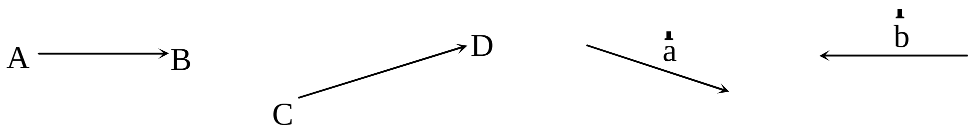
VEKTORINĖ ALGEBRA

1. Vektoriaus sąvoka

Dydžiai, su kuriais tenka susidurti matematikoje, mechanikoje ir kituose moksluose, yra dviejų rūšių: vienus iš jų, kaip kampą, temperatūrą, masę ir t.t., apibūdina vien skaičius; kiti, kaip jėga, greitis, pagreitis ir t.t., yra visiškai apibrėžti, jei duotas ne tik jų dydis, išreikštas skaičiumi, bet ir jų kryptis erdvėje. Pirmosios rūšies dydžius vadiname *skaliariniais* dydžiais, antrosios – *vektoriniais*. Geometriškai vektorinį dydį galima išreikšti duotos krypties atkarpa.

Nurodytos krypties atkarpa vadinama *vektoriumi* ir žymima dviem didžiosiomis raidėmis ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$), arba viena mažąja raide ($\vec{a}$, $\vec{b}$).



Atstumas tarp vektoriaus pradžios ir galo – vektoriaus ilgis, arba *modulis* – žymimas $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{CD}|$ arba $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$.

Vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse esantys vektoriai vadinami *kolineariaisiais*. Kolinearūs vektoriai žymimi $\vec{\mathbf{a}} \,||\, \vec{\mathbf{b}}$.

Vektoriai, esantys vienoje plokštumoje arba lygiagrečiose plokštumose, vadinami *komplanariaisiais*.

Vienodo ilgio ir tos pačios krypties vektoriai vadinami *lygiais*. Žymima $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$.

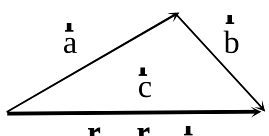
Vienodo ilgio, bet priešingos krypties vektoriai, vadinami *priešingais*. Žymima $\vec{\mathbf{a}} = -\vec{\mathbf{b}}$.

Vektorius, kurio ilgis (modulis) lygus 1, vadinamas *vienetiniu* vektoriumi, arba *ortu*.

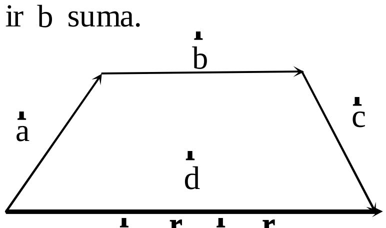
Vektorius, kurio pradžios taškas sutampa su galu, vadinamas *nuliniu* vektoriumi.

Vektorių sudėtis

1. *Trikampio taisyklė*. Sudedant du vektorius $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, prie vektoriaus $\vec{a}$ galo pridedama vektoriaus $\vec{b}$ pradžia. Vektorius, jungiantis pirmojo vektoriaus pradžią su antrojo vektoriaus galu, ir vadinamas vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ suma.

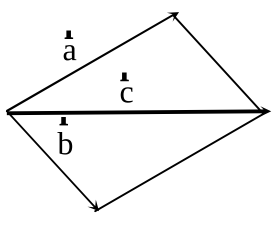


$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



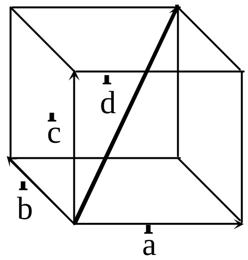
$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

2. *Lygiagretainio taisyklė*. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ suma laikoma įstrižainė lygiagretainio, kurio kraštinės yra du duotieji vektoriai.



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$

3. *Gretasienio taisyklė*. Trijų nekomplanarių vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, atidėtų iš vieno taško, suma laikoma gretasienio įstrižainė, išvesta iš to paties taško.



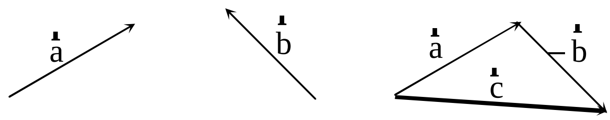
$$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Vektorių sumos savybės

1) *Komutatyvumas*, .t.y. $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$.
2) *Asociatyvumas*, t.y. $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}})$.

Vektorių atimtis

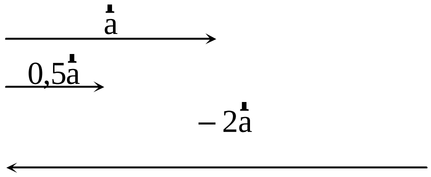
Norint rasti vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skirtumą, reikia prie vektoriaus $\vec{a}$ pridėti vektorių, priešingą vektoriui $\vec{b}$, t.y. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}.$$

Vektoriaus daugyba iš skaičiaus

Vektoriaus $\vec{a}$ ir skaičiaus m sandauga vadinamas vektorius, turintis vektoriaus $\vec{a}$ kryptį, jei m>0, arba priešingą kryptį, jei m<0, to vektoriaus ilgis lygus $|\vec{a}|$ ir m sandaugai.

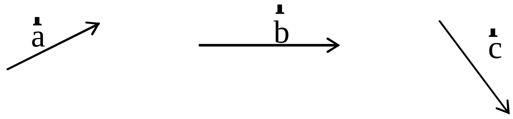


Vektoriaus daugybos iš skaičiaus savybės

1) *Asociatyvumas*, t.y. $\mathbf{m}(\mathbf{n}\vec{\mathbf{a}}) = (\mathbf{mn})\vec{\mathbf{a}}$.
2) *Distributyvumas*, t.y. $(\mathbf{c} + \mathbf{d})\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{c}\vec{\mathbf{a}} + \mathbf{d}\vec{\mathbf{a}}$ **ir** $\mathbf{c}(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \mathbf{c}\vec{\mathbf{a}} + \mathbf{c}\vec{\mathbf{b}}$.

Pratimai

1. Duoti vektoriai:

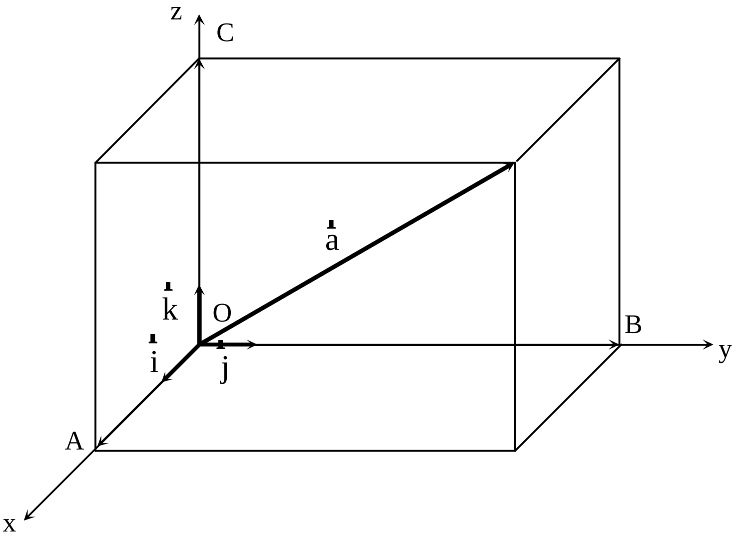


Nubrėžkite vektorius: 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{b} - \vec{a}$; 3) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; 4) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; 5) $2\vec{a} + \vec{c}$; 6) $0{,}5\vec{a} - \vec{b}$; 7) $2(\vec{a} - \vec{b}) + 0{,}5\vec{b}$; 8) $2(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$.

2. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ir $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.

Raskite: 1)$\overrightarrow{AC_1}$; 2)$\overrightarrow{BD}$; 3)$\overrightarrow{AC}$; 4)$\overrightarrow{CC_1}$; 5)$\overrightarrow{A_1C_1}$; 6)$\overrightarrow{A_1B}$; 7)$\overrightarrow{B_1C}$; 8)$\overrightarrow{B_1D}$; 9)$\overrightarrow{A_1C}$.

2. Vektoriaus koordinatės



Nustatysime koordinates vektoriaus $\vec{a}$, kurio pradžia sutampa su *stačiakampės Dekarto koordinačių sistemos* pradžia. Pirmiausia randame vektoriaus $\vec{a}$ projekcijas koordinačių ašyse. Tai bus atkarpos OA, OB ir OC. Koordinačių ašyse atidedame vienetinius vektorius (ortus) $\vec{i}$, $\vec{j}$ ir $\vec{k}$ (vektoriai $\vec{i}$, $\vec{j}$ ir $\vec{k}$ vadinami *erdvės stačiakampe baze*) ir per juos išreiškiame vektorius $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{OC}$. Jeigu OA 5 x, OB 5 y ir OC 5 z, tai $\overrightarrow{OA} = x\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = y\vec{j}$ ir $\overrightarrow{OC} = z\vec{k}$. Pagal vektorių sudėties gretasienio taisyklę turėsime: $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{x}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z}\vec{\mathbf{k}}$. Skaičiai **x, y** ir **z** vadinami *vektoriaus koordinatėmis*. Tai galima užrašyti ir taip $\vec{\mathbf{a}}$ 5 **(x;y;z).** Taigi,

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}}\ 5\ (\mathbf{x;y;z}) = \mathbf{x}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z}\vec{\mathbf{k}}}$$

Vektoriaus *modulį* rasime du kartus pasinaudoję Pitagoro teoremą arba prisiminę stačiakampio gretasienio įstrižainės savybę, kad stačiakampio gretasienio įstrižainės kvadratas lygus trijų jo matmenų kvadratų sumai: $|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ arba

$$\boxed{|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2}}$$

Veiksmai su vektoriais, išreikštais koordinatėmis

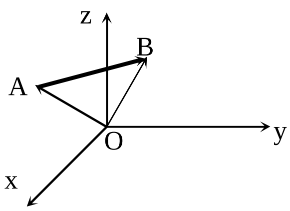
Sakykime, duoti du vektoriai $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = (x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} = (x_2; y_2; z_2)$, tai

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} \pm \vec{\mathbf{b}} = (\mathbf{x_1} \pm \mathbf{x_2})\vec{\mathbf{i}} + (\mathbf{y_1} \pm \mathbf{y_2})\vec{\mathbf{j}} + (\mathbf{z_1} \pm \mathbf{z_2})\vec{\mathbf{k}} = (\mathbf{x_1} \pm \mathbf{x_2}; \mathbf{y_1} \pm \mathbf{y_2}; \mathbf{z_1} \pm \mathbf{z_2});}$$

$$\boxed{\mathbf{m}\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{mx_1}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{my_1}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{mz_1}\vec{\mathbf{k}} = (\mathbf{mx_1}; \mathbf{my_1}; \mathbf{mz_1})}.$$

Sudedant du vektorius, jų koordinatės sudedamos, o atimant – atimamos. Dauginant vektorių iš skaičiaus, jo koordinatės dauginamos iš to paties skaičiaus.

Vektoriaus $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ koordinatės



Sakykime, duoti taškai A(x_1;y_1;z_1) ir B(x_2;y_2;z_2). Reikia rasti vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates. Brėžiame vektorius $\overrightarrow{OA}$ ir $\overrightarrow{OB}$. Tada $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}; \mathbf{y_2} - \mathbf{y_1}; \mathbf{z_2} - \mathbf{z_1})$. Taigi,

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (\mathbf{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1})}$$

Turėdami vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates galime rasti vektoriaus modulį (atkarpos ilgį):

$$\boxed{\left|\overrightarrow{\mathbf{AB}}\right| = \mathbf{AB} = \sqrt{(\mathbf{x_2 - x_1})^2 + (\mathbf{y_2 - y_1})^2 + (\mathbf{z_2 - z_1})^2}\,\mathbf{.}}$$

Dviejų vektorių kolinearumo sąlyga

Duoti du kolinearūs vektoriai $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ir $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Jeigu šie vektoriai kolinearūs (lygiagretūs), tai visada galima surasti tokį skaičių m, kad galiotų lygybė $\vec{a} = m\vec{b}$,

$$(x_1; y_1; z_1) = m(x_2; y_2; z_2) \Rightarrow (x_1; y_1; z_1) = (mx_2; my_2; mz_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = mx_2, \\ y_1 = my_2, \\ z_1 = mz_2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{x_2} = m, \\ \dfrac{y_1}{y_2} = m, \\ \dfrac{z_1}{z_2} = m; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}}}.$$

Dviejų kolinearių vektorių atitinkamos koordinatės proporcingos.

Atkarpos dalijimas duotuoju santykiu

Duoti atkarpos galai A(x_1;y_1;z_1) ir B(x_2;y_2;z_2). Reikia rasti koordinates tokio taško C(x;y;z), kuris dalija atkarpą AB santykiu $\frac{AC}{CB} = l$. Įvedame vektorius $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{CB}$. Šių vektorių koordinatės bus $\overrightarrow{AC} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$ ir $\overrightarrow{CB} = (x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z)$. Jeigu $\frac{AC}{CB} = l$, tai $AC = l\,CB$ ir $\overrightarrow{AC} = l\,\overrightarrow{CB}$. Įstatę koordinates gausime

$$(x - x_1; y - y_1; z - z_1) = (lx_2 - lx;\ ly_2 - ly;\ lz_2 - lz) \Rightarrow \begin{cases} x - x_1 = lx_2 - lx, \\ y - y_1 = ly_2 - ly, \\ z - z_1 = lz_2 - lz; \end{cases}$$

Išsprendę šias lygtis gausime taško C koordinates:

$$\boxed{\mathbf{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}}}.$$

Jeigu atkarpą reikia padalinti pusiau, tai $l = 1$ ir formulės atrodys taip:

$$\boxed{\mathbf{x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}\ ir\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}}}.$$

Pavyzdžiai

1. Duoti vektoriai $\vec{a}=(2;-1;0)$, $\vec{b}=(1;0;-2)$ ir $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$. Raskite 1)$\vec{a}+\vec{b}$; 2)$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 3)$\vec{a}+3\vec{c}$; 4)$|\vec{a}|$; 5)$|\vec{c}|$; 6)$|\vec{a}+\vec{b}|$; 7)$|3\vec{a}+2\vec{b}|$.

Sprendimas

1)$\vec{a}+\vec{b}=(2+1;-1+0;0+(-2))=(3;-1;-2)$;

2)$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=(2-1+1;-1-0+(-2);0-(-2)+1)=(2;-3;3)$;

3)$\vec{a}+3\vec{c}=(2+3\cdot1;-1+3\cdot(-2);0+3\cdot1)=(5;-7;3)$;

4)$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{4+1+0}=\sqrt{5}$.

5)$|\vec{c}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$;

6)$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$;

7)$3\vec{a}+2\vec{b}=(8;-3;-4)$; $|3\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{8^2+(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{64+9+16}=\sqrt{89}$.

2. Duoti taškai A(2;-1;0), B(2;-1;1) ir C(0;-2;2). Raskite: 1)$\overrightarrow{AB}$; 2)$\overrightarrow{BC}$; 3)$\overrightarrow{AC}$; 4)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 5)$\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}$; 6)$|\overrightarrow{AB}|$; 7)$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$.

Sprendimas

1)$\overrightarrow{AB}=(2-2;-1-(-1);1-0)=(0;0;1)$;

2)$\overrightarrow{BC}=(0-2;-2-(-1);2-1)=(-2;-1;1)$;

3)$\overrightarrow{AC}=(0-2;-2-(-1);2-0)=(-2;-1;2)$;

4)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(0+(-2);0+(-1);1+1)=(-2;-1;2)$;

5)$\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AC}=(-2+2\cdot(-2);-1+2\cdot(-1);1+2\cdot2)=(-6;-3;5)$;

6)$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$;

7)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(0-(-2);0-(-1);1-2)=(2;1;-1)$; $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$.

3. Patikrinkite, ar kolinearūs šie vektoriai: 1)$\vec{a}=(2;-3;1)$ ir $\vec{b}=(-4;6;-2)$; 2)$\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ ir $\vec{d}=2\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$?

Sprendimas

1) $\frac{2}{-4}=\frac{-3}{6}=\frac{1}{-2}\Rightarrow-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$;

2) $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{2}{-4}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{2}\Rightarrow$ vektoriai nekolinearūs.

4. Kokios turi būti n ir p reikšmės, kad vektoriai $\vec{a}=(-3;n;4)$ ir $\vec{b}=(-2;4;p)$ būtų kolinearūs?

Sprendimas

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{-3}{-2} = \frac{n}{4} = \frac{4}{p} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{n}{4}, \\ \frac{3}{2} = \frac{4}{p}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6, \\ p = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}. \end{cases}$$

5. Taškas C dalija atkarpą AB santykiu λ 5 AC:CB 5 1:5; A(7;2;-3), B(-5;0;4). Raskite taško C koordinates.

Sprendimas

$$x = \frac{x_1 + l x_2}{1 + l} = \frac{7 + \frac{1}{5}(-5)}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{6}{\frac{6}{5}} = 5; \quad y = \frac{2 + \frac{1}{5} \cdot 0}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{5}{3}; \quad z = \frac{-3 + \frac{1}{5} \cdot 4}{1 + \frac{1}{5}} = -\frac{11}{6}.$$

Ats.: $C\left(5; \frac{5}{3}; -\frac{11}{6}\right)$.

6. Taškas M dalija atkarpą AB pusiau. Raskite taško M koordinates, jei A(-2;4;6) ir B(0;4;-2).

Sprendimas

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = -1; \; y = \frac{4 + 4}{2} = 4; \; z = \frac{6 + (-2)}{2} = 2.$$ Ats. M(-1;4;2).

Pratimai

1. Duotos vektorių koordinatės: $\vec{a} = (-2;4;3)$, $\vec{b} = (3;-1;6)$, $\vec{c} = (2;4;-1)$. Raskite: 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; 3) $2\vec{a} - \vec{b}$; 4) $\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$; 5) $2\vec{a} - 0{,}5\vec{b} + \vec{c}$; 6) $\vec{a} + 1{,}5\vec{b} - 0{,}5\vec{c}$.

Ats.:1) (1;3;9); 2) (3;7;8); 3) 3) (-7;9;0); 4) (-1;13;-5); 5) (-3,5;12,5;2); 6) (1,5;0,5;12,5).

2. Apskaičiuokite vektoriaus ilgį, kai: 1) $\vec{a}$ =(-6;0;8); 2) $\vec{b}$ =(3;-4;0); 3) $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$; 4) $\vec{d} = 8\vec{i} - 6\vec{k}$. Ats.: 1) 10; 2) 5; 3) 3; 4) 10.

3. Apskaičiuokite vektoriaus $\vec{a} - \vec{b}$ ilgį, kai: 1) $\vec{a} = (2;-3;5)$ ir $\vec{b} = (-2;4;1)$; 2) $\vec{a} = (2;1;1)$ ir $\vec{b} = (0;-1;2)$; 3) $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ir $\vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$.

Ats.: 1) 9; 2) 3; 3) 5.

4. Apskaičiuokite vektoriaus $3\vec{a} + 2\vec{b}$ ilgį, kai $\vec{a} = (1;0;0)$ ir $\vec{b} = (2;-2;2)$.

Ats.:9.

5. Duoti taškai A(1;-2;3), B(4;7;-2) ir C(-1;5;3). Raskite vektorių $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BC}$ koordinates.

Ats.: (3;9;-5), (-2;7;0), (-5;-2;5).

6. Duoti taškai: A(-2;4;1), B(3;-1;5) ir C(2;3;5). Raskite:
1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{BC}$. Ats.: 1) (4;-1;4); 2) (5;-5;4); 3) (6;-9;4).

7. Raskite taško B koordinates, jei žinoma, kad vektorius $\overrightarrow{AB}$ lygus vektoriui $\vec{a}=(3;-1;6)$, o A(-2;1;7). Ats.: B(1;0;13).

8. Raskite taško A koordinates, jei žinoma, kad $\overrightarrow{AB}=3\vec{a}$ ir: 1) B(2;-4;3), $\vec{a}$ = (-2;1;6); 2) B(-3;8;7), $\vec{a}$ = (4;-1;7); 3) B(-6;3;-4), $\vec{a}$ = (1;3;-7).
Ats.: 1) A(8;-7;-15); 2) A(-15;11;-14); 3) A(-9;-6;17).

9. Apskaičiuokite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgį, kai: 1) A(-1;2;-2) ir B(3;2;1); 2) A(1;-1;1) ir B(-1;0;3); 3) A(-5;8:-7) ir B(2;4;-3).
Ats.: 1) 5; 2) 3; 3) 9.

10. Raskite trikampio perimetrą, kai jo viršūnės yra taškuose A(0;0;0), B(0;-4;0) ir C(3;0;0).
Ats.: 12.

11. Patikrinkite, kurie iš šių vektorių yra kolinearūs: 1) $\vec{a}=(2;5;1)$ ir $\vec{b}=(4;10;2)$; 2) $\vec{c}=\left(\frac{2}{5};-\frac{1}{3};\frac{4}{5}\right)$ ir $\vec{d}=\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{2};\frac{6}{5}\right)$; 3) $\vec{m}=\left(6;-\frac{1}{3};3\right)$ ir $\vec{n}=\left(-2;\frac{1}{9};-\frac{1}{3}\right)$.
Ats.: 1) ir 2).

12. Kokios turi būti m ir n reikšmės, kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ būtų kolinearūs, kai: 1) $\vec{a}=(-3;m;4)$ ir $\vec{b}=(-2;4;n)$; 2) $\vec{a}=(2;3;m)$ ir $\vec{b}=(n;4;8)$; 3) $\vec{a}=\left(\frac{1}{2};m;4\right)$ ir $\vec{b}=\left(n;\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right)$.
Ats.: 1) m=6, n=$2\frac{2}{3}$; 2) m=6, n=$2\frac{2}{3}$; 3) m=$\frac{2}{3}$, n=$\frac{3}{16}$.

13. Įrodykite, kad keturkampis ABCD yra trapecija, kai A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3) ir D(3;-5;3).

14. Duoti atkarpos AB galai. Taškas M atkarpą AB dalija pusiau. Apskaičiuokite taško M koordinates, jei: 1) A(1;-3;2) ir B(3;5;-4); 2) A(-3;4;2) ir B(-1;-2;4); 3) A(3;4;0,5) ir B(-2;1;1,5).
Ats.: 1) M(2;1;-1); 2) M(-2;1;3); 3) M(0,5;2,5;1).

3. *Dviejų vektorių skaliarinė sandauga*

Dviejų vektorių *skaliarine sandauga* vadinamas skaičius, lygus vektorių modulių sandaugai, padaugintai iš kampo tarp jų kosinuso. Ji žymima

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi\,.}$$

Vektorių skaliarinės sandaugos savybės

1) *Komutatyvumas*, t.y. $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{b}}\cdot\vec{\mathbf{a}}$.
2) *Distributyvumas* t.y. $\vec{\mathbf{a}}\cdot\left(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}\right)=\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{c}}$**.**
3) *Asociatyvumas* t.y. $\lambda\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{a}}\cdot\lambda\vec{\mathbf{b}}$.

Skaliarinės sandaugos išraiška koordinatėmis

Jeigu vektoriai duoti koordinatėmis $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ ir $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, tai jų skaliarinė sandauga $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\cdot\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=x_1x_2\vec{i}\cdot\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\cdot\vec{j}+$ $+x_1z_2\vec{i}\cdot\vec{k}+y_1x_2\vec{j}\cdot\vec{i}+y_1y_2\vec{j}\cdot\vec{j}+y_1z_2\vec{j}\cdot\vec{k}+z_1x_2\vec{k}\cdot\vec{i}+z_1y_2\vec{k}\cdot\vec{j}+z_1z_2\vec{k}\cdot\vec{k}$. Pagal vektorių skaliarinės sandaugos apibrėžimą $\vec{i}\cdot\vec{i}=\left|\vec{i}\right|\cdot\left|\vec{i}\right|\cdot\cos 0=1\cdot1\cdot1=1$; $\vec{i}\cdot\vec{j}=\left|\vec{i}\right|\cdot\left|\vec{j}\right|\cdot\cos 90^\circ=$ $=1\cdot1\cdot0=0$; analogiškai $\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ ir $\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$. Taigi,

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=\mathbf{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}.}$$

Gavome, kad dviejų vektorių skaliarinė sandauga lygi jų atitinkamų koordinačių sandaugų sumai.

Dviejų vektorių statmenumo sąlyga

Jeigu $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\varphi=90^\circ\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 90^\circ=0\Rightarrow$

$$\boxed{\mathbf{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0}.}$$

Du vektoriai statmeni tada ir tiktai tada, kai jų atitinkamų koordinačių sandaugų suma lygi nuliui.

Kampas tarp vektorių

Iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo $\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=\left|\vec{\mathbf{a}}\right|\cdot\left|\vec{\mathbf{b}}\right|\cdot\mathbf{\cos}\varphi$ gauname $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$ arba

$$\boxed{\mathbf{\cos}\varphi=\frac{\mathbf{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}}{\sqrt{\mathbf{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}\sqrt{\mathbf{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}}}.$$

Pavyzdžiai

1. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaro kampą $\varphi=60^\circ$. Žinant, kad $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, apskaičiuokite:

$1)\vec{a}\cdot\vec{b}$; $2)\vec{a}^2$; $3)\vec{b}^2$; $4)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$; $5)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$; $6)\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)^2$.

Sprendimas

$1)\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\varphi=2\cdot3\cdot\cos 60^\circ=2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=3;$

$2)\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos 0^\circ=\left|\vec{a}\right|^2\cdot1=2^2=4;$

$3)\vec{b}^2=\left|\vec{b}\right|^2=3^2=9;$

$4)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=4-2\cdot3+9=7;$

$5)\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{a}-2\vec{b}^2=4-3+2\cdot3-2\cdot9=-11;$

$6)\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)^2=4\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=4\cdot4-4\cdot3+9=13.$

2. Duoti vektoriai $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{k}$ ir $\vec{b}=(-1;2;0)$. Apskaičiuokite:
$1)\vec{a}\cdot\vec{b};\quad 2)\vec{a}^2;\quad 3)\vec{b}^2;\quad 4)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2;\quad 5)\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right);\quad 6)\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)^2.$

Sprendimas

$1)\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=1\cdot(-1)+0\cdot2+(-2)\cdot0=-1;$

$2)\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2=1^2+0^2+(-2)^2=5;$

$3)\vec{b}^2=(-1)^2+2^2+0^2=5;$

$4)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=5+2\cdot(-1)+5=8;$

$5)\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}\cdot\vec{a}-2\vec{b}^2=5-1+2-10=-4;$

$6)\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)^2=4\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=4\cdot5+4\cdot(-1)+5=21.$

3. Patikrinkite, ar statmeni vienas kitam šie vektoriai: $1)\vec{a}=(3;0;-6)$ ir $\vec{b}=(4;7;2)$ $2)\vec{c}=-3\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$ ir $\vec{d}=6\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$.

Patikrinimas

$1)x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=3\cdot4+0\cdot7+(-6)\cdot2=12-12=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b};$

$2)-3\cdot6+2\cdot(-3)+5\cdot1=-18-6+5=-19\neq0\Rightarrow$ vektoriai nestatmeni.

4. Prie kokių x reikšmių vektoriai $\vec{a}=(0;x;2)$ ir $\vec{b}=(-5;-1;3)$ statmeni?

Sprendimas

$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0,\ 0\cdot(-5)+x\cdot(-1)+2\cdot3=0\Rightarrow-x+6=0\Rightarrow x=6.$

5. Apskaičiuokite kampą tarp vektorių $\vec{a}=(3;4;0)$ ir $\vec{b}=(0;6;8)$.

Sprendimas

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}=\frac{3\cdot0+4\cdot6+0\cdot8}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}\sqrt{0^2+6^2+8^2}}=\frac{24}{5\cdot10}=0{,}48;$$

$\varphi\approx61^\circ.$

Pratimai

1. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaro kampą $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. Žinant, kad $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4,$ apskaičiuokite:
$1)\vec{a}\cdot\vec{b};\quad 2)\vec{a}^2;\quad 3)\vec{b}^2;\quad 4)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2;\quad 5)\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right);\quad 6)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2;\quad 7)\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)^2.$

Ats.: 1) -6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) -61; 6) 37; 7) 73.

2. Apskaičiuokite šių vektorių skaliarinę sandaugą: $1)\vec{a}=(3;-2;1)$ ir $\vec{b}=(4;-7;-3);$
$2)\vec{c}=\left(\frac{2}{3};-\frac{5}{6};\frac{1}{4}\right)$ ir $\vec{d}=\left(\frac{3}{2};\frac{6}{5};\frac{4}{3}\right);$ $3)\vec{m}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ ir $\vec{n}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}.$

Ats.: 1) 23; 2) $\frac{1}{3}$; 3) –2.

3. Duoti vektoriai $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$ ir $\vec{c} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Raskite pirmųjų dviejų vektorių sumos ir trečiojo vektoriaus skaliarinę sandaugą.

Ats.: -8.

4. Duoti vektoriai $\vec{a} = (2;-1;3)$ ir $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Apskaičiuokite:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$;   2) $\vec{a}^2$;   3) $\vec{b}^2$;   4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$;   5) $(2\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})$;   6) $(\vec{a}+2\vec{b})^2$;   7) $\vec{a}\cdot(\vec{b}-2\vec{a})$.

Ats.: 1) 7; 2) 14; 3) 6; 4) 34; 5) 5; 6) 66; 7) –21.

5. Duoti trys taškai: A(-1;3;-7), B(2;-1;5) ir C(0;1;-5). Apskaičiuokite:

1) $(2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$;   2) $\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$;   3) $\sqrt{\overrightarrow{AC}^2}$.

Ats.: 1) –1224; 2) 13; 3) 3.

6. Patikrinkite šių vektorių statmenumą:

1) $\vec{a} = (3;0;-6)$ ir $\vec{b} = (4;7;2)$;   2) $\vec{c} = (-3;2;5)$ ir $\vec{d} = (6;-3;1)$.

7. Duotas trikampis su viršūnėmis: A(2;4;5), B(-3;2;2) ir C(-1;0;3). Įrodykite, kad $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{BC}$.

8. Duotos keturkampio viršūnės: A(1;-2;2), B(1:4;0), C(-4;1;1) ir D(-5;-5;3). Įrodykite, kad $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$ - statmeni.

9. Kokia turi būti x reikšmė, kad vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ būtų statmeni:

1) $\vec{a} = x\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ir $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - x\vec{k}$;   2) $\vec{a} = 2\vec{i} - x\vec{j}$ ir $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$;   3) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{k}$ ir $\vec{b} = x\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Ats.: 1)-6; 2) 2; 3) 2.

10. Apskaičiuokite kampą tarp vektorių: 1) $\vec{a} = (\sqrt{3};1;0)$ ir $\vec{b} = (5;0;0)$;

2) $\vec{a} = (2;-4;4)$ ir $\vec{b} = (-3;2;6)$;   3) $\vec{a} = 2\vec{i}$ ir $\vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$;   4) $\vec{a} = 2\vec{i}$ ir $\vec{b} = 3\vec{j}$.

Ats.: 1) 30°; 2) 76°; 3) 45°; 4) 90°.

11. Trikampio viršūnės yra taškuose A(-1;-2;4), B(-4;-2;0) ir C(3;-2;1). Raskite jo vidinius kampus.

Ats.: 90°; 45°; 45°.

12. Vektorius $\vec{c}$ statmenas vektoriams $\vec{a} = (2;3;-1)$ ir $\vec{b} = (1;-2;3)$ ir tenkina sąlygą $\vec{c}\cdot(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$. Raskite vektoriaus $\vec{c}$ koordinates.

Ats.: (-3;3;3).

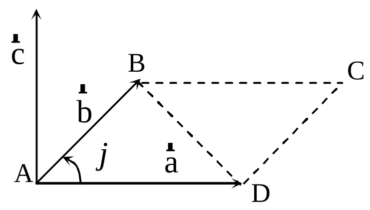
13. Duoti vektoriai $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ir $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$. Raskite vektoriaus $\vec{d}$ koordinates, jei jis tenkina sąlygas: $\vec{a}\cdot\vec{d} = -5$, $\vec{b}\cdot\vec{d} = -11$ ir $\vec{c}\cdot\vec{d} = 20$.

Ats.: (2;3;-2).

4. Dviejų vektorių vektorinė sandauga

Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *vektorine sandauga* vadinamas vektorius $\vec{c}$, kurio modulis lygus $|\vec{\mathbf{a}}|\cdot|\vec{\mathbf{b}}|\cdot\mathbf{sin}\,\varphi$**;** čia - φ - kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$. Vektorius $\vec{c}$ statmenas plokštumai, kurioje yra vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, ir nukreiptas taip, kad žiūrint iš vektoriaus $\vec{c}$ galo vektorių $\vec{a}$ reikia pasukti prieš laikrodžio rodyklę mažiausiu kampu iki jo krypties sutapimo su vektoriumi $\vec{b}$. Vektorinė sandauga žymima

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{c}}}.$$



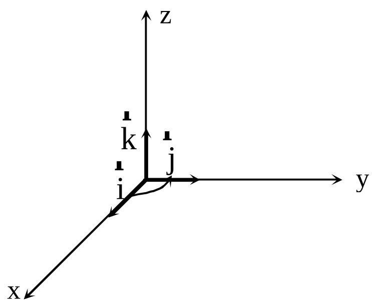
Vektorinės sandaugos savybės

1) *Antikomutatyvumas*, t.y. $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=-(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{a}})$.
2) *Asociatyvumas skaliarinio daugiklio atžvilgiu*, t.y. $\lambda(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})=\lambda\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\vec{\mathbf{a}}\times\lambda\vec{\mathbf{b}}$.
3) *Distributyvumas*, t.y $(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})\times\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}$.
4) *Jei* vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *kolinearūs*, tai $\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\mathbf{0}$, nes $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin 0^{\circ}=0$.
5) Jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *statmeni*, tai $|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin 90^{\circ}=|\vec{\mathbf{a}}|\cdot|\vec{\mathbf{b}}|$.
6) Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vektorinės sandaugos *modulis* lygus *lygiagretainio ABCD plotui* ir *dvigubam trikampio ABD plotui*, t.y. $\boxed{\mathbf{S_{ABCD}}=\mathbf{2S_{ABD}}=|\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}|}$.

Vektorinės sandaugos išraiška koordinatėmis

$$\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2\vec{i}\times\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\times\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\times\vec{k}+$$
$$+y_1x_2\vec{j}\times\vec{i}+y_1y_2\vec{j}\times\vec{j}+y_1z_2\vec{j}\times\vec{k}+z_1x_2\vec{k}\times\vec{i}+z_1y_2\vec{k}\times\vec{j}+z_1z_2\vec{k}\times\vec{k};$$

Rasime bazinių vektorių $\vec{i}$, $\vec{j}$ ir $\vec{k}$ vektorines sandaugas. Čia pasinaudosime vektorinės sandaugos apibrėžimu ir 4) bei 5) vektorinės sandaugos savybėmis.



$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0;$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}.$$

Įstatę bazinių vektorių vektorines sandaugas, gausime:

$$\vec{a}\times\vec{b}=x_1y_2\vec{k}-x_1z_2\vec{j}-y_1x_2\vec{k}+y_1z_2\vec{i}+z_1x_2\vec{j}-z_1y_2\vec{i}=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}-$$
$$-(x_1z_2-z_1x_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\vec{k}\ \text{arba}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}=\begin{vmatrix}\vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}}\\ \mathbf{x_1} & \mathbf{y_1} & \mathbf{z_1}\\ \mathbf{x_2} & \mathbf{y_2} & \mathbf{z_2}\end{vmatrix}}.$$

Pavyzdžiai

1. Raskite vektorių $\vec{a}=(2;-1;0)$ ir $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{k}$ vektorinę sandaugą.

Sprendimas

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}\vec{k}=-2\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}=(-2;-4;3).$$

2. Raskite vektoriais $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ ir $\vec{b}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ nustatyto lygiagretainio plotą.

Sprendimas

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=-2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}.$$

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=\sqrt{9}=3.$$

3. Duotos trikampio viršūnių koordinatės: A(-2;0;1), B(-3;5;-4) ir C(-1;1;-2). Raskite trikampio plotą.

Sprendimas

$$\overrightarrow{AB}=(-3-(-2);5-0;-4-1)=(-1;5;-5);\ \overrightarrow{AC}=(-1-(-2);1-0;-2-1)=(1;1;-3);$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 5 & -5\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & -5\\ 1 & -3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & -5\\ 1 & -3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=-10\vec{i}-8\vec{j}-6\vec{k};$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2+(-8)^2+(-6)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{100+64+36}=\frac{1}{2}\sqrt{200}=5\sqrt{2}.$$

Pratimai

1. Raskite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ vektorinę sandaugą: 1) $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ ir $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$; 2) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ ir $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$; 3) $\vec{a}=(3;-2;4)$ ir $\vec{b}=(1;-5;-2)$; 4) $\vec{a}=(2;5;1)$ ir $\vec{b}=(1;2;-3)$.

Ats.: 1) $4\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}$; 2) $-7\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$; 3) $(24;10;-13)$; 4) $(-17;7;-1)$.

2. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaro kampą $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Žinodami, kad $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, apskaičiuokite $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Ats.: 15.

3. Duota $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ ir $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. Apskaičiuokite $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Ats.: 16.

4. Duoti vektoriai $\vec{a} = (3;-1;-2)$ ir $\vec{b} = (1;2;-1)$. Apskaičiuokite:
$1)(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$; $2)(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$.

Ats.: 1) (10;2;14); 2) (20;4;28).

5. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą, jei jo kraštinės yra vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$:
1) $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ ir $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$; 2) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ir $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$;
3) $\vec{a} = (2;3;-4)$ ir $\vec{b} = (1;-1;3)$.

Ats.: 1) 49; 2) 3; 3) $5\sqrt{6}$.

6. Duotos trikampio viršūnės: A(2;-3;4), B(1;2;-1) ir C(3;-2;1). Raskite trikampio plotą.

Ats.: $5\sqrt{2}$.

5. *Mišrioji trijų vektorių sandauga*

Trijų vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ mišrioji sandauga yra skaičius, lygus vektorinės sandaugos $\vec{a} \times \vec{b}$ ir vektoriaus $\vec{c}$ skaliarinei sandaugai ir žymimas $(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}}$.

Mišriosios vektorių sandaugos savybės

1) Trijų vektorių *mišriosios sandaugos modulis lygus* gretasienio, kurio briaunas sudaro šie vektoriai, *tūriui*.
2) Trijų vektorių būtina ir pakankama *komplanarumo sąlyga* yra jų mišriosios sandaugos *lygybė nuliui*.
3) Vektorinės ir skaliarinės sandaugos operacijas galima keisti vietomis: $(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}})$.

Mišriosios sandaugos išraiška koordinatėmis

Jeigu $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$, o $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$,

tai $(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \cdot z_3$ arba

$$\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.}$$

Jeigu trys vektoriai yra komplanarūs, tai $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ arba

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0}.$$

Čia ir yra trijų vektorių komplanarumo sąlyga.

Pavyzdžiai

1. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}=(1;0;-1)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$ ir $\vec{c}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ mišriąją sandaugą.

Sprendimas

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=6-1=5.$$

2. Įrodykite, kad taškai A(1;2;3), B(2;4;1), C(1;-3;6) ir D(4;-2;3) priklauso vienai plokštumai.

Įrodymas

Taškai priklausys vienai plokštumai, jei vektoriai $\overrightarrow{AB}=(1;2;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(0;-5;3)$ ir $\overrightarrow{AD}=(3;-4;0)$ komplanarūs, t.y. mišrioji sandauga lygi nuliui:

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -10 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix}=-30+30=0.$$

3. Raskite tūrį gretasienio, kurio tris briaunas, turinčias bendrą viršūnę, sudaro vektoriai $\vec{a}=(1;-2;2)$, $\vec{b}=(-1;2;1)$ ir $\vec{c}=(0;2;3)$.

Sprendimas

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-6;$$

$$V=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|=|-6|=6.$$

4. Trikampės piramidės viršūnės yra taškuose A(1;0;2), B(0;-1;3), C(2;1;0) ir D(2;2;1). Apskaičiuokite jos tūrį.

Sprendimas

Trikampės piramidės tūris sudaro $\frac{1}{6}$ gretasienio tūrio, taigi,

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left|(-1)\cdot 1\right| = \frac{1}{6}.$$

Pratimai

1. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a}, \vec{b}$ *ir* $\vec{c}$ mišriąją sandaugą, kai :
1) $\vec{a} = (1;-1;0), \vec{b} = (1;0;2)$ ir $\vec{c} = (2;0;1)$; 2) $\vec{a} = (1;2;1), \vec{b} = (0;1;2)$ ir $\vec{c} = (-2;3;-1)$; .

Ats.: 1) –3; 2) –13.

2. Patikrinkite vektorių $\vec{a}, \vec{b}$ *ir* $\vec{c}$ komplanarumą, kai: 1) $\vec{a} = (1;2;-1), \vec{b} = (3;0;-4)$ ir $\vec{c} = (-2;-4;2)$; 2) $\vec{a} = (1;-1;2), \vec{b} = (2;0;1)$ ir $\vec{c} = (-1;1;0)$; .
3) $\vec{a} = (1;2;2), \vec{b} = (3;4;0)$ ir $\vec{c} = (-3;-4;0)$.

Ats.: 1) komplanarūs; 2) nekomplanarūs; 3) komplanarūs.

3. Įrodykite, kad taškai A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1) ir D(2;1;3) priklauso vienai plokštumai.

4.Trikampės piramidės viršūnės yra taškuose A(2;-1;1), B(5;5;4), C(3;2;-1) ir D(4;1;3). Raskite jos tūrį. Ats.: 3.

5. Trikampės piramidės viršūnės yra taškuose A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7) ir D(-5;-4;8). Raskite aukštinę, nuleistą iš viršūnės D. Ats.: 11.

6. Trikampės piramidės tūris V=5. Trys jo viršūnės yra taškuose A(2;1;-1), B(3;0;1) ir C(2;-1;3). Raskite viršūnės D koordinates, jei žinoma, kad ji yra OY ašyje.

Ats.: (0;-7;0).