0) +$

$+a_0 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - b_0) + b_0 \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_0) = 0 + a_0 \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_0\right) + b_0 \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_0\right) = 0 + a_0 (b_0 - b_0) + b_0 (a_0 - a_0) = 0.$

Taigi,

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n - a_0 \cdot b_0) + \lim\limits_{n\to\infty} a_0 \cdot b_0 = a_0 \cdot b_0.$

d) Kadangi seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguoja, tai galima surasti tokį numerį N_1, kad, jeigu tiktai $n > N_1$, bus teisinga nelygybė

$$|a_n - a_0| < \frac{|a_0|}{2}.$$

Kadangi $|a_n - a_0| > |a_0| - |a_n|$, turime

$$|a_0| - |a_n| < \frac{|a_0|}{2},$$

arba

$$|a_n| > \frac{|a_0|}{2} \quad \text{visiems} \quad n > N_1.$$

Kita vertus, kadangi seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguoja, tai $\forall\varepsilon > 0$ atsiras toks numeris N_2, kad

$$|a_n - a_0| < \frac{|a_0^2|}{2} \cdot \varepsilon,$$

kai $n > N_2$.

Pažymėkime $N = \max\{N_1, N_2\}$. Tada visiems $n > N$

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0}\right| = \frac{|a_n - a_0|}{|a_n|\,|a_0|} < \frac{1}{|a_n|\,|a_0|} \cdot \frac{|a_0^2|}{2} \cdot \varepsilon < \frac{2}{|a_0|\,|a_0|} \cdot \frac{|a_0^2|}{2} \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

t.y. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_0}$.

Dar viena naudinga teorema.

Teorema 4 . *Tegu* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *- skaičių sekos, tokios, kad :*

1) $a_n \le b_n \le c_n$ *kiekvienam* $n \in \mathbb{N}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \in \mathbb{R}$.

Tada $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Kitaip sakant, jei seka yra "tarp" dviejų sekų, turinčių tą pačią ribą, tai ji konverguoja ir jos riba sutampa su ribojančių sekų riba.

Įrodymas:

Reikia įrodyti, kad $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Tegu $\varepsilon > 0$. Pasirenkame tokį numerį N, kad visiems $n > N$ būtų teisingos nelygybės $|a_n - a| < \varepsilon$ ir $|c_n - a| < \varepsilon$.

Tai yra įmanoma, kadangi pagal sąlygą sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ir $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ turi ribą a.

Parašytos nelygybės reiškia, kad

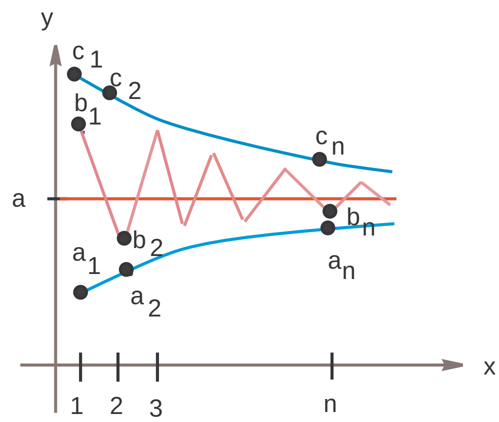
(1) $\quad -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$

ir

(2) $\quad -\varepsilon < c_n - a < \varepsilon$

visiems $n > N$.

Pagal teoremos sąlygą , $a_n \le b_n \le c_n$. Todėl,



Pav. 2.3: Sekos, "suspaustos" tarp dviejų sekų, teorema, kartais vadinama "policininkų principu".

(3) $\quad a_n - a \leq b_n - a \leq c_n - a.$

Iš nelygybių (1), (2), (3) seka, kad
$-\varepsilon < a_n - a < b_n - \varepsilon < c_n - a < \varepsilon$,
t.y. $-\varepsilon < b_n - a < \varepsilon$, o tai ekvivalentu nelygybei

$$|b_n - a| < \varepsilon$$

visiems $n > N$.

Taigi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, ką ir reikėjo įrodyti.

2.4 Monotoninės sekos

Apibrėžimas 8 . *Sakysime, kad skaičių seka* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*:*

a) monotoniškai didėjanti, jei $a_n \leq a_{n+1}$ *visiems* $n \in \mathbb{N}$*;*
b) monotoniškai mažėjanti, jei $a_n \geq a_{n+1}$ *visiems* $n \in \mathbb{N}$*.*

Visos tokios sekos vadinamos bendru monotoninių sekų vardu.

Pavyzdžiai:

1. $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — natūraliųjų skaičių seka yra monotoniškai didėjanti.

2. Sekos $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{-n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — monotoniškai mažėjančios.

3. *Pastovi* seka, t.y. seka, kurios nariai turi tą pačią skaitinę reikšmę, pagal mūsų apibrėžimą yra monotoniškai didėjanti ir mažėjanti vienu metu. Taigi, didėjimas ir mažėjimas suprantami ne griežtąja prasme.

4. Jei seka konverguoja, tai ji yra aprėžta (žr. ankstesniojo skyrelio pirmosios teoremos c) dalį). Tačiau atvirkščias teiginys nėra teisingas. Pavyzdžiui, seka $0, 1, 0, 1, 0, 1, ...$ — aprėžta, bet ribos neturi (kodėl ?).

Monotoninėms sekoms yra teisinga

Teorema 5 . *Jei monotoniškai didėjanti seka aprėžta iš viršaus, tai ji konverguoja. Atitinkamai, jei monotoniškai mažėjanti seka yra aprėžta iš apačios, tai ji konverguoja.*

Įrodymas:

Tegu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotoniškai didėjanti, aprėžta iš viršaus skaičių seka. Tada jos reikšmių aibė bus aprėžta iš viršaus ir ji turės tikslų viršutinį rėžį a_0 (žr. ankstesniojo skyrelio teoremą).
Kadangi a_0 — viršutinis rėžis, tai $a_n \leq a_0$ visiems $n \in \mathbb{N}$.
Kadangi a_0 — tikslus viršutinis rėžis, tai $\forall\varepsilon > 0$ intervalo $(a_0 - \varepsilon, a_0)$ viduje bus sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ elementų. Kadangi seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — monotoniškai didėjanti, paskutinis pastebėjimas reiškia, kad atsiras numeris N toks, kad $a_n \in (a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$ ir $|a_n - a_0| = a_n - a_0 \leq a_N - a_0 = |a_N - a_0| < \varepsilon$ visiems $n > N$, t.y. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$.

Monotoniškai mažėjančiai sekai įrodymas analogiškas (pamėginkite įrodyti).

2.5 Skaičius e

Pritaikysime monotoninių sekų teoremą sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergavimo tyrimui.
1. Seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — monotoniškai didėjanti.

Įrodymui panaudosime Niutono binomo formulę:

$$(a+b)^n =$$

$$= a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

kur

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

— binominiai koeficientai.

Tada

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + ...$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ...$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) ... \left(1 - \frac{n-1}{n}\right),$$

$$a_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + ...$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) ... \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Kadangi

$$1 - \frac{k}{n} < 1 - \frac{k}{n+1}, \quad 0 < k < n,$$

kiekvienas dėmuo a_n išraiškoje neviršys atitinkamo dėmens a_{n+1} išraiškoje; be to, a_{n+1} turi vienu teigiamu nariu daugiau.

Taigi $a_n < a_{n+1}$ t.y. seka $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monotoniškai didėja.

2. $a_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Iš tiesų, kadangi $\frac{1}{k!} \geq \frac{1}{2^{k-1}}, \forall k \in \mathbb{N}$, (ar iš tiesų taip yra?), tai

$$a_n \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

Tokiu būdu seka $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ monotoniškai didėja ir aprėžta iš viršaus skaičiumi 3.

3. Todėl pagal įrodytą teoremą egzistuoja sekos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ riba, kai $n \to \infty$, kurią žymėsime raide e:

$$e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Tai yra gerai žinomo skaičiaus e vienas iš apibrėžimo būdų.

Pastaba. Įrodymo metu gavome skaičiaus e įvertį:

$$2 < e < 3.$$

Galima įrodyti, kad skaičius e yra iracionalus ir

$$e = 2,71182818284....$$

2.6 Posekiai

Apibrėžimas 9 . *Tegu* $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ *— natūraliųjų skaičių (numerių) seka ir*

$$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < ...,$$

t.y. ši seka griežtai monotoniškai didėja.
Tada seka $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ *yra vadinama sekos* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *posekiu.*

Jei posekis konverguoja, tai jo ribą vadinsime sekos $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *daline riba.*

Pastaba. Nesunku parodyti, kad seka turi ribą tada ir tik tada, kai visi jos posekiai turi tą pačią ribą.

Pavyzdžiai.

1. Seka
$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{2n+1}, ...$$
yra sekos
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n}, ...$$
posekis.

Visų galimų šios sekos posekių riba yra 0 ir sutampa su sekos riba, kai $n \to \infty$.

2. Seka $1, 0, 1, 0, 1, ...$ ribos neturi, kadangi ji turi du posekius, kurių ribos yra skirtingos (suraskite juos).

Teorema 6 (Bolcano—Vejerštraso). *Kiekviena aprėžtoji seka turi konverguojantį posekį.*

Įrodymas:

Tegu $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — aprėžta seka. Tada atsiras segmentas $[b_1, c_1]$ toks, kad
$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in [b_1, c_1] .$$
Daliname šį segmentą į dvi lygias dalis. Kadangi seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ turi be galo daug narių, bent vienas iš naujųjų segmentų, kurį žymėsime
$$[b_2, c_2] ,$$
taip pat turi savyje be galo daug sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ narių.

Segmentą $[b_2, c_2]$ daliname dar pusiau ir $[b_3, c_3]$ žymėsime tą pusę, kuriai priklausys be galo daug sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ narių.

Dalinimo procesą tęsiame toliau. Gausime segmentų $[b_n, c_n]$ seką, kur
$$[b_{n+1}, c_{n+1}] \subset [b_n, c_n] .$$
Todėl segmentų galai sudarys dvi monotonines sekas: $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — didėjančią ir $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — mažėjančią.

Be to,
$$\lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) = 0,$$
nes dalinimo pusiau procesas tęsiamas be galo.

Sekos $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ir $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ yra aprėžtos, todėl pagal Bolcano - Vejerštraso teoremą jos konverguoja ir

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) + \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a_0.$$

Sukonstruosime dabar reikalaujamą sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posekį. Tam segmente $[b_1, c_1]$ pasirenkamas bet koks sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ elementas a_{n_1};

segmente $[b_2, c_2]$, kadangi jam priklauso be galo daug sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ narių, surandame kitą elementą a_{n_2} su numeriu $n_2 > n_1$ ir t.t.

Iš konstrukcijos matyti, kad

$$\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = a_0,$$

t.y. posekis $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ konverguoja.

Apibrėžimas 10 . *Sakysime, kad seka* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$*:*

a) neaprėžtai didėja , jei kiekvienam $A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ *toks, kad* $a_n > A$ *visiems* $n > N$.

b) neaprėžtai mažėja, jei kiekvienam $A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ *toks, kad* $a_n < -A$ *visiems* $n > N$.

a) atveju žymima

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

b) atveju žymima

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Tegu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ — bet kokia skaičių seka. Jeigu ji bus aprėžta, tai, kaip mes įrodėme, būtinai turės bent vieną dalinę ribą.

Galima įrodyti, kad aprėžtos sekos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dalinių ribų tarpe bus mažiausia dalinė riba ir didžiausia dalinė riba.

Apibrėžimas 11 . *Didžiausia sekos* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dalinė riba žymima* $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *ir vadinama sekos viršutine riba;*

mažiausia dalinė riba žymima $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ *ir vadinama apatine sekos* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *riba.*

Pastaba apie sekos konvergavimą performuluojama taip: seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguoja tada ir tik tada , kai

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n.$$

Bendru atveju, kai seka nebūtinai aprėžta, iš jos galima išskirti arba konverguojantį, arba neaprėžtai didėjantį posekį. Pastaruoju atveju žymėjimų $\overline{\lim}$ ir $\underline{\lim}$ panaudojimas išplečiamas , rašant

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

jei egzistuoja neaprėžtai didėjantis posekis, bei

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

jei egzistuoja neaprėžtai mažėjantis posekis.

2.7 Koši sekos

Apibrėžimas 12 . *Sakysime, kad seka $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ yra Koši seka, arba fundamentalioji seka, jei $\forall \varepsilon > 0$ egzistuoja numeris N toks, kad visiems $n, m > N$ yra teisinga nelygybė*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Teorema 7 (Sekos konvergavimo Koši kriterijus).
a) konverguojanti seka yra Koši seka;

ir atvirkščiai,

b) kiekviena Koši seka konverguoja.

Įrodymas:

a) Tegu $\varepsilon > 0$, o $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — Koši seka. Tada, pagal Koši sekos apibrėžimą, atsiras natūralusis skaičius N toks, kad visiems $n, m > N$ bus

$$|a_n - a_m| < \varepsilon,$$

arba

$$|a_n| = |a_n - a_m + a_m| \leq |a_n - a_m| < \varepsilon + |a_m|,$$

kai $m, n \in \mathbb{N}$.

Fiksuojame m. Tada sekos $a_{N+1}, a_{N+2}, ..., a_{N+k}, ...$ narių moduliai bus aprėžti skaičiumi $\varepsilon + |a_m|$.

Kita vertus, kadangi narių $a_1, a_2, ..., a_N$ yra N, t.y. baigtinis skaičius, tai tarp jų yra narys, kurio modulis bus didžiausias. Todėl, jei pažymėsime raide

$$A = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_N|, |a_m| + \varepsilon\},$$

visa seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bus aprėžta skaičiais $\pm A$ iš abiejų pusių. Bet tada, pagal Bolcano-Vejerštraso teoremą, ši seka turės konverguojantį posekį $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Tegu

$$a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}.$$

Įrodysime, kad skaičius a bus visos sekos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ riba.

Visų pirma, kadangi posekis konverguoja, tai kiekvienam $\varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N}$ toks, kad

$$\forall k > K \quad |a - a_{n_k}| < k.$$

Prisiminkime, kad mūsų seka yra Koši seka, todėl (žr. a) dalies įrodymo pradžią) tam pačiam ε yra toks $N \in \mathbb{N}$, kad kai n ir $n_k > N$ bus

$$|a_n - a_{n_k}| < \varepsilon,$$

ir

$$|a_n - a| \le |a_n - a_{n_k}| + |a - a_{n_k}| < 2\varepsilon,$$

o tai reiškia, kad seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguoja.

b) Tegu seka $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguoja ir jos riba

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Pasirenkame bet kokį $\varepsilon > 0$. Jam atsiras numeris $n \in \mathbb{N}$ toks, kad

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

jeigu tiktai $n > N$.

Kai $n, m > N$, tai

$$|a_n - a_m| \le |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon,$$

t.y. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bus Koši seka.

Skyrius 3

Funkcija ir funkcijos tolydumas

3.1 Funkcijos sąvoka

Funkcija $f : A \to B$ — tai taisyklė, kurios pagalba elementui $x \in A$ priskiriamas elementas $y \in B$. Rašoma

$$y = f(x).$$

Žymėjimai:

$D(f) \subset A$ — funkcijos f apibrėžimo sritis, t.y. aibė, kurios kiekvienam elementui x priskiriamas lygiai vienas aibės B elementas $f(x)$;

$R(f)$—funkcijos reikšmių sritis, t.y. aibė visų $f(x)$, kur $x \in D(f)$.

Realaus kintamojo funkcija vadinsime funkciją $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Tarp pastarųjų funkcijų išskiriama *elementariųjų* funkcijų klasė. Jai priklauso laipsninė, rodiklinė, logaritminė, trigonometrinės, atvirkštinės trigonometrinės funkcijos bei jų superpozicijos.

Dar keletas dažnai pasitaikančių funkcijų, kurios nevadinamos elementariosiomis:

1.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad x > 0 \\ 0, & \text{jei} \quad x = 0 \\ -1, & \text{jei} \quad x < 0. \end{cases}$$

Pažymėtina, kad $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$.

2. Dirichle funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{jei} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Šios funkcijos reikšmių aibė turi tik du elementus — 0 ir 1, t.y. $R(f) = \{0, 1\}$.

3. $f(x) = [x]$ — skaičiaus x sveikoji dalis, t.y. ne didesnis už x, jam artimiausias sveikasis skaičius. Šiuo atveju, $R(f) = \mathbb{Z}$.

4. $f(x) = \{x\}$ — skaičiaus x trupmeninė dalis : $\{x\} := x - [x]$. Čia $R(f) = [0, 1)$.

Praktiniuose uždaviniuose atsirandančios funkcijos vaizduojamos lentelių arba grafikų pagalba.

3.2 Funkcijos riba

Apibrėžimas 13 . *Sakysime, kad skaičius $b \in \mathbb{R}$ yra funkcijos f riba taške a, jei kiekvienai sekai $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tokiai, kad $x_n \neq a$ visiems n ir*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

išplaukia

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

Žymima

$$b := \lim_{x\to a} f(x).$$

Pavyzdžiai:

1. Tegu $f(x) = 1$ visiems $x \in \mathbb{R}$.

Ši funkcija turi ribą kiekvienam $a \in \mathbb{R}$.
Iš tiesų, tegu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$- skaičių seka tokia, kad $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
Tada

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

arba
$$\lim_{x\to a} f(x) = 1.$$

2. $f(x) = x$.

Šios funkcijos riba
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a,$$
t. y. sutampa su a kiekvienam $a \in \mathbb{R}$.

3. Funkcija, neturinti ribos nė viename taške.

Tai Dirichle funkcija. Norėdami tą parodyti, pastebėsime, kad kiekvienam skaičiui $a \in \mathbb{R}$ galima surasti racionaliųjų skaičių seką $\left\{x_n^{'}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ir iracionaliųjų skaičių seką $\left\{x_n^{''}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tokias, kad
$$\lim_{n\to\infty} x_n^{'} = \lim_{n\to\infty} x_n^{''} = a.$$
Tada
$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{'}\right) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{''}\right),$$
t. y. taške a Dirichle funkcija ribos neturi.

Teorema 8 . *Taške a funkcija f turi ne daugiau kaip vieną ribą* .

Įrodymas:

Tegu b_1, b_2 — funkcijos f ribos taške a. Tegu seka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguoja ir $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Tada
$$b_1 = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b_2,$$
kadangi seka gali turėti tik vieną ribą (žr. anksčiau įrodytą teoremą apie sekų ribų savybes).

Teorema 9 . *Tegu* $\lim_{x\to a} f(x) = A, \lim_{x\to a} g(x) = B$, *kur* $A, B \in \mathbb{R}$.

Tada:
a) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = A + B;$
b) $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B;$
c) $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B,$
jei $B \neq 0.$

Įrodymas:

a) Tegu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — bet kuri seka tokia, kad $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ir $x_n \neq a$, kur $n \in \mathbb{N}$. Tada

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{n\to\infty} [f(x_n) + g(x_n)] =$$

(pagal sekų sumos savybę)

$$= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = A + B.$$

b), c) tvirtinimų įrodymai panašūs į pastarajį.

Pastaba (kitas funkcijos ribos apibrėžimas). Sakoma, kad funkcija f turi ribą b taške $x = a$, jei kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja skaičius $\delta > 0$ toks, kad, jei

$$|x - a| < \delta,\ x \neq a,$$

tai

$$|f(x) - b| < \varepsilon, (\text{aišku}, \quad x \in D(f)).$$

Galima įrodyti, kad toks funkcijos ribos apibrėžimas yra ekvivalentus ankstesniajam.

Geometriškai naujas apibrėžimas reiškia, kad koks mažas bebūtų intervalas $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, visada atsiras intervalas $(a - \delta, a + \delta)$ su centru taške a toks, kad funkcija f tame intervale, išmetus iš jo tašką a, įgyja reikšmes tik iš intervalo $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Tai ir pateisina funkcijos ribos pavadinimą.

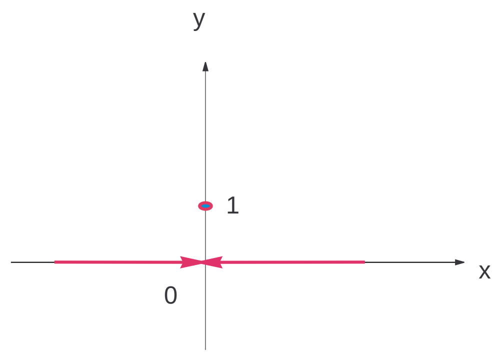
3.3 Funkcijos tolydumas

Jeigu funkcija f turi ribą b taške a, tai dar nereiškia, kad $f(a) = b$. Gali būti, kad funkcija f nėra apibrėžta taške a; gali būti, kad f apibrėžta taške a, bet $f(a) \neq b$.

Pavyzdys:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei} \quad x \neq 0 \\ 1, & \text{jei} \quad x = 0. \end{cases}$$

Funkcija f turi ribą taške $x = 0$ ir $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, bet $f(0) = 1$.



Pav. 3.1: Funkcija, turinti ribą trūkio taške.

Apibrėžimas 14 . *Sakysime, kad funkcija f yra tolydi taške $x = a,$ jei ji turi ribą tame taške, sutampančią su funkcijos reikšme, t. y. jei*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Pavyzdžiai:

1. $f(x) = x$ tolydi kiekviename taške $a \in \mathbb{R}$, kadangi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x = a = f(a)$.

2. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ nėra tolydi taške 0, nes $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ neegzistuoja.

3. Dėl tos pačios priežasties Dirichle funkcija nėra tolydi nei viename taške $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 10 (sudėtinės funkcijos tolydumas taške).

Tegu A, B, C — aibės $\mathbb{R}$ poaibiai (atskiru atveju, intervalai). Tegu $f : A \to B, g : B \to C$, o sudėtinė funkcija $h : A \to C$ apibrėžiama formule $h(x) = g(f(x))$.

Jei funkcija f yra tolydi taške a, o funkcija g yra tolydi taške $f(a)$, tai funkcija h bus tolydi taške a.

Įrodymas:

Tegu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ priklauso funkcijos f apibrėžimo sričiai ir $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Kadangi funkcija f tolydi taške a, tai

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a).$$

Kadangi funkcija g tolydi taške $f(a)$, tai

$$\lim_{n\to\infty} g\left(f\left(x_n\right)\right) = g\left(f\left(a\right)\right),$$

arba

$$\lim_{n\to\infty} h\left(x_n\right) = h\left(a\right),$$

ką ir reikėjo įrodyti.

Pastaba.

Kartais sakoma, kad funkcija $h : A \to C$ paskutinėje teoremoje yra funkcijų g ir f *kompozicija*, arba *superpozicija*.

Žymima $h = g \circ f$.

Apibrėžimas 15 . *Sakysime, kad funkcija* $f : (a, b) \to R$ *- tolydi intervale* (a, b)*, jei ji yra tolydi kiekviename intervalo* (a, b) *taške.*

Teorema 11 . *Tegu* f, g*— tolydžiosios intervale* (a, b) *funkcijos. Tada ir funkcijos* $f + g, f \cdot g, f \diagup g$ *bus tolydžios intervale* (a, b)*. Paskutiniu atveju reikalaujama, kad* $g\left(x\right) \neq 0$*, kai* $x \in (a, b)$.

Įrodymas:

Fiksuojame tašką $c \in (a, b)$. Remiantis dviejų funkcijų sumos ribos savybe (žr. ankstesnįjį skyrelį), galima rašyti

$$\lim_{x\to c}\left[f\left(x\right) + g\left(x\right)\right] = \lim_{x\to c} f\left(x\right) + \lim_{x\to c} g\left(x\right) =$$

(kadangi f ir g tolydžios taške c)

$$= f\left(c\right) + g\left(c\right) = \left(f + g\right)\left(c\right),$$

t.y. suma $f + g$ — tolydi funkcija taške c , o, kadangi taškas c bet koks, tai $f + g$ yra tolydi visame intervale (a, b). Funkcijų $f \cdot g$ ir $f \diagup g$ tolydumas įrodomas analogiškai.

3.4 Funkcijos trūkiai

Tegu funkcija f apibrėžta taško c aplinkoje, išskyrus nebent patį tašką. Jeigu funkcija f nėra tolydi taške c, tai sakoma, kad šiame taške funkcija f turi *trūkį*. Prieš klasifikuodami galimus funkcijos trūkius , apibrėšime funkcijos f ribą taške c iš dešinės ir iš kairės.

Apibrėžimas 16 . *Tegu funkcija f apibrėžta intervale (a, b) išskyrus galbūt tašką c. Tegu $a \leq c < b$. Funkcijos f riba taške c iš dešinės vadinsime skaičių d (su sąlyga, kad jis egzistuoja) tokį, kad visoms sekoms*

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (c, b), \lim_{n\to\infty} x_n = c,$$

būtų teisinga

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = d.$$

Žymima: $f(c+0) := d$, arba $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) := d$.

Tegu $a < c \leq b$. Funkcijos f riba taške c iš kairės vadinsime skaičių d tokį, kad visoms sekoms

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a, c), \lim_{n\to\infty} x_n = c,$$

būtų

$$\lim_{x\to c-0} f(x) := d\,(\neq \infty).$$

Žymima: $f(c-0)$, arba $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) := d\,(\neq \infty)$.

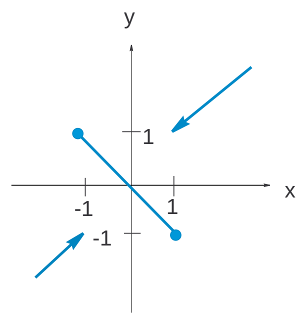
Kad funkcija f turėtų ribą taške c, būtina ir pakankama, kad

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c+0) = f(c-0).$$

3.4.1 Trūkių klasifikacija

Apibrėžimas 17 . *Tegu funkcija f apibrėžta intervale (c, b) išskyrus galbūt tašką c ir nėra tolydi taške c.*

Sakysime, kad funkcija taške c turi pirmosios rūšies trūkį, jei
$f(c+0) < \infty$, $f(c-0) < \infty$;



Pav. 3.2: Funkcija, kurios trūkiai yra pirmosios rūšies.

jei, priedo, $f(c+0) = f(c-0)$*, t.y. jei funkcija* f *turi ribą taške* c *(bet nėra apibrėžta jame), sakysime, kad trūkio taškas yra pašalinamas. Jei trūkis nėra pirmosios rūšies, tai sakoma, kad jis - antrosios rūšies trūkis.*

Pavyzdžiai:

1. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kai} \quad |x| > 1 \\ -x, & \text{kai} \quad |x| \leq 1. \end{cases}$$

bus tolydi kiekviename taške $x \neq \pm 1$. Taškuose $x = 1$ ir $x = -1$ ji turės pirmosios rūšies trūkį. Iš tiesų,
$f(-1-0) = -1, f(-1+0) = 1, f(1-0) = -1, f(1+0) = 1.$

2. Dirichle funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{kai} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

kiekviename taške c turės antrosios rūšies trūkį, kadangi riba nei iš kairės, nei iš dešinės neegzistuoja .

Tam pakanka surasti dvi x'ų sekas, konverguojančias į nulį, kurioms pritaikius funkciją f, gautume skirtingas ribas. Tegu $x_n' = \frac{1}{n}$, o $x_n'' = \frac{\sqrt{2}}{n}$.

Tada $\lim\limits_{n\to\infty} x_n' = \lim\limits_{n\to\infty} x_n'' = 0$,

bet

$\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{'}\right) = 1$, o $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(x_n^{"}\right) = 0$,
kadangi $x_n^{'}$ — racionalusis, o $x_n^{"}$ — iracionalusis skaičius.

3.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{kai} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{kai} \quad x = 0. \end{cases}$$

Ši funkcija tolydi visiems $x \neq 0$, nes kai $x = 0$ ji yra funkcijų (tolydžių kiekviename taške $x \neq 0$) $\sin y$ ir $y = \frac{1}{x}$ superpozicija.

Kai $x = 0$, funkcija turi antrosios rūšies trūkį. Norint tą parodyti, pakanka rasti dvi x'ų sekas, konverguojančias į 0, kad

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{'}\right) \neq \lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{"}\right).$$

Pvz., tegu $x_n^{'} = \frac{1}{2\pi n}, x_n^{"} = \frac{1}{\pi(2n+1/2)}$.
Tada

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{'} = \lim_{n\to\infty} x_n^{"} = 0, x_n^{'}, x_n^{"} > 0,$$

o

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{'}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin 2\pi n = 0, \lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{"}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(2\pi n + \pi/2\right) = 1.$$

3.5 Monotoninės funkcijos

Apibrėžimas 18 . *Sakoma, kad funkcija f monotoniškai didėja intervale (a, b), jei*

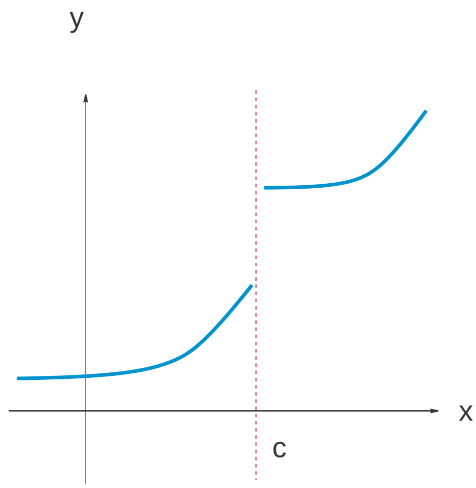
$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

funkcija f griežtai monotoniškai didėja, jei

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

funkcija f monotoniškai mažėja intervale (a, b), jei

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2);$$



Pav. 3.3: Monotoninė funkcija gali turėti tik pirmosios rūšies trūkius.

funkcija f griežtai monotoniškai mažėja intervale (a, b), jei

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

visiems $x_1, x_2 \in (a, b)$.

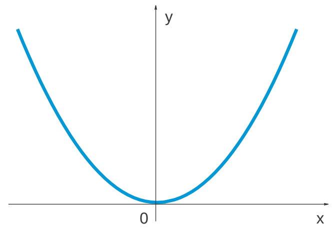
Monotoninės funkcijos pasižymi įdomiomis savybėmis, kurių, deja, mes neįrodinėsime.

Teorema 12 . *Monotoninė funkcija gali turėti tik pirmosios rūšies trūkius.*

Mums bus svarbi teorema apie monotoninės funkcijos atvirkštinę funkciją. Tegu funkcija f apibrėžta segmente $[a, b]$ ir įgyja reikšmes segmente $[\alpha, \beta]$. Tada taškui x iš $[a, b]$ yra priskiriamas taškas $f(x) \in [\alpha, \beta]$. Jei funkcija f pasižymi tuo, kad $f(x_1) \neq f(x_2)$, kai $x_1 \neq x_2$, galima apibrėžti naują funkciją f^{-1}, kuri taškui $f(x) \in [\alpha, \beta]$ priskiria tašką $x \in [a, b]$. Taigi, jei $y = f(x)$, tai $f^{-1}(y) = x$. Galima įrodyti, kad jei funkcija f — griežtai monotoninė, tai ir funkcija f^{-1} bus griežtai monotoninė. Priedo, jei f didėjanti, tai ir f^{-1} bus didėjanti funkcija.

Teorema 13 (apie funkciją, atvirkštinę griežtai monotoninei tolydžiajai funkcijai).

Tegu $f : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ *griežtai monotoninė ir tolydi funkcija ir* $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$. *Tada atvirkštinė funkcija* $f^{-1} : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *egzistuoja ir yra tolydi.*



Pav. 3.4: Parabolė

3.6 Keli funkcijų pavyzdžiai

Funkcija $f(x) = x^n, x \in \mathbb{N}$**.**

Funkcija apibrėžiama sandaugos $x^n = x \cdot x \cdot ..... \cdot x$ (n - kartų) pagalba. Jos apibrėžimo sritis

$$D(f) = \mathbb{R},$$

o kitimo sritis

$$R(f) = \{x | x \geq 0\},$$

kai n — lyginis ,
ir

$$R(f) = \mathbb{R},$$

kai n — nelyginis.

Pavyzdžiai.

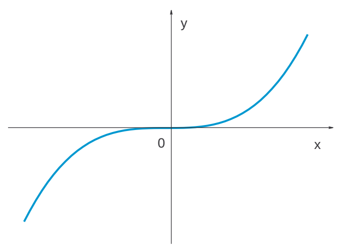
1. $f(x) = x^2$.
Šios funkcijos grafikas yra parabolė (pav. 3.4).

2. $f(x) = x^3$.
Šios funkcijos grafikas kartais vadinamas *kubine parabole* (pav. 3.5).

Funkcijos $f(x) = x^n$ **savybės:**

a) kiekvienam $x = a > 0$, segmentą $[0, a]$ funkcija f atvaizduoja į segmentą $[0, a^n]$.

b) funkcija $f(x) = x^n$ yra tolydi kiekviename taške $x \in \mathbb{R}$, nes yra tolydžiųjų funkcijų $g(x) = x$ sandauga;



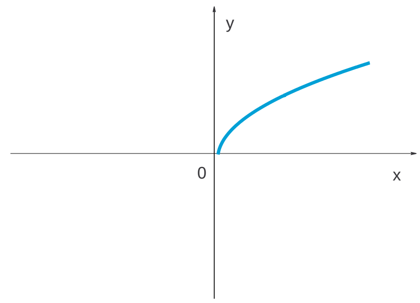
Pav. 3.5: "Kubinė parabolė"

c) $f(x) = x^n$ griežtai monotoniškai didėja segmente $[0, a]$, $a > 0$.

Iš tiesų, tegu $0 < x_1 < x_2$. Tada

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^n - x_1^n =$$

$$= (x_2 - x_1)\left(x_2^{n-1} + x_2^{n-2} \cdot x_1 + ... + x_2 \cdot x_1^{n-2} + x_1^{n-1}\right) > 0.$$



Pav. 3.6: Funkcija $f(x) = \sqrt{x}$.

Funkcija $f(x) = x^{\frac{m}{n}}, \quad m, n \in \mathbb{N}$**.**

Segmente $[0, a]$ griežtai monotoniškai didėjanti funkcija x^n turi atvirkštinę, taip pat griežtai monotoniškai didėjančią tolydžią funkciją (žr. skyrių apie monotonines funkcijas). Naujoji funkcija bus apibrėžta segmente $[0, a]$ kiekvienam $a > 0$, todėl jos apibrėžimo sritis — intervalas $[0, \infty)$ (pav. 3.6).

Jos žymėjimas:

$$x^{\frac{1}{n}}.$$

Sudauginę tarpusavyje m funkcijų $x^{\frac{1}{n}}$, turėsime funkciją, kuri yra žymima $x^{\frac{m}{n}}$.

Funkcijos $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ **savybės:**

a) funkcijos apibrėžimo sritis $[0, \infty)$;
b) funkcija griežtai monotoniškai didėja ir tolydi intervale $[0, \infty)$.

Funkcija $f(x) = x^p$**, kai** p **bet koks racionalusis skaičius.**

Visų pirma apibrėžiame, kad

$$x^0 := 1$$

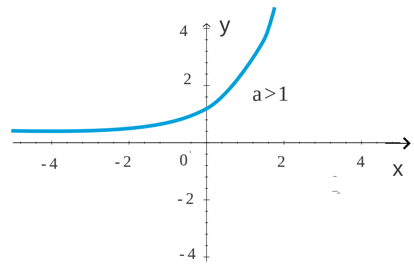
visiems $x > 0$.

Jei p — neneigiamas racionalusis skaičius, laipsnis x^p buvo apibrėžtas aukščiau.

Jei p — neigiamas racionalusis skaičius, tai x^p apibrėžiamas lygybe

$$x^p := 1/x^{-p}$$

visiems $x > 0$.



Pav. 3.7: Funkcija $f(x) = a^x$ kai $a > 1$.

Funkcija $f(x) = a^x$.

Tegu $a > 1$.

Remiantis ankstesniais punktais, galima apibrėžti funkciją $f(x) = a^x$ racionaliems x. Racionaliems x, y yra teisingos lygybės:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y; \quad a^{x-y} = a^x / a^y.$$

Be to, jei $x < y$, tai $a^x < a^y$ $(a > 1!)$ visiems $x, y \in \mathbb{Q}$.

Apibrėšime a^x, kai x — teigiamas iracionalusis skaičius.

Tegu $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — monotoniškai didėjanti racionaliųjų skaičių seka tokia, kad

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Pavyzdžiui, norėdami gauti sekos narį x_n, galime parinkti skaičiaus x išdėstymo dešimtaine trupmena sveikąją dalį ir n skaitmenų po kablelio. Analogiškai galima surasti seką $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, kuri monotoniškai mažėja, yra sudaryta iš racionaliųjų skaičių ir

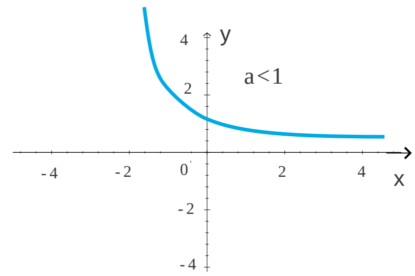
$$\lim_{n\to\infty} y_n = x.$$

Tada seka $\{a^{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ monotoniškai didėja ir aprėžta iš viršaus. Seka $\{a^{y_n}\}_{n=1}^{\infty}$ monotoniškai mažėja ir aprėžta iš apačios.

Iš konstrukcijos seka, kad

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \lim_{n\to\infty} a^{y_n}.$$

Šią ribą ir laikysime funkcijos a^x reikšme taške x, kai $x > 0$.



Pav. 3.8: Rodiklinė funkcija $f(x) = a^x$ kai $0 < a < 1$.

Jei $x < 0$, tai apibrėžiama: $a^x := 1/a^{-x}$.

Tegu $0 < a < 1$.

Tada apibrėžiama

$$a^x := 1/(1/a)^x \, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kai $a = 1$, tai apibrėžiama $a^x := 1$.

Funkcijos $f(x) = a^x$ savybės:

a) griežtai monotoniškai didėjanti ir tolydi visiems $x \in \mathbb{R}$, kai $a > 1$; .

Iš funkcijos $f(x) = a^x$ apibrėžimo, kai $0 < a < 1$, seka, kad ši funkcija yra griežtai monotoniškai mažėjanti ir tolydi visiems $x \in \mathbb{R}$.

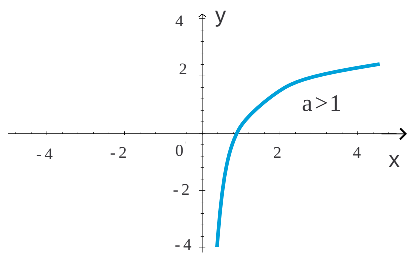
b)

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y;$$

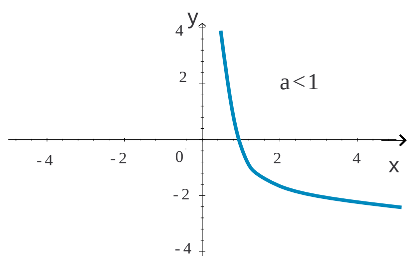
$$(a^x)^y = a^{x \cdot y};$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \, ,$$

kai $a, b > 0$.



Pav. 3.9: Logaritminė funkcija $f(x) = \log_a x$, kai $a > 1$



Pav. 3.10: Logaritminė funkcija $f(x) = \log_a x$, kai $0 < a < 1$

Funkcija $f(x) = \log_a x$**.**

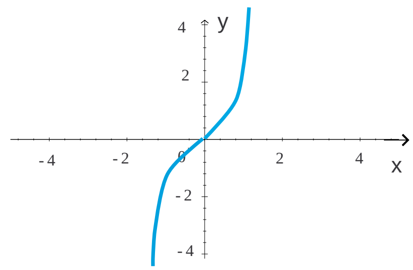
Tegu $a \neq 1$. Tada funkcija a^x griežtai monotoniškai didėja, jei $a > 1$, mažėja, jei $a < 1$ ir tolydi kiekviename segmente $[\alpha, \beta]$, kai $\alpha, \beta < \infty$. Todėl ji turi atvirkštinę funkciją, žymimą $\log_a x$, kuri yra tolydi intervale $(0, \infty)$ (primename, kad būtent šis intervalas yra funkcijos a^x reikšmių sritis).

Funkcijos $f(x) = \log_a x$ **savybės:**

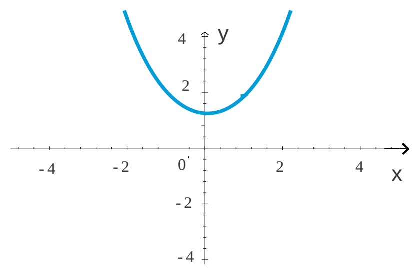
a) Jei $a > 1$, funkcija $\log_a x$ yra griežtai monotoniškai didėjanti intervale $(0, \infty)$;

b) $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$.

Pastaba. Kai $a = e$, logaritminė funkcija žymima $\ln x := \log_e x$ ir vadinama *natūraliuoju logaritmu*.



Pav. 3.11: Hiperbolinis sinusas



Pav. 3.12: Hiperbolinis kosinusas

Hiperbolinės funkcijos.

Tai
a) hiperbolinis sinusas:

$$\text{sh } x := \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

b) hiperbolinis kosinusas:

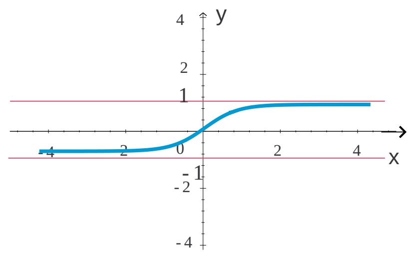
$$\text{ch } x := \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

c) hiperbolinis tangentas:

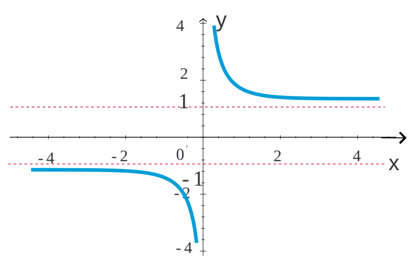
$$\text{th } x := \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x};$$

d) hiperbolinis kotangentas:

$$\text{cth } x := \frac{\text{ch } x}{\text{sh } x}.$$



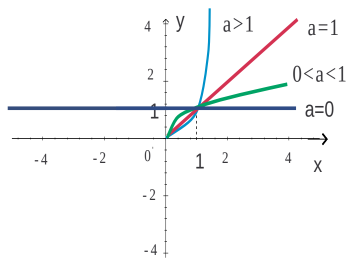
Pav. 3.13: Hiperbolinis tangentas



Pav. 3.14: Hiperbolinis kotangentas

Hiperbolinių funkcijų savybės:

a) apibrėžimo sritis — visa realiųjų skaičių aibė, tik hiperbolinis kotangentas neapibrėžtas taške $x = 0$.
b) funkcijos yra tolydžios savo apibrėžimo srityje: tai seka iš funkcijos e^x tolydumo.



Pav. 3.15: Laipsninių funkcijų grafikai.

Funkcija $f(x) = x^a$**, kai** $a \in \mathbb{R}$**.**

Pagal apibrėžimą,

$$x^a := e^{a \cdot \ln x}.$$

Savybės:

a)

$$\lim_{x \to \infty} x^a = 0,$$

kai $a > 0$

ir

$$\lim_{x \to \infty} x^a = \infty,$$

kai $a < 0$.

b) $f(x) = x^a$ yra tolydžioji intervale $(0, \infty)$ funkcija.

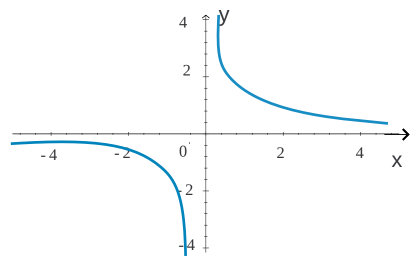
Trigonometrinės funkcijos.

$f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \text{tg } x$, $f(x) = \text{ctg } x$**.**

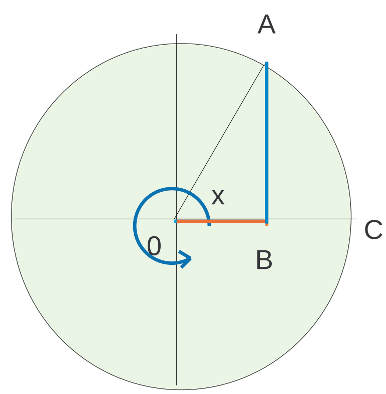
Kiekvienam skaičiui x galima surasti spindulį OA tokį, kad kampas tarp horizontalios linijos OC ir OA yra lygus $x \pmod{2\pi}$, kur skaičius $0 \leq x \pmod{2\pi} < 2\pi$ toks, kad $x - x \pmod{2\pi}$ yra kartotinis 2π.

Pagal apibrėžimą

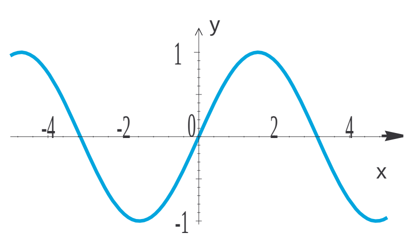
$$\sin x := \frac{AB}{OA}; \quad \cos x := \frac{OB}{OA}; \quad \text{tg } x := \frac{AB}{OB}; \quad \text{ctg } x := \frac{OB}{AB}.$$



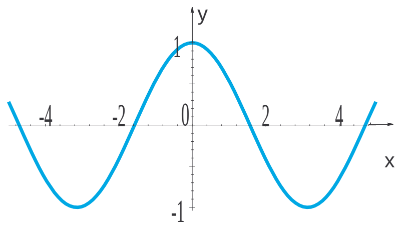
Pav. 3.16: Laipsninės funkcijos pavidalas, kai rodiklis - neigiamas.



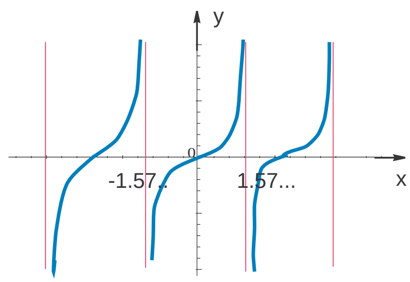
Pav. 3.17: Trigonometrinių funkcijų apibrėžimas.



Pav. 3.18: Sinusas — nelyginė funkcija



Pav. 3.19: Kosinusas — lyginė funkcija.



Pav. 3.20: Tangentas turi antrosios rūšies trūkius.

Funkcijų $f(x) = \sin x$ **ir** $f(x) = \cos x$ **savybės:**

a) Tai periodinės funkcijos, kurių periodas 2π, apibrėžtos aibėje $\mathbb{R}$.

b) Jei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tai

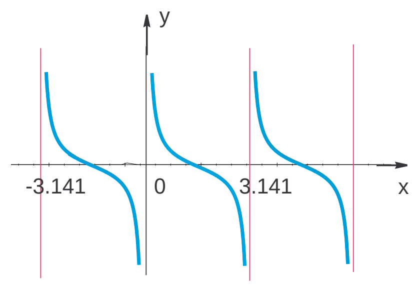
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

c) $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1, \sin\frac{\pi}{2} = 1, \cos\frac{\pi}{2} = 0.$

d) Jei $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tai $0 < \sin x < x < \text{tg}\, x$.

d) savybės įrodymas:



Pav. 3.21: ...kotangentas taip pat.

Tegu skritulio spindulys $OD = OC = 1$. Tada skritulio sektoriaus ODC plotas lygus $x/2$. Trikampio ODC plotas lygus $OC \cdot DB/2 = \sin x/2$. Trikampiai ODB ir OAC — panaš$\overline{\text{u}}$s (kongruent$\overline{\text{u}}$s).

Todėl
$$\frac{OB}{BD} = \frac{OC}{AC},$$
arba
$$AC = (OC \cdot OB)/OB = \text{tg}\, x.$$

Trikampio OAC plotas lygus tg $x/2$. Bet (žr. brėžinį) trikampio OCD plotas yra mažesnis nei skritulio sektoriaus OCD plotas, kuris savo ruožtu mažesnis už trikampio OAC plotą. Iš to seka 4 - toji savybė.

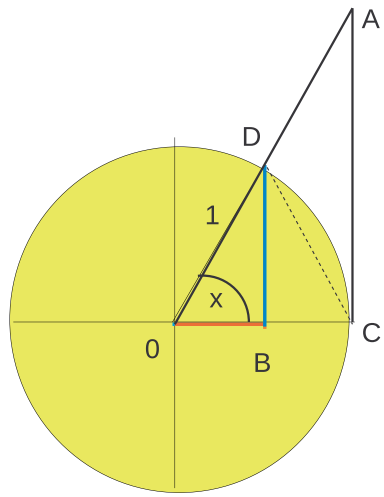
e) Funkcijos $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ yra tolydžios realiųjų skaičių aibėje $\mathbb{R}$.

Patikrinsime, pavyzdžiui, kad sinusas yra tolydi funkcija.

Tegu x_0 — realusis skaičius ir tegu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Tada
$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = \sin x_0 + \lim_{n\to\infty} (\sin x_n - \sin x_0) = \sin x_0 + 2 \lim_{n\to\infty} \left[\sin \frac{x_n - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x_n + x_0}{2}\right].$$

Kadangi
$$-1 \le \cos \frac{x_n + x_0}{2} \le 1$$
visiems n,



Pav. 3.22: Nelygybė, siejanti sinusą, tangentą ir funkciją $f(x) = x$.

o

$$-\frac{|x_n - x_0|}{2} \leq \sin\frac{|x_n - x_0|}{2} \leq \frac{|x_n - x_0|}{2}$$

pradedant pakankamai dideliu numeriu N, tai

$$-\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n - x_0|}{2} \leq \lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{x_n - x_0}{2}\cdot\cos\frac{x_n + x_0}{2}\right] \leq \lim_{n\to\infty}\frac{|x_n - x_0|}{2}.$$

Bet $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n - x_0| = 0$, todėl

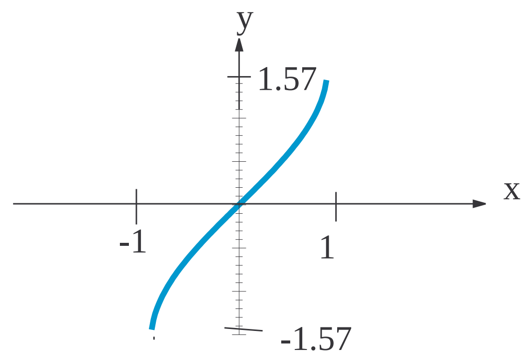
$$\lim_{h\to\infty}\sin x_n = \sin x_0,$$

t.y. funkcija $f(x) = \sin x$ yra tolydi taške x_0.

Funkcijų $f(x) = \text{tg}\, x$ **ir** $f(x) = \text{ctg}\, x$ **savybės:**

a) $D(\text{tg}\,) = \left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right\}$,
$D(\text{ctg}\,) = \{x \mid x \neq \pi n\}$,
kur n — sveikasis skaičius.

b) Savo apibrėžimo srityse funkcijos $f(x) = \text{tg}\, x$ ir $f(x) = \text{ctg}\, x$ yra tolydžios.



Pav. 3.23: $f(x) = \arcsin x$

Atvirkštinės trigonometrinės funkcijos.

Funkcija $f(x) = \arcsin x$.

Segmente $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ funkcija $\sin$ turi atvirkštinę funkciją, kuri žymima $\arcsin$. Šiame segmente $f(x) = \arcsin x$ bus tolydžioji funkcija.

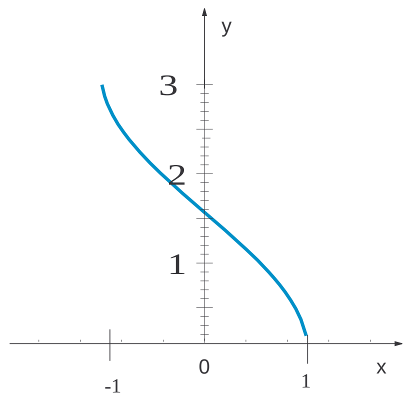
Funkcija $f(x) = \arccos x$.

Segmente $[0, \pi]$ funkcija $\cos$ turi atvirkštinę tolydžiąją funkciją, kuri žymima $\arccos$.

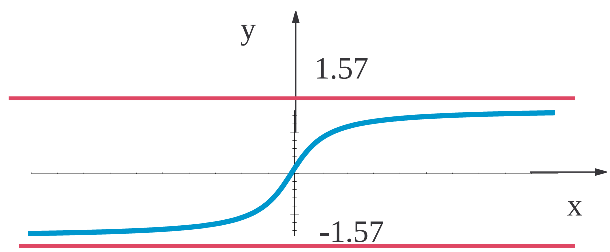
Funkcija $f(x) = \text{arctg}\, x$.

Tai funkcija, atvirkštinė tangentui intervale $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Funkcija arctg apibrėžta ir tolydi visiems realiesiems x.

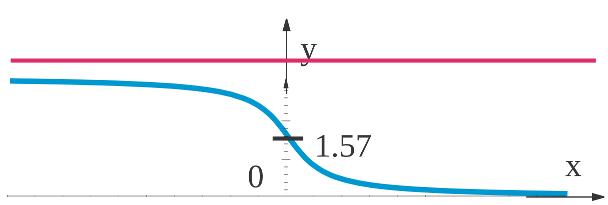
Funkcija $f(x) = \text{arcctg}\, x$.
Tai funkcija, atvirkštinė kotangentui intervale $(0, \pi)$, tolydi visiems realiesiems x.



Pav. 3.24: $f(x) = \arccos x$



Pav. 3.25: Funkcija $f(x) = \text{arctg}\ x$



Pav. 3.26: $f(x) = \text{arcctg}\ x$

3.7 Elementariosios funkcijos

Funkcijos, nagrinėtos ankstesniame skyrelyje, yra *tolydžios* savo apibrėžimo srityje. Šią savybę turi ir tokių funkcijų baigtinės aritmetinės kombinacijos bei superpozicijos. Minėtos funkcijos vadinamos *elementariosiomis funkcijomis.*

Pavyzdžiai:

1. $f(x) = \text{tg } \sin e^{\frac{1}{x}}$.

2. $f(x) = x^2 + 2^x + x^{2^x}$.

3.8 Kai kurių funkcijų ribos taške $x = 0$

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Įrodymas:

Kadangi (žr. praeitą skyrelį)

$$0 < \sin x < \text{tg } x,$$

kai $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tai

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Bet

$$\cos x = \cos(-x),$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{(-x)},$$

todėl pastaroji nelygybė teisinga ir kai $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

Be to,

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1,$$

kadangi $\cos$ yra tolydžioji taške $x = 0$ funkcija.

Todėl

$$1 = \lim_{n\to\infty} \cos x \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{x} \le 1,$$

o tuo įsitikinti ir reikėjo.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

Apsiribosime pastaba, kad jei $x = n$ — nat$\bar{}$uralusis skaĭčius, tai šią ribą radome anksčiau.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$

Iš tiesų , antrojo punkto ribą galime perrašyti ir taip (darome pakeitimą $\left(x \to \frac{1}{x}\right)$):

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Logaritmuojame abi puses ir prisimename, kad logaritmas yra tolydžioji funkcija (įrodymas ne visiškai pilnas), kai $x \in (0, +\infty)$.

Tada

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = e.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$

Trečiojo punkto pagrindinėje lygybėje darome keitimą $t = \ln(x+1)$. Tada $t \to 0$, kai $x \to 0$, o $x = e^t - 1$.

Įstatę į minėtą lygybę, gausime

arba

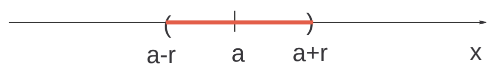
$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1} = 1.$$

Tada

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1/\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1} = 1.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x} = \frac{1}{n}.$

Pabandykite įrodyti patys kai $n = 2$ ir kai $n = 3$.



Pav. 3.27: Taško a r-aplinka.

3.9 Kelios atkarpoje tolydžių funkcijų geometrinės savybės

Teorema 14 . *Jei tolydi atkarpoje funkcija f vidiniame atkarpos taške $x = a$ yra griežtai teigiama, tai egzistuoja tokia taško a aplinka, kurioje funkcija f išlieka griežtai teigiama.*

Pastaba. Taško a aplinka priimta laikyti bet kokį atvirąjį intervalą, kuriam priklauso a. Paprastai imami tokie intervalai, kad taškas a būtų jų centre, kaip pavaizduota 3.27-ame paveikslėlyje.

Įrodymas:

Kadangi funkcija f tolydi taške $x = a$, tai egzistuoja funkcijos riba $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, kuri, remiantis teoremos prielaida, yra griežtai teigiama. Pagal apibrėžimą, ši riba suprantama taip. Kiekvienai sekai $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, tokiai, kad $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, turi būti $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(a) > 0$.

Tarkime, kad kiekvienoje taško $x = a$ aplinkoje atsiras taškų, kuriuose funkcija f yra neigiama arba lygi nuliui. Tada ir atkarpoje $\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ bus taškas x_n toks, kad

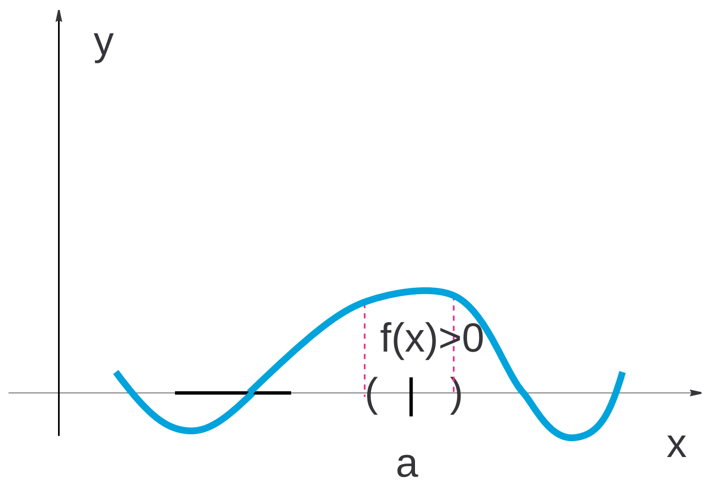
$$f(x_n) \leq 0.$$

Tai bus teisinga visiems $n \in \mathbb{N}$. Pastebėsime, kad $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Vadinasi, turi būti ir $f(a) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) \leq 0$, o tai neįmanoma, kadangi $f(a) > 0$.

Teorema 15 . *Tegu f — tolydi segmente $[a, b]$ funkcija ir reikšmės $f(a), f(b)$ — skirtingų ženklų. Tada segmento viduje atsiras taškas ξ toks, kad $f(\xi) = 0$.*

Įrodymas:

Tegu $f(a) < 0, f(b) > 0$. Įveskime pažymėjimą



Pav. 3.28: Tolydžioji funkcija nekeičia ženklo taško aplinkoje.

$$A := \{x \in [a, b] \,|\, f(x) < 0\}.$$

Ši aibė nebus tuščia, kadangi jai priklauso pats taškas a. Kita vertus, aibė A aprėžta iš viršaus, taigi turi tikslųjį viršutinį rėžį (žr. atitinkamo skyrelio teoremą), kurį žymėsime raide ξ.

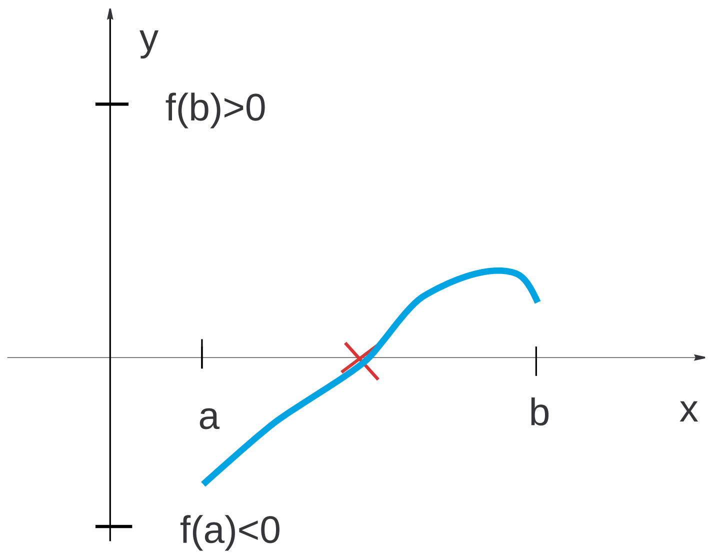
Pastebėsime, kad būtinai $\xi \in (a, b)$. Jei būtų $\xi = b$, tai taipogi būtų $f(\xi) = f(b) > 0$, o tai neįmanoma, remiantis ankstesne šio skyrelio teorema . Įsitikinsime, kad $f(\xi) = 0$. Jei būtų $f(\xi) > 0$, tai pagal pirmąją teoremą atsirastų taško ξ aplinka $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, kurioje f ženklas būtų pliusas, o tai reikštų, kad ξ negali būti aibės A tiksliuoju viršutiniu rėžiu. Analogiškai nagrinėjamas atvejis, kai $f(\xi) < 0$. Taigi $f(\xi) = 0$.

Teorema 16 . *Tolydi segmente $[a, b]$ funkcija f yra aprėžta. ($|a|, |b| < \infty$!)*

Įrodymas:

Tegu f nėra aprėžta iš viršaus. Tai reiškia, kad kiekvienam $n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a, b]$ toks, kad $f(x_n) > n$. Seka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — aprėžta skaičiais a ir b. Todėl pagal Bolcano–Vejerštraso teoremą ji turi posekį $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, konverguojantį į tašką $x_0 \in [a, b]$. Funkcija f pagal teoremos sąlygą bus tolydi taške x_0, taigi

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty,$$



Pav. 3.29: Tolydžiosios funkcijos, įgyjančios skirtingo ženklo reikšmes, grafikas kerta x ašį.

t.y. $x_0 \notin D(f)$. Gavome prieštaravimą; tokiu būdu, funkcija f yra aprėžta iš viršaus. Tuo pačiu parodyta, kad ir funkcija $-f$ aprėžta iš viršaus, arba, ekvivalenčiai, f yra aprėžta iš apačios. Taigi funkcija f bus aprėžta.

Pastaba. Visos sąlygos teoremoje yra reikalingos.

Klausimas: Ar gali tolydi intervale (a, b) (bet ne segmente) funkcija būti neaprėžta?

Antras klausimas: Ar gali funkcija, kurios apibrėžimo sritis — segmentas $[a, b]$, būti neaprėžta?

Apibrėžimas 19 . *Kaip ir sekų atveju, funkcija f vadinama aprėžta aibėje A iš viršaus, jei $\exists M > 0$ toks, kad $f(x) \leq M$ visiems $x \in A$. Skaičius M yra vadinamas funkcijos f viršutiniuoju rėžiu aibėje A. Galima parodyti, kad tarp viršutinių funkcijos f rėžių yra pats mažiausias, kuris žymimas $\sup\limits_{x \in A} f(x)$.*

Analogiškai apibrėžiama funkcijos, aprėžtos iš apačios aibėje A, sąvoka. Didžiausias tarp apatinių funkcijos f rėžių žymimas $\inf\limits_{x \in A} f(x)$. Funkcija vadinama aprėžta aibėje A, jei $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M$.

Aišku, kad funkcija bus aprėžta aibėje A tada ir tik tada, kai ji bus aprėžta ir iš viršaus, ir iš apačios.

Taigi, $f(x) = \sin x$ — aprėžta realiųjų skaičių aibėje funkcija, funkcija $f(x) = x^2$ — aprėžta toje pačioje aibėje iš apačios, o funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$ — neaprėžta intervale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Teorema 17 . *Tolydi segmente $[a, b]$ funkcija f įgyja šiame segmente didžiausią ir mažiausią savo reikšmes.*

Pastaba. *Didžiausia* funkcijos f reikšme aibėje A yra vadinamas skaičius M toks, kad:

1. $f(x_0) = M$ kokiam nors $x_0 \in A$;
2. $f(x) \leq f(x_0)$ visiems $x \in A$.

Didžiausia funkcijos reikšmė yra žymima $\max f(x)$ ir vadinama funkcijos f *maksimumu* aibėje A.

Analogiškai apibrėžiamas dydis $\min f(x)$, vadinamas funkcijos f *minimumu, arba mažiausia reikšme* aibėje A.

Todėl, turint galvoje priešpaskutinę teoremą, paskutinę teoremą galima formuluoti ir taip:

Tolydžiai segmente $[a, b]$ funkcijai galioja lygybės

$$\sup f(x) = \max f(x), \quad \inf f(x) = \min f(x).$$

Funkcija $f(x) = \operatorname{tg} x$, kaip jau minėjome, nėra aprėžta intervale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tačiau ši funkcija yra aprėžta kiekviename segmente $[a, b]$, jeigu $a > -\frac{\pi}{2}, b < \frac{\pi}{2}$. Tokiame segmente maksimali tangento reikšmė bus $\operatorname{tg} b$, o minimali — $\operatorname{tg} a$.

Teoremos įrodymas:

Įrodysime, kad funkcija f įgyja didžiausią reikšmę segmente $[a, b]$. Tarkime priešingai. Tada

$$f(x) < M$$

visiems $x \in [a, b]$ (žr. priešpaskutiniąją teoremą) ir galima laikyti, kad M yra tikslus viršutinis funkcijos f rėžis aibėje $[a, b]$.

Tada aibėje $[a, b]$ bus apibrėžta tolydžioji funkcija

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Funkcija $F(x)$, savo ruožtu, bus **aprėžta** aibėje $[a, b]$ funkcija (vėl tos pačios teoremos išvada), todėl atsiras skaičius $B > 0$ toks, kad

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq B$$

visiems $x \in [a, b]$, arba

$$f(x) \leq M - \frac{1}{B} \quad \text{visiems} \quad x \in [a, b] .$$

Bet tai reikštų, kad M negali būti tikslus viršutinis rėžis.

Gavome prieštaravimą, iš kurio seka, kad funkcija f įgyja maksimalią reikšmę segmente $[a, b]$.

Įrodymas tinka ir funkcijai $(-f)$, o tai reiškia, kad funkcija f įgyja segmente $[a, b]$ ir minimalią savo reikšmę.

Skyrius 4

Funkcijos išvestinė

4.1 Išvestinės sąvoka

Funkcija f turi ribinę reikšmę taške x_0, jei egzistuoja riba $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Funkcija f yra tolydi taške x_0, jeigu papildomai,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tą galima perrašyti ir taip:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0.$$

Įsivedus pažymėjimą $\Delta x := x - x_0$, šią lygybę galima perrašyti dar kitaip:

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Skirtumas $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ yra vadinamas funkcijos f *pokyčiu* taške x_0, atitinkančiu argumento pokytį Δx.

Taigi galima pasakyti taip: funkcija f yra tolydi taške x_0 tada ir tik tada, jeigu funkcijos pokytis taške x_0 nyksta kartu su argumento pokyčiu.

O ką galima pasakyti apie pokyčių santykio ribą

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad ?$$

Po ribos ženklu yra neapibėžtumas, kurio pavidalas $\frac{0}{0}$. Kaip jau esame patyrę, tokia riba dažnai neturi prasmės.

Apibrėžimas 20 . *Jeigu baigtinė riba egzistuoja, sakoma, kad funkcija f turi išvestinę taške x_0.*

Išvestinė žymima

$$f'(x_0), \quad \text{arba} \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

Taigi,

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Funkcijos f *dešininė* išvestinė taške x_0 apibrėžiama kaip

$$f'_d(x_0) := \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

o *kairinė* išvestinė taške x_0:

$$f'_k(x_0) := \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

Pastarosios dvi sąvokos leidžia kalbėti apie funkcijos f išvestinę segmento $[a, b]$ galuose.

Pavyzdžiai:

1. $f(x) = x$. Tegu x_0 — koks nors realusis skaičius. Tada

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$

t.y. funkcijos f išvestinė taške x_0 egzistuoja ir

$$f'(x_0) = 1.$$

2. $f(x) = c$, kur c — konstanta, t.y. pastovus skaičius. Tada duotam skaičiui x_0 funkcijos f išvestinė yra lygi

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

3. $f(x) = \sin x$. Skaičiuojame funkcijos f išvestinę taške x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = 2 \lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x \to x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} = \cos x_0,$$

o tai rodo, kad

$$(\sin x)' = \cos x,$$

koks bebūtų taškas x.

Analogiškai gaunama formulė

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

4. $f(x) = x^n$, kur n — natūralusis skaičius.

Fiksuojame skaičių x_0.

Tada

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[x^{n-1} + x^{n-2} \cdot x_0 + x^{n-3} \cdot x_0^2 + ... + x_0^{n-1} \right] = n x_0^{n-1}.$$

Tokiu būdu, visiems natūraliesiems n

$$(x^n)' = n x^{n-1}.$$

Pastaba. Paskutinė formulė teisinga ir tada, kai rodiklis n yra bet koks realusis skaičius.

5. $f(x) = e^x$. Fiksuojame x_0.

Tada

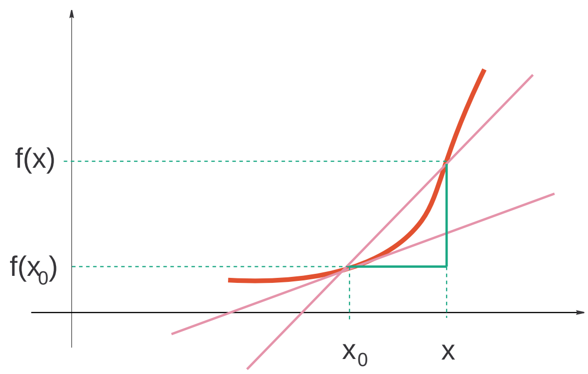
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}.$$

Taigi,

$$(e^x)' = e^x.$$

6. $f(x) = \ln x$. Tegu $x_0 > 0$.

Tada, pažymėję $t := \frac{x}{x_0} - 1$, turėsime



Pav. 4.1: Funkcijos išvestinė taške yra lygi tangentui kampo, kurį sudaro funkcijos grafiko liestinė tame taške ir x teigiamoji pusašė.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{\frac{x}{x_0} - 1} =$$

$$= \frac{1}{x_0} \lim_{t \to 0} \frac{\ln (t+1)}{t} = \frac{1}{x_0},$$

t.y.

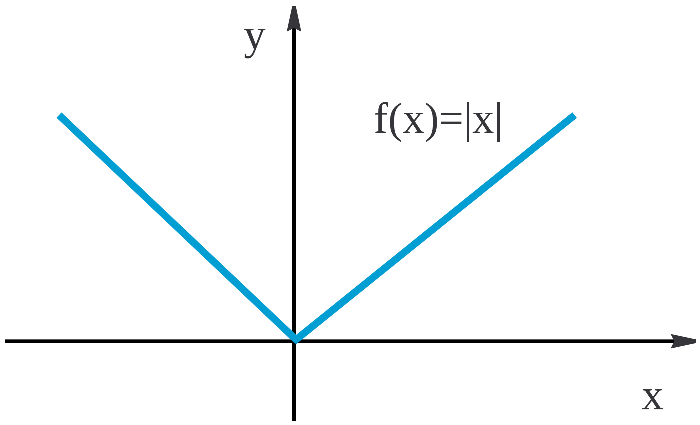
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

4.2 Išvestinės geometrinė prasmė

Tegu x, x_0 — du x ašies taškai. XY plokštumos taškai $(x, f(x))$, $(x, f(x_0))$, $(x_0, f(x_0))$ yra stačiojo trikampio viršūnės. Kirstinė, kuriai priklauso trikampio įžambinė, su x ašies teigiamąja kryptimi sudaro kampą α, kuriam

$$\text{tg } \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Kai $x \to x_0$, santykis, esantis dešinėje lygybės pusėje, artėja prie funkcijos f išvestinės taške x_0, o kirstinės tiesės artėja prie tiesės, vadinamos funkcijos f grafiko *liestine* taške x_0.



Pav. 4.2: Liestinė funkcijos grafikui taške x=0 neegzistuoja; funkcija neturi išvestinės šiame taške.

Tokiu būdu, teisinga lygybė

$$\operatorname{tg} \varphi = f'(x_0),$$

kur φ — kampas tarp liestinės taške x_0 ir teigiamosios x pusašės, žr. 4.1.

Kada funkcija f neturi išvestinės taške ?

a) arba tg $\varphi = \pm\infty$ — taip bus, kai liestinė yra statmena x ašiai;

b) arba funkcijos grafikas neturi liestinės nagrinėjamame taške.

Paaiškinsime šiuos atvejus pavyzdžiais.

Pirmas pavyzdys. $f(x) = |x|$. Funkcija f neturi išvestinės taške $x_0 = 0$. Iš tiesų,

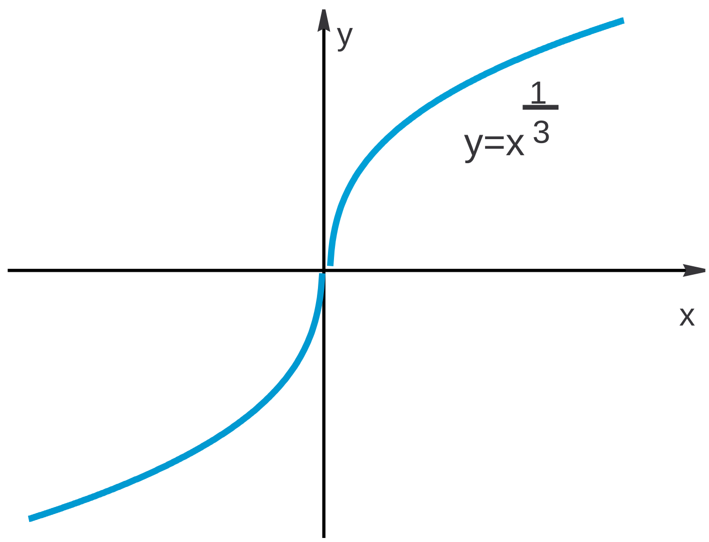
$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1,$$

$$f'_k(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1.$$

Kadangi dešininė išvestinė nelygi kairinei išvestinei, išvestinė $f'(0)$ neegzistuoja (žr. pav. 4.2).

Pastaba. Pravartu prisiminti, funkcija f turi išvestinę $f'(x_0)$ tada ir tik tada, kai egzistuoja kairinė ir dešininė išvestinės ir

$$f'(x_0) = f'_k(x_0) = f'_d(x_0).$$



Pav. 4.3: Funkcijos išvestinė neegzistuoja ir tokiame taške, kuriame liestinė yra vertikali.

Antras pavyzdys. Tegu $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$. Fiksuojame $x_0\neq 0$.
Tada

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\cdot x_0}+\sqrt[3]{x_0^2}}=\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2}},$$

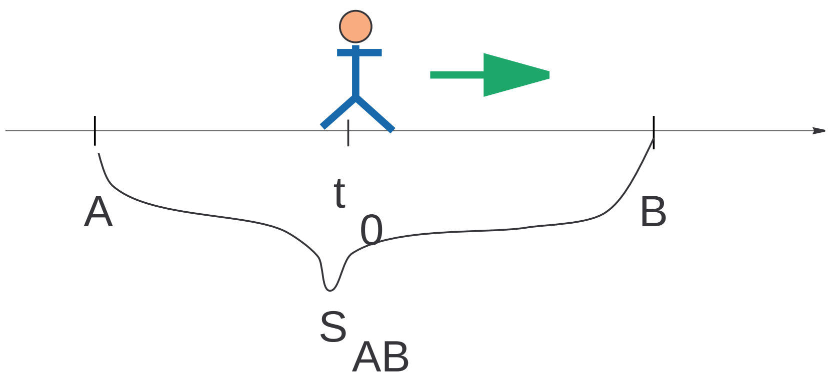
t.y.

$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\quad jei\quad x\neq 0.$$

Kam yra lygi išvestinė taške $x_0=0$?

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\infty,$$

t.y. išvestinė nulio taške neegzistuoja (žr. pav. 4.3).



Pav. 4.4: Greitis kaip kelio išvestinė

4.3 Mechaninė išvestinės prigimtis

Norint rasti vidutinį greitį, kuriuo įveikta atkarpa AB, reikia kelio ilgį S_{AB} padalinti iš laiko t_{AB}, sugaišto kelionei:

$$v_{vid} = \frac{S_{AB}}{t_{AB}}.$$

Tegu $S(t)$ — per laiko tarpą t nueito kelio ilgis. Tada

$$S'(t_0) = \frac{dS}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$$

bus *momentinis* greitis laiko momentu t_0.

Jeigu judėjimas yra tolygus, tai bet kokiu laiko momentu vidutinis ir momentinis greičiai sutampa.

4.4 Išvestinės savybės

Teorema 18 . *Jeigu funkcija f turi išvestinę taške x_0, tai ji yra tolydi tame taške.*

Įrodymas:

Priminsime, kad funkcija f yra tolydi taške x_0, jeigu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Tikriname šią lygybę:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)+f(x_0)\right] =$$

$$= f'(x_0)\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+f(x_0) = f(x_0).$$

($f'(x_0)$ egzistuoja, remiantis teoremos prielaida).

Teorema 19 . *Tegu funkcijos f ir g turi išvestines taške x_0.*
Tada

a) $(f\pm g)'(x_0) = f'(x_0)\pm g'(x_0);$
b) $(af)'(x_0) = a\cdot f'(x_0), \quad visiems \quad a\in\mathbb{R};$
c) $(f\cdot g)'(x_0) = (f'\cdot g+f\cdot g')(x_0);$
d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \left(\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}\right), \quad jeigu \quad g(x_0)\neq 0.$

Įrodymas:

a) Skaičiuojame:

$$(f\pm g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{(f\pm g)(x)-(f\pm g)(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\pm\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right] = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\pm\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= f'(x_0)\pm g'(x_0).$$

Kadangi, remiantis teoremos prielaida, dešinė lygybės pusė egzistuoja, kairė pusė taip pat turi prasmę ir tapatybė a) yra teisinga.

b) Pagal apibrėžimą

$$(af)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{(af)(x)-(af)(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= a\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a\cdot f'(x_0).$$

c) Skaičiuojame:

$$(f \cdot g)' (x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left\{ \frac{[f(x) - f(x_0)] \cdot g(x)}{x - x_0} + \frac{[g(x) - g(x_0)] \cdot f(x_0)}{x - x_0} \right\} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} g(x) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= (f' \cdot g + f \cdot g')(x_0).$$

Rašant pastarąsias lygybes, buvo naudojamas ir funkcijos g tolydumas taške x_0.

d) Kadangi $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$, pasinaudoję savybe c) pastebime, kad

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \left(\frac{1}{g}\right) + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)',$$

Bet

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

(žr. sekančią teoremą) ir teoremai įrodyti lieka atlikti elementarius veiksmus.

Teorema 20 (Sudėtinės funkcijos išvestinė). *Tegu funkcija g turi išvestinę taške x_0, o funkcija f turi išvestinę taške $g(x_0)$. Tada sudėtinė funkcija $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ turi išvestinę taške x_0 ir*

$$(f \circ g)' (x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Įrodymas:

$$(f \circ g)' (x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{g(x)\to g(x_0)} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Teorema 21 (Atvirkštinės funkcijos išvestinė). *Jeigu:*
a) funkcija $y = f(x)$ turi atvirkštinę funkciją taško x_0 aplinkoje;
b) funkcija f turi išvestinę taške x_0 ir $f'(x_0) \neq 0$,

tai atvirkštinė funkcija f^{-1} turi išvestinę taške $y_0 = f(x_0)$ ir

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Įrodymas:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{\left(f^{-1}\right)(y) - \left(f^{-1}\right)(y_0)}{y - y_0} =$$
$$= \lim_{y\to y_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

4.5 Diferencialo sąvoka

Pagal apibrėžimą
$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
Įvedę pažymėjimą
$$\Delta x := x - x_0,$$
vadinamą dar *argumento pokyčiu* taške x_0, išvestinę galime perrašyti taip:
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x_0; \Delta x)}{\Delta x},$$
kur dydis $\Delta f(x_0; \Delta x)$ žymi funkcijos f pokytį taške x_0.

Tokiu būdu, funkcijos f išvestinė taške x_0 yra lygi funkcijos pokyčio ir argumento pokyčio santykio ribinei reikšmei. Todėl dažnai vartojamas kitas išvestinės žymėjimas:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Geometriškai dydis dx suvokiamas kaip be galo mažas argumento pokytis, o df — be galo mažas funkcijos pokytis. dx yra vadinamas ***argumento diferencialu***, o df — ***funkcijos diferencialu*** taške x_0.

Nors df ir dx nėra skaičiai, jie turi kai kurias skaičių savybes. Pavyzdžiui, ką tik paminėtoje lygybėje leidžiama atsikratyti "trupmenos", padauginus abi lygybės puses iš dx:

1. $df = f'(x_0)\,dx.$

Šiai lygybei galima suteikti griežtą matematinę prasmę, kuri aiškesnė kelių kintamųjų funkcijos teorijoje, bet mes to nedarysime. Taigi,

$$\frac{df}{dx} = g \Leftrightarrow df = gdx.$$

Diferencialų kalba perrašysime funkcijos išvestinių savybes:

2. $\frac{d(f \pm g)}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx};$

3. $\frac{d(f \pm g)}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}; \frac{d(a \cdot f)}{dx} = a \cdot \frac{df}{dx}, \quad \text{j}ei \quad a \in \mathbb{R}.$

4. $\frac{d(f \cdot g)}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx}$. Čia galioja $\frac{df}{dx} \cdot g = g \cdot \frac{df}{dx};$

5. $\frac{d(f/g)}{dx} = \frac{\frac{df}{dx} \cdot g - f \cdot \frac{dg}{dx}}{g^2};$

6. (Sudėtinės funkcijos savybė)

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx},$$

(tokiu būdu diferencialas dg "suprastinamas");

7. (Atvirkštinės funkcijos savybė)

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{df}\right)}.$$

Pastabos.

1. Jei funkcija f turi išvestinę taške x_0, tai dažnai sakoma, kad funkcija yra *diferencijuojama* taške x_0. Žymėjimą $\frac{df}{dx}$ įvedė G. Leibnicas.

2. Išvardintos diferencialų savybės yra naudojamos, skaičiuojant *integralus* ir sprendžiant *diferencialines lygtis* .

3. Diferencialai naudojami ir kitiems skaičiavimams. Tam naudojama apytikslė lygybė

$$f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\approx f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x,$$

duodanti nedidelę paklaidą mažiems argumento pokyčiams. Jos pagalba galima užrašyti apytikslio skaičiavimo formulę

$$f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x.$$

Pavyzdžiai.

1. Rasime apytikslę $\cos 31^\circ$ reikšmę:

$$cos 31^\circ=\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\approx\cos\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0,851.$$

2.

$$\sqrt[5]{33}=\sqrt[5]{32+1}\approx\sqrt[5]{32}+\left(\sqrt[5]{x}\right)'|_{x=32}\cdot 1=$$

$$=2+\frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}}=2+\frac{1}{5\cdot 2^4}.$$

Darbo su diferencialais iliustravimui rasime kai kurių funkcijų išvestines.

3. $y=\ln x,\quad x>0$. Šios funkcijos išvestinę jau skaičiavome anksčiau. Dabar si ūlomas b ūdas remiasi lygybe$(e^x)'=e^x$.

Turime, kad $x = e^y$. Taigi

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} =$$

$$= e^{-y} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = \frac{1}{x}.$$

4. $y = \arcsin x$. Tada $x = \sin y, \quad \mathrm{k}ai \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, ir

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Atkreipsime dėmesį, kad šaknys rašomos su pliuso ženklu, kadangi

$$\cos y > 0, \quad \mathrm{k}ai \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

4.6 Funkcijos išvestinės skaičiavimas

Paprasčiausių elementariųjų funkcijų išvestinių lentelė

1. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Taigi, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \, (x > 0, 0 < a \neq 1)$.

Taigi, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \, (0 < a \neq 1)$.

Atskiru atveju, $(e^x)' = e^x$.

4 $(\sin x)' = \cos x$.

5. $(\cos x)' = -\sin x.$

6. $(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right).$

7. $(\text{ctg } x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\,(x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}).$

8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(-1 < x < 1).$

9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(-1 < x < 1).$

10. $(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2}.$

11. $(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

12. $(\text{sh } x)' = \text{ch } x.$

13. $(\text{ch } x)' = \text{sh } x.$

14. $(\text{th } x)' = \frac{1}{\text{ch }^2 x}.$

15. $(\text{cth } x)' = -\frac{1}{\text{sh }^2 x}\,(x \neq 0).$

Pastaba:

Kadangi kiekviena elementarioji funkcija yra paprasčiausių elementariųjų funkcijų baigtinė kombinacija, gaunama aritmetinių veikmų ir kompozicijos pagalba, tai remdamiesi šia lentele bei išvestinės savybėmis, matome, kad *elementariosios funkcijos išvestinė yra elementarioji funkcija*.

4.7 Funkcijos aukštesniųjų eilių išvestinės

Sakoma, kad funkcija f diferencijuojama (turi išvestinę) intervale (a, b), jei ji turi išvestinę kiekviename taške $x_0 \in (a, b)$.

Tegu f — diferencijuojama funkcija intervale (a, b). Tada tame pačiame intervale apibrėžta funkcija f'. Bendru atveju f' nėra tolydžiojii funkcija.

Apibrėžimas 21 . *Tuo atveju , kai f' yra diferencijuojama taške $x_0 \in (a, b)$, sakoma, kad tame taške funkcija f turi antrąją išvestinę. Žymima* $f''(x_0) := (f')'(x_0)$.

Pastaba:

Antrosios išvestinės apibrėžimui būtina, kad funkcija f turėtų pirmąją išvestinę taško x_0 aplinkoje t.y. intervale $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ mažam $\varepsilon > 0$. Vien pirmosios išvestinės egzistavimo taške x_0 nepakanka.

Indukcijos pagalba apibrėžiama ir n-tosios eilės išvestinė:

$$f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Pavyzdžiai:

1. $(x^n)^{(n)} = n \cdot (x^{n-1})^{(n-1)} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1 = n!$.

2. $(a^x)^{(n)} = (a^x)^{(n-1)} \ln a = ... = a^x \cdot (\ln a)^n$.

3. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

4. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

5. Jei funkcijos u, v — n-kartų diferencijuojamos taške x_0, ar intervale (a, b), tai

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

taške x_0(atitinkamai, intervale (a, b)).

Leibnico formulė.

Tegu funkcijos u, v tenkina 5-tojo pavyzdžio sąlygas.
Tada

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 u^{(n-1)} \cdot v' + C_n^2 u^{(n-2)} \cdot v'' + ... + u \cdot v^{(n)}.$$

Įrodymas:

Kai $n = 1$, formulė

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

jau žinoma.

Tarkime, kad Leibnico formulė teisinga, kai $n = k$.

Pasinaudodami ankstesniuoju žingsniu, parodysime, kad tada formulė teisinga ir kai $n = k + 1$.

Iš tiesų,

$$(u \cdot v)^{(k+1)} = \left[(u \cdot v)^{(k)}\right]' =$$

$$= u^{(k+1)} \cdot v + \left[u^{(k)} \cdot v^{'} + C_k^1 u^{(k)} \cdot v'\right] +$$

$$+ \left[C_k^1 u^{(k-1)} \cdot v'' + C_k^2 u^{(k-1)} \cdot v''\right] + ... + u \cdot v^{(k+1)},$$

nes

$$C_k^m + C_k^{m-1} = C_{k+1}^m,$$

kai $m \leq k$.

Taikymo pavyzdys:

Tegu $f(x) = x^3 \cdot e^x$. Reikia rasti n-tąją išvestinę.
Čia $u(x) = x^3, \quad v(x) = e^x$.
Tada $u'(x) = 3x^2, \quad u''(x) = 6x, \quad u'''(x) = 6, \quad u^{(n)}(x) = 0,$
jei $n \geq 4$ ir $v^{(n)}(x) = e^x$ visiems $n \geq 1$.

Todėl pagal Leibnico formulę

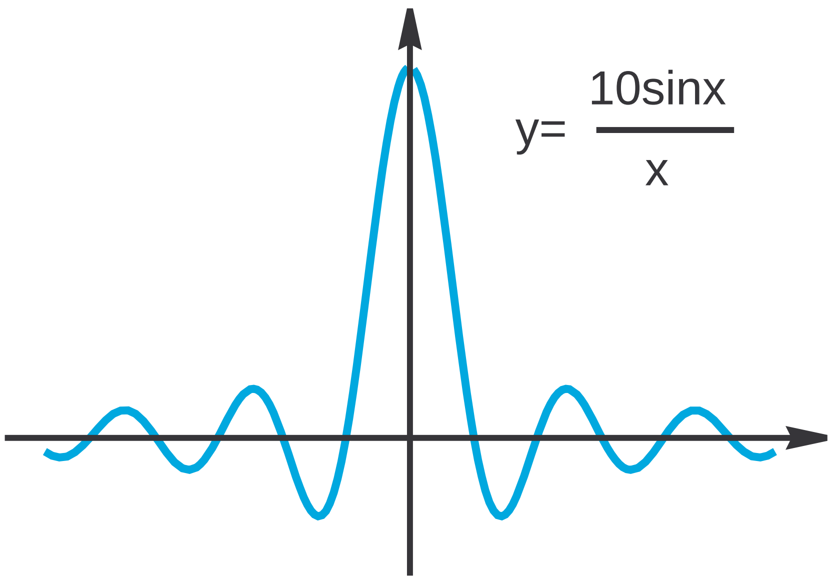
$$f^{(n)}(x) = \left(x^3 e^x\right)^{(n)} =$$

$$= C_n^{n-3} u'''(x) \cdot v^{(n-3)}(x) + C_n^{n-2} u''(x) \cdot v^{(n-2)}(x) +$$

$$+ C_n^{n-1} u'(x) \cdot v^{(n-1)}(x) + u(x)\, v^{(n)}(x) =$$

$$= 6 \cdot C_n^{n-3} e^x + C_n^{n-2} \cdot (6x) \cdot e^x + C_n^{n-1} \cdot \left(3x^2\right) \cdot e^x + x^3 e^x =$$

$$= e^x \left[n(n-1)(n-2) + 3n(n-1)x + 3nx^2 + x^3\right].$$



Pav. 4.5: Ši funkcija turi be galo daug lokaliojo ekstremumo taškų.

4.8 Pagrindinės diferencialinio skaičiavimo teoremos

Apibrėžimas 22 . *Sakoma, kad funkcija* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *turi lokalųjį maksimumą taške* $x_0 \in (a, b)$, *jei atsiras tokia taško* x_0 *aplinka* $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, *kad* $f(x_0) \geq f(x)$ *visiems* $x_0 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. *Analogiškai apibrėžiama lokaliojo minimumo sąvoka. Lokalusis ekstremumas, — tai lokalusis maksimumas, arba lokalusis minimumas.*

Pavyzdys: Tegu $f(x) = \frac{10 \sin x}{x}$.

Ši funkcija turi be galo daug lokaliųjų ekstremumų, tiek maksimumų, tiek minimumų.

Teorema 22 (Ferma).

Jei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *turi lokalųjį ekstremumą taške* $x_0 \in (a, b)$ *ir tame taške egzistuoja išvestinė* $f'(x_0)$, *tai*

$$f'(x_0) = 0.$$

Įrodymas:

Pagal apibrėžimą

$$f'(x_0) = f'_k(x_0) = f'_d(x_0).$$

Tarkime, kad x_0 — funkcijos f lokaliojo maksimumo taškas. Tada

$$f'_k(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

kadangi nei trupmenos skaitiklis, nei vardiklis nėra teigiami, o

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

nes vardiklis yra teigiamas, o skaitiklis yra mažesnis arba lygus nuliui.

Todėl turime, kad

$$0 \leq f'_k(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0) \leq 0,$$

arba

$$f'(x_0) = 0.$$

Geometrinė interpretacija. Teorema išreiškia tą paprastą faktą, kad, jei lokaliojo ekstremumo taškuose egzistuoja liestinė grafikui, tai ji lygiagreti x'o ašiai (žr. pav. 4.6).

Teorema 23 (Rolis). *Tegu funkcija f:*

a) *tolydi segmente $[a, b]$;*

b) *turi išvestinę intervale (a, b);*

c) $f(a) = f(b)$.

Tada egzistuoja toks taškas x_0 iš (a, b), kad $f'(x_0) = 0$.

Įrodymas: (žr. pav. 4.7)

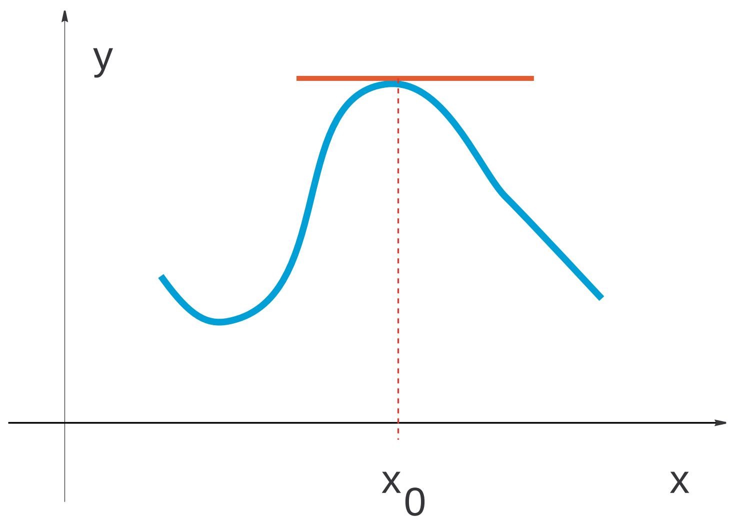
Funkcija f — tolydi segmente $[a, b]$, todėl funkcija f įgyja jame maksimumą ir minimumą.

Gali būti, kad:

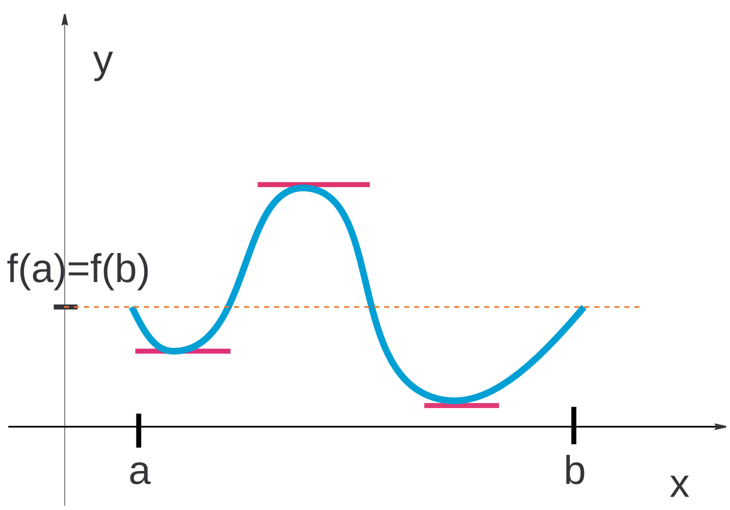
a) bent vienas iš šių ekstremumo taškų yra intervalo (a, b) taškas x_0;

b) abu šie taškai yra segmento $[a, b]$ galai.

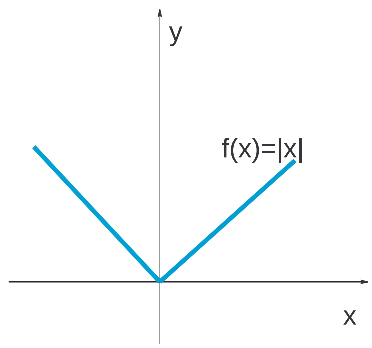
a) atveju x_0 bus ir lokaliojo ekstremumo taškas, todėl pagal Ferma teoremą $f'(x_0) = 0$.



Pav. 4.6: Liestinė ekstremumo taške yra lygiagreti x ašiai.



Pav. 4.7: Rolio teoremos demonstravimas.



Pav. 4.8: Ekstremumo taške funkcija gali neturėti išvestinės.

b) atveju, viename iš taškų a, b funkcija įgyja maksimalią, o kitame — minimalią reikšmę segmente. Bet pagal teoremos sąlygą, $f(a) = f(b)$; taigi, $f(x) = f(b)$ visiems $x \in [a, b]$ ir $f'(x) = 0$ visiems $x \in (a, b)$.

Pastabos:

1. Be lokaliojo yra ir *globaliojo* funkcijos ekstremumo sąvoka. Pavyzdžiui, parabolės $y = x^2$ viršūnė yra kartu ir jos globalusis minimumas.

2. Ekstremumo taške funkcija gali neturėti išvestinės ir netgi nebūti tolydi.

Pavyzdžiai:

1. Funkcija

$$f(x) = |x|$$

taške 0 pasiekia minimumą, tačiau išvestinė $f'(0)$ neegzistuoja.

2. Funkcija

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad x \neq x_0 \\ 2, & \text{kai} \quad x = x_0 \end{cases}$$

(žr. pav. 4.9) savo maksimumo taške yra trūki.

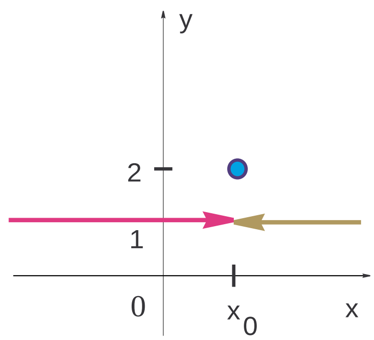
Teorema 24 (Lagranžas). *Tegu funkcija* f*:*

a) *tolydi segmente* $[a, b]$*;*

b) *diferencijuojama intervale* (a, b).

Tada atsiras taškas $x_0 \in (a, b)$ *toks, kad*

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$



Pav. 4.9: Trūkis ekstremumo taške

Įrodymas:

Jei $f(a) = f(b)$, tai įrodymas seka iš Rolio teoremos, nes tada egzistuoja toks $x_0 \in (a, b)$, kad $f'(x_0) = 0$.

Bendru atveju įveskime funkciją

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Funkcija F — tolydi segmente $[a, b]$, diferencijuojama intervale (a, b) ir $F(a) = F(b) = 0$. Todėl pagal Rolio teoremą atsiras toks $x_0 \in (a, b)$, kad $F'(x_0) = 0$, kas reiškia, kad

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Iš šios lygybės ir išplaukia teoremos teiginys.

Pavyzdys. Parodysime, kad nelygybė $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ yra teisinga visiems x, y iš aibės $\mathbb{R}$.

Iš tiesų, segmente $[x, y]$ funkcija $f(x) = \sin x$ tenkina Lagranžo teoremos sąlygas, todėl

$$f(x) - f(y) = f'(x_0)(x - y),$$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(x_0)| |x - y|,$$

arba

$$|\sin x - \sin y| = |\cos x_0| |x - y| \leq |x - y|.$$

Teorema 25 (Koši). *Tegu funkcijos* f, g*:*

a) *tolydžios segmente* $[a, b]$*;*

b) *diferencijuojamos intervale* (a, b)*;*

c) $g'(x) \neq 0$ *visiems* $x \in (a, b)$.

Tada atsiras $x_0 \in (a, b)$ *toks, kad*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Įrodymas:

Visų pirma, $g(b) \neq g(a)$. Priešingu atveju, pagal Rolio teoremą atsirastų toks taškas x_0 iš (a, b), kad būtų $g'(x_0) = 0,$ o tai prieštarautų teoremos c) sąlygai.

Įsiveskime funkciją

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)].$$

Tada $F(a) = F(b) = 0,$ funkcija F — tolydi segmente $[a, b]$ ir diferencijuojama intervale (a, b). Pagal Rolio teoremą atsiras taškas $x_0 \in (a, b)$ toks, kad

$$F'(x_0) = 0.$$

Suskaičiavę funkcijos F išvestinę, gauname Koši teoremos įrodymą.

Pastaba. Jeigu Koši teoremos formulavime įstatysime $g(x) = x$, gausime Lagranžo teoremą. Savo ruožtu nesunku pastebėti, kad Rolio teorema yra Lagranžo teoremos išvada.

4.9 Lopitalio taisyklė

Teorema 26 (Lopitalio taisyklė). *Tegu funkcijos* f *ir* g*:*

a) *apibrėžtos ir diferencijuojamos intervale* (a, b)*, kuris gali būti ir begalinis;*

b) $\lim_{x \to a+0} f(x) = 0 = \lim_{x \to a+0} g(x);$

c) $g'(x) \neq 0$ *visiems* $x \in (a, b)$*;*

d) *egzistuoja baigtinė arba begalinė riba*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tada

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Įrodymas:

Pirmas atvejis: $-\infty<a$.
Pažymėkime

$$F(x):=\begin{cases} f(x), & \text{jei} \quad x\in(a,b),\\ 0, & \text{jei} \quad x=a,\end{cases}$$

$$G(x):=\begin{cases} g(x), & \text{jei} \quad x\in(a,b),\\ 0, & \text{jei} \quad x=a.\end{cases}$$

Funkcijos F ir G — tolydžios pusiau atvirame intervale $[a,b)$ ir diferencijuojamos atvirame intervale (a,b).

Tegu $x\in(a,b)$. Tada funkcijos F ir G tenkina visas Koši teoremos sąlygas segmente $[a,x]$. Todėl atsiras toks taškas $c_x\in(a,x)$, kad

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(c_x)}{G'(c_x)},$$

arba, kadangi $F(a)=G(a)=0$,

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}.$$

Kai $x\to a+0$,

$$\lim_{x\to a+0}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}=$$

$$=\lim_{(c_x)\to a+0}\frac{F'}{G'}(c_x)=\lim_{t\to a+0}\frac{F'}{G'}(t).$$

Antras atvejis: $a=-\infty$.

Pažymėkime

$$t = -\frac{1}{x}.$$

Tada, kai x artėja į $-\infty$, t artės į $0+0$ ir, remiantis pirmuoju atveju,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0+0}\frac{f\left(-\frac{1}{t}\right)}{g\left(-\frac{1}{t}\right)} =$$

$$= \lim_{t\to0+0}\frac{f'\left(-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}}{g'\left(-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema 27 (Lopitalio taisyklė, esant pakeistai b) sąlygai). *Tegu funkcijos f ir g tenkina Lopitalio taisyklės a), b), c), d) sąlygas ir sąlygą*

b') $f(a+0) = g(a+0) = +\infty.$

Tada

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Šios teoremos įrodymą praleisime. Jį galima rasti, pavyzdžiui, V. Kabailos vadovėlyje "Matematinė analizė. I dalis", 117-tame puslapyje.

Pavyzdžiai ir pastabos.

1. Gali būti taip, kad riba $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ egzistuoja, o tuo pat metu riba $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ — ne.

Pavyzdžiui,

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\lim_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 1\cdot0 = 0,$$

kai tuo tarpu išvestinių santykio riba

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x} = 0 - \lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$$

neegzistuoja, taigi ir Lopitalio taisyklė negali būti taikoma.

2. Kartais naudinga Lopitalio taisyklę taikyti kelis kartus.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2+2\cos x-2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3}{2x-2\sin x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{12x^2}{2-2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{24x}{2\sin x}=12.$$

3. Jeigu išvestinės $f'(a)$, $g'(a)$ egzistuoja, $g'(a)\neq 0$ ir $f(a)=g(a)=0$, tai

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Iš tiesų, tokiu atveju,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

4. $0\cdot\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ pavidalo neapibrėžtumų pavyzdžiai.

a) $\lim\limits_{x\to 0+0}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}}=-2\lim_{x\to 0+0}\sqrt{x}=0.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\ldots=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$

5. $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ pavidalo neapibrėžtumai.

Ribos $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ ieškome, logaritmuodami reiškinį, esantį po ribos ženklu. Visų pirma, suskaičiuojame ribą $A := \lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$, tada $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{A}$.

Pavyzdys. Rasime ribą

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}.$$

Tam skaičiuojame ribą

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{e^x-1-x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x-1}\right) =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x\left(1+x^2\right)+\left(e^x-1\right)\cdot 2x} = 2.$$

Todėl

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^2.$$

4.10 Teiloro formulė

Pagal Lagranžo teoremą

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a),$$

jei tiktai funkcija f — tolydi ir diferencijuojama intervale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (čia $\varepsilon > 0$ — nebūtinai mažas skaičius), o ξ yra tarp x ir a.

Ką tik paminėtos lygybės apibendrinimas yra

Teorema 28 (Teiloras). *Jeigu funkcija f yra $(n+1)$-kartą diferencijuojama intervale $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, kuriam priklauso ir x, $x \neq a$, tada egzistuoja taškas ξ, esantis tarp x ir a, toks, kad*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... +$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Paskutinis dešinės pusės dėmuo yra vadinamas Teiloro formulės *liekamuoju nariu*:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Pastaba.

Tokiu būdu, taško a aplinkoje funkciją f galima užrašyti n-tos eilės polinomo ir liekamojo nario sumos pagalba.

Įrodymas:

Tegu, apibrėžtumo dėlei, $x > a$. Segmente $[a, x]$ apibrėžkime funkciją φ:

$$\varphi(t) := f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - ... - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Kadangi funkcija f — $(n+1)$-ą kartą diferencijuojama, funkcijos $f, f', ..., f^{(n)}$, o tuo pačiu ir funkcija φ, yra tolydžios segmente $[a, x]$ ir diferencijuojamos intervale (a, x).

Funkcijos φ išvestinė

$$\varphi(t) = -f'(t) - [f''(t)(x-t) - f'(t)] - \left[\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 - f''(t)(x-t)\right] - ... -$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Tegu ψ — tolydžioji segmente $[a, x]$ funkcija, diferencijuojama intervale (a, x) ir $\psi'(t) \neq 0$ visiems t iš (a, x). Tada pagal Koši teoremą atsiras toks taškas ξ iš (a, x), kad

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}.$$

Bet

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(a) = R_n(x)$$

ir

$$\varphi'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n.$$

Todėl

$$R_n(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n[\psi(x) - \psi(a)]\frac{1}{\psi'(\xi)}.$$

Įstačius ψ vietoje

$$\psi(t) = (x-t)^{n+1},$$

gauname teoremos įrodymą.

Apibrėžimas 23 . *Rašoma* $p(x) = o((x-a)^n)$*, jeigu*

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Teoremos išvada. Liekamąjį narį galima užrašyti ir taip:

$$R_n(x) = o((x-a)^n),$$

Įrodymas: Iš tiesų,

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} f^{(n+1)}(\xi)(x-a) = f^{(n+1)}(a)(a-a) = 0.$$

Terminai: Liekamasis narys

$$R_n(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$

yra vadinamas *Lagranžo formos liekamuoju nariu*;

Liekamasis narys

$$R_n(x) = o((x-a)^n)$$

yra vadinamas *Peano formos liekamuoju nariu*. Galima parašyti

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Apibrėžimas 24 . *Yra sakoma, kad funkcija* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *priklauso funkcijų klasei* $C^n(a,b)$*, jei* $f^{(n)}$ *— tolydžioji intervale* (a,b) *funkcija. Dar sakoma, kad* f *yra* n*-kartų tolydžiai diferencijuojama funkcija.*

Pastabos.

1. Paskutinėje formulėje reikalavimus funkcijai f galima kiek sumažinti (žr., pavyzdžiui, V. Iljino, E. Pozniako knygos "Matematinės analizės pagrindai" 1-ąjį tomą).

2. Išvedant Teiloro formulę, neb$\overline{\text{u}}$tina formuluoti sąlygas visoje taško a aplinkoje: pakanka apsiriboti segmentu $[a, x]$, kai $x > a$, ir segmentu $[x, a]$, kai $x < a$ (žr., pavyzdžiui, E. Misevičiaus "Matematinės analizės" 1-ąją dalį).

4.11 Teiloro formulės taikymas

1. Elementariąsias funkcijas galima užrašyti Teiloro formulės pagalba:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x).$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x).$$

$$\text{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n}(x).$$

Šių formulių pagalba galima rasti apytiksles funkcijų reikšmes norimu tikslumu.

Pastaba. Tuo atveju, kai $a = 0$, Teiloro formulė yra vadinama *Makloreno* formule:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

2. Teiloro formulės liekamasis narys gali būti užrašomas ir taip:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

kur $0 < \theta < 1$ (θ priklauso nuo x).

Iš tiesų, Teiloro formulėje minėtas nežinomas dydis ξ yra tarp x ir a. Jį galima užrašyti naujo nežinomo dydžio θ, esančio tarp 0 ir 1, pagalba:

$$\xi = a + \theta \cdot (x-a).$$

Neišvedinėdami dar paminėsime liekamojo nario Koši pavidalą

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{n!}(x-a)^{n+1}.$$

Iliustracijai įvertinsime logaritmo liekamąjį narį Makloreno skleidinyje:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x).$$

Kai $x \in [0,1]$, vertinimui naudosime liekamojo nario Lagranžo pavidalą

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta \cdot x)^{n+1}}.$$

Šiuo atveju

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)(1+0 \cdot x)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

kai $n \to \infty$.

Kai $x \in [-\varepsilon, 0]$, $\quad 0 < \varepsilon < 1$, ($\varepsilon = 1$ — neleistina situacija, ar ne?), liekamojo nario vertinimui naudosime Koši pavidalą:

$$R_n(x) = (-1)^n x^{n+1}\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta \cdot x)^{n+1}} = (-1)^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta \cdot x}\right)^n \frac{x^{n+1}}{1+\theta \cdot x}.$$

Pastebėsime, kad kai $x > -\varepsilon > -1$, yra teisinga nelygybė

$$\frac{1-\theta}{1+\theta \cdot x} < 1.$$

Todėl
$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon} \to 0,$$
kai $n \to \infty$ ir $\varepsilon < 1$. Kadangi $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$ turimą $\ln(1+x)$ skleidinį galima naudoti apytiksliam funkcijos reikšmių skaičiavimui, kai $-1 < -\varepsilon < x < 1.$ Pavyzdžiui, norint suskaičiuoti $\ln\frac{3}{2}$ $0,05$ tikslumu, pakaks Makloreno formulėje n narių, kur
$$\frac{1}{n+1} \leq 0,05,$$
t.y. jei $n \geq 19.$

3. Jau minėjome, kad liekamąjį narį galima užrašyti ir Peano pavidalu:
$$R_n(x) = o\left((x-a)^n\right).$$
Tai reiškia, kad
$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$
Viena iš Peano pavidalo panaudojimo sferų yra ribų skaičiavimas.

Tarkime, kad reikia suskaičiuoti ribą
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)},$$
kai $f(a) = g(a) = 0$ ir funkcijos f, g turi reikalingą išvestinių skaičių taško $x = a$ aplinkoje. Tada, naudojant Teiloro formulę, funkcijas f ir g galima užrašyti pavidalu
$$f(x) = (x-a)^m \varphi(x) + o\left((x-a)^m\right),$$
$$g(x) = (x-a)^k \psi(x) + o\left((x-a)^k\right),$$
kur $m, k > 0$ ir $\varphi(a) \neq 0 \neq \psi(a)$, nes $f(a) = g(a) = 0$.

Tada
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)^m \varphi(x) + o\left((x-a)^m\right)}{(x-a)^k \psi(x) + o\left((x-a)^k\right)} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)^m}{(x-a)^k} \cdot \frac{\left[(x-a)^m \varphi(x) + o\left((x-a)^m\right)\right] : (x-a)^m}{\left[(x-a)^k \psi(x) + o\left((x-a)^k\right)\right] : (x-a)^k} =$$

$$= \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^m}{(x-a)^k} = ?,$$

priklausomai nuo m ir k reikšmių.

Pavyzdys.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12} + \lim_{x \to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

Pastaba. Teiloro formulės tiesioginis taikymas apytiksliam funkcijos reikšmės radimui ne visoms funkcijoms duoda gerus rezultatus. Pavyzdžiui, mūsų nagrinėtame pavyzdyje su $\ln(1+x)$ vienos dvidešimtosios tikslumui pasiekti prireikė dvidešimties Teiloro formulės narių. Tuo tarpu galima pasiūlyti kitą būdą, kai pasiekiamas tikslumas 10^{-10}, naudojant tik šeštos eilės polinomą (žr., pavyzdžiui, V. Iljino, E. Pozniako knygos "Matematinės analizės pagrindai" 1-ąjį tomą).

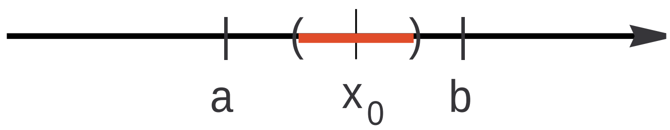
Racionalių algoritmų paieška tokiems ir panašiems uždaviniams spręsti yra vienas pagrindinių matematinės analizės tikslų.

4.12 Apie lokaliuosius ekstremumus

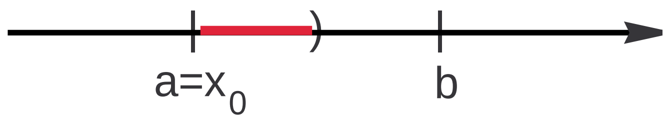
Yra kelios funkcijos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ekstremumo sąvokos. *Globaliojo* ekstremumo atveju funkcija f įgyja didžiausią (mažiausią) reikšmę visame segmente $[a,b]$ ir akivaizdu, kad globalusis minimumas negali viršyti globaliojo maksimumo. Vejerštraso teorema teigia, kad tolydžioji funkcija segmente įgyja savo didžiausią ir mažiausią reikšmes.

Tuo tarpu *lokaliojo* ekstremumo atveju taške x_0, funkcija f įgyja savo ekstremalias reikšmes, kaip taisyklė, tik pakankamai mažoje taško x_0 aplinkoje; tuo atveju, kai $x_0 = a$, ar $x_0 = b$, šnekama apie *vienpusį* ekstremumą (žr. pav. 4.10 ir pav. 4.11). Jau įrodyta Ferma teorema teigia, kad jeigu taškas $x_0 \in (a,b)$ yra funkcijos f lokaliojo ekstremumo taškas ir jame egzistuoja funkcijos išvestinė $f'(x_0)$, tai

$$f'(x_0) = 0.$$



Pav. 4.10: Taško x_0 aplinka



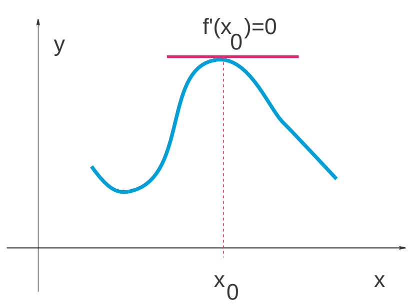
Pav. 4.11: Pusė taško x_0 aplinkos

Paskutinė sąlyga yra vadinama funkcijos f lokaliojo ekstremumo *būtina sąlyga*. Geometriškai ji reiškia, kad funkcijos liestinė taške x_0 turi būti lygiagreti x ašiai.

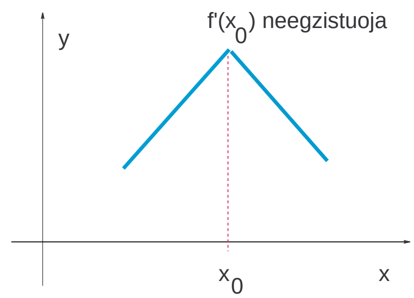
Tokiu būdu, tolydžiosios intervale (a, b) funkcijos lokaliojo ekstremumo taškuose įmanomos tik dvi situacijos:

a) arba funkcijos išvestinė $f'(x_0)$ virsta nuliu (pav. 4.12);
b) arba $f'(x_0)$ neegzistuoja (pav. 4.13).

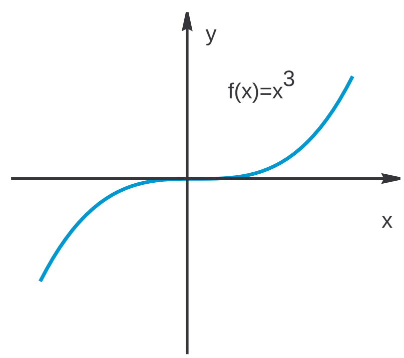
Jeigu tolydžiajai funkcijai f kuri nors iš šių dviejų sąlygų išsipildo, taškas x_0 yra vadinamas *kritiniu* funkcijos f tašku.



Pav. 4.12: Funkcijos išvestinė $f'(x_0)$ virsta nuliu.



Pav. 4.13: $f'(x_0)$ neegzistuoja.



Pav. 4.14: taškas $x_0 = 0$ — kritinis, bet ne ekstremumo taškas

Kritinis taškas gali nebūti ekstremumo tašku. Standartinis pavyzdys — funkcija $f(x) = x^3$, turi kritinį tašką $x_0 = 0$, kuriame funkcijos ekstremumas nepasiekiamas (pav. 4.14). Kada galima tvirtinti, kad funkcija f kritiniame taške pasiekia ekstremumą ?

Teorema 29 (Pakankamos lokaliojo ekstremumo sąlygos, 1-ma taisyklė). *Jeigu diferencijuojama funkcija f:*

a) *turi kritinį tašką x_0, t.y. $f'(x_0) = 0$;*

b) *išvestinė f', einant per tašką x_0 teigiama kryptimi, keičia ženklą.*

Tada kritinis taškas x_0 bus funkcijos f lokaliojo ekstremumo tašku, kuriame pasiekiamas:

a) *maksimumas, jei išvestinės f' ženklas keičiasi iš pliuso į minusą;*

b) *minimumas, jei išvestinės f' ženklas keičiasi iš minuso į pliusą.*

Įrodymas:

a) dalis. Tegu
$$f'(x_0) = 0$$
ir
$$f'(x_0) > 0, \text{k}ai \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0,$$
$$f'(x_0) < 0, \text{k}ai \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon,$$
kur $\varepsilon > 0$ — pakankamai mažas skaičius.

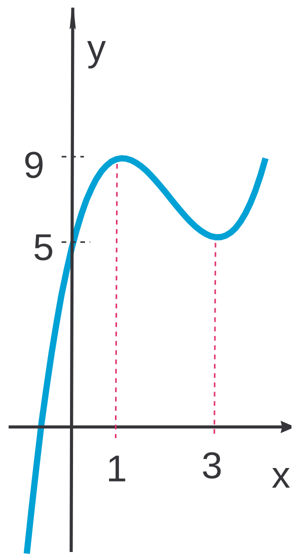
Funkcija f monotoniškai didėja segmente $[x_0 - \varepsilon, x_0]$, kadangi, pagal Lagranžo teoremą, bet kuriems $x_1, x_2 \in [x_0 - \varepsilon, x_0], x_1 < x_2$, atsiras taškas $\xi \in [x_1, x_2]$ toks, kad
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0.$$
Analogiškai, funkcija f monotoniškai mažėja segmente $[x_0, x_0 + \varepsilon]$.

Todėl
$$f(x_0) > f(x), \text{k}ai \quad x > x_0,$$
ir
$$f(x_0) > f(x), \text{k}ai \quad x < x_0,$$
taigi, $f(x_0)$ — funkcijos f lokalusis maksimumas.

Panašus ir **b)** dalies įrodymas.

Pavyzdys. Rasime funkcijos
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$$
lokaliuosius ekstremumus.

Išvestinė
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3),$$
todėl
$$x = 1, \quad x = 3$$



Pav. 4.15: Ieškome funkcijos lokaliųjų ekstremumų.

yra tiriamos funkcijos kritiniai taškai.

Tegu $x = 1$. Pakankamai mažiems $h > 0$ teisingos nelygybės

$$f'(1-h) > 0, \quad f'(1+h) < 0.$$

Taigi taške $x = 1$ funkcija f įgyja maksimumą ir $f(1) = 9$. Analogiškai įsitikiname, kad taške $x = 3$ funkcija f įgyja minimumą ir $f(3) = 5$ (pav. 4.15).

Teorema 30 (Pakankamos lokaliojo ekstremumo sąlygos, 2-a taisyklė). *Tegu diferencijuojama funkcija f:*

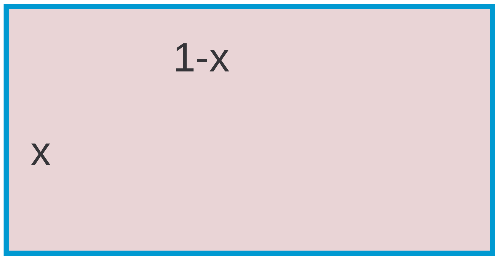
a) *turi kritinį tašką x_0, t.y. $f'(x_0) = 0$;*

b) *egzistuoja $f''(x_0) \neq 0$.*

Tada kritinis taškas x_0 bus funkcijos f lokaliojo ekstremumo tašku, kuriame pasiekiamas:

a) *maksimumas, jei $f''(x_0) < 0$;*

b) *minimumas, jei $f''(x_0) > 0$.*



Pav. 4.16: Ieškomas didžiausio ploto stačiakampis.

Įrodymas:

Jeigu $f'(x_0) = 0$ ir $f''(x_0) > 0$, tai

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)}{h} > 0.$$

Iš šios nelygybės seka, kad

$$\frac{f'(x_0+h)}{h} > 0$$

pakankamai mažiems h.

Todėl

$$f'(x_0+h) > 0, \quad \text{kai} \quad h > 0$$

ir

$$f'(x_0+h) < 0, \quad \text{kai} \quad h < 0,$$

t.y. išvestinės f' ženklas, einant per tašką x_0, keičiasi iš minuso į pliusą. Remiantis Teorema 1, x_0 yra funkcijos f lokaliojo minimumo taškas.

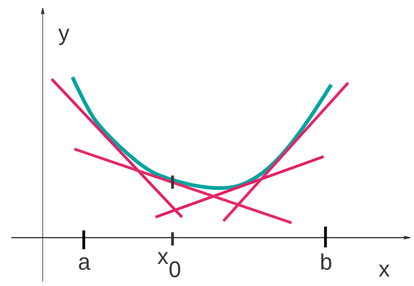
Antroji teoremos dalis įrodoma analogiškai.

Pavyzdys. Tarp stačiakampių, kurių perimetras yra lygus dviems ilgio vienetams, rasime turintį didžiausią plotą (pav. 4.16).

Pažymėkime vienos iš kraštinių ilgį raide x. Tada gretimos kraštinės ilgis bus $1 - x$, o stačiakampio plotas

$$S(x) = x \cdot (1 - x).$$

Kokiam x funkcija $S(x)$ įgyja maksimumą?



Pav. 4.17: Iškila žemyn funkcija.

Skaičiuojame:

$$S'(x) = 1 - 2x, \quad S''(x) = -2.$$

Taigi,

$$S'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

ir

$$S''(x) < 0$$

visiems x, tame tarpe ir $x = \frac{1}{2}$.

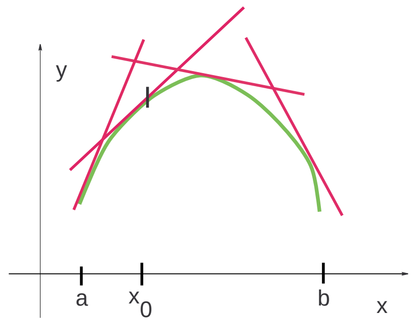
Pagal Teoremą 2 taškas $x = \frac{1}{2}$ yra funkcijos S maksimumo taškas. Todėl maksimalaus ploto stačiakampis, kurio perimetras yra lygus 2, bus kvadratas.

4.13 Funkcijos grafiko iškilumas

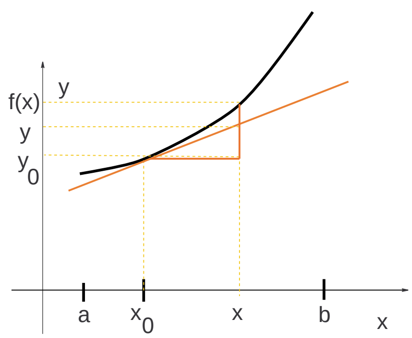
Apibrėžimas 25 . *Sakoma, kad (diferencijuojama) funkcija f yra iškila žemyn intervale (a, b), jei kiekvienam $x_0 \in (a, b)$ funkcijos grafiko liestinė yra po funkcijos grafiku minėtame intervale (pav. 4.17).*

Apibrėžimas 26 . *Jeigu kiekviename atkarpos (a, b) taške liestinė yra virš funkcijos grafiko, sakoma, kad funkcija f yra iškila aukštyn (pav. 4.18).*

Pastaba. Iškilumo sąvoka yra naudojama ir tada, kai funkcija f nėra diferencijuojama. Iškilosios funkcijos yra taip vadinamos *iškilosios analizės* tyrimo objektas.



Pav. 4.18: Iškila aukštyn funkcija.



Pav. 4.19: Teoremos iliustracija

Teorema 31 . *Jeigu funkcijai f intervale (a, b) teisinga nelygybė*

$$f''(x) \geq 0,$$

tai tame intervale funkcija yra iškila žemyn.

Įrodymas:

Tegu $x_0 \in (a, b)$ — bet kuris taškas. Kampą, kurį sudaro funkcijos grafiko liestinė taške x_0 su x ašies teigiama kryptimi, pažymėkime raide α. Tada tg $\alpha = f'(x_0)$ ir (žr. pav. 4.19) liestinės lygtis bus

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0),$$

arba

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Tuo tarpu, remiantis Teiloro formule, galima parašyti lygybę

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2,$$

kur taškas ξ yra tarp x_0 ir x.

Atimkime pirmąją lygybę iš antrosios:

$$f(x) - y = f(x_0) - y_0 + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 =$$

$$= \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

Tačiau pagal teoremos sąlygą paskutinioji lygybės dalis yra visada neneigiama; to ir reikėjo teoremos įrodymui.

Išvada: Jeigu intervale (a, b) funkcijos f antroji išvestinė tenkina nelygybę $f''(x) \leq 0$, funkcija f yra iškila aukštyn.

Įrodymas:

Įsiveskime pagalbinę funkciją $g(x) = -f(x)$. Tada $g''(x) \geq 0$ ir, remiantis teorema, funkcija g yra iškila žemyn. Tuo pačiu funkcija f bus iškila aukštyn.

Pastaba. Funkcijos, kurios antra išvestinė intervale (a, b) yra lygi nuliui, grafikas — tiesė.

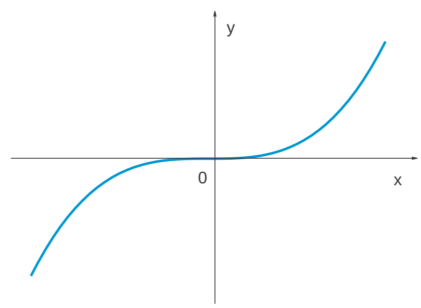
Iš tiesų,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 =$$

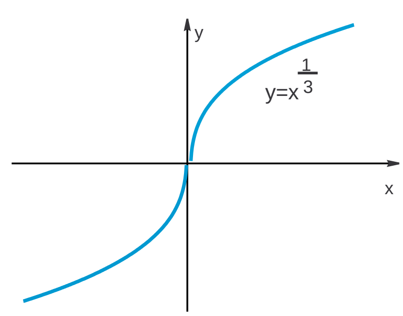
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Kaip matyti, funkcija f priklauso tik nuo x pirmojo laipsnio, o tai įmanoma tik tada, kai funkcijos grafikas — tiesė.

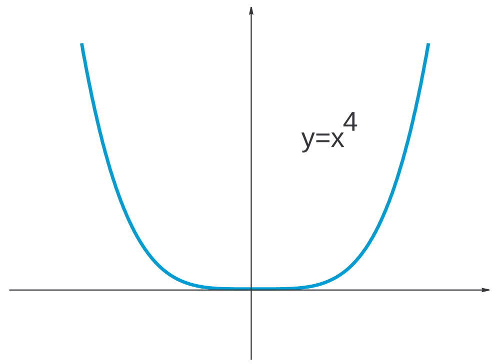
Apibrėžimas 27 . *Taškas x_0 yra vadinamas tolydžiosios šio taško aplinkoje funkcijos f perlinkio tašku, jeigu vienoje taško pusėje funkcija yra iškila aukštyn, o kitoje — žemyn.*



Pav. 4.20:



Pav. 4.21:



Pav. 4.22: Ne tik perlinkio taške antra išvestinė gali būti nulis.

Pavyzdys. Taškas $x_0 = 0$ yra funkcijų $f(x) = x^3$ ir $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ perlinkio taškas: pirmuoju atveju, funkcijos antra išvestinė nulio taške yra lygi nuliui, o antruoju — neegzistuoja (žr. pav. 4.20 ir pav. 4.21).

Teorema 32 *Tegu funkcija f turi antrąją išvestinę taško x_0 aplinkoje ir $f''(x_0) = 0$.*

Jeigu f'' skirtingose taško x_0 pusėse turi skirtingą ženklą, šis taškas yra funkcijos f perlinkio taškas.

Įrodymas:

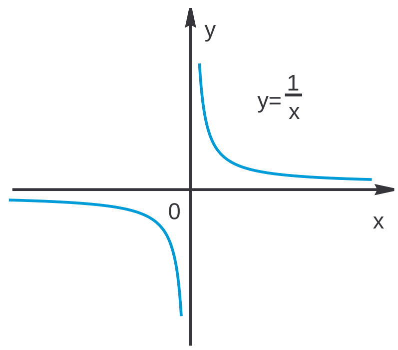
Pakanka pasinaudoti prieš tai įrodyta teorema bei jos išvada ir prisiminti perlinkio taško apibrėžimą.

Pavyzdys (pav. 4.22). Tegu $f(x) = x^4$.

Tada $f''(0) = 0$, tačiau taškas $x = 0$ nebus funkcijos f perlinkio tašku, kadangi f'' yra neneigiama funkcija; taigi nekeičia savo ženklo.

4.14 Funkcijos grafiko asimptotės

Apibrėžimas 28 . *Tiesė $x = a$ yra vadinama funkcijos $y = f(x)$ grafiko vertikaliąja asimptote, jeigu bent viena iš ribų $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ yra begalinė.*



Pav. 4.23: Hiperbolė turi dvi asimptotes

Apibrėžimas 29 . *Tiesė $y = kx + b$ yra vadinama funkcijos $y = f(x)$ grafiko pasvirąja asimptote kai $x \to \infty$, jeigu*

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

Analogiškai yra apibrėžiama funkcijos grafiko asimptotė, kai $x \to -\infty$. Kai $k = 0$, asimptotė vadinama horizontaliąja.

Pavyzdžiai.

1. Hiperbolė, aprašoma funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$, turi horizontaliąją asimptotę — x ašį — ir vertikaliąją asimptotę — y ašį (pav. 4.23).

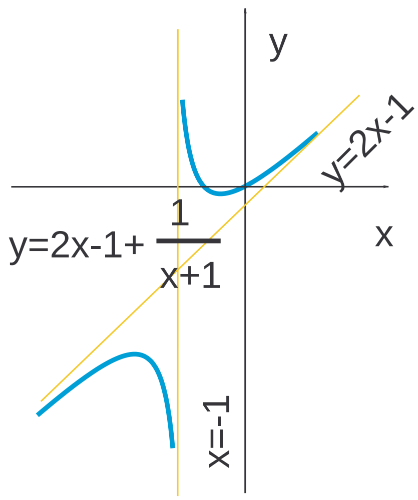
2. Funkcijos $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$ grafikas (pav. 4.24) turi vertikaliąją $x = -1$ ir pasvirąją $y = 2x - 1$ asimptotes.

Teorema 33 (pasvirosios asimptotės radimas). *Funkcijos $y = f(x)$ grafikas turi pasvirąją asimptotę, kai $x \to \infty$, tada ir tik tada, jei*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, *kur* $|k| < \infty$*;*

b) $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b$, *kur* $|k| < \infty$.

Įrodymas:



Pav. 4.24: Dar vienas grafikas su asimptotėmis

Būtinumas. Tegu funkcijos $f(x)$ grafikas turi asimptotę $y = kx + b$, kai $x \to \infty$. Tada

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - (kx+b)}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{kx+b}{x} = 0 + k = k;$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} b = b.$$

Pakankamumas. Tarkime, kad a) ir b) lygybės yra teisingos. Iš b) seka, kad

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx+b)] = 0,$$

o tai pagal apibrėžimą reiškia, kad tiesė $y = kx + b$ yra funkcijos f grafiko pasviroji asimptotė.

Pastaba. Toks pats teiginys teisingas ir tada, kai $x \to -\infty$.

Pavyzdys. Rasime funkcijos

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x+1}$$

asimptotes. Tam pertvarkome reiškinį:

$$\frac{x^2+x}{x+1} = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}.$$

Kaip matyti,

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

ir

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(-1 + \frac{1}{x+1}\right) = -1.$$

Tokiu būdu, tiesė $x = -1$ bus vertikalioji, o tiesė $y = 2x - 1$ — pasviroji nagrinėjamos funkcijos grafiko asimptotė (pav. 4.24).

4.15 Funkcijos tyrimas ir grafikas

Prieš braižant funkcijos grafiką, atliekamas funkcijos tyrimas.

Tuo tikslu:

1. Nustatoma funkcijos apibrėžimo sritis.

2. Ieškomos vertikaliosios ir pasvirosios asimptotės.

3. Randami funkcijos monotoniškumo intervalai bei ekstremumo taškai.

4. Randami funkcijos iškilumo intervalai bei perlinkio taškai.

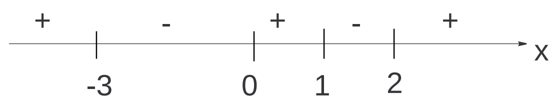
5. Grafiko patikslinimui ieškomi taškai, kuriuose funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis.

Darbą labai palengvina laiku pastebėtos elementarios funkcijos savybės — lyginumas, periodiškumas, funkcijos reikšmių aibės lokalizavimas ir pan.

Kaip pavyzdį ištirsime funkciją

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}.$$

Prisilaikysime pasiūlytos schemos.



Pav. 4.25: Monotoniškumo intervalai

1. Funkcija f yra dviejų polinomų santykis, t.y. racionalioji funkcija, todėl funkcijos apibrėžimo sritis

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{x \mid 4x^2 = 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. a) Kadangi $\lim\limits_{x \to 0\pm} f(x) = -\infty$, tiesė $x = 0$ yra vertikali asimptotė;

b) Ieškome pasvirųjų asimptočių.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{4x} + \frac{14}{4x^2} - \frac{6}{4x^3} \right) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 - 2x^3}{4x^2} = -\frac{5}{4},$$

t.y. tiesė $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$ yra pasviroji asimptotė, ir kai $x \to \infty$, ir kai $x \to -\infty$.

3. Ieškome funkcijos f monotoniškumo intervalų. Skaičiuojame:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{7}{2}x^{-1} - \frac{3}{2}x^{-2} \right)' =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{7}{2}x^{-2} + 3x^{-3} = \frac{x^3 - 7x + 6}{2x^3} = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3}.$$

Norint rasti funkcijos didėjimo intervalus, reikia spręsti nelygybę $f'(x) \geq 0$:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{x^3} \geq 0.$$

Atidedame funkcijos didėjimo-mažėjimo intervalus x ašyje (pav. 4.25) ir nubraižome atitinkamą lentelę (pav. 4.26).

x	<-3	-3	(-3,0)	0	(0,1)	1	(1,2)	2	>2
f(x)	$\nearrow$	$-\frac{49}{12}$	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	$\frac{9}{8}$	$\nearrow$
f'(x)	+	0	-	neegzist	+	0	-	0	+

Pav. 4.26: Pirmoji lentelė

Iš lentelės matyti, kad taškuose $x = -3; x = \frac{5}{4}$ funkcija f pasiekia maksimumą, o taške $x = 2$ — minimumą.

4. Ieškome funkcijos iškilumo intervalų:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2}x^{-2} + 3x^{-3}\right)' = 7x^{-3} - 9x^{-4} = \frac{7x-9}{x^4}.$$

Funkcija f iškila į apačią, kai $f''(x) \geq 0$, t.y.

$$\frac{7x-9}{x^4} \geq 0,$$

arba $x \geq \frac{9}{7}$.

Prisimindami, kad taške $x = 0$ funkcijos f antroji išvestinė neegzistuoja, pildome lentelę (pav. 4.27).

Taškas $x = \frac{9}{7}$ yra funkcijos f perlinkio taškas ir $f\left(\frac{9}{7}\right) = \frac{913}{756}$.

5. Grafikas kerta x ašį, kai $f(x) = 0$, t.y.

$$2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 0,$$

arba

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 - 2x + 6\right) = 0,$$

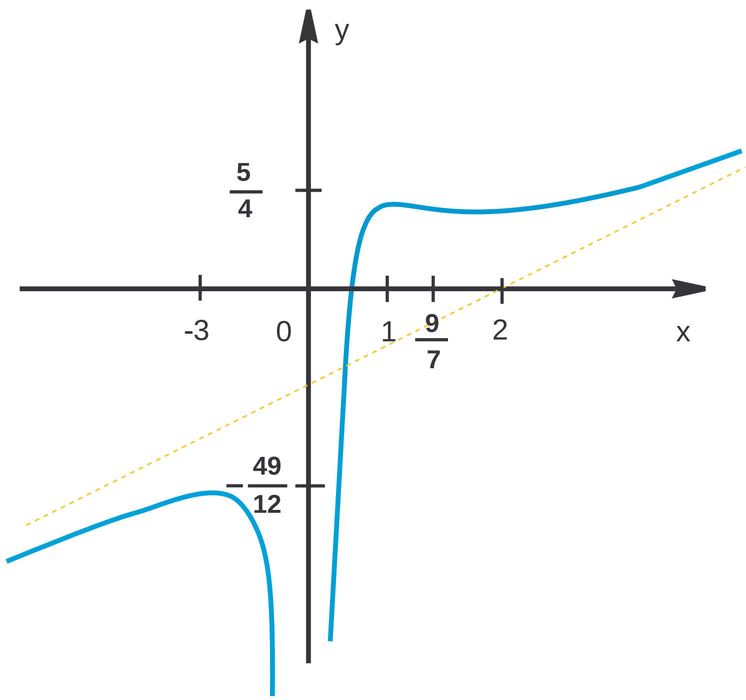
x	< 0	0	$(0, \frac{9}{7})$	$\frac{9}{7}$	$> \frac{9}{7}$
$f(x)$					
$f''(x)$	-	$\nexists$	-	0	+

Pav. 4.27: Antroji lentelė

kas įmanoma tik tada, kai $x = \frac{1}{2}$.

Akivaizdu, kad grafikas y ašies nekerta.

Liko nubrėžti grafiką, atsižvelgiant į turimą informaciją (pav. 4.28).



Pav. 4.28: Funkcijos tyrimas ir grafikas

Skyrius 5

Neapibrėžtinis integralas

5.1 Integralo apibrėžimas

Diferencialiniame skaičiavime nagrinėjama funkcijos f išvestinė f'.

Integraliniame skaičiavime — atvirkščiai: duota funkcija f, ieškoma kita funkcija F tokia, kad būtų teisinga lygybė

$$F' = f.$$

Pastarąją lygybę galima perrašyti kitaip:

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x),$$

arba

$$dF(x) = f(x)\,dx. \tag{1}$$

Apibrėžimas 30 . *Funkcija F yra vadinama funkcijos f pirmykšte funkcija, arba neapibrėžtiniu integralu.*

Atsižvelgiant į lygybę (1), yra vartojamas žymėjimas

$$F(x) = \int f(x)\,dx. \tag{2}$$

Integralas vadinamas neapibrėžtiniu, nes funkcija F nėra nusakoma vienareikšmiškai: juk ne tik $F' = f$, bet ir $(F + const)' = f$, kiekvienai konstantai (t.y.

skaičiui). Taigi, neapibrėžtinis integralas $\int f(x)\,dx$ yra nusakomas tik konstantos tikslumu.

Pavyzdžiai.

1. Apskaičiuosime integralą $\int x^3 dx$.

Šiuo atveju, $f(x) = x^3$ ir reikia atsakyti į klausimą: kokiai funkcijai F yra teisinga lygybė

$$F' = x^3?$$

Tokia funkcija, aišku, bus

$$F(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4.$$

Taigi,

$$\int x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot x^4 + const.$$

Nat$\overline{\text{u}}$raliai kyla klausimas: gal yra ir daugiau funkcijų, kurių išvestinė lygi x^3? Sekanti teorema atsako vienareikšmiškai: nėra.

Teorema 34 . *Tegu F_1, F_2 yra dvi pirmykštės funkcijos funkcijai f kokiame nors intervale. Tada $F_1 - F_2 = const$ tame intervale.*

Įrodymas:

Pagal pirmykštės funkcijos apibrėžimą,

$$F_1' = F_2' = f,$$

o tai reiškia, jog

$$F_1' - F_2' = (F_1 - F_2)' = 0,$$

Bet, kaip jau žinoma iš anksčiau (žr. vidurinės reikšmės teoremas), funkcija, kurios išvestinė intervale yra lygi nuliui, sutampa su pastovia funkcija.

5.2 Neapibrėžtinio integralo savybės

1. Tegu f yra diferencijuojama intervale (a, b) funkcija. Tada

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + const \tag{3}$$

intervale (a, b).

Įrodymas:

Pagal apibrėžimą, integralas $\int f'(x)\,dx$ yra pirmykštė funkcija funkcijai f'. Tai nusakoma lygybe

$$\left(\int f'(x)\,dx\right)' = f'(x)$$

arba ekvivalenčia lygybe

$$\left[\int f'(x)\,dx - f(x)\right]' = 0,$$

galiojančia intervale (a, b). Bet tada laužtiniuose skliaustuose esantis reiškinys turi būti konstanta, kas ekvivalentu lygybei (3) (žr. paskutinę teoremą).

Pastaba. Lygybės (3) interpretavimas.

Prisiminkime išvestinės užrašymą diferencialų pagalba:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x).$$

Įstatydami šią išraišką į lygybės (3) kairiąją pusę, gausime:

$$\int f'(x)\,dx = \int \frac{df}{dx}(x)\,dx = \int df(x) = f(x) + const.$$

Patogu interpretuoti, kad diferencialai dx - tiek integralo, tiek pačios funkcijos f, "anuliuoja" vienas kitą.

2.

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \tag{4}$$

kai $a \neq 0$.

Įrodymas:

(4)-ta lygybė pagal apibrėžimą reiškia, kad

$$\left[\int af(x)\,dx\right]' = \left[a\int f(x)\,dx\right]'.$$

Bet

$$\left[\int af(x)\,dx\right]' = a \cdot f(x),$$

o

$$\left[a\int f(x)\,dx\right]' = a \cdot \left[\int f(x)\,dx\right]' = a \cdot f(x).$$

Matome, kad (4)-tos lygybės kairiosios bei dešiniosios pusių išvestinės iš tiesų sutampa.

3. Tegu f, g — integruojamos intervale (a, b) funkcijos. Tada

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

Įrodymas labai panašus į prieš tai buvusio teiginio įrodymą.
Norima įrodyti lygybė ekvivalenti tokiai:

$$\left[\int [f(x) \pm g(x)]\,dx\right]' = \left[\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right]'.$$

Todėl pakanka pastebėti, kad

$$\left[\int [f(x) \pm g(x)]\,dx\right]' = f(x) \pm g(x)$$

ir

$$\left[\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\right]' = f(x) \pm g(x).$$

4. (**1**-mos savybės apibendrinimas)

$$\int f(g(x))\,dg(x) = \int f(g(x))\,g'(x)\,dx.$$

Tam pakanka pastebėti, kad

$$dg(x) = g'(x)\,dx.$$

Skaičiuojant integralus, dažnai naudojami paprasčiausi šios diferencialų lygybės atvejai:

5. $d(x+a) = dx.$

6. $d(ax) = adx.$

5.3 Integralų lentelė

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + const, (n \neq -1).$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + const, (x \neq 0).$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + const, (a > 0, a \neq 1).$

Atskiru atveju,

$\int e^x dx = e^x + const.$

4. $\int \cos x dx = \sin x + const.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + const.$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + const.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg } x + const.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + const,$

arba

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + const.$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } x + const,$

arba

$\int \frac{dx}{1+x^2} = -\text{arcctg } x + const.$

10. $\int \frac{dx}{1-x^2} == \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + const.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + const.$

12. $\int \text{sh } x dx = \text{ch } x + const.$

13. $\int \text{ch } x dx = \text{sh } x + const.$

Pavyzdžiai.

1. $\int \cos 2x dx =$

naudojamės **5**-ta diferencialo savybe iš atitinkamo skyrelio)

$$= \int \frac{1}{2} \cos 2x d\left(2x\right) = \frac{1}{2} \int \cos 2x d\left(2x\right) =$$

(darome keitinį $t = 2x$)

$$= \frac{1}{2} \sin 2x + const.$$

2. $\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{d(x+a)}{x+a} =$

(darome keitinį $t = x + a$)

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + const = \ln |x + a| + const.$$

3. $\int e^{\cos x} \sin x dx =$

$$= -\int e^{\cos x} \left(\cos x\right)' dx = -\int e^{\cos x} d \cos x =$$

darome keitinį $t = \cos x$)

$$= -\int e^t dt = -e^t + const = -e^{\cos x} + const.$$

4. $\int \frac{(\text{arctg } x)^{100}}{1+x^2} dx =$

$$= \int \left(\text{arctg } x\right)^{100} \left(\text{arctg } x\right)' dx =$$

(darome keitinį $t = \text{arctg } x$)

$$= \int t^{100} dt = \frac{1}{101} t^{101} + const = \frac{1}{101} \text{arctg }^{101} x + const.$$

5. $\int \left(7x - 9\right)^3 dx =$

$$= \frac{1}{7} \int \left(7x - 9\right)^3 d\left(7x - 9\right) = \frac{1}{28} \left(7x - 9\right)^4 + const.$$

5.4 Integravimas dalimis

Jei u, v — diferencijuojamos funkcijos, tai, kaip gerai žinoma,

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

Diferencialinė šios lygybės išraiška:

$$d\,(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv.$$

Jei funkcijos $u' \cdot v$, $u \cdot v'$ yra integruojamos (t.y. joms egzistuoja pirmykštės funkcijos), tai

$$u \cdot v = \int d\,(u \cdot v) = \int v \cdot du + \int u \cdot dv.$$

Pertvarkius pilnas užrašas bus:

$$\int u\,(x) \cdot dv\,(x) = u\,(x) \cdot v\,(x) = -\int v\,(x) \cdot du\,(x)\,.$$

Tai yra **integravimo dalimis formulė**.

Taikymo pavyzdžiai:

1. $\int 2x \ln x dx = \int \ln x dx^2$.

Pažymėkime $u = \ln x, v = x^2$ ir pritaikykime dalinio integravimo formulę:

$$\int \ln x dx^2 = x^2 \cdot \ln x - \int x^2 d \ln x = x^2 \cdot \ln x - \int x dx = x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 + const.$$

2. $\int x^2 \cdot \cos x dx =$

$$= \int x^2 d \sin x = x^2 \cdot \sin x - \int \sin x dx^2 =$$
$$= x^2 \cdot \sin x - 2\int x \sin x dx = x^2 \cdot \sin x + 2\int x d \cos x =$$
$$= x^2 \cdot \sin x + 2x \cos x - \sin x + const.$$

Jei skaičiuosime kitaip:

$$\int x^2 \cdot \cos x dx = \tfrac{1}{3}\int \cos x dx^3 =$$
$$= \tfrac{1}{3}x^3 \cos x - \tfrac{1}{3}\int x^3 d \cos x = \tfrac{1}{3}x^3 \cos x + \tfrac{1}{3}\int x^3 \sin x dx =$$
$$= \tfrac{1}{3}x^3 \cos x + \tfrac{1}{12}x^4 \sin x - \tfrac{1}{12}\int x^4 \cos x dx = \ldots$$

tai nieko gero negausime, tik padidinsime po integralu x'o laipsnį.

5.5 Integralas ir rekurentiškumas

Yra integralų, kurie skaičiuojami *rekurentiniu* būdu.

Diferencialinių lygčių kurse reikalingas integralas

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx, (a \neq 0 \neq b) .$$

Suraskime jį.

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx =$$
$$= \frac{1}{b} \int e^{ax} d \sin bx = \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx =$$
$$= \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

Gauname lygtį ieškomo integralo atžvilgiu:

$$I = \frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \cdot I.$$

Sprendžiame šią lygtį I atžvilgiu:

$$I = \int e^{ax} \cos bx dx =$$
$$= \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{b} e^{ax} \cdot \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx\right) =$$
$$= e^{ax} \cdot \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} + const.$$

Kitas svarbus pavyzdys:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Kai $n = 1$, šis integralas yra integralų lentelėje.
Tegu $n \geq 2$. Pertvarkome integralą:

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} =$$

$$= \int \frac{\left[(x^2+1) - x^2\right] dx}{(x^2+1)^n} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n}.$$

Priešpaskutinysis šios išraiškos integralas yra lygus I_{n-1}, o paskutinįjį skaičiuojame toliau:

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{xd\left(x^2+1\right)}{(x^2+1)^n} =$$

$$= \frac{1}{2\left(1-n\right)} \int xd\left(x^2+1\right)^{1-n} =$$

$$= -\frac{1}{2\left(n-1\right)} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2\left(n-1\right)} \cdot I_{n-1}.$$

Todėl,

$$I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2\left(n-1\right)} \cdot \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2\left(n-1\right)} \cdot I_{n-1} =$$

$$= \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1} + \frac{1}{2\left(n-1\right)} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

Taigi, integralą I_n rasime, jei prieš tai surasime integralą I_{n-1}.

Tokio pavidalo lygtys yra vadinamos *rekurentinėmis*.

Kaip paprasčiausią pavyzdį suskaičiuosime integralą I_2 (naudojamės integralų lentele):

$$I_2 = \frac{1}{2} I_1 + \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} =$$
$$= \frac{1}{2} \text{arctg}\, x + \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + const.$$

5.6 Racionaliosios funkcijos integralas

Integralų lentelėje išvardinti paprasčiausi integralai, kurie skaičiuojami baigtinės elementariųjų funkcijų kombinacijos pagalba.

Tačiau, tai teisinga toli gražu ne visiems integralams. Kaip pavyzdį pateiksime integralus

$$\int e^{x^2} dx, \int \sin x^2 dx.$$

Todėl kyla natūralus klausimas: kokių funkcijų integralai yra išreiškiami baigtinės elementariųjų funkcijų kombinacijos pagalba?

Svarbi tokių funkcijų klasė yra *racionaliosios* funkcijos, kurios užrašomos dviejų polinomų santykio pagalba:

$$R(x) := \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \tag{1}$$

čia P_n, Q_m — polinomai, R — racionalioji funkcija. Priminsime, kad n-tosios eilės polinomas — tai funkcija, kurios pavidalas

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n,$$

čia $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n$. Tokiu būdu, pastovi funkcija yra nulinės eilės polinomas.

Kas žinotina apie polinomus?

1. Jei du polinomai įgyja tas pačias reikšmes visiems x, jų koeficientai būtinai sutampa.

2. Kiekvienas polinomas gali būti išreikštas tiesinių daugiklių, turinčių pavidalą $ax + b$, ir kvadratinių neskaidžių trinarių $ax^2 + bx + c$ sandaugos pagalba.

Sugrįžkime prie racionaliosios funkcijos. Aišku, pats polinomas yra racionalioji funkcija.

Apie racionaliąją funkciją yra šnekama kaip apie *taisyklingą racionaliąją trupmeną*, jei jos apibrėžime skaitiklyje esančio polinomo laipsnis yra mažesnis už vardiklio polinomo laipsnį, t.y. $m < n$.

Lygiai taip, kaip racionalųjį skaičių galima užrašyti sveikojo skaičiaus ir taisyklingos trupmenos pagalba, taip racionaliąją funkciją galima užrašyti polinomo ir taisyklingos racionaliosios trupmenos pagalba.

Pavyzdžiai.

1. $\frac{x^4}{x^3-1} = x + \frac{x}{x^3-1}$.

2. $R(x) == \frac{x^6}{x^2+x+1} = x^4 - x^3 + x - 1 + \frac{1}{x^2+x+1}$.

Pastarąjį skaidinį galima gauti, pavyzdžiui, dalinant skaitiklį iš vardiklio stulpeliu.

Yra žinoma, kad taisyklingą racionaliąją trupmeną galima išskaidyti paprastesnių taisyklingų racionaliųjų trupmenų sumos pagalba. Pastarųjų vardiklio pavidalas yra $(ax+b)^k$, arba $(ax^2+bx+c)^k$, kur $k \in \mathbb{N}$.

Išskirsime keturis atvejus:

1. Tiesinis narys $ax + b$ pradinės trupmenos vardiklyje pasirodo pirmuoju laipsniu.

Tada skaidinyje jį atitiks trupmena

$$\frac{A}{ax+b},$$

kur konstantą A reikia surasti.

2. Narys $ax+b$ pradinės trupmenos vardiklyje pasirodo laipsniu k, aukštesniu, nei vienetas.

Skaidinyje jį atitiks trupmena

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_k}{(ax+b)^k},$$

kur konstantos $A_1, A_2, ..., A_k$ turi būti surastos.

3. Pradinės trupmenos vardiklyje yra neskaidus kvadratinis trinaris ax^2+bx+c, kurio aukščiausias laipsnis $k = 1$.

Jį atitinka trupmena

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c},$$

kur konstantas A ir B reikia surasti.

4. Trinario ax^2+bx+c aukščiausias laipsnis $k>1$.

Jį atitinka trupmena

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{\left(ax^2+bx+c\right)^2}+...+\frac{A_kx+B_k}{\left(ax^2+bx+c\right)^k},$$

kur $A_i, B_i, i=1,...,k$ — nežinomos konstantos.

Pavyzdžiai. Reikia išskaidyti racionaliąją trupmeną į paprasčiausiųjų trupmenų sumą.

1.

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{x}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=$$

$$\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(A+B)x-(2A+B)}{(x-1)(x-2)}.$$

Sulyginame kairiąją lygybės pusę su dešiniąja. Tam turi būti teisingos lygybės

$$A+B=1,$$

$$2A+B=0,$$

iš kurių seka, kad $A=-1, B=2$.

Taigi,

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}.$$

2. Šiame pavyzdyje pradinė trupmena yra netaisyklinga. Todėl atliekame pradinį skaidymą:

$$\frac{x^4+x^3+2}{x^3+x^2-x-1}=$$

$$=\frac{\left(x^4+x^3-x^2-x\right)+\left(x^2+x+2\right)}{x^3+x^2-x-1}=$$

$$= x + \frac{x^2 + x + 2}{(x+1)^2 (x-1)};$$

Skaidome gautąją taisyklingą trupmeną:

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x+1)^2 (x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} =$$

$$= \frac{A(x^2-1) + B(x-1) + C(x+1)^2}{(x+1)^2 (x-1)}.$$

Sulyginame koeficientus prie atitinkamų x'o laipsnių:

$$\begin{array}{lrcl} x^2: & A + C = 1 & & A = 0, \\ x^1: & B + 2C = 1 & \Rightarrow & B = -1, \\ x^0: & -A - B + C = 2 & & C = 1. \end{array}$$

Todėl

$$\frac{x^4 + x^3 + 2}{x^3 + x^2 - x - 1} = x - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1}.$$

Racionaliosios funkcijos integravimas

Kaip jau minėjome, racionaliąją funkciją galima išskaidyti į sumą, kurios dėmenys yra polinomas ir specialaus pavidalo racionaliosios taisyklingos trupmenos. Todėl, norint suskaičiuoti racionaliosios funkcijos integralą, pakanka mokėti elgtis su tokiais integralais:

1. $\int P_n(x)\,dx$, kur P_n — polinomas;

2. $\int \frac{dx}{(x-a)^k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R}$;

3. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b^2)^k} dx, \quad k \in \mathbb{N}, \quad A, B, a, b \in \mathbb{R}$.

1. Tegu $P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$.
Tada

$$\int P_n(x)\,dx = a_0 \int dx + a_1 \int x dx + ... + a_n \int x^n dx =$$

$$= a_0 \cdot x + \frac{a_1}{2} x^2 + ... + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + const.$$

2. Visų pirma,

$$\int \frac{dx}{(x-a)} = \ln|x-a| + const$$

(žr. integralų lentelę).

Tegu $k > 1$. Skaičiuojame integralą:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} =$$

$$= \int (x-a)^{-k}\, d\,(x-a) = \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + const.$$

3. Skaidome:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b^2)^k} dx =$$

$$= \frac{1}{2}A \cdot \int \frac{(2x+a)}{(x^2+ax+b^2)^k} dx + \left(B - \frac{1}{2}A \cdot a\right) \int \frac{dx}{(x^2+ax+b^2)^k}.$$

Suskaičiuosime pirmąjį sumos integralą:

$$\int \frac{(2x+a)}{(x^2+ax+b^2)^k} dx = \int \frac{(x^2+ax+b^2)'}{(x^2+ax+b^2)^k} dx =$$

$$= \int \left(x^2+ax+b^2\right)^{-k} d\left(x^2+ax+b^2\right) =$$

$$= \begin{cases} \ln\left(x^2+ax+b^2\right) + const, & \text{kai} \quad k=1, \\ \frac{\left(x^2+ax+b^2\right)^{1-k}}{1-k} + const, & \text{kai} \quad k>1. \end{cases}$$

Po logaritmu nerašėme modulio ženklo, nes kvadratinis trinaris $x^2 + ax + b^2$ yra visada teigiamas (kodėl ?).

Skaičiuojame likusį integralą:

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+ax+b^2\right)^k} = \int \frac{d\left(x+\frac{a}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)\right]^k} =$$

(pažymime $t := x + \frac{a}{2}, \quad \tilde{a}^2 := b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$)

$$= \int \frac{dt}{\left(t^2+\tilde{a}^2\right)^k} = \frac{1}{\tilde{a}} \int \frac{d\left(\frac{t}{\tilde{a}}\right)}{\left[\left(\frac{t}{\tilde{a}}\right)^2+1\right]^k} =$$

(pažymime $\tau := \frac{t}{\tilde{a}}$)

$$= \frac{1}{\tilde{a}} \int \frac{d\tau}{\left[\tau^2+1\right]^k}.$$

O tokį integralą jau skaičiavome prieš tai buvusiame skyrelyje).

Todėl, kaip išvadą, suformuluosime teoremą.

Teorema 35 . *Racionaliosios funkcijos integralas konstantos tikslumu yra elementarioji funkcija.*

Pavyzdžiai:

1. $\int \frac{x}{x^2-3x+2} dx =$

$$= -\int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{x-2} = -\ln(x-1) + 2\ln(x-2) + const.$$

2. $\int \frac{x^4+x^3+2}{x^3+x^2-x-1} dx =$

$$= \int x dx - \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{x-1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x+1} + \ln(x-1) + const.$$

(po integralu esanti funkcija buvo išskaidyta pirmoje šio skyrelio dalyje).

5.7 Kitų funkcijų integravimas

1. $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$,

kur $R(x,y)$ — dviejų kintamųjų x ir y racionalioji funkcija.
Pagal apibrėžimą $R(x,y)$ yra polinomų $P(x,y)$ ir $Q(x,y)$ santykis. Dviejų kintamųjų polinomas turi pavidalą

$$P(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_{11} x^2 +$$

$$+ a_{12} xy + a_{22} y^2 + a_{111} x^3 + a_{112} x^2 y + a_{122} xy^2 + a_{222} y^3 + \ldots$$

ir sumoje yra baigtinis dėmenų skaičius. Jeigu y pakeisti x'ais, tai gautojo vieno kintamojo polinomo laipsnis bus vadinamas *dviejų kintamųjų polinomo laipsniu.*

Pavyzdys. $P(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_{11} x^2 + a_{12} xy + a_{22} y^2$ yra bendras antros eilės polinomo pavidalas.

Sugrįžkime prie integralo. Pastebėsime, kad sudėtinė funkcija

$$P(\sin x, \cos x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \cos x + a_{11} \sin^2 x + a_{12} \sin x \cos x + a_{22} \cos^2 x + \ldots,$$

bei funkcijos $Q(\sin x, \cos x)$ ir $R(\sin x, \cos x)$ priklausys tik nuo x'o.

Teorema 36 . *Integralas* $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ *konstantos tikslumu yra elementarioji funkcija.*

Įrodymas:

Tegu $t = \mathrm{tg}\, \frac{x}{2}$. Tada

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\mathrm{tg}\, \frac{x}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int \cos^2 \frac{x}{2} R(\sin x, \cos x)\, d\mathrm{tg}\, \frac{x}{2} =$$

$$= 2 \int \frac{1}{1+t^2} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) dt = I(t).$$

Pointegrinė funkcija, kaip matyti, yra racionalioji t atžvilgiu, taigi (žr. ankstesniojo skyrelio teoremą) integralas I konstantos tikslumu yra elementarioji funkcija. Vietoje t įstatę tg $\frac{x}{2}$, gauname, kad integralas

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = I\left(\text{tg}\, \frac{x}{2}\right)$$

taip pat konstantos tikslumu yra elementarioji funkcija.

Pavyzdys.

$$\int \frac{dx}{1 + 2\cos x} =$$

(keičiame: $t :=$ tg $\frac{x}{2}$)

$$= \int \frac{2}{1+t^2} \frac{dt}{1 + 2 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{3 - t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right| + const = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln\left|\frac{\sqrt{3}+\text{tg}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\text{tg}\,\frac{x}{2}}\right| + const.$$

Pastaba. Nors nagrinėjamoje funkcijų klasėje keitinys $t =$ tg $\frac{x}{2}$ yra universalus, ne visada yra tikslinga juo naudotis. Priklausomai nuo situacijos, naudojami keitiniai $t = \sin x, t = \cos x, t =$ tg x ir kiti.

Pavyzdys 1.

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + const.$$

Pavyzdys 2.

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{\text{tg}\, x d\text{tg}\, x}{\text{tg}\,^4 x + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\text{tg}\,^2 x}{\text{tg}\,^4 x + 1} = \frac{1}{2}\text{arctg}\,\left(\text{tg}\,^2 x\right) + const.$$

2. $\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, kur $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Jeigu $ad - bc = 0$, po integralu esanti funkcija priklausys tik nuo pirmojo savo argumento (antrasis — pastovus skaičius), todėl bus racionalioji x'o atžvilgiu funkcija.

Tegu $ad - bc \neq 0$. Darome keitinį

$$t := \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

po kurio R tampa racionaliąja t atžvilgiu funkcija, kadangi bus

$$x = -\frac{dt^n - b}{ct^n - a}.$$

Pavyzdys. Suskaičiuosime integralą

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}.$$

Darome keitinį

$$t := \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Tada

$$t^2 = \frac{1+x}{1-x}, \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4tdt}{(t^2+1)^2}.$$

Todėl

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{dx}{1-x} =$$

$$= 2\int \frac{t^2 dt}{t^2+1} = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2t - 2\text{arctg}\ t + const =$$

$$= 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\text{arctg}\,\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + const.$$

Mes aptarėme tik dvi funkcijų klases, kurių integralas keitinio dėka tampa racionaliosios funkcijos integralu.

Dabar pateiksime dar vieną pavyzdį.

Pavyzdys. $I(x) = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Keičiame

$$t := x + \sqrt{x^2+x+1}.$$

Tada

$$(t-x)^2 = x^2 + x + 1,$$

o iš to seka

$$x = \frac{t^2-1}{1+2t}, \quad dx = 2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt.$$

Įstatome į pradinę išraišką:

$$I = 2\int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt =$$

(skaidome gautą racionaliąją trupmeną neapibrėžtųjų koeficientų metodo pagalba)

$$= \int \left[\frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2}\right] dt.$$

Pastebime, kad $A = 2, B = C = -3$, todėl

$$I = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)} + const =$$

$$= 2\ln\left|x + \sqrt{x^2+x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right| + \frac{3}{2\left(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right)} + const.$$

Pastaba. Šiame pavyzdyje buvo naudotas taip vadinamas *Oilerio keitinys.* Su dar vienu keitiniu susidursime kiek vėliau, skaičiuodami plotus bei tūrius.

5.8 Apie elipsinius integralus

Tik maža elementariųjų funkcijų integralų dalis konstantos tikslumu yra elementariosios funkcijos. Pavyzdžiui, galima įrodyti, kad integralai

$$\int e^{-x^2}dx, \int \frac{\sin x}{x}dx$$

nėra "elementar$\overline{\text{u}}$s".

"Neelementar$\overline{\text{u}}$s" ir toliau išvardinti integralai, dar vadinami *elipsiniais*:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

kur $0 < k < 1.$

Realiuose uždaviniuose pasitaikantys integralai, tarp jų ir elipsiniai, kaip taisyklė, — "neintegruojami ". Bet tai nereiškia, kad juos gaubia nežinia. Tiesiog reikia įsisavinti kitus integravimo metodus; tai ir bus daroma toliau.

Taip pat dar neatsakyta į klausimą, kokioms funkcijoms integralas, t.y. pirmykštė funkcija, egzistuoja. Užbėgdami už akių, pasakysime, kad atskiru atveju, jeigu f — tolydžioji intervale (a, b) funkcija, tai integralas $\int f(x)\,dx$ turi prasmę.