TIESINIS PROGRAMAVIMAS

1. Tiesinės nelygybės

Tiesines nelygybes su n nežinomųjų galima užrašyti taip:

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b,$

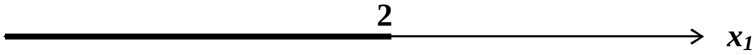
$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n < b,$

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \ge b,$

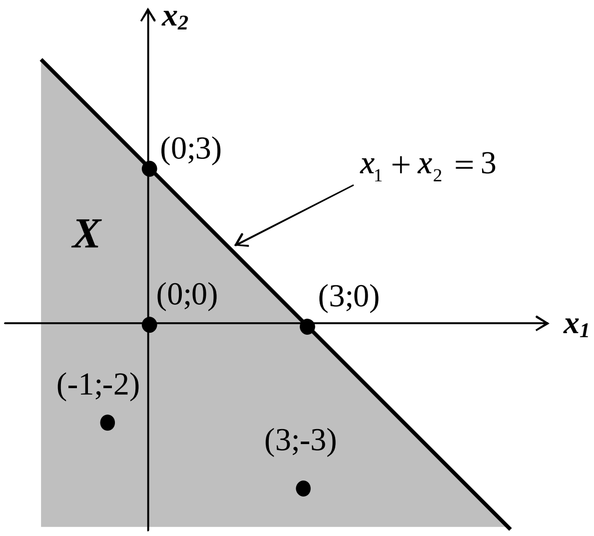
$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n > b.$

Tiesinės nelygybės *sprendiniu* vadinamas toks skaičių rinkinys $\bar{x} = (\bar{x}_1; \bar{x}_2; ...; \bar{x}_n)$, kuris tenkina vieną iš duotų nelygybių. Visų tiesinės nelygybės sprendinių aibę žymėsime *X*.

Tiesinės nelygybės su vienu nežinomuoju sprendinius galima vaizduoti skaičių tiesės taškais. Pavyzdžiui, nelygybės su vienu nežinomuoju $x_1 \le 2$ sprendinių aibė geometriškai gali būti pavaizduota taip:



Nelygybės su dviem nežinomaisiais sprendiniai už pildo kurią nors pusplokštumę. Norint pavaizduoti geometriškai tiesinės nelygybės su dviem nežinomaisiais sprendinius, reikia užtušuoti tą plokštumos pusę, kurios taškų koordinatės tenkina duotąją nelygybę. Pavyzdžiui, sprendžiant geometriškai nelygybę $x_1 + x_2 \le 3$, pirmiausiai brėžiama tiesė $x_1 + x_2 = 3$, atidedant du jos taškus, t.y. tokius taškus, kurių koordinatės tenkina tiesės lygtį, pvz., (0;3) ir (3;0). Po to nustatome, kurios pusplokštumės taškų koordinatės tenkina duotąją nelygybę (įstačius gauname teisingą skaitinę nelygybę), ir užtušuojame tą pusplokštumę:



Pratimai

Pavaizduokite grafiškai tiesinių nelygybių sprendinių aibes:

1) $x_2 \ge 0;$	2) $x_1 \le 2;$	3) $x_2 \ge -1;$
4) $x_1 \ge 0;$	5) $x_1 + x_2 \le 5;$	6) $x_2 \le 4;$
7) $x_1 - x_2 \ge 3;$	8) $x_1 + 2x_2 \le 8;$	9) $2x_1 + 3x_2 \ge 6;$
10) $x_1 + 2x_2 \le 0;$	11) $x_2 - x_1 \ge 0;$	12) $4x_1 + 3x_2 \le 12;$

13) $3x+5y\geq 15;$ 14) $3x-5y\leq 15;$ 15) $5x-3y\geq 15;$

16) $4x+7y\geq 0;$ 17) $6x-5y\leq 0;$ 18) $\mathrm{x}+5\mathrm{y}\geq 10;$

19) $3\mathrm{x}-2\mathrm{y}\leq 0;$ 20) $2\mathrm{x}-7\mathrm{y}\geq 14;$ 21) $3\mathrm{x}-\mathrm{y}\leq 2.$

2. Tiesinių nelygybių sistemos

Tiesinių *nelygybių su n nežinomųjų sistema* gali būti užrašyta taip (nelygybių ženklai gali būti ir kitokie):

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\leq b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\leq b_m. \end{cases}$$

Jeigu sistemos nelygybių sprendinių aibes pažymėsime atitinkamai $X_1, X_2,\ldots,X_m$, tai aibę X 5 X_1Ç X_2Ç...ÇX_m vadinsime *tiesinių nelygybių sistemos sprendinių aibe*. Taigi, *tiesinių nelygybių sistemos sprendinys* yra toks skaičių rinkinys $(\bar{x}_1;\bar{x}_2;\ldots;\bar{x}_n)$, kuris tenkina kiekvieną sistemos nelygybę. Sprendžiant nelygybių sistemą geometriškai, reikia surasti tą plokštumos sritį, kurios taškų koordinatės tenkina kiekvieną iš duotųjų nelygybių.

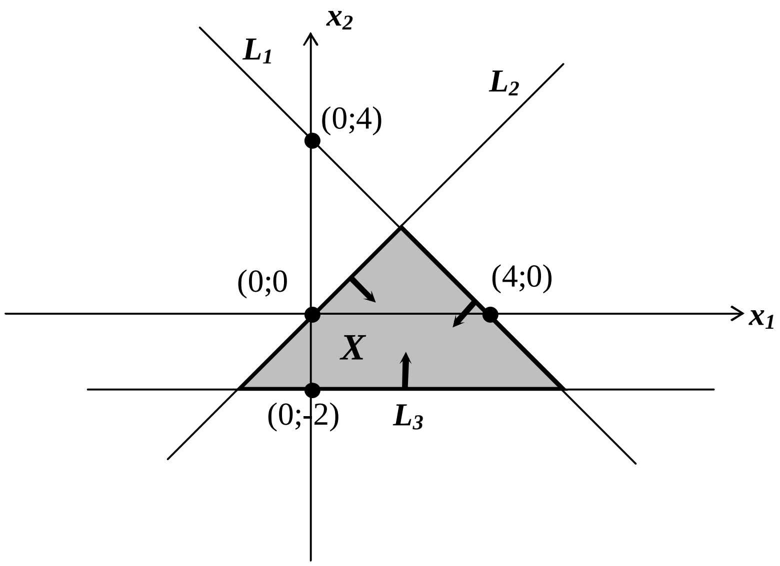
Apsiribosime nelygybių sistemomis su dviem nežinomaisiais.

Pavyzdžiai

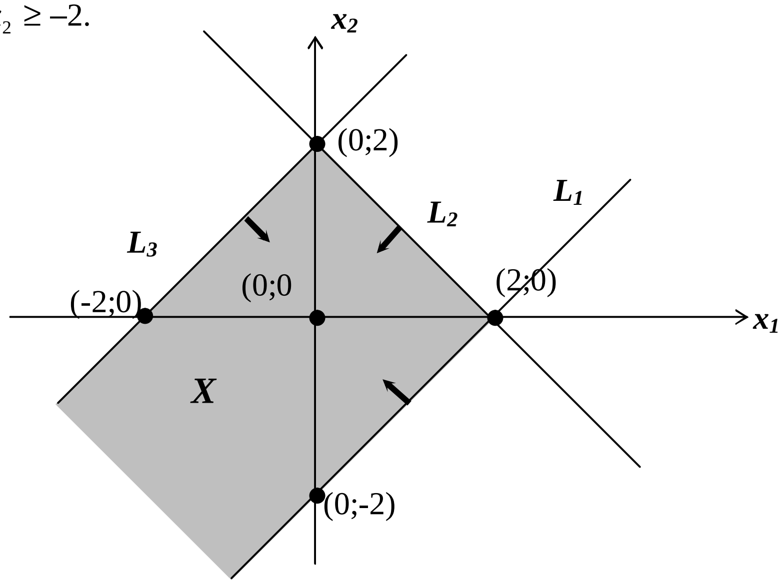
Pavaizduoti grafiškai šių tiesinių nelygybių sistemų sprendinių aibes:

1) $\begin{cases} x_1+x_2\leq 4, \\ x_1-x_2\geq 0, \\ \quad x_2\geq -2. \end{cases}$

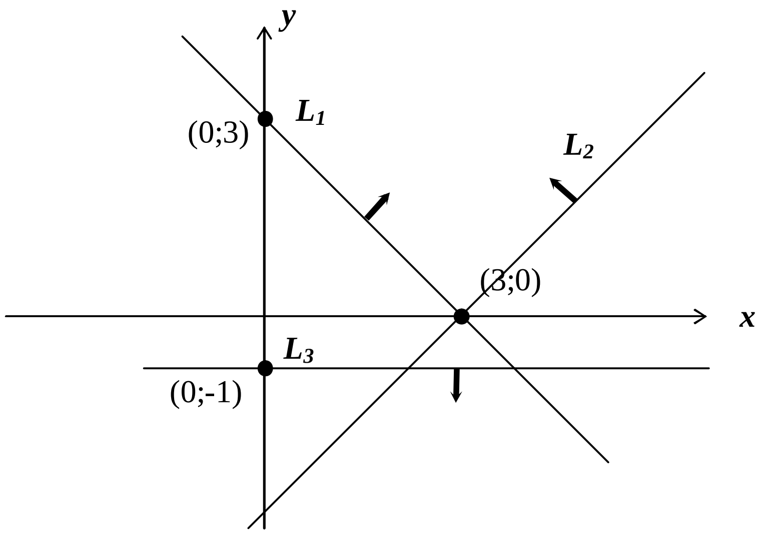
Brėžiame tieses $x_1+x_2=4\ (L_1)$, $x_1-x_2=0\ (L_2)$ *ir* $x_2=-2\ (L_3)$. Rodyklėmis nurodome kiekvienos nelygybės sprendinių pusplokštumes ir užtušuojame bendrą jų dalį:



2) $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \ge -2. \end{cases}$



3) $\begin{cases} x + y \ge 3, \\ x - y \le 3, \\ y \le -1. \end{cases}$



Šios trys pusplokštumės neturi nei vieno bendro taško. Todėl sistemos sprendinių aibė tuščia: X 5 ∅.

Pratimai

1. Pavaizduokite grafiškai šių tiesinių nelygybių sistemų sprendinių aibes:

1) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \ge 0, \\ 6x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 10, \\ 4x_1 - x_2 \le 4, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge -2, \\ x_1 - x_2 \ge 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 6x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 0, \\ 3x_1 + x_2 \ge 0, \\ 4x_1 + x_2 \ge 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 0, \\ x_2 \le 2, \\ 3x_1 \le 4; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ 8x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -6, \\ x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_2 \ge -2; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2x - 3y \le 6, \\ 8x + 2y \le 8, \\ 3x - y \le 3, \\ x \ge 2; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x + 2y \le 6, \\ 4x + y \le 4, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} 2x - 3y \ge -6, \\ x + 3y \ge 6, \\ 3x - 2y \le 6; \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x - y + 1 \ge 0, \\ x + y - 3 \le 0, \\ x + 3y + 1 \ge 0, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$

13) $\begin{cases} y \ge 1, \\ x + y \le 3, \\ x - y \ge 1; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x - y + 2 \ge 0, \\ x - y - 2 \le 0, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0; \end{cases}$ 15) $\begin{cases} 2x - 3y \le 6, \\ x \ge 0, \\ x \le 2, \\ y \le 0; \end{cases}$

16) $\begin{cases} x + 5y \le 10, \\ 2x + 3y \ge 0, \\ 2x - y \le 6; \end{cases}$ 17) $\begin{cases} 3x + 7y \le 21, \\ 3x + 7y \ge 0, \\ x - y \ge -4, \\ x - y \le 3; \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x + y \ge 0, \\ x + 2y \ge 0, \\ x + 3y \ge 0, \\ x + 4y \ge 0. \end{cases}$

2. Pavaizduokite grafiškai šių tiesinių nelygybių sistemų sprendinių aibes ir apskaičiuokite jų kontūrų viršūnių koordinates:

1) $\begin{cases} x - 7y \ge -31, \\ x + y \ge 1, \\ 3x - y \le 7; \end{cases}$ Ats.:(-3;4), (4;5), (2;-1). 2) $\begin{cases} x - y \le 5, \\ 3x + 5y \le 23, \\ -x + y \le 3; \end{cases}$ Ats.: (1;4), (6;1).

3) $\begin{cases} 6x - 7y \ge -30, \\ x + 4y \le 26, \\ 5x + 2y \le 40, \\ y \ge 0; \end{cases}$ *Ats.*: $(-5;0)$, $(2;6)$, $(6;5)$, $(8;0)$. 4) $\begin{cases} 2x - 3y \ge -12, \\ 4x + y \le 46, \\ x + 2y \le 22, \\ 2x - 3y \le 16; \end{cases}$ Ats.: (6;8), (10;6), (11;2).

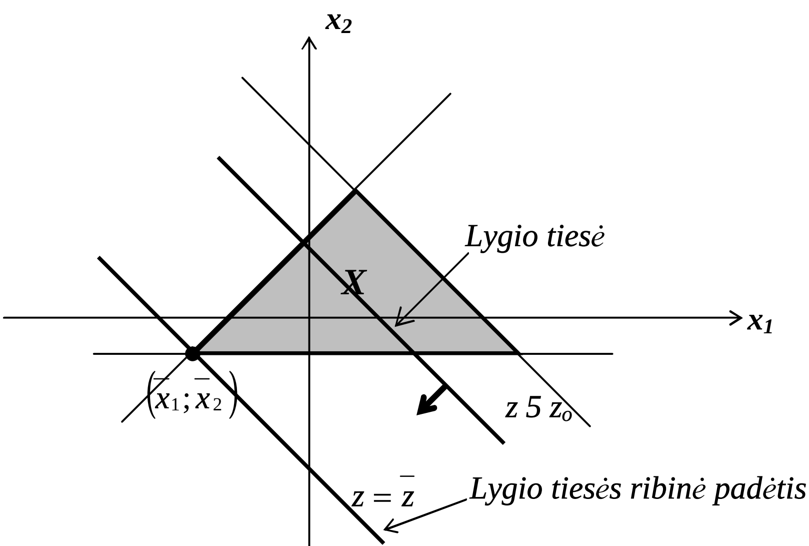
3. Tiesinis programavimas. Optimalaus planavimo uždavinių grafinis sprendimas

Yra daug ekonomikos uždavinių, kuriuose reikia rasti tokias parametrų reikšmes, su kuriomis pasirinktas faktorius įgyja didžiausią arba mažiausią reikšmę. Juos sprendžiant, yra sudaromi matematiniai modeliai, o pagal jų sprendinius planuojama ekonominė veikla. Geriausių variantų paieškos uždaviniai vadinami *optimizavimo* uždaviniais. Čia nagrinėsime tiesinio programavimo uždavinius. Tai tokie optimizavimo uždaviniai, kurių kriterijus išreikštas tiesine funkcija, o nežinomųjų parametrų sąryšiai (apribojimai) – tiesinėmis nelygybėmis. Apsiribosime uždaviniais su dviem nežinomaisiais.

Sakysime, kad reikia apskaičiuoti $\min(c_1x_1 + c_2x_2)$, kai

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases}$$

Čia $F = c_1x_1 + c_2x_2$ yra *tikslo funkcija*, o *leistinoji aibė X* – tiesinių nelygybių sistemos sprendinių aibė. Leistinoji aibė, jeigu ji netuščia, gali būti baigtinio arba begalinio ploto. Pasirinkime bet kurį leistinosios srities tašką. Tikslo funkcijos reikšmę tame taške pažymėkime z_0. Sudarykime lygtį $c_1x_1 + c_2x_2 = z_0$ ir ją pavadinkime *lygio lygtimi*. Šios lygties geometrinis vaizdas yra tiesė, kuria vadinsime tikslo funkcijos *lygio tiese*. Kaip ir bet kuri kita tiesė, lygio tiesė dalija plokštumą į dvi pusplokštumes. Vienoje yra tiesinės nelygybės $c_1x_1 + c_2x_2 > z_0$ sprendiniai, o kitą užpildo priešingos nelygybės $c_1x_1 + c_2x_2 < z_0$ sprendiniai. Kadangi mus domina $\min(c_1x_1 + c_2x_2)$, tai $c_1x_1 + c_2x_2 < z_0$. Traukiant lygio tiesę lygiagrečiai žemyn, tikslo funkcijos $c_1x_1 + c_2x_2$ reikšmės mažės kol pasieksime ribinį tašką (dažniausiai daugiakampio viršūnę), kurio koordinates įstatę į tikslo funkciją ir gausime optimalią (šiuo atveju minimalią) tikslo funkcijos reikšmę $\bar{z} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2$. Grafiškai tai atrodytų maždaug taip:



Pastebėsime, kad optimali reikšmė pasiekiama daugiakampio viršūnėje. Todėl, ieškant optimalios reikšmės, pakanka rasti gauto daugiakampio viršūnių koordinates ir apskaičiuoti tikslo funkcijos reikšmes tuose taškuose. Jeigu mus domina maksimali reikšmė, tai pasirenkama didžiausia tikslo funkcijos reikšmė, o jeigu minimali – mažiausia.

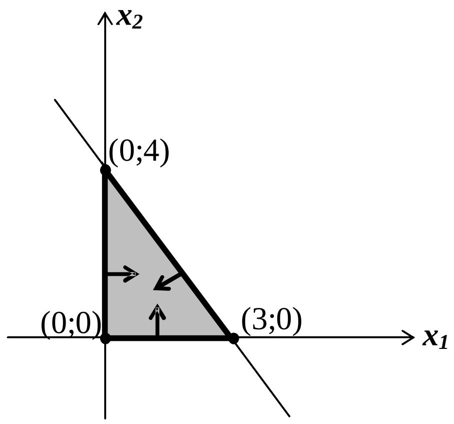
Pavyzdžiai

1. Apskaičiuoti:

1) $max(x_1 - x_2)$, kai

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Grafiškai išsprendžiame nelygybių sistemą ir nustatome leistinų sprendinių srities daugiakampio viršūnių koordinates:



Apskaičiuojame tikslo funkcijos reikšmes trikampio viršūnėse:

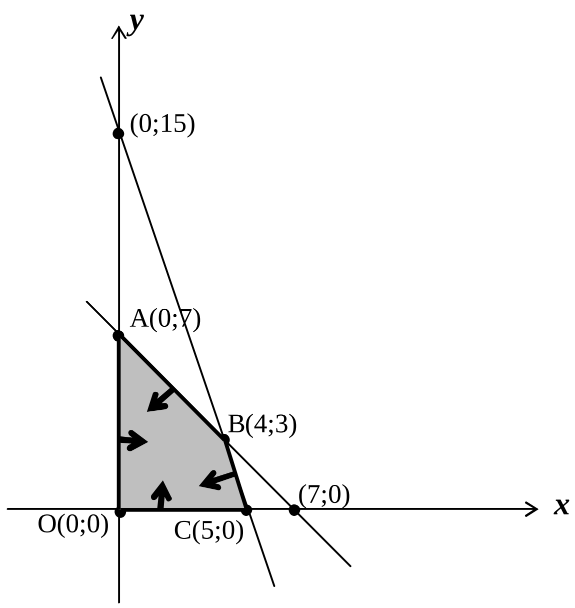
	F 5 x_1-x_2
(0;0)	*F 5 0-0 5 0*
(0;4)	*F 5 0-4 5 -4*
(3;0)	*F 5 3-0 5 3*

Ats.: F_{max} 5 3, kai x_1 5 3, x_2 5 0.

2)max(*2x*+*y*), kai

$$\begin{cases}3x+y\le 15,\\ x+y\le 7,\\ x\ge 0,\\ y\ge 0.\end{cases}$$

Grafiškai išsprendžiame nelygybių sistemą ir nustatome leistinų sprendinių srities daugiakampio viršūnių koordinates:



Tiesių *3x+y 5 15 ir x+y 5 7* susikirtimo taško koordinates surandame spręsdami lygčių sistemą:

$$\begin{cases}3x+y=15,\\ x+y=7;\end{cases} \quad x\ 5\ 4,\ y\ 5\ 3.$$

Skaičiuojame tikslo funkcijos reikšmes daugiakampio viršūnėse:

	F 5 2x+y
O(0;0)	*F 5 0+0 5 0*
A(0;7)	*F 5 0+7 5 7*
B(4;3)	*F 5 12+3 5 15*
C(5;0)	*F 5 10+0 5 10*

Ats.: F_{max} *5 15, kai x 5 4, y 5 3.*

2. Įmonė planuoja gaminti prekes P_1 ir P_2, naudodama dviejų pavadinimų žaliavas $Ž_1$ ir $Ž_2$. Jų sąnaudos prekės kiekio vienetui pagaminti ir turimos žaliavų atsargos surašytos lentelėje:

Žaliavos	Prekės		Žaliavų atsargos
	P_1	P_2	
$Ž_1$	2	5	270
$Ž_2$	2	3	210
Prekės vieneto kaina	30 Lt	70 Lt	

Sudarykite optimalų gamybos planą, kad, pardavus produkciją, būtų gautas didžiausias pelnas.

Sprendimas

Sakykime, kad prekių P_1 reikia pagaminti x vienetų, o prekių P_2 - y vienetų. Tada žaliavų $Ž_1$ bus sunaudota $2x+5y$, o žaliavų $Ž_2$ – $2x+3y$. Žinodami, kad žaliavų atsargos ribotos ($2x+5y \le 270$ ir $2x+3y \le 210$), o x ir y neneigiami, sudarome nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} 2x+5y \le 270, \\ 2x+3y \le 210, \\ \quad x \ge 0, \\ \quad y \ge 0. \end{cases}$$

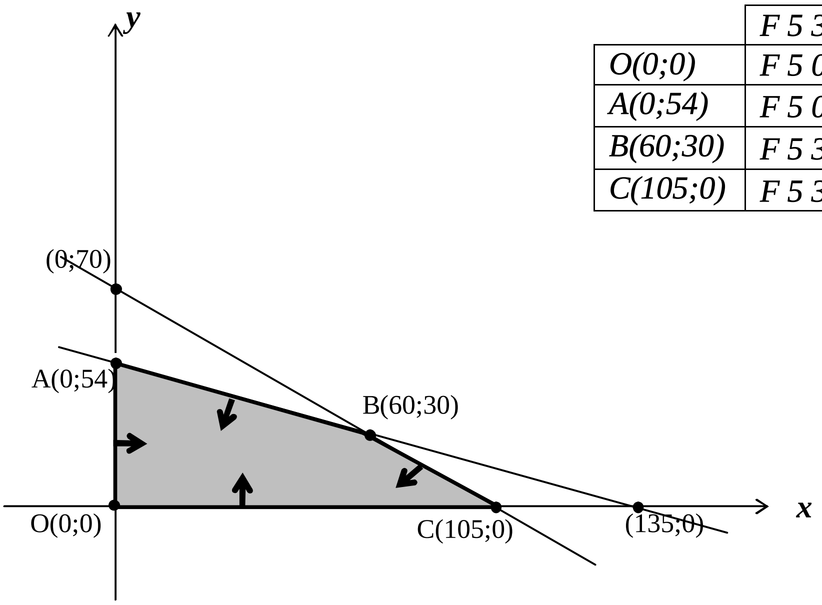
Pardavus x vienetų prekių P_1 ir y vienetų prekių P_2 bus gauta $30x+70y$ Lt pajamų. Kadangi įmonės tikslas yra gauti kuo didžiausias pajamas, tai reikia išspręsti optimalaus planavimo (tiesinio programavimo) uždavinį:

apskaičiuoti max($30x+70y$), kai

$$\begin{cases} 2x+5y \le 270, \\ 2x+3y \le 210, \\ \quad x \ge 0, \\ \quad y \ge 0. \end{cases}$$

Uždavinį išsprendžiame grafiškai:

	F 5 30x+70y
O(0;0)	*F 5 0+0 5 0*
A(0;54)	*F 5 0+70×54 5 3780*
B(60;30)	*F 5 30×60+70×30 5 3900*
C(105;0)	*F 5 30×105+0 5 3150*



Matome, kad didžiausias pajamas (3900 Lt) įmonė gaus, jeigu gamins 60 prekių P_1 ir 30 prekių P_2.

Pratimai

1. Išspręskite grafiškai šiuos tiesinio programavimo uždavinius:

1) $\max(2x_1 + x_2)$, kai
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$
Ats.:7.

2) $\max(4x_1 + 3x_2)$, kai
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$
Ats.:17.

3) $\max(2x_1 + 3x_2)$, kai
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$
Ats.:16.

4) $\max(4x_1 + 3x_2)$, kai
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 32, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$
Ats.:28.

5) $\min(3x_1 + 4x_2)$, kai
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 5, \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$
Ats.:15.

6) $\min\ (2x_1 - x_2)$, kai
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 4; \end{cases}$$
Ats.:5.

7) $\max(2x_1 + 5x_2)$, kai
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 14, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$
Ats.:30.

8) $\min(2x_1 + 4x_2)$, kai
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 15, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0; \end{cases}$$
Ats.:8.

9) $\min(2x + 3y)$, kai
$$\begin{cases} 2x + y \le 6, \\ 3x - y \le 4, \\ x \ge -1, \\ y \ge -2; \end{cases}$$
Ats.:-8.

10) $\max(2x + y)$, kai
$$\begin{cases} 4x + y \le 4, \\ 2x - y \ge -4, \\ x + y \ge -2; \end{cases}$$
Ats.:4.

11) $\min(x - 2y)$, kai
$$\begin{cases} x + 2y \le 4, \\ x + y \ge 1, \\ x \ge 0, \\ y \ge -1; \end{cases}$$
Ats.:-4.

12) $\max\ (3x + 2y)$, kai
$$\begin{cases} x + 6y \le 30, \\ 2x - y \le 8, \\ 3x + 2y \ge 6, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0; \end{cases}$$
Ats.:26.

13) $\min(3x + 2y)$, kai

14) $\min(3x + 4y)$,kai

$$\begin{cases} x+6y\le 30, \\ 2x-y\le 8, \\ 3x+2y\ge 6, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0; \end{cases}$$

Ats.:6.

$$\begin{cases} x+y\ge 5, \\ 2x+5y\ge 10, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0; \end{cases}$$

Ats.:15.

15) $\min(4x+3y)$, kai

$$\begin{cases} 3x+5y\le 32, \\ 2x+y\le 12, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0; \end{cases}$$

Ats.:0.

16) $\min(2x+y)$, kai

$$\begin{cases} 2x-y\ge -4, \\ x+y\ge -2, \\ 4x+y\le 4; \end{cases}$$

Ats.:-4.

17) $\max(x-2y)$, kai

$$\begin{cases} x+2y\le 4, \\ x+y\ge 1, \\ x\ge 0, \\ y\ge -1; \end{cases}$$

Ats.:8.

18) $\max(x+y)$, kai

$$\begin{cases} x+4y\le 8, \\ 3x+2y\le 12, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0; \end{cases}$$

Ats.:4,4.

19) max(x+y), kai

$$\begin{cases} x+2y\le 10, \\ 3x-8y\le 16, \\ x\ge 0; \end{cases}$$

Ats.: 9.

20) min(x-2y), kai

$$\begin{cases} 2x+5y\le 43, \\ 2x-7y\le -17, \\ 2x-y\ge 1; \end{cases}$$

Ats:-10.

21) max(4x+7y), kai

$$\begin{cases} 3x-2y\ge -8, \\ x-y\le 7, \\ x-3y\le 3, \\ x\ge 0,\ y\ge 0; \end{cases}$$

Ats.: $\varnothing$.

22) min(2x-2y), kai

$$\begin{cases} 3x+2y\le 33, \\ x-y\ge -4, \\ 2x-9y\le -9, \\ x\ge 0; \end{cases}$$

Ats.: -8.

2. Cecho keturiuose baruose gaminami dviejų rūšių gaminiai. Reikia sudaryti tokį gamybos planą, kad atidavus gaminius, būtų gautas didžiausias pelnas. Pirmame bare dirbama ne daugiau 16 h, antrame – 30 h, trečiame – 16 h ir ketvirtame – 12 h.

Lentelėje nurodyta, kiek laiko (valandomis) reikia kiekvienos rūšies gaminiui pagaminti atitinkamame bare. Nulis rodo, kad gaminys atitinkamame bare negaminamas.

Gaminiai	Barai			
	1	2	3	4
I	4	3	0	2
II	2	6	4	0
Bare galima dirbti (valandų)	16	30	16	12

Cechas gauna tokį pelną: atidavęs vieną I rūšies gaminį – 3 Lt, II rūšies – 4 Lt.

Ats.: Didžiausias pelnas, atidavus dviejų rūšių gaminius, yra 22 Lt. Cechas jį gautų, pagaminęs 2 I rūšies gaminius ir 4 antros rūšies gaminius.

3. Batų ateljė siuva dviejų modelių A ir B avalynę ir jiems pagaminti naudoja trijų rūšių žaliavas, kurių atsargos ribotos. Be to, modelių A ir B vienai porai pagaminti sunaudojamų žaliavų kiekiai (dm^2) pateikti lentelėje. Šioje lentelėje taip pat nurodyta žaliavų atsargų kiekiai ir pagamintos batų poros sąlyginė kaina (Lt).

	Gaminiai		Žaliavų atsargos
	Modelis A	Modelis B	
$Ž_1$	5	0	100
$Ž_2$	4	4	120
$Ž_3$	4	8	160
Gaminio vieneto kaina	60	30	

Sudarykite modelių A ir B optimalų gamybos planą, kad pajamos, gautos pardavus produkciją, būtų didžiausios.

Ats.: Modelio A reikia pagaminti 20 vnt., modelio B reikia pagaminti 10 vnt., didžiausias pelnas 1500 Lt.

4. Kiekvieną dieną autoūkiui reikia mažiausiai 650 litrų dizelinio kuro, 324 litrų benzino ir 48 litrų alyvos tam, kad autoūkis normaliai dirbtų. Degalinė A gali pristatyti 130 litrų dizelinio kuro, 36 litrus benzino ir 4 litrus alyvos, visa tai už 240 Lt. Panašias prekes siūlo ir degalinė B, kuri už 65 litrus dizelinio kuro, 54 litrus benzino ir 12 litrų alyvos prašo 300 Lt. Kiek užsakymų kasdien reikia sudaryti autoūkiui su kiekviena degaline, norint patenkinti dienos poreikius degalams ir tepalams mažiausiomis kainomis?

Ats.: A – 3, B – 4; F_{min} 5 1920 Lt.

5. Cecho bare gaminami dviejų rūšių gaminiai. Vienam I rūšies gaminiui suvartojama 5 kg vario ir 1 kg aliuminio, o vienam II rūšies gaminiui – 3 kg vario ir 2 kg aliuminio. Realizavęs vieną I rūšies gaminį, baras gauna 2 Lt pelno, o realizavęs vieną II rūšies gaminį – 3 Lt. Bare yra 45 kg vario ir 16 kg aliuminio. Kiek kiekvienos rūšies gaminių reikia pagaminti, norint gauti didžiausią pelną?

Ats.: I – 6, II – 5; F_{max} 5 27 Lt.

6. Firma gamina 2 rūšių prekes P_1 ir P_2, naudodama trijų pavadinimų žaliavas: $Ž_1$, $Ž_2$, ir $Ž_3$. Jų sąnaudos prekės kiekio vienetui pagaminti, turimos žaliavų atsargos ir pelnas už kiekvieną parduotą prekės vienetą pateiki lentelėje:

	Prekės		Atsargos
	P_1	P_2	
$Ž_1$	2	12	720
$Ž_2$	2	3	270
$Ž_3$	9	3	900
Pelnas	250	250	

Sudarykite optimalų gamybos planą, kad pelnas būtų didžiausias. Koks tas pelnas?

Ats.: P_1 – 90, P_2 – 30, F_{max} 5 30000 Lt.

7. Dviejų pavadinimų siuviniams S_1 ir S_2 naudojami trijų artikulų audiniai A_1, A_2 ir A_3. Audinių sąnaudų normos (metrais) kiekvienam siuviniui, turimos atsargos (metrais) ir pelnas (litais) už kiekvieną parduotą siuvinį pateikti lentelėje:

	Siuviniai		Atsargos
	S_1	S_2	
A_1	2	6	420
A_2	3	3	270
A_3	9	6	720
Pelnas	20	30	

Sudarykite didžiausią pelną duosiantį siuvimo planą. Koks tas pelnas?

Ats.: S_1 – 30, S_2 – 60, F_{max} 5 2400 Lt.

8. Įmonė planuoja pirkti daugiausia 10 autobusų, kurie galėtų pervežti mažiausiai 360 keleivių. Pasirinkti 2 autobusų modeliai A ir B. Modelio A autobusas gali pervežti 40 keleivių ir kainuoja 20000 Lt, o modelio B autobusas gali pervežti 30 keleivių ir kainuoja 15000 Lt. Kiek ir kokio modelio autobusų turi nupirkti įmonė, kad būtų patenkinti pervežimo reikalavimai, o išlaidos pirkiniams būtų mažiausios? Kokia minimali pirkinio kaina?

Ats.: A – 6, B – 4 arba A-9; F_{min} 5 180000.

9. Baldų įmonė dviejuose cechuose gamina lovas ir kušetes. Vienai lovai pagaminti sugaištama 12 valandų pirmame ceche ir 8 valandos antrame ceche. Vienai kušetei pagaminti sugaištama 8 valandos pirmame ceche ir 12 valandų antrame ceche. Pardavus lovą, įmonė gauna 400 Lt pelną, o pardavus kušetę – 300 Lt. Maksimalus mėnesio valandų skaičius pirmame ceche yra 840 valandų, o antrame ceche – 600 valandų. Kiek lovų ir kušečių turi pagaminti įmonė per mėnesį, kad pardavus produkciją, pelnas būtų didžiausias? Koks maksimalus pelnas?

Ats.: 66; 6; 28200 Lt.

10. 1 ha ploto žemės sklype reikia pasodinti mažiausiai 2000 sodinukų. Numatoma sodinti obelis ir serbentų krūmus. Viena obelis užimą 10 m^2 žemės plotą, o serbentų krūmas – 2 m^2. Realizavus derlių, numatoma gauti 30 Lt pajamų iš obels ir 5 Lt iš serbentų krūmo. Kiek obelų ir kiek serbentų krūmų reikia pasodinti, kad pelnas būtų didžiausias? Koks maksimalus pelnas?

Ats.: 750; 1250; 28750 Lt.

11. Dvi kepyklos, K_1 ir K_2, kepa duoną pagal trijų prekybos centrų, C_1, C_2, ir C_3, užsakymą. Pirmoji kepykla iškepė 18 tonų, antroji – 22 tonas duonos. Šią duoną reikia nuvežti į prekybos centrus: 12 tonų į C_1, 8 tonas į C_2 ir 20 tonų į C_3. Vidutinės transporto išlaidos (Lt) vienai tonai pervežti yra tokios:

	C_1	C_2	C_3
K_1	50	20	7
K_2	10	40	35

Sudarykite pervežimo planą, kad transporto išlaidos būtų mažiausios.

Ats.: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 12 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

12. Numatoma gaminti penkių pavadinimų D_1, D_2, D_3, D_4 ir D_5 detales naudojant žaliavas R_1, R_2 ir R_3. Šių žaliavų sąnaudos vienai detalei bei turimos jų atsargos yra tokios:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Atsargos
R_1	2	0	3	11	1	710
R_2	4	2	3	1	7	790
R_3	5	1	4	7	11	1160

Pardavus būtų galima gauti 20 Lt pelną už kiekvieną D_1 detalę, 25 Lt už D_2, 12Lt už D_3, 5Lt už D_4 ir 44 Lt už D_5. Detalių gamybą reikia suplanuoti taip, kad visos turimos žaliavos būtų sunaudotos, o gautas pelnas – didžiausias.

Ats.: $\bar{x} = (0;190;0;60;50)$.

13. Statybos bendrovė trims objektams O_1, O_2 ir O_3 statyti perka cementą iš gamyklų G_1 ir G_2. Užsakymai yra atitinkamai 100 tonų, 150 tonų ir 120 tonų. Iš pirmos gamyklos nupirkta 180 tonų cemento, o iš antrosios – 190 tonų. Cementą iš gamyklų reikia nugabenti į statybų objektus, paskirstant jį taip, kad bendrosios transporto išlaidos būtų kuo mažesnės. Sudarykite optimalų pervežimo planą, kai vidutinės vienos tonos pervežimo kainos (litais) yra tokios:

	O_1	O_2	O_3
G_1	7	11	8
G_2	13	14	5

Ats.: $\begin{pmatrix} 100 & 80 & 0 \\ 0 & 70 & 120 \end{pmatrix}$.