FUNKCIJOS. RIBOS. IŠVESTINĖS

1 Funkcijos. Ribos. Tolydumas

1 Skaitinė funkcija. Funkcijos apibrėžimo ir kitimo sritys

Atitiktis tarp aibių ***X*** ir ***Y*** vadinama funkcija, jeigu kiekvieną aibės ***X*** elementą atitinka tik vienas aibės ***Y*** elementas. Aibių ***X*** ir ***Y*** elementais gali būti skaičiai, geometrinės figūros ir kiti įvairūs objektai. Jeigu aibės ***X*** ir ***Y*** skaitinės, tai funkcija vadinama ***skaitine***. Skaitinę funkciją žymėsime ***y* 5 *f(x), x* Î *X*** (funkcinė priklausomybė gali būti žymima ir kitomis raidėmis). Elementas ***x*** vadinamas nepriklausomu kintamuoju arba argumentu, o ***y*** laikomas priklausomu kintamuoju. Funkcijos ***y* 5 *f(x)*** reikšmė, atitinkanti reikšmę ***x* 5 *a***, vadinama funkcijos reikšme taške ***a*** ir žymima ***f(a)***. Aibė ***X*** vadinama funkcijos ***apibrėžimo sritimi***, o aibė ***Y*** vadinama tos funkcijos ***kitimo sritimi***. Funkcijos ***y* 5 *f(x)*** apibrėžimo (definicijos) sritis simboliškai žymima ***D(f)*** arba ***D(y),*** o kitimo (egzistencijos) sritis - ***E(f)*** arba ***E(y).*** Norint nustatyti funkcijos apibrėžimo sritį, reikia rasti visas argumento ***x*** reikšmes, prie kurių funkcija turi prasmę.

Pavyzdžiai

Raskite funkcijų apibrėžimo sritis:

1. $y = \dfrac{x}{2x-4}$.

Sprendimas

Ši funkcija turi prasmę prie visų x reikšmių, išskyrus tas, prie kurių vardiklis lygus nuliui. Vadinasi, 2x-4≠0, 2x≠4, x≠2. Taigi, D(y) 5 $(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

2. $y = \dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$.

Sprendimas

$x^2-3x+2\neq 0, \quad x\neq 1$ ir $x\neq 2; \quad D(y)=(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$.

3. $y=\sqrt{x-4}$.

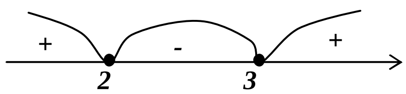
Sprendimas

Kvadratinė šaknis apibrėžta, jei jos pošaknis neneigiamas: $x-4\geq 0$, $x\geq 4$ arba $D(y)=[4;\infty)$.

4. $y=\sqrt{x^2-5x+6}$.

Sprendimas

$x^2-5x+6\geq 0$, $(x-2)(x-3)\geq 0$,



$x\leq 2$, $x\geq 3$ arba

$D(y)=(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$.

5. $y=\sqrt{4-x}+\dfrac{\lg(x+2)}{x}$.

Sprendimas

Šioje funkcijoje pošaknis negali būti neigiamas, reiškinys po logaritmu gali būti tik teigiamas, o vardiklis negali būti lygus nuliui. Vadinasi apibrėžimo sritis bus tos x reikšmės, kurios tenkins nelygybių sistemą: $\begin{cases} 4-x\ge 0, \\ x+2>0, \\ x\ne 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 4, \\ x>-2, \\ x\ne 0; \end{cases} \Rightarrow x\in(-2;0)\cup(0;4].$

6. $y=\dfrac{1}{\lg(x-2)}+\dfrac{2x}{\sqrt[4]{4x-x^2}}.$

Sprendimas

$$\begin{cases} x-2>0, \\ \lg(x-2)\ne 0, \\ 4x-x^2>0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2, \\ \lg(x-2)\ne \lg 1, \\ x^2-4x<0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2, \\ x\ne 3, \\ 0<x<4; \end{cases} \Rightarrow x\in(2;3)\cup(3;4).$$

Pratimai

Nustatykite funkcijos apibrėžimo sritį:

1. $y=\lg(x+3);$ $\quad$ *Ats.*: $x>-3.$

2. $y=\sqrt{5-2x};$ $\quad$ *Ats.*: $x\le 2{,}5.$

3. $y=\dfrac{1}{x^2-1};$ $\quad$ *Ats.*: $x\ne\pm 1.$

4. $y=\dfrac{1}{x^3-x};$ $\quad$ *Ats.*: $x\ne 0;\ x\ne\pm 1.$

5. $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2};$ $\quad$ *Ats.*: $x\ne 1,\ x\ne 2.$

6. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}};$ $\quad$ *Ats.*: $x<0;\ x>4.$

7. $y=\sqrt{x^2-4x+3};$ $\quad$ *Ats.*: $x\le 1;\ x\ge 3.$

8. $y=\arcsin(x-2);$ $\quad$ *Ats.*: $1\le x\le 3.$

9. $y=\arccos(1-2x);$ $\quad$ *Ats.*: $0\le x\le 1.$

10. $y=\sqrt{\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)};$ $\quad$ *Ats.*: $1\le x\le 4.$

11. $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}+\sqrt{x+2};$ *Ats.*: $-2\le x<0{,}0<x<1.$

12. $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5};$ $\quad$ *Ats.*: $-1\le x\le 3.$

13. $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}-\lg(2x-3);$ $\quad$ *Ats.*: $1{,}5<x<2;\ x>2.$

14. $y=\dfrac{3}{4-x^2}+\lg(x^3-x);$ $\quad$ *Ats.*: $-1<x<0;\ 1<x<2;\ x>2.$

15. $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2};$ $\quad$ *Ats.*: $-4\le x\le -p;\ 0\le x\le p.$

16. $y=\lg\dfrac{x-5}{x^2-10x+24}-\sqrt[3]{x+5};$ $\quad$ *Ats.*: $4<x<5;\ x>6.$

17. $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}};$ $\quad$ *Ats.*: $-1<x\le 1;\ 2\le x<3.$

18. $y=\lg\left(1-\lg\left(x^2-5x+16\right)\right);$ $\quad$ *Ats.*: $2<x<3.$

19. $y=\log_x(5-x);$ $\quad$ *Ats.*: $0<x<1;\ 1<x<5.$ $\quad$ 20. $y=\log_x\left(16-x^2\right);$ Ats.: $0<x<1;\ 1<x<4.$

21. $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4};$ $\quad$ *Ats.*: $-3\le x<-2;\ -2<x<2;\ 2<x<3.$

22. $y=\frac{\lg\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2+x}}$; *Ats.*: $-2<x<-1;\ 0<x<2$. 23. $y=\lg(x^2-7x+12)$; *Ats.*: $x<3;\ x>4$.

24. $y=\sqrt{5x^2+x-4}$; *Ats.*: $x\le -1; x\ge 0{,}8$. 25. $y=\frac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$; *Ats.*: $-3<x<2$.

26. $y=\lg\frac{x^2-7x+12}{x-1}$; *Ats.*: $1<x<3; x>4$.

27. $y=\frac{\lg(6-x)}{x}-\sqrt{5-x}$; *Ats.*: $x<0;0<x\le 5$.

28. $y=\sqrt{3-\frac{3x-2}{x+2}}+\frac{\lg(7-x)}{x-3}$; *Ats.*: $-2<x<3;3<x<7$.

29. $y=\lg\left(1-\frac{x}{x+1}\right)+\frac{\sqrt{3-x}}{x-2}$; *Ats.*: $-1<x<2;\ 2<x\le 3$.

30. $y=\lg\frac{6-x-x^2}{x^2-7x+12}$; *Ats.*: $-3<x<2;\ 3<x<4$.

31. $y=\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}}$; *Ats.*: $x<2;\ 2<x\le 3;\ x>4$.

32. $\mathrm{y}=\lg\frac{\mathrm{x}^2-5\mathrm{x}+4}{\mathrm{x}^2-7\mathrm{x}+6}$; Ats.: $\mathrm{x}<1; 1<\mathrm{x}<4;\ \mathrm{x}>6$.

33. $y=\frac{1}{\lg(x-3)}+\frac{1}{\sqrt{8-x}}$; *Ats.*: $3<x<4;\ 4<x<8$.

34. $y=\frac{\sqrt{7-x}}{\lg(x-1)}$; *Ats.*: $1<x<2;\ 2<x\le 7$.

35. $y=\frac{\sqrt{10-x}}{(x-5)\lg(x-1)}$; *Ats.*: $1<x<2;\ 2<x<5;\ 5<x\le 10$.

36. $y=\frac{1}{\sqrt{12-x}}+\frac{1}{(x-7)\lg(x-4)}$; *Ats.*: $4<x<5;\ 5<x<7;\ 7<x<12$.

37. $y=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{x^2-6x+3}-0{,}8}$; *Ats.*: $x\le 1;\ x\ge 5$. 38. $\mathrm{y}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^{\mathrm{x}^2-9\mathrm{x}+12}-8\frac{1}{3}}$; Ats.: $2\le \mathrm{x}\le 7$.

39. $y=\lg(24-5^{x+1}+5^{x-1})$; *Ats.*: $x<1$. 40. $y=\lg(16-2^{2x+1}-2^{x+2})$; *Ats.*: $x<1$.

41. $y=\sqrt{4^x+2^{3-2x}-6}$; *Ats.*: $x\le 0{,}5;\ x\ge 1$. 42. $y=\sqrt{\log_3\frac{3x+1}{x-2}}$; *Ats.*: $x\le -1{,}5;\ x>2$.

2 Funkcijos reiškimo būdai. Pagrindinės skaitinių funkcijų charakteristikos

Funkcijų reiškimo būdai

Dažniausiai funkcijos reiškiamos tam tikra formule. Tai ***analizinis*** reiškimo būdas.

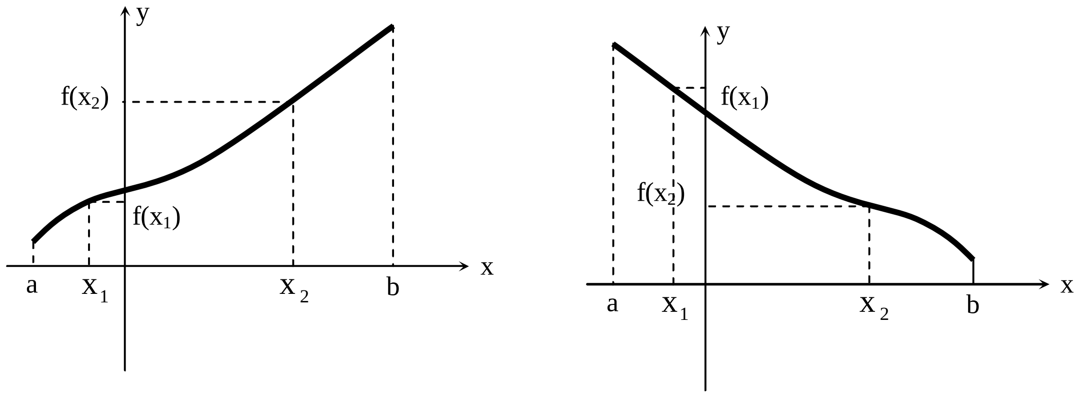
Funkcija gali būti pateikta ***lentele***, kurioje surašomos jos reikšmės, atitinkančios įvairias argumento reikšmes.

Funkcija gali būti aprašyta ir ***žodžiais***. Pavyzdžiui, "skaičiaus x sveikoji dalis". Analiziškai ši funkcija užrašoma y 5 [x].

Praktikoje įvairios funkcijos dažnai reiškiamos ***grafiškai***. Funkcijos grafiku vadiname plokštumos taškų aibę, kurių abscisės yra argumento x reikšmės, o ordinatės – funkcijos f(x) atitinkamos reikšmės.

Monotoninės funkcijos

Funkciją y 5 f(x) vadiname ***didėjančia*** intervale (a;b), jeigu bet kuriems $x_1 < x_2$ yra teisinga nelygybė $f(x_1) < f(x_2)$, ir ***mažėjančia***, jeigu $f(x_1) > f(x_2)$. Paprasčiau tariant, funkcija yra didėjanti, jeigu didėjančias argumento reikšmes atitinka ir funkcijos didėjančios reikšmės, ir funkcija mažėjanti, jeigu didėjančias argumento reikšmes atitinka funkcijos mažėjančios reikšmės. Tik didėjančią arba tik mažėjančią duotame intervale funkciją vadiname ***monotonine*** funkcija tame intervale, o patį intervalą – funkcijos ***monotoniškumo intervalu***. Didėjančios funkcijos grafikas didėjant argumentui kyla į viršų, o mažėjančios – leidžiasi žemyn.



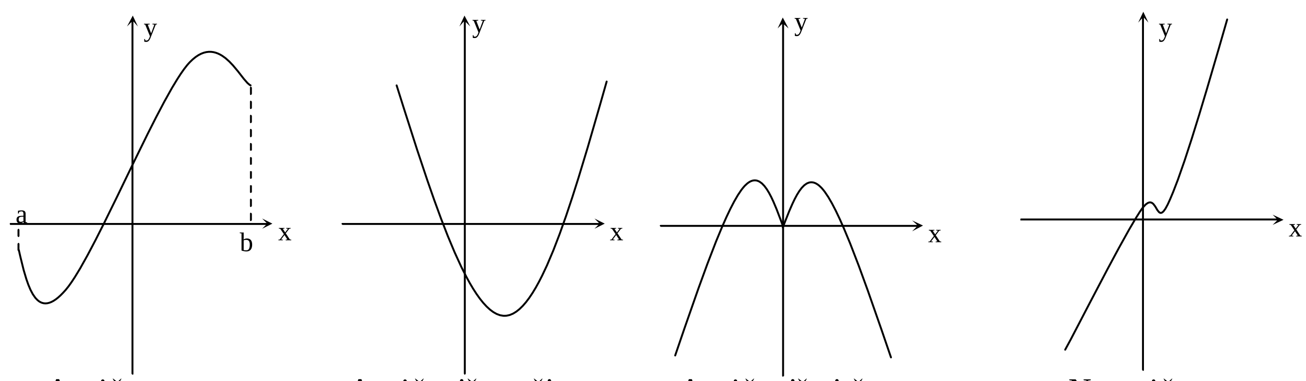
Kairėje pusėje pavaizduota didėjančios intervale (a;b) funkcijos grafikas, dešinėje – mažėjančios.

Aprėžtos ir neaprėžtos funkcijos

Funkcija y 5 f(x) vadinama ***aprėžta iš viršaus*** intervale[a;b], kai jos reikšmės nedidesnės už kurį nors skaičių M, t.y. $f(x) \le M$, kai $x \in [a;b]$. Skaičius M vadinamas funkcijos y 5 f(x) ***viršutiniu rėžiu*** intervale [a;b].

Funkcija y 5 f(x) vadiname ***aprėžta iš apačios*** intervale [a;b], kai jos reikšmės nemažesnės už kurį nors skaičių m, t.y. $f(x) \ge m$, kai $x \in [a;b]$. Skaičius m vadinamas funkcijos y 5 f(x) ***apatiniu rėžiu*** intervale [a;b].

Jei funkcija y 5 f(x) kuriame nors intervale yra aprėžta ir iš viršaus, ir iš apačios, tai ji tame intervale yra ***aprėžta***, t.y. $m \le f(x) \le M$.

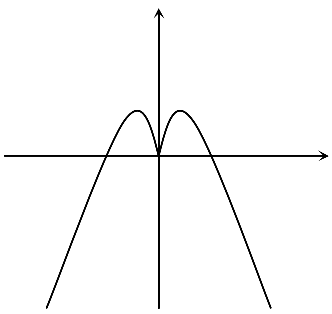


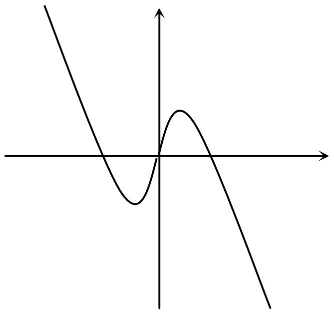
Aprėžta Aprėžta iš apačios Aprėžta iš viršaus Neaprėžta

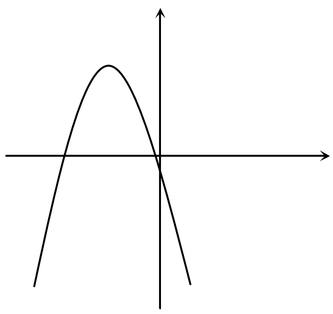
Lyginės ir nelyginės funkcijos

Funkcija y 5 f(x) vadinama ***lygine***, jeigu kiekvienai x reikšmei iš apibrėžimo srities priklausys ir –x reikšmė ir galios lygybė $\boxed{f(-x)\ 5\ f(x)}$. Analogiškai, jei galios lygybė $\boxed{f(-x)\ 5\ -f(x)}$, tai funkcija vadinsis ***nelygine***. Funkcijos nepriklausančios nei vienai iš šių grupių laikomos ***nei lyginėmis***, ***nei*** nelyginėmis.

Lyginės funkcijos grafikas simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu, o nelyginės – koordinačių pradžios taško atžvilgiu.


Lyginė


Nelyginė


Nei lyginė, nei nelyginė

Pavyzdžiai

Ištirkite funkcijų lyginumą:

1. $f(x) = 2x^2 - x^4$.

Sprendimas

$f(-x) = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4 = f(x)$; kadangi f(-x) 5 f(x), tai funkcija lyginė.

2. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

Sprendimas

$f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x^3}{x^2+1} = -\dfrac{x^3}{x^2+1} = -f(x) \Rightarrow$ nelyginė.

3. $f(x) = x^2 + x$.

Sprendimas

$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$; $f(-x) = -(-x^2 + x) \neq -f(x) \Rightarrow$ nei lyginė, nei nelyginė.

Pratimai

Ištirkite šių funkcijų lyginumą:

1. $f(x) = x^3 + 2x$; Ats.: nelyginė.
2. $f(x) = 1 + 2x^2$; Ats.: lyginė.
3. $f(x) = 2x^3 + 1$; Ats.: nei lyginė, nei nelyginė.
4. $f(x) = x + 1$; Ats.: nei lyginė, nei nelyginė.
5. $f(x) = |x|$; Ats.: lyginė.
6. $f(x) = x^2 - |x|$; Ats.: lyginė.
7. $f(x) = |x + 1|$; Ats.: nei lyginė, nei nelyginė.

8. $f(x)=\dfrac{|x|}{x^3+x}$; Ats.: nelyginė.

9. $f(x)=\left(x-x^3\right)^2$; Ats.: lyginė.

10. $f(x)=(x+1)^2$; Ats.: nei lyginė, nei nelyginė.

11. $f(x)=\cos x-\sin x$; Ats.: nei lyginė, nei nelyginė.

12. $f(x)=x\,\mathrm{tg}x$; Ats.: lyginė.

13. $f(x)=\sqrt{1+x^4}$; Ats.: lyginė.

14. $f(x)=\ln x$; Ats.: nei lyginė, nei nelyginė.

15. $f(x)=4x^2-5|x|+2$; Ats.: lyginė.

Atvirkštinės funkcijos

Funkcija y 5 f(x) vadinama ***apverčiama***, jeigu atitiktis *j* , atvirkštinė duotajai, taip pat yra funkcija, t.y. jeigu kiekvieną y reikšmę atitinka tik viena x reikšmė. Tuo atveju f ir *j* vadinsime atvirkštinėmis funkcijomis, o *j* - funkcijos f ***atvirkštine funkcija*** ir žymėsime f^{-1}.

Funkcijos f^{-1} apibrėžimo sritis sutampa su funkcijos f kitimo sritimi, o f^{-1} kitimo sritis sutampa su funkcijos f apibrėžimo sritimi. Atvirkštinių funkcijų grafikai simetriški tiesės y 5 x atžvilgiu.

Tarkime, kad duota apverčiama funkcija y 5 f(x). Norint parašyti jai atvirkštinę funkciją, užtenka:

1) iš lygybės y 5 f(x) išreikšti x per y;
2) sukeisti x su y vietomis.

Pavyzdys

Parašykite funkcijai $y=\dfrac{2x+3}{4}$ *atvirkštinę funkciją.*

Sprendimas

$$y=\frac{2x+3}{4}\Rightarrow 4y=2x+3\Rightarrow 2x=4y-3\Rightarrow x=\frac{4y-3}{2}\Rightarrow y=\frac{4x-3}{2}.$$

Pratimai

Parašykite atvirkštines funkcijas duotosioms:

1. $y=3x+5$; Ats.: $y=\dfrac{x-5}{3}$.

2. $y=\dfrac{2x-5}{4-x}$; Ats.: $y=\dfrac{4x+5}{x+2}$.

3. $y=\dfrac{2x+1}{3}$; Ats.: $y=\dfrac{3x-1}{2}$.

4. $y=\dfrac{1-2x}{1+x}$; Ats.: $y=\dfrac{1-x}{2+x}$.

5. $y=x^3$; Ats.: $y=\sqrt[3]{x}$.

3 Funkcijos riba. Pagrindinės ribų teoremos

Funkcijos ribos apibrėžimas gana sudėtingas, todėl pailiustruosime jį tik tokiu pavyzdžiu. Ištirkime, kokias reikšmes įgyja funkcija $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, kai x įgyja reikšmes iš x 5 2 aplinkos:

x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	...
f(x)	3,9	3,99	3,999	neapibrėžta	4,001	4,01	4,1	...

Iš lentelės matyti, kad funkcijos f(x) reikšmės, kai x reikšmės artimos 2, mažai skiriasi nuo skaičiaus 4. Tokiu atveju sakoma, kad *<u>funkcijos f(x) riba, kai x artėja prie 2, yra lygi 4</u>*. Kitaip tariant, kai $x\to 2$, tai $f(x)\to 4$. Tai užrašoma $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$ arba bendruoju atveju $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x)=A}$. lim – lotyniško žodžio *limes*, reiškiančio ribą, santrumpa.

Pagrindinės ribų teoremos:

1. Pastovaus skaičiaus riba yra pastovus skaičius: $\boxed{\lim\limits_{x\to a} c=c.}$
2. Funkcijų algebrinės sumos riba lygi šių funkcijų ribų algebrinei sumai $\boxed{\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a} g(x)}$; čia ir toliau laikysime, kad funkcijos y 5 f(x) ir y 5 g(x) turi ribas, kai $x\to a$.
3. Funkcijų sandaugos riba lygi dauginamųjų ribų sandaugai: $\boxed{\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x).}$
4. Pastovų daugiklį galima iškelti prieš ribos ženklą: $\boxed{\lim\limits_{x\to a}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x).}$
5. Funkcijų dalmens riba lygi dalinio ir daliklio ribų dalmeniui, jei daliklio riba nelygi nuliui: $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.}$

Pavyzdžiai

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2+3}{2x+2}$.

Sprendimas

Pritaikę pagrindines ribų teoremas, randame: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2+3}{2x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(5x^2+3)}{\lim\limits_{x\to 1}(2x+2)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(5x^2)+\lim\limits_{x\to 1}3}{\lim\limits_{x\to 1}(2x)+\lim\limits_{x\to 2}2}=$ $=\dfrac{5\lim\limits_{x\to 1}x^2+3}{2\lim\limits_{x\to 1}x+2}=\dfrac{5\cdot 1+3}{2\cdot 1+2}=2$. Šios funkcijos riba taške x 5 1 sutampa su jos reikšme šiame taške, todėl čia būtų pakakę apskaičiuoti funkcijos reikšmę šiame taške.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

Sprendimas

Skaitiklio ir vardiklio ribos, kai $x\to 3$, lygios nuliui. Gavome taip vadinamą neapibrėžtumą $\dfrac{0}{0}$, kurį reikia panaikinti suprastinant trupmeną iš nulinio daugiklio:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6.$$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{2x^2-5x+2}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$, todėl surandame skaitiklio ir vardiklio trinarių šaknis ir, juos išskaidę, suprastiname: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+4)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+4}{2x-1}=\dfrac{2+4}{2\cdot 2-1}=2.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}$.

Sprendimas

Vėl turime neapibrėžtumą $\frac{0}{0}$. Skaitiklį ir vardiklį dauginame iš vardikliui jungtinio daugiklio $\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{\left(\sqrt{3-x}\right)^2-\left(\sqrt{3+x}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{3-x-3-x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}\right)}{-2x}=\frac{\sqrt{3-0}+\sqrt{3+0}}{-2}=-\sqrt{3}.$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2+2x+1}$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\frac{\infty}{\infty}$, todėl šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalinsime iš x^2 (x-o aukščiausio laipsnio): $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2+2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}$. Nesunku įsitikinti (tai galima padaryti ir grafiškai), kad $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x^a}=0$, nes vardikliui neaprėžtai didėjant, o skaitikliui nesikeičiant, trupmena neaprėžtai mažėja ir artėja prie nulio ribos. Taigi,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0}{3+0+0}=\frac{1}{3}.$$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

Sprendimas

Turime neapibrėžtumą $\infty-\infty$, todėl šią funkciją dauginame ir daliname iš jungtinio reiškinio $x+\sqrt{x^2-4x}$: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-4x}\right)}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}}}=\frac{4}{1+\sqrt{1-0}}=2.$$

Pratimai

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x-3}$; *Ats.*: –3.
2. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; *Ats.*: 3.
3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$; *Ats.*: $\frac{1}{9}$.
4. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$; *Ats.*: $\frac{1}{6}$.
5. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{x^2-25}$; *Ats.*: 0,2.
6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$; *Ats.*: 3.
7. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$; *Ats.*: $\frac{2}{3}$.
8. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$; *Ats.*: 3.
9. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$; *Ats.*: 1.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$; *Ats.*: $-\sqrt{5}$.
11. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$; *Ats.*: 6.
12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; *Ats.*: 0,5.
13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; *Ats.*: $\frac{2}{3}$.
14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-1}{x}$; *Ats.*: 2.
15. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$; *Ats.*: $\frac{2}{3}$.
16. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$; *Ats.*: –0,5.
17. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{3}{x^3+1}-\frac{1}{x+1}\right)$; *Ats.*: 1.
18. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x+1}$; *Ats.*: 0,4.
19. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x-2}$; *Ats.*: 3.
20. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-8}{2x-1}$; *Ats.*: 0,5.
21. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^3-2x^2+x}$; *Ats.*: 2.
22. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2}{x^3-3x}$; *Ats.*: 5.
23. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-4x}{x^3+2x^2+5}$; *Ats.*: ∞.
24. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^3-3x}$; *Ats.*: 0.
25. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$; *Ats.*: 2.
26. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$; *Ats.*: –0,5.
27. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$; *Ats.*: 2,5.
28. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; *Ats.*: 0,5.;
29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$; *Ats.*: 1.;
30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$; *Ats.*: –2,5.
31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$; *Ats.*: –0,5.
32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)$; Ats.: –2.
33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x}\right)$; *Ats.*: –0,5.
34. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$; *Ats.*: –0,5.

35. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; *Ats.*: $\dfrac{2}{3}$.

36. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{x}$; *Ats.*: 2.

4 Skaičius e

Matematikoje svarbią reikšmę turi riba $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=e}$ (šios formulės įrodymą galima rasti matematinės analizės vadovėliuose). Žinoma, kad skaičius ***e*** yra iracionalusis, o jo reikšmė apytiksliai lygi 2,718282....

Dažnai vartojama rodiklinė funkcija, kurios pagrindas yra e, t.y. $\boxed{y=e^x}$, taip pat logaritminė funkcija, kurios pagrindas yra lygus ***e***, t.y. $\boxed{y=\log_e x}$. Ši funkcija vadinama ***natūraliuoju logaritmu*** ir žymima $\boxed{y\ 5\ \mathrm{ln}x}$.

Taip pat įrodoma, kad $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$.

Pavyzdžiai

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^2=\left|\text{kai } x\to\infty,\text{ tai ir } \frac{x}{2}\to\infty\right|=e^2.$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot 6}=\lim_{x\to 0}\left((1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^6=\left|\text{kai } x\to 0,\text{ tai ir } 3x\to 0\right|=e^6.$$

$$3.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot(-1)}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{-1}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{-1}=e^{-1}.$$

$$4.\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1+1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1-1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\cdot\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{-1}\right)=$$

$$=\left|\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}=e,\text{ o }\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{-1}=(1+0)^{-1}=1\right|=e\cdot 1=e.$$

Pratimai

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$; *Ats.*: e^3.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^x$; *Ats.*: $\sqrt[3]{e^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{4x}\right)^x$; *Ats.*: $e^{-\frac{5}{4}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}$; *Ats.*: e^{10}.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{2}{x}}$; *Ats.*: e^8.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$; *Ats.*: $\dfrac{\sqrt{e}}{e}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+0{,}2x)^{\frac{5}{x}}$; *Ats.*: e.

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}$; *Ats.*: $\dfrac{1}{e}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{5x}}$; $\quad Ats.: e^{\frac{12}{5}}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}$; $\quad Ats.: \frac{1}{e}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$; $\quad Ats.: \frac{1}{e}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+1}\right)^{x}$; $\quad Ats.: \frac{1}{\sqrt{e}}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+\frac{1}{2}}$; $\quad Ats.: e$.

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x+3}\right)^{x-4}$; $\quad Ats.: \frac{\sqrt{e}}{e}$.

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x+3}\right)^{x+3}$; $\quad Ats.: e^{-\frac{1}{5}}$.

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+3}{5x+2}\right)^{x-0,2}$; $\quad Ats.: \sqrt[5]{e}$.

17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+5}\right)^{x^2}$; $\quad$ Ats.: e^{-4}.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+1}{6x-3}\right)^{x+1}$; $\quad Ats.: \sqrt[3]{e^2}$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+6}\right)^{x}$; $\quad Ats.: \frac{1}{e^6}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2-8}$; $\quad Ats.: \frac{1}{e^2}$.

5 Funkcijos $\frac{\sin x}{x}$ riba, kai x 0

Įrodoma (įrodymą praleidžiame), kad $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$. Tada $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=$

$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{1}=1$. Įrodysime, kad $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$. Tegu arcsinx 5 y, tada x 5 siny; kai $x\to 0$, tai ir $y\to 0$. Vadinasi, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$. Nesunkiai įrodoma, kad $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x}=1$ ir $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$.

Pavyzdžiai

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}=\left|\text{kai } x\to 0, \text{ tai ir } 2x\to 0\right|=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4}=\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}=\frac{3}{4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{3}}{\frac{x^2}{9}\cdot 18}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\right)^2\cdot\frac{1}{18}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\right)^2\cdot\frac{1}{18}=1^2\cdot\frac{1}{18}=\frac{1}{18}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{3x}{2}}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{9x^2}{4}\cdot\dfrac{4}{9}}=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{3x}{2}}{\dfrac{3x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{9}{4}=1^2\cdot\dfrac{9}{4}=2{,}25.$

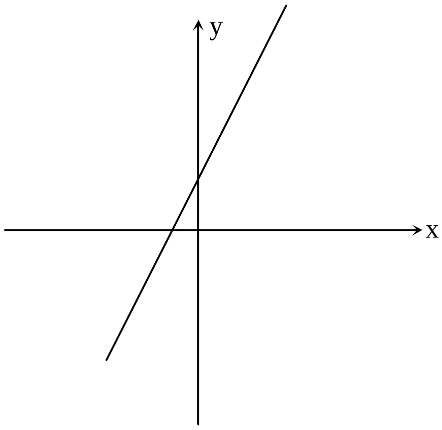
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arctg}3px}{\sin 5px}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\text{arctg}3px}{3px}\cdot 3px}{\dfrac{\sin 5px}{5px}\cdot 5px}=\dfrac{1\cdot 3px}{1\cdot 5px}=\dfrac{3}{5}=0{,}6.$

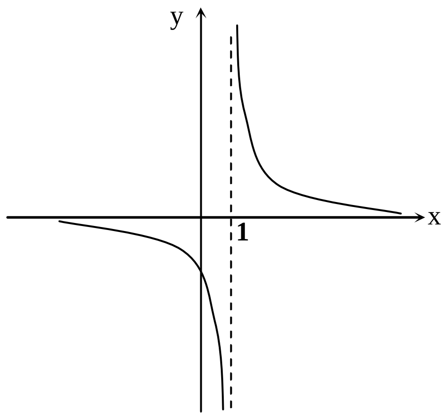
Pratimai

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$; *Ats.*: $\dfrac{3}{4}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; *Ats.*: $\dfrac{1}{2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{6x}$; *Ats.*: $\dfrac{1}{2}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 10x}$; *Ats.*: $\dfrac{2}{5}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{16x}$; *Ats.*: $\dfrac{5}{16}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{tg7x}$; *Ats.*: $\dfrac{3}{7}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg4x}{\sin 5x}$; *Ats.*: $\dfrac{4}{5}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$; *Ats.*: 1.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{3x}$; *Ats.*: $\dfrac{2}{3}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{6x^2}$; *Ats.*: $\dfrac{25}{12}$.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}$; *Ats.*: 1.
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{\sin 4x}$; *Ats.*: $\dfrac{3}{4}$.
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$; *Ats.*: 0.
14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; *Ats.*: 0.
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$; *Ats.*: $\dfrac{1}{4}$.
16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$; *Ats.*: 8.
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$; *Ats.*: $\dfrac{1}{2}$.
18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{4}}{x^2}$; *Ats.*: $\dfrac{1}{16}$.
19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$; *Ats.*: $\dfrac{1}{2}$.
20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos^2 x-\cos^4 x}$; *Ats.*: 1.
21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin px}{\sin 5px}$; Ats.: $\dfrac{1}{5}$.
22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos 2x}$; *Ats.*: $\dfrac{1}{4}$.
23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos^3 x-\cos^5 x}$; *Ats.*: 1.
24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{x}$; *Ats.*: 2.
25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$; *Ats.*: $\dfrac{4}{9}$.
26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$; *Ats.*: 2.

6 Funkcijos tolydumas

Nubraižykime funkcijų y 5 2x+1 ir $y=\dfrac{1}{x-1}$ grafikus:





Pirmosios funkcijos grafikas yra nenutrūkstanti linija, todėl sakoma, kad ši funkcija yra ***tolydi***. Antrosios funkcijos grafikas nutrūksta taške x 5 1, todėl šiame taške ši funkcija yra ***netolydi***. Jeigu funkcija y 5 f(x) nėra tolydi taške x_o, tai sakoma, kad ji ***trūki*** tame taške, o taškas x_o vadinamas funkcijos y 5 f(x) ***trūkio tašku***.

Funkcija y 5 f(x), kurios riba taške egzistuoja ir lygi funkcijos reikšmei tame taške, vadinama ***tolydžia taške*** x_o: $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$. Funkcija, tolydi kiekviename intervalo(a;b) taške, vadinama ***tolydžia*** tame ***intervale***.

Kad funkcija y 5 f(x) būtų tolydi taške x_o turi būti įvykdytos šios sąlygos:

1) funkcija turi būti apibrėžta taške x_o;
2) funkcija turi turėti ribą taške x_o;
3) funkcijos riba taške x_o turi būti lygi šios funkcijos reikšmei taške x_o.

Tolydžių funkcijų savybės:

1. Baigtinio skaičiaus tolydžių funkcijų algebrinė suma yra tolydi funkcija.
2. Baigtinio skaičiaus tolydžių funkcijų sandauga yra tolydi funkcija.
3. Dviejų tolydžių taške x_o funkcijų dalmuo yra tolydi tame taške funkcija, jei vardiklis tame taške nelygus nuliui.

Išvados:

1. Funkcija $f(x) = x^n (n \in N)$ yra tolydi visoje skaičių tiesėje.
2. Daugianaris $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$ yra tolydi funkcija visoje skaičių tiesėje.
3. Funkcija $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (Q(x)≠0, P(x) ir Q(x) – daugianariai) yra tolydi funkcija jos apibrėžimo srityje.
4. Jeigu funkcija y 5 f(x) yra tolydi intervale [a;b] ir šio intervalo galuose turi skirtingus ženklus, tai šio intervalo viduje yra bent viena x reikšmė, kur funkcija lygi nuliui.

2 Funkcijos išvestinė

1 Išvestinės sąvoka, jos geometrinė ir mechaninė prasmė

Išvestinės apibrėžimas

Funkcijos y 5 f(x) ***išvestine*** taške x_0 vadinama tos funkcijos pokyčio ir jį atitinkančio argumento pokyčio santykio riba, kai argumento pokytis artėja prie nulio:

$$\boxed{y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}.$$

Jeigu funkcija f(x) turi išvestinę visuose kurio nors intervalo taškuose, tai sakoma, kad ji *diferencijuojama* tame intervale. O išvestinės radimo veiksmas vadinamas *diferencijavimu*.

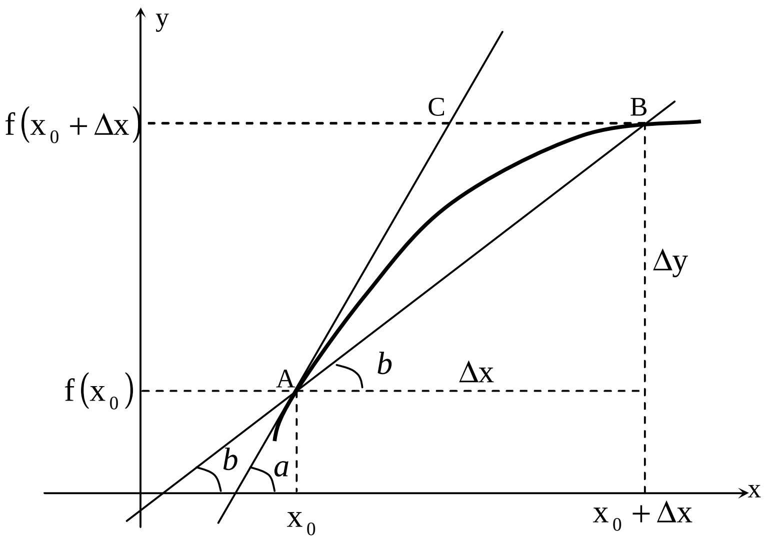
Pavyzdys

Raskite funkcijos $y = x^2 - 3x$ išvestinę taške $x = 2$.

Sprendimas

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - (x^2 - 3x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x - 3) = 2x + 3;\ y(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7.$$

Išvestinės geometrinė prasmė



Tarkime, kad duota funkcija y 5 f(x). Jos grafike laisvai pasirinkime 2 taškus $A(x_0; f(x_0))$ ir $B(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Nubrėžkime kirstinę AB ir liestinę AC. Kirstinės krypties koeficientas $k_1 = \mathrm{tg}b = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Kai $\Delta x \to 0$, taškas B kreive artėja prie taško A, o kirstinė BA artėja prie liestinės CA ir kampas b artėja prie kampo a :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}b = \mathrm{tg}a = k;$$

$$\boxed{f'(x_0) = \mathrm{tg}a = k}.$$

Vadinasi, *funkcijos išvestinė duotame taške yra lygi liestinės, išvestos per duotą tašką, krypties koeficientui.*

Išvesime funkcijos y 5 f(x) grafiko liestinės, nubrėžtos per tašką $A(x_0; f(x_0))$, lygtį. Tereikia parašyti lygtį tiesės, einančios per duotąjį tašką duotąja kryptimi: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Įstatę k ir y_0, gausime:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}.$$

Pavyzdys

Kreivei $f(x) = x^2 - 3x$ nubrėžta liestinė taške $x_0 = 2$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

Apskaičiuojame: $f(x_0) = f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$, $f'(x) = 2x - 3$, $f'(x_0) = f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$;

Įstatome į formulę: y-(-2) 5 1(x-2) arba x-y-4 5 0.

Mechaninė išvestinės prasmė

Panagrinėkime materialaus taško judėjimą. Judėjimą laikysime visiškai apibrėžtu, jei žinosime judėjimo lygtį S 5 f(t), iš kurios galėsime nustatyti nueitą kelią bet kuriuo laiko momentu t. Pasirinkime laiko momentą t 5 t_o ir apskaičiuokime nueitą kelią $S_0 = f(t_0)$. Per laiko tarpą Δt nueitas kelias $\Delta S = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Santykis $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$ ir bus materialaus taško vidutinis greitis per laiko tarpą Δt.

Judančio taško momentiniu ***greičiu*** V, arba greičiu laiko momentu t_0, vadinama riba, prie kurios artėja $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, kai Δt artėja prie nulio. Taigi,

$$\boxed{V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t_0)}.$$

Greičio pokyčio ir laiko pokyčio santykio riba, kai laiko pokytis artėja prie nulio, vadinama ***pagreičiu***. Taigi,

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = V'(t_0)}.$$

2 Pagrindinės diferencijavimo taisyklės ir formulės

1. $(u + v)' = u' + v'$;
2. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$;
3. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$;
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$;
5. $c' = 0$;
6. $x' = 1$;
7. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;
8. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
9. $(e^x)' = e^x$;
10. $(a^x)' = a^x \ln a$;
11. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
12. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$;
13. $(\sin x)' = \cos x$;
14. $(\cos x)' = -\sin x$;
15. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
16. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
17. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
18. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;
19. $(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}$;
20. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Sudėtinių funkcijų išvestinės

1. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;
2. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$;
3. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$;

5. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

6. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$;

7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

8. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

9. $(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

10. $(\mathrm{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

11. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

12. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

13. $(\mathrm{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

14. $(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Pavyzdžiai

1. $y' = \left(3x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 3\right)' = 3\cdot 3x^2 + \dfrac{1}{2}\cdot 2x - 2\cdot 1 + 0 = 9x^2 + x - 2.$

2. $y' = \left(\dfrac{3x+1}{4x^2-5}\right)' = \dfrac{(3x+1)'(4x^2-5)-(4x^2-5)'(3x+1)}{(4x^2-5)^2} = \dfrac{3(4x^2-5)-8x(3x+1)}{(4x^2-5)^2} =$

$= \dfrac{12x^2-15-24x-8x}{(4x^2-5)^2} = \dfrac{12x^2-32x-15}{(4x^2-5)^2}.$

3. $y' = \left((x^2+1)^3\right)' = \left|(u^n)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'\right| = 3(x^2+1)^{3-1}\cdot(x^2+1)' = 6x(x^2+1)^2.$

4. $y' = \left(\sqrt{x^2-4x+6}\right)' = \left|(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}\right| = \dfrac{(x^2-4x+6)'}{2\sqrt{x^2-4x+6}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+6}}.$

5. $y' = (x^3e^x)' = \left|(uv)' = u'v + v'u\right| = (x^3)'e^x + (e^x)'x^3 = 3x^2e^x + e^xx^3 = e^x(x^3+3x^2).$

6. $y' = \left(\log_3\dfrac{3x}{3x-1}\right)' = \left|(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}\right| = \dfrac{\left(\dfrac{3x}{3x-1}\right)'}{\dfrac{3x}{3x-1}\ln 3} = \dfrac{\dfrac{3(3x-1)-3\cdot 3x}{(3x-1)^2}}{\dfrac{3x\ln 3}{3x-1}} = \dfrac{\dfrac{-3}{3x-1}}{3x\ln 3} =$

$= \dfrac{1}{x(1-3x)\ln 3}.$

7. $y' = \left(6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}\right)' = \left(6x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{4}}\right)' = 6\cdot\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 4\cdot\dfrac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = 2x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{x^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}} =$

$= \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$

$$8.\ y' = \left(\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right)' = \left((2x+1)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{2}{3}-1}\cdot(2x+1)' = \frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2 = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x+1}}.$$

$$9.\ y' = \left(3\sin\left(2x^2-3\right)\right)' = 3\cos\left(2x^2-3\right)\cdot\left(2x^2-3\right)' = 3\cos\left(2x^2-3\right)\cdot 4x = 12x\cos\left(2x^2-3\right).$$

$$10.\ y' = \left(\sqrt[3]{1+\cos^3 x}\right)' = \left((1+\cos^3 x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\left(1+\cos^3 x\right)^{\frac{1}{3}-1}\cdot\left(1+\cos^3 x\right)' = \frac{1}{3}\left(1+\cos^3 x\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot$$

$$\cdot 3\cos^2 x\cdot(\cos x)' = \frac{-\cos^2 x\sin x}{\sqrt[3]{\left(1+\cos^3 x\right)^2}}.$$

Pratimai

Raskite funkcijų išvestines:

1. $y = \frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 3x + 4;\quad Ats.: x^2 + 10x - 3.$
2. $y = 1 - 3x + 2x^2;\quad Ats.: 4x - 3.$
3. $y = 2 - \frac{7x}{2} - \frac{3\sqrt{x}}{4};\quad Ats.: -3{,}5 - \frac{3}{8\sqrt{x}}.$
4. $y = \sqrt{x} - x;\quad Ats.: \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1.$
5. $y = (3-x)^2;\quad Ats.: 2x - 6.$
6. $y = (2x-1)^3;\quad Ats.: 24x^2 - 24x + 6.$
7. $y = (2x+3)(3x+1);\quad Ats.: 12x + 11.$
8. $y = x^3\left(x - \sqrt{x}\right);\quad Ats.: 4x^3 - 3{,}5x^2\sqrt{x}.$
9. $y = \frac{x^2-4}{x^2+4};\quad Ats: \frac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}.$
10. $y = \frac{1-x^3}{1+x^3};\quad Ats: \frac{-6x^2}{\left(x^3+1\right)^2}.$
11. $y = 2 + \frac{2}{x};\quad Ats: -\frac{2}{x^2}.$
12. $y = 3x - \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2};\quad Ats: 3 + \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3}.$
13. $y = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}};\quad Ats.: \frac{1}{2\sqrt{x}}.$
14. $y = \frac{5}{\sqrt{x}} + x\sqrt{x};\quad Ats.: -\frac{5}{2x\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}.$
15. $y = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x} - \frac{2x^2}{\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{x^2} + 3;\quad Ats.: \frac{1}{4\sqrt[3]{x^2}} - \frac{7\sqrt[4]{x^3}}{2} - \frac{4}{x^3}.$
16. $y = \frac{4}{5}\sqrt[5]{x} + \frac{4x}{\sqrt[4]{x}} + \frac{2}{x^2} + 3;\quad Ats.: \frac{4}{25\sqrt[5]{x^4}} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}} - \frac{4}{x^3}.$
17. $y = \frac{7}{8}\sqrt[3]{x^2} + \frac{2\sqrt{x}}{x^2} + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2};\quad Ats.: \frac{7}{12\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{x^2\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2} - \frac{14}{x^3}.$
18. $y = 2\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + 4;\quad Ats.: \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}.$
19. $y = \left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{x^{-2}}}{\sqrt[3]{x}}\right)^3;\quad Ats.: -\frac{5}{2x^3\sqrt{x}}.$
20. $y = \frac{\sqrt[3]{x}\sqrt{x^3}}{x};\quad Ats.: \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}.$
21. $y = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}};\quad Ats.: -\frac{1}{6x\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}.$

22. $y=\frac{1}{x}\left(x^3\sqrt{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}\right);$ $Ats.: \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{6x\sqrt[3]{x}}.$

Apskaičiuokite funkcijos išvestinę taške x_o:

23. $f(x)=2x^2+5x,\ x_o=1;$ $Ats.: 9.$

24. $f(x)=(2x-4)(1-x^2),\ x_o=-4;$ $Ats.: -126.$

25. $f(x)=\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{x},\ x_o=4;$ $Ats.: 3.$

26. $f(x)=\sqrt{2x}(x^2+1),\ x_o=2;$ $Ats.: 10{,}5.$

27. $f(x)=\frac{3x-1}{5x+4},\ x_o=1;$ $Ats.: \frac{17}{81}.$

28. $f(x)=\frac{x^2-1}{4-8x},\ x_o=1;$ $Ats.: -\frac{1}{2}.$

29. $f(x)=\frac{x^3}{x^2-2x},\ x_o=1;$ $Ats.: -3.$

30. $f(x)=\frac{6x^3-5x+1}{x^2},\ x_o=-1;$ $Ats.: 13.$

31. $f(x)=\frac{x^3+1}{x^3-1},\ x_o=2;$ $Ats.: -\frac{24}{49}.$

32. $f(x)=\frac{1+2x}{1+3x},\ x_o=0;$ $Ats.: -1.$

33. $g(x)=\frac{2x-3}{1-3x},\ x_o=1;$ $Ats.: -1{,}75.$

34. $f(x)=\frac{2+3x}{1-2x},\ x_o=1;$ $Ats.: 7.$

35. $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{3x-x^3},\ x_o=1;$ $Ats.: \frac{1}{4}.$

36. $u(x)=\frac{x^3-\sqrt{x}}{x^2-5},\ x_o=1;$ $Ats.: -\frac{5}{8}.$

Raskite funkcijų išvestines:

37. $y=(1-3x)^3;$ $Ats.: -9(1-3x)^2.$

38. $y=(x^2-3)^3;$ $Ats.: 6x(x^2-3)^2.$

39. $y=(4x^2-3)^3;$ $Ats.: 24x(4x^2-3)^2.$

40. $y=(1-2\sqrt{x})^3;$ $Ats.: \frac{-3(1-2\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}.$

41. $y=(2x+1)^{10};$ $Ats.: 20(2x+1)^9.$

42. $y=(5-3x)^4;$ $Ats.: 12(3x-5)^3.$

43. $f(x)=\sqrt[3]{x^2+3},\ f'(1)-?;$ $Ats.: \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}.$

44. $f(x)=\sqrt[4]{(x^2-1)^3},\ f'(0)-?;$ $Ats.: 0.$

45. $y=3\sqrt[5]{(3x^2-1)^3};$ $Ats.: \frac{54x}{5\sqrt[5]{(3x^2-1)^2}}.$

46. $y=\sqrt[3]{(x^3+1)^2};$ $Ats.: \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}.$

47. $y=\sqrt{x^2+3x+6};$ $Ats.: \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+6}}.$

48. $y=\sqrt{4-x^2};$ $Ats.: \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}.$

49. $f(x)=\sqrt{3x^2+4},\ f'(2)-?;$ $Ats.: 1{,}5.$

50. $f(t)=\sqrt{t^2-t+1},\ f'(2)-?;$ $Ats.: \frac{\sqrt{3}}{2}.$

51. $f(x)=\sqrt{5x^2+16},\ f'(2)-?;$ $Ats.: 1\frac{2}{3}.$

52. $f(x)=x\sqrt{1+x^2},\ f'(\sqrt{3});$ $Ats.: 3{,}5.$

53. $y=(x^2+6)\sqrt{x^2-3};$ $Ats.: \frac{3x^3}{\sqrt{x^2-3}}.$

54. $S=(t^2+1)\sqrt{t^2-1};$ $Ats.: \frac{t(3t^2-1)}{\sqrt{t^2-1}}.$

55. $y=\frac{1+2x}{\sqrt{1-2x}};$ $Ats.: \frac{3-2x}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}.$

56. $y=\frac{3x}{\sqrt{x^2-1}};$ $Ats.: \frac{-3}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}.$

57. $y=\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}$; Ats.: $\frac{-9}{x^2\sqrt{9+x^2}}$.

58. $y=\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$; *Ats.*: $\frac{8}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$.

59. $f(t)=\sqrt{\frac{1-t}{t}}$; Ats.: $-\frac{1}{2\sqrt{t^3(1-t)}}$.

60. $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x}}$; *Ats.*: $\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2x(x+1)^2}$.

61. $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; *Ats.*: $\frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

62. $y=\left(\frac{1+x}{x^2-x}\right)^2$; *Ats.*: $\frac{2(1+x)(1-2x-x^2)}{(x^3-x)^3}$.

63. $y=2\cdot 5^x+3e^x$; *Ats.*: $2\cdot 5^x\ln 5+3e^x$.

64. $y=x^2e^x$; *Ats.*: $xe^x(x+2)$.

65. $y=3^xe^x$; *Ats.*: $3^xe^x(1+\ln 3)$.

66. $y=\frac{e^x}{2^x}$; *Ats.*: $\frac{e^x(1-\ln 2)}{2^x}$.

67. $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$, $f(-1)-?$; *Ats.*: $\frac{-2e}{(1-e)^2}$.

68. $y=\frac{5-e^x}{e^x+2}$; Ats.: $\frac{-7e^x}{(e^x+2)^2}$.

69. $y=e^{2x}$; *Ats.*: $2e^{2x}$.

70. $y=e^{-x^2}$; *Ats.*: $-2xe^{-x^2}$.

71. $y=e^{\sqrt{x}}$; *Ats.*: $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

72. $y=3^{2x^2}$; *Ats.*: $4x3^{2x^2}\ln 3$.

73. $y=2^{\sqrt{x}}$; *Ats.*: $\frac{2^{\sqrt{x}-1}\ln 2}{\sqrt{x}}$.

74. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; *Ats.*: $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

75. $y=x^3\cdot e^x$; *Ats.*: $(x^3+3x^2)e^x$.

76. $f(x)=e^{\sqrt{2x^2-1}}$, $f'(1)-?$; *Ats.*: $2e$.

77. $f(x)=\frac{e^x+2}{e^x-2}$, $f'(-1)-?$; *Ats.*: $-\frac{4e}{(1-2e)^2}$.

78. $y=(x+1)e^x$; *Ats.*: $(x+2)e^x$.

79. $y=\frac{x^2+1}{e^x}$; *Ats.*: $(2x-x^2-1)e^{-x}$.

80. $y=x\cdot 2^{3x+x^2}$; *Ats.*: $((2x^2+3x)\ln 2+1)2^{3x+x^2}$.

81. $y=(x^2+4)e^{-x^2}$; *Ats.*: $-2(x^2+3x)e^{-x^2}$.

82. $g(x)=3^x(x^2-2x)$, $g'(0)-?$; *Ats.*: -2.

83. $y=\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$; *Ats.*: $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2(\sqrt{x}+1)^2}$.

84. $y=(e^{3x}+1)^2$; *Ats.*: $6e^{3x}(e^{3x}+1)$.

85. $y=e^{5x^2-3x}$; *Ats.*: $(10x-3)e^{5x^2-3x}$.

86. $y=x^2e^{x^2+3x}$; *Ats.*: $(2x^3+3x^2+2x)e^{x^2+3x}$.

87. $y=3\ln x-x^2$; *Ats.*: $\frac{3}{x}-2x$.

88. $f(x)=4\ln x+x^3$, $f'(2)-?$; *Ats.*: 14.

89. $y=\lg(2x^2+4)$; *Ats.*: $\frac{2x}{(x^2+2)\ln 10}$.

90. $y=\sqrt{x}+\log_2 x$; *Ats.*: $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x\ln 2}$.

91. $y=\lg(3x^2-2)$; *Ats.*: $\frac{6x}{(3x^2-2)\ln 10}$.

92. $y=\ln\frac{x+1}{x-1}$; *Ats.*: $\frac{2}{1-x^2}$.

93. $y=\ln\frac{2}{2+x}$; *Ats.*: $-\frac{1}{2+x}$.

94. $y=\ln\sqrt{2x-1}$; *Ats.*: $\frac{1}{2x-1}$.

95. $y=(x^2-1)\ln x^3$; $Ats.: 6x\ln x+\dfrac{3(x^2-1)}{x}$.

96. $y=\dfrac{\ln x}{x-1}$; $Ats.: \dfrac{1}{(x-1)^2}\left(\dfrac{x-1}{x}-\ln x\right)$

97. $y=\dfrac{x^2}{3\ln x}$; $Ats.: \dfrac{2x\ln x-x}{3\ln^2 x}$.

98. $y=x^2\ln x$; $Ats.: x(2\ln x+1)$.

99. $y=\log_3\dfrac{3x}{3x-1}$; $Ats.: \dfrac{1}{x(1-3x)\ln 3}$.

100. $y=\log_4\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; $\boldsymbol{Ats.}: \dfrac{4x}{(1-x^4)\ln 4}$.

101. $y=(1-\ln x)x$; $Ats.: -\ln x$.

102. $f(t)=t^2-3\ln t,\ f'(3)-?$; $Ats.: 5$.

103. $y=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$; $Ats.: \dfrac{1}{x(1-\ln x)^2}$.

104. $y=\ln\dfrac{2x-1}{x^2}$; $Ats.: \dfrac{2(1-x)}{x(2x-1)}$.

105. $y=x^2\ln^2(3x)$; $Ats.: 2x\ln(3x)(\ln(3x)+1)$.

106. $f(x)=\dfrac{\ln x+2}{2-\ln x},\ f'(e)-?$; $Ats.: \dfrac{4}{e}$.

107. $y=\log_4(3-x)^3$; $Ats.: \dfrac{3}{(x-3)\ln 4}$.

108. $y=2^{\ln(x+1)}$; $Ats.: \dfrac{2^{\ln(x+1)}\ln 2}{x+1}$.

109. $y=\dfrac{\ln x-2}{\ln x}$; $Ats.: \dfrac{2}{x\ln^2 x}$.

110. $y=\ln(2x^2-3)$; $Ats.: \dfrac{4x}{2x^2-3}$.

111. $y=\ln\sqrt{2x}$; $Ats.: \dfrac{1}{2x}$.

112. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; $Ats.: \dfrac{1}{x^2-1}$.

113. $y=\ln^2(2x+1)$; $Ats.: \dfrac{4\ln(2x+1)}{2x+1}$.

114. $y=\ln^3(3x)$; $Ats.: \dfrac{3\ln^2(3x)}{x}$.

115. $y=e^{x+1}\ln(x+5)$; $Ats.: e^{x+1}\left(\ln(x+5)+\dfrac{1}{x+5}\right)$

116. $y=\log_3(1-2x^2)^4$; $Ats.: \dfrac{16x}{(2x^2-1)\ln 3}$.

117. $y=\ln^6 x$; $Ats.: \dfrac{6\ln^5 x}{x}$.

118. $y=\sqrt[3]{x+e^x}$; $Ats.: \dfrac{1+e^x}{\sqrt[3]{x+e^x}}$.

119. $y=3\cos x+2\sin x$; $Ats.: 2\cos x-3\sin x$.

120. $y=\cos x\cdot\sin x$; $Ats.: \cos 2x$.

121. $y=\mathrm{ctg}x-\dfrac{1}{\mathrm{ctg}x}$; $Ats.: -\dfrac{4}{\sin^2 2x}$.

122. $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\sin x},\ f'\left(\dfrac{p}{4}\right)-?$; $Ats.: \sqrt{2}$.

123. $y=\dfrac{2+tgx}{tgx}$; $Ats.: -\dfrac{2}{\sin^2 x}$.

124. $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$; $Ats.: \dfrac{x\cos x-2\sin x}{x^3}$.

125. $y=\dfrac{\cos x}{\sin 2x}$; $Ats.: -\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

126. $y=\sin(x^2+5)$; $Ats.: 2x\cos(x^2+5)$.

127. $y=3\cos 3x$; $Ats.: -9\sin 3x$.

128. $y=\dfrac{\mathrm{tg}3x}{3}$; $Ats.: \dfrac{1}{\cos^2 3x}$.

129. $y=3tg(2x+1)$; $Ats.: \dfrac{6}{\cos^2(2x+1)}$.

130. $y=\cos(3x^2-1)$; $Ats.: -6x\sin(3x^2-1)$.

131. $y=tg\sqrt[3]{x^2}$; $Ats.: \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}\cos^2\sqrt[3]{x^2}}$.

132. $y=3\sin^2(2x-1)$; $Ats.: 6\sin(4x-2)$.

133. $f(x)=3\sin^2 x,\ f'\left(\dfrac{p}{6}\right)-?$; $Ats.: \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

134. $f(x)=\sin^2 x\,tgx,\ f'\left(\dfrac{p}{4}\right)-?$; $Ats.: 2$.

135. $y=5\sin^3 x$; $Ats.: 15\sin^2 x\cos x$.

136. $y = 3\sin(2x^2-3)^3;\quad Ats.: 36x(2x-3)^2\cos(2x^2-3)^3.$

137. $y = \sqrt[4]{1+\cos^2 x};\quad Ats.: -\dfrac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}.$

138. $y = ctg\sqrt{x};\quad Ats.: -\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}.$

139. $y = tgx\sin^2 x;\quad Ats.: tg^2x + 2\sin^2 x.$

140. $y = tg^2x\sin x;\quad Ats.: \dfrac{\sin^2 x(2+\cos^2 x)}{\cos^3 x}.$

141. $y = \dfrac{1}{(1+\cos 4x)^5};\quad Ats.: \dfrac{20\sin 4x}{(1+\cos 4x)^6}.$

142. $y = \dfrac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x};\quad Ats.: -\dfrac{\sin 2x}{(1+\cos^2 x)^2}.$

143. $y = 2\cos^2 3x;\quad Ats.: -6\sin 6x.$

144. $y = \sqrt{\sin x};\quad Ats.: \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$

145. $y = \ln^2\sin x;\quad Ats.: 2\ln(\sin x)\cdot ctgx.$

146. $y = \dfrac{1}{4}tg^4x;\quad Ats.: \dfrac{tg^3x}{\cos^2 x}.$

147. $y = \cos 2x\cos x + \sin 2x\sin x;\quad Ats.: -\sin x.$

148. $y = 2\sin\dfrac{x}{2};\quad Ats.: \cos\dfrac{x}{2}.$

149. $y = \dfrac{1}{3}\cos 3x;\quad Ats.: -\sin 3x.$

150. $y = \dfrac{\sin 5x}{5} - 2\cos\dfrac{x}{2};\quad Ats.: \cos 5x + \sin\dfrac{x}{2}.$

151. $y = x(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3);\quad Ats.: 2x-9.$

152. $y = \dfrac{x^2+3}{x^2-3};\quad Ats.: \dfrac{-12x}{(x^2-3)^2}.$

153. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + 4;\quad Ats.: \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x}}.$

154. $y = (3x^2+4)^5;\quad Ats.: 30x(3x^2+4)^4.$

155. $y = \dfrac{\ln t - 2}{\ln t};\quad Ats.: \dfrac{2}{t\ln^2 t}.$

156. $y = \cos(3x^2-1);\quad Ats.: -6x\sin(3x^2-1).$

157. $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1},\ rasti\ f'(1);\quad Ats.: \dfrac{2e}{(e+1)^2}.$

158. $y = \ln\sqrt{\cos x};\quad Ats.: -\dfrac{1}{2}tgx.$

3 Aukštesnių eilių išvestinės

Jeigu y' yra funkcijos y 5 f(x) išvestinė, tai $(y')'$ vadinama funkcijos y 5 f(x) ***antrąja išvestine*** (arba antros eilės išvestine). Antroji išvestinė žymima y'' arba $f''(x)$. Antrosios išvestinės išvestinė vadinama ***trečiąja išvestine***, t.y. $y''' = (y'')'$ ir t.t.

Pavyzdys

$$y' = (2x^2+3x)' = 4x+3;$$
$$y'' = (y')' = (4x+3)' = 4;$$
$$y''' = (y'')' = 4' = 0.$$

Pratimai

Raskite funkcijų antrąsias išvestines:

1. $y = x^2;\quad Ats.: 2.$

2. $y = \dfrac{x^3}{6};;\quad Ats.: x.$

3. $y = (2x-1)(3x^2-2);\quad Ats.: 36x-6.$

4. $y = x^{-2};\quad Ats.: 6x^{-4}.$

5. $y=\sqrt[3]{x^2}$; *Ats.*: $-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x}}$.

6. $y=\sqrt[3]{x}-x$; *Ats.*: $-\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$.

7. $y=\left(x^2+\right)^3$; *Ats.*: $6\left(3x^2+1\right)$.

8. $y=\sin 2x$; *Ats.*: $-4\sin 2x$.

9. $S(x)=(1-\ln x)x$, *rasti* $S''(2)$; *Ats.*: $-\dfrac{1}{2}$.

10. $g(x)=\ln\dfrac{2}{2+x}$, *rasti* $g''(0)$; *Ats.*: $-\dfrac{1}{2}$.

4 Funkcijos diferencialas

Funkcijos y 5 f(x) *diferencialu* *dy* vadinama sandauga $f'(x)\cdot\Delta x$, t.y.

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

Diferencialo formulėje vietoje Δx galima rašyti dx, nes pagal apibrėžimą funkcijos y 5 x diferencialas $dx=x'\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x$. Taigi,

$$\boxed{dy=f'(x)dx.}$$

Iš čia išplaukia $\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$, t.y. *funkcijos išvestinė yra lygi funkcijos diferencialo ir argumento diferencialo santykiui*.

Funkcijos diferencialas dažnai naudojamas matematikoje skaičiuojant funkcijų reikšmes, taip pat vertinant paklaidų didumą. Tai daroma remiantis tuo, kad *funkcijos pokytis yra apytiksliai lygus funkcijos diferencialui, kai argumento pokytis mažas*, t.y $\Delta y\approx dy$. Ši lygybė išplaukia iš išvestinės apibrėžimo $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{dy}{dx}$.

Funkcijos y 5 f(x) diferencialo diferencialas vadinamas *antruoju diferencialu* (arba antrosios eilės diferencialu) ir žymimas d^2y arba $d^2f(x)$. Taigi, $d^2y=d(dy)$. Analogiškai $d^3y=d\left(d^2y\right)$ ir t.t. Rasime antros eilės diferencialą: $d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx=(f''(x)dx)dx=f''(x)dx^2$. Taigi,

$$\boxed{d^2y=f''(x)dx^2}.$$

Pavyzdžiai

1. Raskite funkcijos $y=\sin^2 x$ pirmosios eilės diferencialą.

Sprendimas

$$dy=f'(x)dx=\left(\sin^2 x\right)'dx=2\sin x\cos x dx=\sin 2x dx.$$

2. Apskaičiuokite $\sqrt[6]{66}$.

Sprendimas

Skaičius $\sqrt[6]{66}$ yra funkcijos $y=\sqrt[6]{x}$ reikšmė taške x 5 66. Šios funkcijos reikšmė taške $x_0=64$ žinoma: $\sqrt[6]{64}=2$. Kadangi $dy\approx\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, tai $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy$.

$$f(x_0)=f(64)=2;\quad dy=f'(x)\Delta x=\left(\sqrt[6]{x}\right)'\Delta x=\frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}\Delta x=\frac{1}{6\sqrt[6]{64^5}}\cdot 2\approx 0{,}0104.$$

Taigi, $\sqrt[6]{66}\approx 2+0{,}0104=2{,}0104$.

Pratimai

Raskite funkcijų pirmosios eilės diferencialus:

1. $y = \ln \sin^2 2x$; $\quad Ats.: dy = 4tg2xdx.$
2. $y = (x-1)e^x$; $\quad Ats.: dy = xe^x dx.$
3. $y = \sqrt{x^3 - 2}$; $\quad Ats.: dy = \dfrac{3x^2 dx}{2\sqrt{x^3 - 2}}.$
4. $y = \ln \cos^2 x$; $\quad Ats.: dy = -2tgxdx.$
5. $y = (x^2 - 2x + 3)e^x$; $\quad Ats.: dy = (x^2 + 1)e^x dx.$
6. $y = \dfrac{1 - \cos 4x}{\sin 4x}$; $\quad Ats.: dy = \dfrac{2dx}{\cos^2 2x}.$

Apskaičiuokite apytiksles funkcijų reikšmes taške x:

1. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 3,\ x = 3{,}03;\quad Ats.: 18{,}66.$
2. $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x - 1,\ x = 3{,}02;\ Ats.: 87{,}6.$
3. $f(x) = 2x^2 - x + 1,\ x = 1{,}1;\quad Ats.: 2{,}3.$
4. $f(x) = 5x^3 - 2x + 3,\ x = 2{,}01;\quad Ats.: 39{,}58.$

3 Išvestinių taikymas

1 Funkcijos didėjimas ir mažėjimas

Jeigu funkcija y 5 f(x) turi teigiamą išvestinę kiekviename intervalo (a;b) taške, tai funkcija *didėja* tame intervale, o jeigu funkcija turi neigiamą išvestinę kiekviename intervalo (a;b) taške, tai ji *mažėja* tame intervale. Funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalai vadinami *monotoniškumo intervalais*.

Funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalai nustatomi tokia tvarka:

1. Randami funkcijos kritiniai taškai. Kritiniais taškais laikomi tokie taškai, kuriuose išvestinė lygi nuliui arba neapibrėžta.

2. Skaičių tiesėje atidedami kritiniai taškai, dalinantys apibrėžimo sritį į intervalus, kuriuose funkcijos išvestinė turi pastovų ženklą.

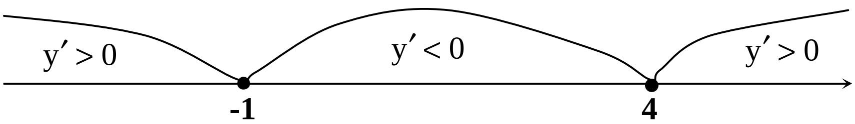
3. Nustatomas išvestinės ženklas kiekviename iš gautųjų intervalų. Jei $f'(x) > 0$ - funkcija didėja, o jei $f'(x) < 0$ - funkcija mažėja.

Pavyzdys

Raskite funkcijos $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 5$ didėjimo ir mažėjimo intervalus.

Sprendimas

Funkcijos apibrėžimo sritis: $(-\infty;+\infty)$. $y' = x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$. Skaičių tiesėje atidedame taškus, kuriuose išvestinė lygi nuliui ir nustatome išvestinės ženklą kiekviename iš intervalų:



Taigi, funkcija didėja, kai $x \in (-\infty;-1)$ ir $x \in (4;+\infty)$, o mažėja, kai $x \in (-1;4)$.

Pratimai

Raskite funkcijų didėjimo ir mažėjimo intervalus:

1. $y = 3x^2 - 12x + 5$; *Ats.: didėja, kai xe(2;+ :); mažėja, kai xe(- : ;2).*

2. *y 5 3-4x-x*^{2}*;* *Ats.: didėja, kai xe(- : ;-2);mažėja, kai xe(-2;+ :).*

3. *f(x) 5 2x*^{2}*-8x+5;* *Ats.: didėja, kai xe(2;+ :); mažėja, kai xe(- : ;2).*

4. *g(x) 5 5-6x-x*^{2}*;* *Ats.: didėja, kai xe(- : ;-3); mažėja, kai xe(-3;+ :).*

5. *y 5* $\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 10$ *;* *Ats.: didėja, kai xe(- : ;2) ir xe(3;+ :); mažėja, kai xe(2;3).*

6. *f(x) 5* $1 + 6x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$; *Ats.: didėja, kai xe(-2;3); mažėja, kai xe(- : ;-2) ir*

xe(3;+ :).

7. *S(t) 5* $\frac{1}{5}t^5 - \frac{5}{3}t^3 + 4t$; *Ats.: didėja, kai te(- : ;-2), te(-1;1) ir te(2;+ :);*

mažėja, kai te(-2;1) ir te(1;2).

8. *y 5* $-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 - 5$; *Ats.: didėja, kai xe(- : ;0) ir xe(1;2);*

mažėja, kai xe(0;1) ir xe(2;+ :).

9. *y 5* $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - 6$; *Ats.: didėja, kai xe(0;1) ir xe(2;+ :);*

mažėja, kai xe(- : ;0) ir xe(1;2).

10. *f(x) 5 (1-lnx)x;* *Ats.: didėja, kai xe(0;1); mažėja, kai xe(1;+ :).*

11. *f(x) 5 xlnx;* *Ats.: didėja, kai x*$\in \left(\frac{1}{e};+\infty\right)$ *mažėja, kai xe*$\left(0;\frac{1}{e}\right)$.

12. *y 5 lnx*^{2}*;* *Ats.: didėja, kai xe(0;+ :); mažėja, kai xe(- : ;0).*

13. $y = \ln\frac{1}{x}$; *Ats.: mažėja, kai xe(0;+ :).*

14. *y 5* e^{x^2}; *Ats.: didėja, kai xe(0;+ :); mažėja, kai xe(- : ;0).*

15. $f(x) = 3x + \frac{3}{x} + 5$; *Ats.: didėja, kai xe(- : ;-1) ir xe(1;+ :);*

mažėja, kai xe(-1;0) ir xe(0;1).

16. $f(x) = x + \frac{1}{x} + 2$; *Ats.: didėja, kai xe(- : ;-1) ir xe(1;+ :);*

mažėja, kai xe(-1;0) ir xe(0;1).

17. $y = \frac{1}{2x}$; *Ats.: mažėja, kai xe(- : ;0) ir xe(0;+ :).*

18. $y\ 5\ \dfrac{4}{2-x}$; *Ats.: didėja, kai xe(- : ;2) ir xe(2;+ :).*

19. $f(t)=\dfrac{t^3}{1-t}$; *Ats.: didėja, kai te(- : ;0), te(0;1) ir te* $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$;

mažėja, kai te $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

20. $y=\sqrt{1-x^2}$; *Ats.: didėja, kai xe(-1;0); mažėja, kai xe(0;1).*

2 Funkcijos ekstremumai

Jei funkcijos išvestinė, pereidama (iš kairės į dešinę) kritinį tašką x_0 keičia ženklą iš pliuso į minusą, tai x_0 - ***maksimumo taškas***, o jei iš minuso į pliusą, tai x_0 - ***minimumo taškas***. Jei išvestinė, pereidama kritinį tašką, ženklo nekeičia, tai tame taške ekstremumo nėra.

Funkcijos ***minimumo ir maksimumo taškai*** vadinami jos ***ekstremumų taškais***, o funkcijos reikšmės tuose taškuose – jos ***maksimumu*** ir ***minimumu*** arba ***ekstremumu***.

Funkcijos ekstremumai nustatomi tokia tvarka:

1. Randami funkcijos kritiniai taškai.
2. Skaičių tiesėje atidedami kritiniai taškai, dalinantys apibrėžimo sritį į intervalus, kuriuose funkcijos išvestinė turi pastovų ženklą.
3. Nustatomas funkcijos išvestinės ženklas kiekviename iš gautų intervalų. Jei funkcijos išvestinė, pereidama kritinį tašką, keičia ženklą iš “+” į “-“ tai maksimumo taškas, jei keičia ženklą iš “-“ į “+” – minimumo taškas, o jei ženklo nekeičia – ekstremumo nėra.
4. Apskaičiuojame funkcijos reikšmes ekstremumų taškuose.

Pavyzdys

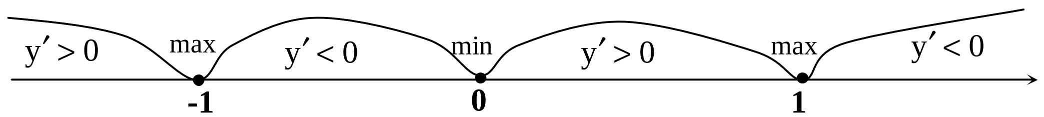
Raskite funkcijos $y=x^2-\dfrac{1}{2}x^4$ ekstremumus.

Sprendimas

Randame funkcijos kritinius taškus: D(y) 5 $(-\infty;+\infty)$;

$$y'=\left(x^2-\frac{1}{2}x^4\right)'=2x-2x^3=2x\left(1-x^2\right)=2x(1-x)(1+x)=0;\quad x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1.$$

Skaičių tiesėje atidedame kritinius taškus ir nustatome išvestinės ženklus kiekviename iš gautų intervalų:



$$y_{max}=y(\pm 1)=(\pm 1)^2-\frac{1}{2}(\pm 1)^4=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2};$$

$$y_{min}=y(0)=0^2-\frac{1}{2}\cdot 0^4=0.$$

Pratimai

Raskite funkcijų ekstremumus:

1. $y = x^2 - \frac{1}{2}x^4;$ *Ats.:* y_{max} 5 y(6 1) 5 $\frac{1}{2}$; y_{min} 5 y(0) 5 0.

2. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3;$ *Ats.:* y_{max} 5 y(-1) 5 $4\frac{1}{6}$; y_{min} 5 y(2) 5 $-\frac{1}{3}$.

3. y 5 x^4-2x^3-2x^2; *Ats.:* y_{max} 5 y(0) 5 0; y_{min} 5 y(-0,5) 5 $-\frac{3}{16}$; y_{min} 5 y(2) 5 -8.

4. y 5 x^4-2x^2+1; *Ats.:* y_{max} 5 y(0) 5 1; y_{min} 5 y(6 1) 5 0.

5. $f(x)$ 5 0,5x^2-3x; *Ats.:* f_{min} 5 f(3) 5 -4,5.

6. $f(x)$ 5 2x^3+6x^2-18x+120; *Ats.:* f_{max} 5 f(-3) 5 174; f_{min} 5 f(1) 5 110.

7. $f(x)$ 5 3x^4-4x^3; *Ats.:* f_{min} 5 f(1) 5 -1.

8. $f(t)$ 5 $\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t + \frac{8}{3};$ *Ats.:* f_{max} 5 f(-2) 5 6; f_{min} 5 f(1) 5 1,5.

9. $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2};$ *Ats.:* f_{max} 5 f(1) 5 $\frac{2}{3}$; f_{min} 5 f(0) 5 0,5.

10. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 6;$ *Ats.:* f_{max} 5 f(0) 5 6; f_{min} 5 f(6 1) 5 5.

11. $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 1;$ *Ats.:* f_{max} 5 f(6 2) 5 15; f_{min} 5 f(0) 5 -1.

12. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x-3);$ *Ats.:* f_{max} 5 f(0) 5 0; f_{min} 5 f(1,2)≈-2.

13. $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x;$ *Ats.:* f_{max} 5 f(8) 5 4; f_{min} 5 f(0) 5 0.

14. $f(x) = \sqrt[3]{x};$ *Ats.: Ekstremumų nėra.*

15. $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x};$ *Ats.:* f_{max} 5 f(-3) 5 -2; f_{min} 5 f(3) 5 2.

16. $f(x) = x^2 e^{-x};$ *Ats.:* f_{max} 5 f(2) 5 $\frac{4}{e^2}$; f_{min} 5 f(0) 5 0.

17. $f(x) = x \ln x;$ *Ats.:* f_{min} 5 $f(\frac{1}{e})$ 5 $-\frac{1}{e}$.

18. $f(x) = e^x + e^{-x};$ *Ats.:* f_{min} 5 f(0) 5 2.

19. $f(x) = \sin x + \cos x;$ *Ats.:* f_{max} 5 $f(\frac{p}{4} + 2kp)$ 5 $\sqrt{2}$, keZ;
f_{min} 5 $f\left(\frac{5p}{4} + 2kp\right) = -\sqrt{2}, k \in Z$.

20. $f(x) = \sin 2x - x;$ *Ats.:* f_{max} 5 $f(\frac{p}{6})$ 5 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{p}{6}$; f_{min} 5 $f(-\frac{p}{6})$ 5 $\frac{p}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3 Didžiausia ir mažiausia funkcijos reikšmė duotame intervale

Norint surasti tolydžios funkcijos duotame intervale didžiausią ir mažiausią reikšmes, reikia:

1. Rasti kritinius taškus priklausančius tam intervalui.
2. Apskaičiuoti funkcijos reikšmes tuose taškuose.
3. Apskaičiuoti funkcijos reikšmes intervalo galuose.
4. Palyginti gautąsias reikšmes. Mažiausioji ir didžiausioji iš jų ir bus funkcijos mažiausioji ir didžiausioji reikšmės tame intervale.

Pavyzdžiai

1. Raskite funkcijos $f(x)=3x-x^3$ didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale [0;2].

Sprendimas

Surandame kritinius taškus: $f'(x)=3-3x^2=3(1-x^2)=0;\quad x_1=-1,\ x_2=1$. Į duotą intervalą patenka tik vienas kritinis taškas $x_2=1$. Skaičiuojame funkcijos reikšmes taške $x_2=1$ ir intervalo galuose: $f(0)=3\cdot 0-0^3=0;\quad f(1)=3\cdot 1-1^3=2;\quad f(2)=3\cdot 2-2^3=-2.$

Gavome, kad $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)=2$ ir $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=-2.$

2. Dviejų neneigiamų skaičių suma lygi 4. Kokie turi būti tie skaičiai, kad jų kvadratų suma būtų mažiausia?

Sprendimas

Tarkime, kad vienas iš tų skaičių yra x, tada antrasis lygus 4-x. Jų kvadratų sumą pažymėsime y: $y=x^2+(4-x)^2$. Lieka nustatyti šios funkcijos mažiausią reikšmę, kai $x\in[0;4]$.

$y'=(2x^2-8x+16)'=4x-8=0;\ x=2;\quad y(0)=16,\ y(2)=8,\ y(4)=16.$ Mažiausią reikšmę funkcija įgyja taške x 5 2. Vadinasi, tie skaičiai turi būti 2 ir 2.

Pratimai

Raskite didžiausią ir mažiausią funkcijos reikšmes duotame intervale:

1. $f(x)=x^3-2x^2-4x+2;$ *xe[-1;1];* $\quad$ $Ats.: \max\limits_{[-1;1]} f(x)=f\left(-\frac{2}{3}\right)=3\frac{13}{27};\quad \min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(1)=-3.$

2. $f(x)=-x^4+4x-3,\ [0;3];$ $\quad$ $Ats.: \max\limits_{[0;3]} f(x)=f(1)=0;\quad \min\limits_{[0;3]} f(x)=f(3)=-72.$

3. $f(x)=x^2-6x+5,\ [-1;4];$ $\quad$ $Ats.: \max\limits_{[-1;4]} f(x)=f(-1)=12;\quad \min\limits_{[-1;4]} f(x)=f(3)=-4.$

4. $f(x)=-2x^2+8x-7,\ [0;3];$ $\quad$ $Ats.: \max\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)=1;\quad \min\limits_{[0;3]} f(x)=f(0)=-7.$

5. $f(x)=x^2-8x+7,\ [-1;7];$ $\quad$ $Ats.: \max\limits_{[-1;7]} f(x)=f(-1)=16;\quad \min\limits_{[-1;7]} f(x)=f(4)=-9.$

6. $f(x)=x^3-3x,\ [-1;2];$ $\quad$ $Ats.: \max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)=f(2)=2;\quad \min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(1)=-2.$

7. $f(x)=4x-x^3,\ [-2;2];$ $\quad$ $Ats.: \max\limits_{[-2;2]} f(x)=f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{16\sqrt{3}}{9};$

$\min\limits_{[-2;2]} f(x)=f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{16\sqrt{3}}{9}.$

8. $f(x)=x^3-4x,\ [-2;3];$ $\quad$ $Ats.: \max\limits_{[-2;3]} f(x)=f(3)=15;$

$\min\limits_{[-2;3]} f(x)=f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{16\sqrt{3}}{9}.$

9. $f(x)=x-x^3,\ [-2;1];$ $\quad$ $Ats.: \max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(-2)=6;$

$\min\limits_{[-2;1]} f(x)=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=.-\frac{2\sqrt{3}}{9}.$

10. $f(x) = e^{x^2}, \quad [-1;1];$ *Ats.*: $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = f(\pm 1) = e; \quad \min\limits_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1.$

11. $f(x) = \ln x, \quad [1;e];$ *Ats.*: $\max\limits_{[1;e]} f(x) = f(e) = 1; \quad \min\limits_{[1;e]} f(x) = f(1) = 0.$

12. $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, \quad [1;4];$ *Ats.*: $\max\limits_{[1;4]} f(x) = f(1) = f(4) = 2{,}5; \quad \min\limits_{[1;4]} f(x) = f(2) = 2.$

13. $f(x) = \sin 2x, \left[\frac{p}{6};\frac{3p}{4}\right];$ *Ats.*: $\max\limits_{\left[\frac{p}{6};\frac{3p}{4}\right]} f(x) = f\left(\frac{p}{4}\right) = 1; \quad \min\limits_{\left[\frac{p}{6};\frac{3p}{4}\right]} f(x) = f\left(\frac{3p}{4}\right) = -1.$

14. Iš stačiakampio skardos lakšto, kurio kraštinės 80 cm ir 50 cm, reikia pagaminti dėžutę be dangčio, išpjaunant kampuose kvadratus ir užlenkiant lakšto kraštus. Kokia turi būti išpjaunamų kvadratų kraštinė, kad dėžutės tūris būtų didžiausias?

Ats.:10 cm.

15. Prie namo sienos reikia aptverti 120 m ilgio vielos tinklu stačiakampį žemės sklypą. kokie turi būti stačiakampio matmenys, kad jo plotas būtų didžiausias?

Ats.:30 m; 60m.

16. Skaičių 10 išskaidykite į 2 dėmenis taip, kad jų sandauga būtų didžiausia.

Ats.:5 ir5.

17. Dviejų teigiamų skaičių suma lygi 6. kokie turi būti tie skaičiai, kad jų kubų suma būtų mažiausia?

Ats.:3 ir3.

18. Iš 10 dm ilgio vielos gabalo reikia išlankstyti didžiausio ploto stačiakampį. Apskaičiuokite jo kraštines.

Ats.:2,5 dm ir 2,5 dm.

19. Į atvirą baką, kurio pagrindas kvadratas, turi tilpti256 litrai benzino. Kokių matmenų bakui pagaminti bus sunaudota mažiausia medžiagų?

Ats.:8 dm, 8 dm ir 4 dm.

20. Į rodykite, kad iš visų stačiųjų trikampių, kurių įžambinė duota, lygiašonio trikampio plotas yra didžiausias.

21. Skaičių 6 išskaidykite į 2 dėmenis taip, kad prie vieno skaičiaus pridėjus kito kvadratą, gautoji suma būtų mažiausia.

Ats.:5,5 ir0,5.

22. kokia turi būti a reikšmė, kad lygties x^2*-(a-2)x-a-3 5 0 šaknų kvadratų suma būtų mažiausia?*

Ats.:1.

23. Langas yra stačiakampio, viršuje sujungto su pusskrituliu, formos. Lango perimetras 8 m. Koks turi būti pusskritulio spindulys, kad langas praleistų daugiausia šviesos?

Ats.: $\frac{8}{p+4}$.

24. Į apskritimą įbrėžtas mažiausio perimetro stačiakampis. Jo plotas lygus 16 cm^2. *Apskaičiuokite apskritimo spindulį.*

Ats.: $2\sqrt{2}$ *cm.*

25. Lygiašonės trapecijos šoninė kraštinė ir trumpesnysis pagrindas lygus 40 cm. Koks turi būti ilgesnysis pagrindas, kad trapecijos plotas būtų didžiausias?

Ats.:80 cm.

26. Kūgio sudaromoji lygi $20\sqrt{3}$ *cm. Kokia turi būti kūgio aukštinė, kad jo tūris būtų didžiausias?*

Ats.:20 cm.

27. Apie rutulį, kurio spindulys r, apibrėžtas kūgis. Raskite jo aukštinę.

Ats.:4r.

28. Į rutulį, kurio spindulys lygus 3 cm, įbrėžtas kūgis. Kokia turi būti kūgio aukštinė, kad jo tūris būtų didžiausias?

Ats.:4 cm.

29. Į rutulį, kurio spindulys lygus $\sqrt{3}$ cm, įbrėžtas didžiausio tūrio ritinys. Raskite jo tūrį.

Ats.:4 cm.

4 Funkcijų tyrimas ir grafikų braižymas

Funkcijos grafiką galima braižyti atidedant plokštumoje atskirus taškus. Tas metodas netobulas, nes funkcijos kitimo vaizdą ne visada galima susidaryti, net ir apskaičiavus daugelio taškų koordinates. Pasinaudoję funkcijos išvestine, galima gauti tikslesnę funkcijos kitimo eigą, nustatyti būdingus grafiko taškus. Prieš braižant grafiką reikėtų ištirti funkciją. tyrimą galima atlikti pagal tokią schemą:

1. Nustatoma funkcijos apibrėžimo sritis.
2. Ištiriamas funkcijos lyginumas ir periodiškumas.
3. Surandami taškai, kuriuose grafikas kerta koordinačių ašis.
4. Randami monotoniškumo intervalai ir ekstremumai.
5. Braižomas grafikas.

Tiriant konkrečią funkciją, kai kuriuos klausimus galima praleisti, papildyti. Grafikui patikslinti galima papildomai parinkti keletą taškų.

Pavyzdys

Ištirkite funkciją $y = x^4 - 5x^2 + 4$ ir nubraižykite jos grafiką.

Sprendimas

1. Funkcijos apibrėžimo sritis: $D(y) = (-\infty;+\infty)$.

2. Funkcija lyginė, nes $y(-x) = (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = y(x)$. Reiškia funkcijos grafikas simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu.

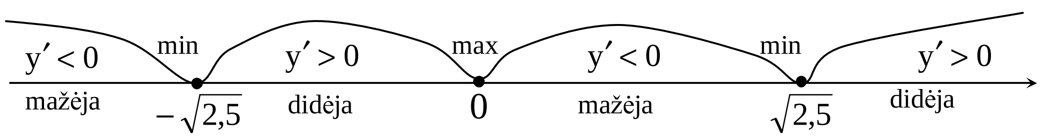
3. Randame taškus, kuriuose funkcijos grafikas kerta koordinačių ašis:

kai x 5 0, $y = 0^4 - 5 \cdot 0^2 + 4 = 4$;

kai y 5 0, $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, $x = \pm 1$ ir $x = \pm 2$.

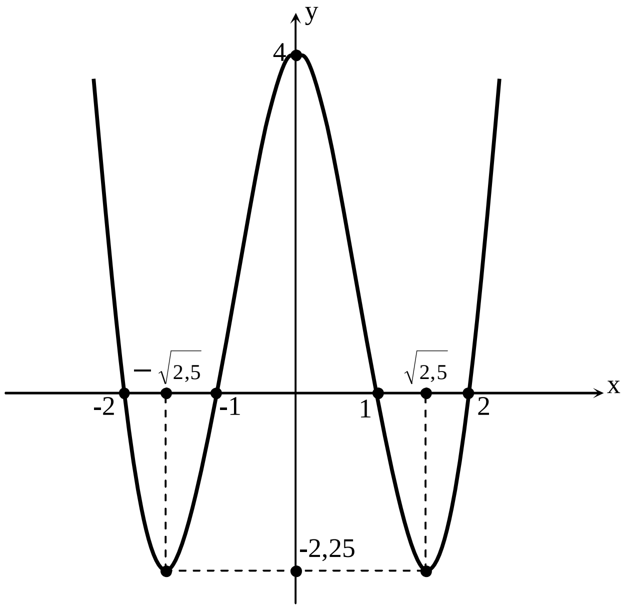
Susikirtimo taškai: (0;4), (-2;0), (-1;0), (1;0), (2;0).

4. $y' = 4x^3 - 10x = 4x(x^2 - 2{,}5) = 4x(x + \sqrt{2{,}5})(x - \sqrt{2{,}5}) = 0$; $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2{,}5}$.



$y_{max} = y(0) = 4$; $y_{min} = y(\pm\sqrt{2{,}5}) = -2{,}25$.

5. Braižome funkcijos grafiką. Pradžioje atidedame grafikui budingus taškus, t.y. taškus, kuriuose grafikas kerta koordinačių ašis, funkcijos ekstremumus. Vėliau taškus sujungiame atsižvelgdami į tyrimo rezultatus:



Pratimai

Ištirkite funkcijas ir nubraižikite jų grafikus:

1. $y = x^4 - 10x^2 + 9.$
2. $y = 3x^3 - 2x^2 + 4.$
3. $y = 4x^2 - x^4.$
4. $y = x^3 + x.$
5. $y = x^3 - 3x.$
6. $y = -3x^2 + 5x - 4.$
7. $y = -3x^2 + 12x.$
8. $y = -x^4 + 8x^2 + 9.$
9. $y = x^3 - 3x^2 + 2.$
10. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$
11. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}.$
12. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}.$
13. $y = x \ln x.$
14. $y = e^{x^2}.$
15. $y = 2^{-x^2+1}.$
16. $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}.$
17. $y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4.$
18. $y = x^2 \ln x.$
19. $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}.$
20. $y = \ln(x^2 - 2x + 2).$
21. $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}.$
22. $y = \dfrac{1}{1-x^2}.$
23. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}.$