Vilniaus universitetas
Radiofizikos katedra

V.Palenskis
K.Maknys

ATSITIKTINIAI VYKSMAI

Mokymo priemonė

Vilnius * V&K * 1998

© V.Palenskis, K.Maknys, 1998.

ATSITIKTINIAI VYKSMAI

Įvadas

Atsitiktinumas vienokiu ar kitokiu laipsniu yra būdingas daugeliui gamtoje vykstančių reiškinių. Jis pirmiausia pasireiškia ten, kur reiškinio vyksmui didelės įtakos turi daug įvairių poveikių, ypač tada, kai nagrinėjamoji sistema yra nepastovi. Atsitiktinumo ir būtinumo santykis tirtas jau antikoje. Ankstyvieji materialistai (Demokritas, B.Spinoza, P.Holbachas, L.Biucheris) teigė, kad atsitiktinumo kategorija neturi objektyvaus pagrindo tikrovėje, nes joje viskas determinuota ir todėl būtina. Kiti filosofai (Epikūras, K.Helvecijus) neigdami būtinumo absoliutinimą ir iš jo išplaukiantį fatalizmą, pripažino atsitiktinumą greta būtinumo arba tik atsitiktinumą. Atsitiktinumas yra konkreti būtinumo reiškimosi forma. Atsitiktinumo priešpastatymas būtinumui arba atvirkščiai galimas tik konkrečiame tyrime, bet ne apskritai. Kiekvieną atskirą reiškinį lemia daugybė kintančių aplinkybių ir poveikių. Tam tikras įvykis vienomis sąlygomis yra atsitiktinis, o kitomis – būtinas. Pvz., dėsningi vienos ar kitos biologinės rūšies požymiai iš pradžių esti atsitiktiniai nuokrypiai nuo ankstesnės rūšies požymių. Tie atsitiktiniai nuokrypiai išlieka, kaupiasi, ir jų pagrindu susiformuoja būtinos gyvo organizmo savybės. Analizuodamas įvairius atsitiktinius, atskirus faktus, mokslas siekia atskleisti tai, kas slypi jų esmėje, – tam tikrą būtinumą. Žvelgiant iš šalies, atsitiktinumas pasireiškia kaip nepakankamas masinių reiškinių reguliarumas, kuris neleidžia tiksliai nusakyti atitinkamų įvykių pasirodymo, t.y. neleidžia juos aprašyti deterministiniais modeliais. Tačiau nagrinėjant šiuos reiškinius išryškėja tam tikri dėsningumai. Būdingas atsitiktiniams vyksmams nereguliarumas, kaip taisyklė, kompensuojamas statistiniais dėsningumais, įvykių pasikartojimo dažniais daug kartų atliekant tą patį eksperimentą. Tais atvejais kalbama, kad įvykis turi tam tikrą pasirodymo tikimybę.

Yra dėsnių, kurie būtinumą atspindi tarsi apvalytą nuo atsitiktinumo; pvz., Niutono mechanikos dėsniai. Siekdama numatyti Mėnulio ar Saulės užtemimą, astronomija atsiriboja nuo atsitiktinumo ir ima tik būtinumą. Tačiau yra tokių dėsnių, kurie būtinumą ir atsitiktinumą atspindi vienybėje. Dėl to ir patys atsitiktiniai reiškiniai yra tyrimo objektas. Juos tiria ne tik matematika ir fizika, bet sociologija, biologija, chemija ir kt. mokslai.

Tikimybių teorijos sąvokos pradėjo formuotis XVI amžiuje, mėginant matematiškai analizuoti azartinių lošimų klausimus (italų matematikai L.Pačolis (1445-1514), N.Tartalja (1500-1557), Dž.Kardanas (1501-1557)). XVII šimtmečio pradžioje G.Galilėjus (italų mokslininkas, 1564-1642) mėgino nagrinėti matavimo paklaidas, traktuodamas jas kaip atsitiktines ir įvertindamas jų tikimybes. Tuo laiku mėginta kurti draudimo teoriją, pagrįsta mirtingumo, nelaimingų atsitikimų, ligų ir panašių masinių reiškinių matematine analize. Tačiau tikimybių teorijos pradžia laikomi K.Hiuigenso (1629-1695, olandų matematikas ir fizikas), B.Paskalio (1623-1662, prancūzų matematikas ir fizikas) ir P.Ferma (1601-1662, prancūzų matematikas) darbai, atlikti XVII a. viduryje, susiję su azartiniais lošimais. Tuose darbuose išryškėjo svarbios tikimybių teorijos sąvokos, tarp jų – tikimybės sąvoka. Didelis žingsnis į priekį buvo J.Bernulio (1654-1705, šveicarų matematikas) darbai, taip pat susiję su lošimais. Jis pirmasis įrodė vieną iš svarbiausių tikimybių teorijos dėsnių – vadinamąjį didžiųjų skaičių dėsnį. Šis dėsnis įvertina tikimybę, kad, atlikus didelį skaičių eksperimentų, stebimo įvykio statistinis dažnis mažai skirsis nuo to įvykio tikimybės.

Kaip jau buvo minėta, tikimybių teorijos gimimas susijęs su azartinių lošimų teorija. Čia atsitiktinių reiškinių dėsningumai yra gana paprasti. Vystantis mokslams paaiškėjo, kad tikimybių teorija gali būti taikoma daug svarbesnėse srityse, negu lošimai. Tai – matavimo paklaidų teorija, balistikos, statistikos klausimai, kurie skatino tikimybių teorijos vystymąsi. Ypač svarbų vaidmenį, kurdami tikimybių teorijos matematinį aparatą, suvaidino A.Muavras (1667-1754, prancūzų kilmės anglų matematikas), P.Laplasas (1749-1827, prancūzų matematikas), K.F.Gausas (1777-1855, vokiečių matematikas), S.Puasonas (1781-1840, prancūzų matematikas). XVIII ir XIX a. tikimybių teorija sparčiai vystėsi, pradėta ją taikyti įvairiausiose srityse.

XIX a. antroje pusėje ir XX a. pradžioje daug nusipelnė tikimybių teorijai rusų mokslininkai, iš kurių pirmiausia minėtini P.Čebyševas (1821-1894), A.Markovas (1856-1922), A.Liapunovas (1857-1918).

XX a. tikimybių teorija virto griežta matematine disciplina. Buvo sukurta jos aksiomatika. Pirmąsias aksiomų sistemas pasiūlė 1901 m. L.Bolcmanas (1844-1906, austrų fizikas) ir 1917 m. S.Bernšteinas (rusų matematikas). Šiandien labiau paplitusi kita aksiomų sistema, kurią 1933 m. suformulavo A.Kolmogorovas (rusų matematikas).

Šiais laikais įvairūs mokslai sparčiai matematizuojami. Ypač platus yra tikimybių teorijos taikymų diapazonas. Be to, įvairūs mokslai kelia tikimybių teorijai naujų svarbių problemų.

Apdorojant daugelį fizikos eksperimentų, reikia gerai įsivaizduoti ne tik tiriamus reiškinius, bet ir žinoti pagrindinius tikimybių teorijos bei matematinės statistikos dėsningumus. Kiekvienas reiškinys yra susijęs su daugybe kitų reiškinių įvairaus didumo sąsajomis. Kaip jau minėta, atsitiktinius reiškinius nagrinėja daug mokslo šakų, tačiau kiekviena mokslo šaka dažniausiai nagrinėja tik nedidelį tų ryšių skaičių, nustato nagrinėjamų reiškinių pagrindinius dėsningumus, kurie atspindi jos pasirinktus ryšius. Kadangi stebimi reiškiniai dažnai priklauso nuo tiek daug ryšių, kad praktiškai neįmanoma jų visų išanalizuoti, norint nusakyti, kaip vyks tiriamasis reiškinys, todėl tenka nagrinėti idealizuotus modelius, atsisakant daugelio antraeilių priežasčių. Taip nustatyti dėsningumai veikia ne absoliučiai tiksliai, reiškiniai šiek tiek nukrypsta nuo jų. Nuokrypius, atsiradusius todėl, kad neatsižvelgiama į daugelį ryšių, daugelis laiko atsitiktiniais reiškiniais. Tačiau būna atvejų, ypač fizikoje, kai toks atsitiktinių reiškinių supratimas (interpretavimas) yra klaidingas. Pvz. neapibrėžtumo principas fizikoje teigia, kad tam tikrus fizikinius dydžius sieja toks ryšys, jog, pasiekus didesnį vieno dydžio matavimo tikslumą, kito dydžio matavimo tikslumas sumažėja. Čia atsitiktinumas, kaip matome, – ne žinių stokos išdava, o principinis dalykas, atspindįs reiškinio esmę. Pastaruosius 15 metų intensyviai vystoma dinaminio chaoso teorija, kurios esmę sudaro tai, jei reiškinys aprašomas keliomis susietomis netiesinėmis diferencialinėmis lygtimis, tai šios lygčių sistemos sprendiniai tam tikrame kintamųjų intervale gali būti atsitiktiniai dydžiai. Dinaminio chaoso teorijos pavyzdžiais gali būti turbulentinis (chaotinis) skysčių tekėjimas, klimato (oro srautų) kitimas, plazmos kaitinimas magnetiniame lauke ir pan. Akivaizdu, kad ir kiek sukaupsime žinių, niekados neaprašysime tiksliai dujų molekulių judėjimo, laisvųjų elektronų judėjimo laidininke ir t.t. Todėl tvirtinimai, kad dujų molekulių judėjimą galėtume aprašyti diferencialinėmis lygtimis, traktuodami kiekvieną molekulę kaip labai mažą kūną, t.y. jei molekulių skaičius yra n, reikėtų sudaryti 3n antros eilės diferencialinių lygčių sistemą ir ją išspręsti, – neturi jokio realaus pagrindo. Problemos esmė ne ta, kad praktiškai nesugebėtume išspręsti šitokios milžiniškos lygčių sistemos, o ta, kad dujų molekulių judesį iš esmės neįmanoma tiksliai aprašyti, – čia galvoje turime kiekvienos atskiros molekulės judesį. Daugelis vyksmų, kurių paaiškinimui, atrodė, pilnai užteko matematinės fizikos klasikinių metodų, tiriant juos nuodugniau, pareikalavo tikimybinio interpretavimo, t.y. atsisakymo nuo tikslaus fizikinės sistemos aprašymo. Šiuolaikinis pažinimo progresas neįmanomas be tikimybinių idėjų ir metodų panaudojimo. Dabartiniu metu tenka įveikti vieną iš svarbiausių pažinimo šuolių – pereiti prie tikimybinio mąstymo stiliaus.

Labiausiai ištirtos fizikinių dydžių fliuktuacijos. Jas lemia medžiagos nevientisumas ir dalelių šiluminis judesys. Pvz., radioaktyviojo skilimo kai kurios charakteristikos fliuktuoja dėl to, kad kiekvieno branduolio skilimas yra atsitiktinis; dujų tankis fliuktuoja dėl to, kad viename tūrio elemente yra atsitiktinis molekulių perteklius, o tuo pačiu metu kitame tūrio elemente jų trūksta. Fizikinių dydžių fliuktuacijų teorijos pagrindus 1905-06 m. sukūrė M.Smoliukovskis ir A.Einšteinas. Labiausiai yra tiriamos elektrinės fliuktuacijos arba triukšmai, kurie vėliau bus nagrinėjami kurse *Fliuktuacijos elektroninėse sistemose*.

Tikimybių teorija Lietuvoje turi senas tradicijas. Jau XVIII a. Vilniaus universitete buvo dėstomi tikimybių teorijos elementai. 1830 m. jame buvo įsteigta tikimybių teorijos katedra. Tuo metu Vilniaus universitetas buvo vienas iš svarbiausių Rytų Europos universitetų. Tačiau tikimybių teorijos katedros veikla greitai nutrūko, nes 1832 m. universitetas buvo uždarytas. Ypač sparčiai tikimybių teorija vystėsi Lietuvoje per pastaruosius 40 metų. Lietuvos tikimybininkai nemažai nusipelnė tikimybių teorijos mokslui. Ne tik Lietuvoje, bet ir pasaulyje gerai žinomi tikimybininkų J.Kubiliaus, V.Statulevičiaus, B.Grigelionio ir kt. darbai. Vilniuje nuo 1973 m. kas 4 metai vyksta Tikimybių teorijos tarptautinės konferencijos.

Fizikai Lietuvoje fliuktuacijų (triukšmų) tyrimus pradėjo apie 1963 m. – Vilniaus universitete ir Puslaidininkių fizikos institute. Lietuvoje nuo 1976 m. vyko sąjunginės, o nuo 1991 m. įvyko kelios tarptautinės Fliuktuacinių reiškinių fizikinėse sistemose konferencijos.

1. ATSITIKTINIAI ĮVYKIAI IR JŲ TIKIMYBĖS

1.1. Atsitiktiniai įvykiai

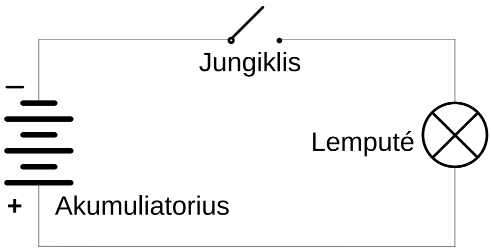
Tikimybių teorija matematikos metodais tiria atsitiktinius reiškinius. Viena iš pagrindinių tos teorijos sąvokų yra ***atsitiktinio įvykio*** sąvoka.

Įvykiu vadinsime kiekvieną faktą, kuris gali įvykti arba neįvykti, atlikus eksperimentą.

Eksperimentu (bandymu) suprasime kokių nors sąlygų realizavimą. Įvykius skirstome į būtinuosius, negalimuosius ir atsitiktinius. Aptarsime šias sąvokas.

Imkime loginę schemą: ***realizavus sąlygų kompleksą K, įvyksta įvykis A.***

Pvz. Panagrinėkime grandinę, kuri parodyta 1.1 pav. Sujungus akumuliatoriaus grandinės gnybtus jungikliu (sąlygų komplekso *K* realizavimas), užsidega apšvietimo lemputė (įvykis *A*).



1.1 pav. Įvykio iliustracijos grandinė.

Tokie įvykiai vadinami ***būtinaisiais*** (sąlygų komplekso *K* atžvilgiu). Kalbant apie kokio nors įvykio būtinumą, visada reikia turėti galvoje tų sąlygų kompleksą, kurio atžvilgiu įvykis nagrinėjamas. Pakeitus sąlygų kompleksą, įvykis gali tą savybę prarasti.

Galima ir šitokia schema (pvz., esant perdegusiai apšvietimo lemputei): ***realizavus sąlygų kompleksą K, įvykis A neįvyksta.*** Tada įvykis *A* vadinamas ***negalimuoju*** (sąlygų komplekso *K* atžvilgiu). Teiginys, kad koks nors įvykis yra negalimasis tam tikrų sąlygų komplekso atžvilgiu, logiškai yra tolygus teiginiui, kad jam priešingas įvykis yra būtinasis to komplekso atžvilgiu.

Tačiau ne visi įvykiai yra būtinieji arba negalimieji. Yra ir kitokių įvykių, kurių loginė schema šitokia: ***realizavus sąlygų kompleksą K, įvykis A gali įvykti, gali ir neįvykti.***

Pvz. a) Išmetus monetą (sąlygų komplekso K realizavimas), herbas gali atsiversti (įvykis A), gali ir neatsiversti.

b) Išmetus lošimo kauliuką (sąlygų komplekso K realizavimas), keturios akutės gali atsiversti (įvykis A), gali ir neatsiversti.

Tokius įvykius, kurie, realizavus tam tikrą sąlygų kompleksą, gali įvykti, bet gali ir neįvykti, vadiname ***atsitiktiniais*** (to sąlygų komplekso atžvilgiu). Būtina pabrėžti, kad, kalbant apie įvykio atsitiktinumą, visada reikia turėti galvoje eksperimento sąlygas K. Papildžius jų kompleksą naujomis sąlygomis, atsitiktiniai įvykiai gali virsti būtinaisiais arba negalimaisiais.

1.2. Elementarieji atsitiktiniai įvykiai

Pasirinkime kokį nors atsitiktinį bandymą (arba stebėjimą) ir panagrinėkime visų su juo susijusių galimų įvykių aibę. Kai kuriuos iš tų įvykių galėsime laikyti sudarytais iš kitų – atskirų atvejų. Tarp įvykių bus tokių, kurie toliau neskaidytini ir negali įvykti kartu. Juos vadinsime ***elementariaisiais atsitiktiniais įvykiais***. Ši sąvoka yra pirminė, todėl jos neapibrėšime, bet tik aptarsime pavyzdžiais.

Aibė visų elementariųjų įvykių, susijusių su kuriuo nors atsitiktiniu bandymu, vadinama ***elementariųjų įvykių erdve***.

Elementariuosius įvykius žymėsime raide ω su indeksais arba be jų, o elementariųjų įvykių erdvę – raide Ω.

1 ***pvz.*** Lošimo kauliukas yra kubas. Jo sienelės pažymėtos akutėmis – mažomis duobutėmis. Vienoje sienelėje yra viena akutė, kitoje – dvi ir t.t. iki šešių akučių. Meskime kauliuką. Laikysime, kad jis negali atsistoti briauna arba viršūne, atsirėmęs į paviršių, ant kurio nukrito, todėl gali atsiversti tik viena iš šešių sienelių, pažymėta atitinkamu akučių skaičiumi. Šiuo atveju elementariųjų įvykių erdvė Ω sudaryta iš šešių įvykių $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, čia ω_k reiškia k akučių pasirodymą. Kitus įvykius galėsime sudaryti iš šių šešių įvykių. Sakysime, įvykis "*atsivertė lyginis* *akučių skaičius*" bus sudarytas iš trijų elementariųjų įvykių $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Įvykis "*atsivertė sveikas akučių skaičius*" yra būtinasis – jis sudarytas iš visų šešių elementariųjų įvykių $\{\omega_1, ..., \omega_6\}=\Omega$. Įvykis "*atsivertė septynios akutės*" yra negalimasis – jį atitinka tuščia elementariųjų įvykių aibė $\varnothing$.

2 *pvz.* Turime du lošimo kauliukus: baltą ir juodą. Atsitiktinai metame juos. Šiuo atveju elementariųjų įvykių erdvė Ω bus sudaryta iš 36 įvykių $(\omega_{1j}, \omega_{2k})$ (čia j=1, ..., 6 ir k=1, ..., 6). Čia ω_{1j} reiškia įvykį "*baltojo kauliuko j akučių pasirodymas*", ω_{2k} – "*juodojo kauliuko k akučių pasirodymas*". Įvykis "*abiejų kauliukų atsivertusių akučių suma yra 8*": sudarytas iš 5 elementariųjų įvykių $\{(\omega_{12}, \omega_{26}), (\omega_{13}, \omega_{25}), (\omega_{14}, \omega_{24}), (\omega_{15}, \omega_{23}), (\omega_{16}, \omega_{22})\}$.

Imdami matematiškai nagrinėti kurį nors atsitiktinį bandymą, turime sudaryti jo matematinį modelį. Tam pirmiausia reikia sudaryti jo elementariųjų įvykių erdvę Ω. Atsitiktiniai įvykiai, susiję su šiuo bandymu, bus sudaryti iš erdvės Ω elementariųjų įvykių, t.y. bus aibės Ω poaibiai.

Koks nors įvykis *A* įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta kuris nors iš elementariųjų įvykių, iš kurių sudaryta aibė *A*.

Įvykis, kuris visada įvyksta, kai įvyksta bet kuris iš erdvės Ω elementariųjų įvykių, yra būtinasis. Būtinasis įvykis žymimas Ω. Negalimąjį įvykį atitinka tuščioji elementariųjų įvykių aibė, jis žymimas $\varnothing$.

Erdvės Ω elementai kartais vadinami taškais.

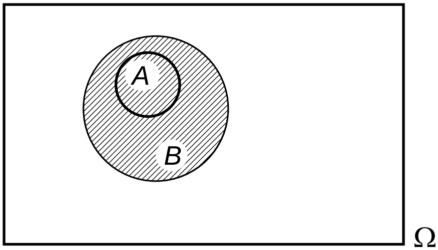
1.3. Veiksmai su įvykiais

Tarkime, kad yra fiksuota elementariųjų įvykių erdvė Ω ir jos poaibių, laikytinų įvykiais, sistema. Panagrinėsime kai kuriuos ryšius tarp įvykių.

1) Laikykime, kad įvykis *A* yra įvykio *B* ***dalis*** (***atskirasis atvejis***), jei įvykus įvykiui *A*, kartu įvyksta ir įvykis *B*. Tai reiškia, kad kiekvienas elementarusis įvykis, įeinantis į įvykį *A*, įeina ir į įvykį *B*, t.y. elementariųjų įvykių aibė *A* yra elementariųjų įvykių aibės B poaibis (dalis). žymėsime:

$$A \subset B \text{ arba } B \supset A.$$

Šį ryšį tarp dviejų įvykių, o vėliau ir aibių veiksmus, pailiustruosime geometriškai vadinamosiomis Veno diagramomis (1.2 pav.).



1.2 pav. Įvykis A yra įvykio B dalis (poaibis) $A \subset B$.

Imkime, kad atsitiktinai parenkame bet kurį stačiakampio tašką. Elementariųjų įvykių aibę Ω atitiks visų stačiakampio taškų aibė. Toliau imkime, kad įvykis A yra taško parinkimas iš srities, pažymėtos raide A, o įvykis B – iš srities B. Jei įvykis A yra įvykio B dalis, tai sritis A telpa srityje B (1.2 pav.).

Atkreipsime dėmesį, kad bet kuriam įvykiui A yra teisingos šios išraiškos:

$$\varnothing \subset A \subset \Omega\,, \qquad A \subset A.$$

Jei A, B, C – įvykiai ir $A \subset B$, $B \subset C$, tai $A \subset C$ (ženklo $\subset$ tranzityvumo savybė).

Įvykių ***lygybę*** žymėsime ženklu "=". Du įvykiai yra lygūs, jei juos sudarančios elementariųjų įvykių aibės yra lygios – tos pačios. Teisingas teiginys: jei, įvykus įvykiui A, įvyksta ir įvykis B, o įvykus įvykiui B, įvyksta ir įvykis A, tai tie įvykiai yra lygūs. Simboliais tai užrašome šitaip:

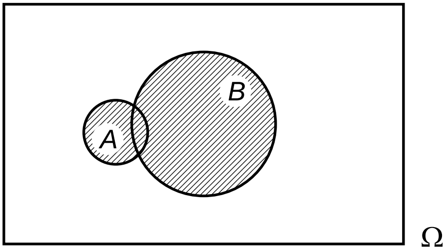
jei $A \subset B$ ir $B \subset A$, tai $A=B$.

Įvykių ***lygybės savybės***:

$A=A$ – refleksyvumas;
jei $A=B$, tai $B=A$ – simetriškumas;
jei $A=B$ ir $B=C$, tai $A=C$ – tranzityvumas.

2) Dviejų įvykių A ir B ***sąjunga*** (anksčiau kartais dar buvo vadinama *suma*) vadinsime įvykį, kai pasirodo bent vienas iš įvykių A ir B, t.y. įvykių A ir B sąjunga yra įvykis, sudarytas iš visų elementariųjų įvykių, priklausančių bent vienam iš įvykių A ir B, kitaip tariant, t.y. elementariųjų įvykių aibių A ir B sąjunga. Geometrinė iliustracija pateikta 1.3 pav. Sąjungą žymėsime taip:

$$A \cup B.$$



1.3. pav. Įvykių A ir B sąjunga $A \cup B$.

Panašiai apibrėžiama ir didesnio įvykių skaičiaus sąjunga. Bet kurios baigtinės arba suskaičiuojamosios įvykių sistemos $\{A_\lambda\}$ sąjunga vadinsime įvykį, kai įvyksta bent vienas iš tos sistemos įvykių. Tai vėl yra atitinkamų elementariųjų įvykių aibių sąjunga. Žymėsime:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda .$$

Baigtinės įvykių sistemos $\{A_1, \ldots , A_n\}$ sąjungą žymėsime:

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n \quad \text{arba} \quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k .$$

Suskaičiuojamos įvykių sistemos $\{A_1, A_2, \ldots\}$ sąjungą žymėsime:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \quad \text{arba} \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k .$$

Pats veiksmas yra vadinamas įvykių ***jungimu***.

Jungimo savybės:

$A \cup B = B \cup A$ – komutatyvumas;

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – asociatyvumas;

jei $A \subset B$, tai $A \cup B = B$;

atskirieji atvejai: $\varnothing \cup A = A$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup A = A$.

3) Dviejų įvykių A ir B ***sankirta*** vadinsime įvykį, kai kartu įvyksta abu įvykiai A ir B. Kitaip tariant, įvykių A ir B sankirta yra įvykis, sudarytas iš visų elementariųjų įvykių, priklausančių ir A, ir B, t.y. elementariųjų įvykių aibių A ir B sankirta. Ją žymėsime:

$$A \cap B.$$

Sankirtos geometrinė iliustracija pateikta 1.4 pav.

Bet kurios baigtinės arba suskaičiuojamosios įvykių sistemos $\{A_\lambda\}$ sankirta vadinsime įvykį, kai kartu įvyksta visi tos sistemos įvykiai. Ji yra atitinkamų elementariųjų įvykių aibių sistemos sankirta. žymėsime:

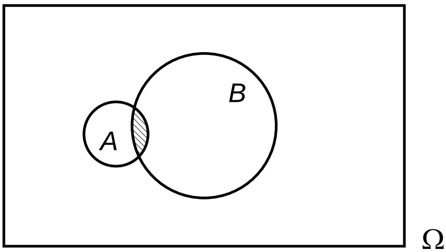
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \ .$$

Baigtinės įvykių sistemos $\{A_1, \ldots , A_n\}$ sankirtą žymėsime:

$$A_1\cap \ldots \cap A_n \quad \text{arba} \quad \bigcap_{k=1}^{n} A_k \ ,$$

o suskaičiuojamosios įvykių sistemos $\{A_1, A_2, \ldots\}$ sankirtą:

$$A_1\cap A_2\cap \ldots \quad \text{arba} \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \ .$$



1.4 pav. Įvykių A ir B sankirta $A\cap B$.

Kirtimosi savybės:

$A\cap B=B\cap A$ – komutatyvumas;

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ – asociatyvumas;

jei $A\subset B$, tai $A\cap B=A$;

atskirieji atvejai: $\varnothing\cap A=\varnothing$, $A\cap\Omega=A$, $A\cap A=A$.

Jungimo ir ***kirtimosi*** veiksmai susieti lygybėmis:

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ ir

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$ – distributyvumas.

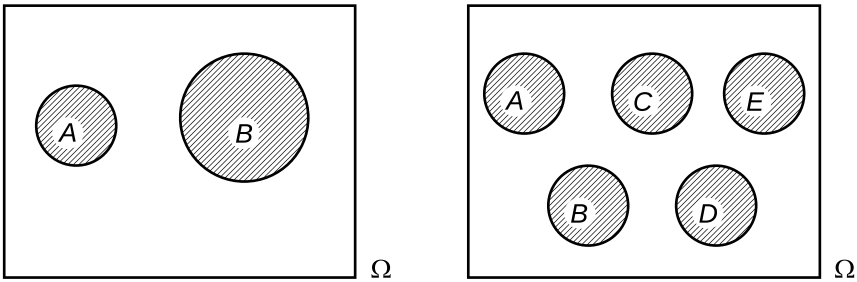
Šios lygybės yra teisingos ir bendresniais atvejais. Jei $\{A_\lambda\}$ yra kokia nors (baigtinė arba suskaičiuojamoji) įvykių sistema, B – bet kuris įvykis, tai teisingos lygybės:

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\cap B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(A_\lambda \cap B\right), \qquad \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\cup B = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\left(A_\lambda \cup B\right).$$

4) ***Nesutaikomieji įvykiai.*** Yra įvykių, kurie negali įvykti vienu metu. Pvz., metant monetą negali vienu metu atsiversti ir herbas, ir skaičius.

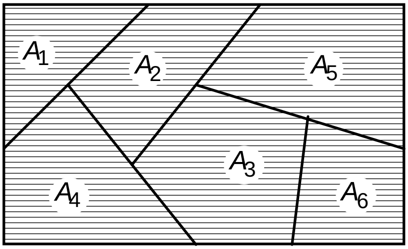
Įvykiai A ir B vadinami ***nesutaikomaisiais***, jeigu jie negali įvykti kartu, t.y. jų sankirta yra negalimasis įvykis $A\cap B=\emptyset$.

Kitaip tariant, du įvykiai vadinami nesutaikomaisiais, jei abiems įvykiams nėra palankaus elementariojo įvykio, tuo pačiu tų įvykių sankirta yra tuščioji aibė: $A\cap B=\emptyset$. Jei n įvykių yra nesutaikomi, tai bet kurių dviejų šių įvykių sankirta yra tuščioji aibė (1.5 pav.).



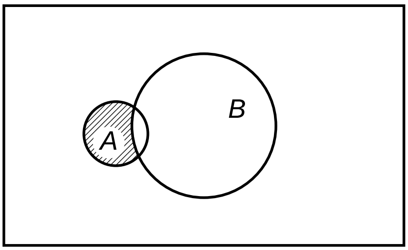
1.5 pav. Nesutaikomieji įvykiai.

Jei įvykiai A_1, A_2, ... , A_n yra nesutaikomieji ir jų sąjunga sutampa su visų elementariųjų įvykių aibe Ω, tai tie n įvykių sudaro aibės Ω ***skaidinį*** į n poaibių (1.6 pav.).



1.6 pav. Aibės Ω skaidinys į šešis poaibius.
$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$

5) Dviejų įvykių *A* ir *B* ***skirtumu*** vadiname įvykį, kai įvykis *A* įvyksta, o įvykis *B* neįvyksta. Kitaip tariant, *A* ir *B* skirtumas yra įvykis, sudarytas iš visų elementariųjų įvykių, priklausančių *A*, bet nepriklausančių *B*, t.y. įvykių *A* ir *B* skirtumas yra elementariųjų įvykių aibių *A* ir *B* skirtumas. Jį žymėsime $A \setminus B$. Patį šį veiksmą vadinsime ***atimtimi***. Geometrinė įvykių *A* ir *B* skirtumo iliustracija pateikta 1.7 pav.



1.7 pav. Įvykių *A* ir *B* skirtumas $A \setminus B$.

Atimties savybės***:***

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

jeigu $A \subset B$, tai $A \setminus B = \varnothing$;

atskirieji atvejai: $\varnothing \setminus A = \varnothing$, $A \setminus \Omega = \varnothing$, $A \setminus A = \varnothing$;

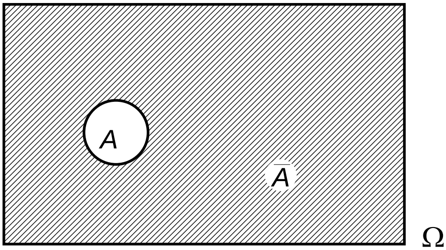
$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ – distributyvumas;

dviejų įvykių sankirtą galima išreikšti skirtumu: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

6) Įvykis $\Omega \setminus A$ yra vadinamas įvykiu, ***priešinguoju*** įvykiui *A*. Jį žymėsime $\overline{A}$. Įvykis $\overline{A}$ yra elementariųjų įvykių aibės *A* papildinys iki Ω.

Pastaba: Lietuvos standarte LST ISO 31-11: 1996 "Matematikos ženklai ir simboliai, vartojami fizikos moksluose ir technikoje" aibės A papildinį iki Ω siūloma žymėti $\complement_\Omega A$; kai aibė Ω aiški iš konteksto, simbolis Ω dažnai yra praleidžiamas: $\complement A$; tačiau, kai aibių yra daugiau, toks žymėjimas nėra patogus, todėl čia ir toliau vartosime simbolį su brūkšniu virš jo: $\overline{A}$ arba $\overline{A_\Omega}$.

Geometrinė priešingojo įvykio $\overline{A}$ iliustracija pateikta 1.8 pav.



1.8. pav. Aibės A papildinys $\overline{A}$ iki Ω.

Aišku, kad $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$, t.y. įvykis, priešingasis $\overline{A}$, yra tas pats įvykis A. Įvykiams A ir $\overline{A}$ galioja lygybės:

$A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (A ir $\overline{A}$ – nesutaikomieji).

Teisingos ir šios lygybės:

$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Jas galima apibendrinti: jei $\{A_\lambda\}$ yra bet kokia (baigtinė arba suskaičiuojamoji) įvykių sistema, tai:

$$\overline{\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda} ; \qquad \overline{\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda} .$$

Šie sąryšiai vadinami Morgano lygybėmis.

Dviejų įvykių skirtumą galima išreikšti ir šitaip:

$$A \backslash B = A \cap \overline{B} .$$

Matome, kad čia galima vartoti dvejopus terminus – tikimybių teorijos ir aibių teorijos. Dalis jų parodyta 1.1 lentelėje.

1.1 lentelė. Veiksmai su įvykiais ir jų žymėjimas.

Eil. Nr.	Įvykis	Aibė	Žymėjimas
1.	Būtinasis	Visų elementariųjų įvykių aibė	Ω
2.	Įvykis	Visų elementariųjų įvykių aibės poaibis	A, B, ...
3.	Negalimasis	Tuščioji elementariųjų įvykių aibė	$\varnothing$
4.	A yra atskirasis įvykio B atvejis	A yra B poaibis	$A \subset B$
5.	A arba B (bent vienas iš jų)	A ir B sąjunga	$A \cup B$
6.	A ir B (abu kartu)	A ir B sankirta	$A \cap B$
7.	Nesutaikomieji įvykiai	A ir B neturi bendrų elementų	$A \cap B = \varnothing$
8.	A įvyksta, o B neįvyksta	A ir B skirtumas	$A \setminus B$
9.	Priešingasis įvykiui A	A papildinys iki Ω	$\overline{A}$

1.4. Tikimybės sąvoka

1. ***Klasikinė tikimybės apibrėžtis.***

Remiantis kasdienine patirtimi, nesunku suvokti, kad įvairius įvykius galima palyginti pagal jų įvykimo galimumo laipsnį. Pavyzdžiui, kai mes metame monetą, mes nežinome, kas būtent iškris – skaičius ar herbas. Tačiau mes apie šiuos įvykius jau kai ką žinome. Žinome, kad šie įvykiai yra vienodai galimi. Taip pat žinome, kad, metant lošimo kauliuką, jo visų sienelių atsivertimo galimybės yra vienodos. Pataikyti į taikinį iš mažesnio atstumo yra daugiau galimybių, negu iš didesnio. Kiekvienam įvykiui galime priskirti skaičių, kuris apibūdintų jo galimybės laipsnį. Kai kuriais nesudėtingais atvejais atsitiktinio įvykio A tikimybę galime rasti naudojantis ***klasikine tikimybės apibrėžtimi***:

> Jei bandymo metu gali įvykti vienas iš n vienodai galimų elementariųjų įvykių, iš kurių m yra palankūs įvykiui A (kiekvienas iš m realizuoja įvykį A), tai įvykio A tikimybė lygi:
>
> $$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Čia tikimybė apibrėžta, remiantis klasikine įvykio ***vienodo galimumo*** arba vienodo tikėtinumo sąvoka. Ja buvo remiamasi nuo tikimybių teorijos atsiradimo iki XX a. pradžios. Vienodo galimumo sąvoka taip pat laikoma pirmine.

Aptarsime ją pavyzdžiais.

1 *pvz.* Tarkime, kad kokio nors bandymo elementariųjų įvykių aibė Ω yra sudaryta iš n vienodai galimų elementariųjų įvykių. Akivaizdu tikėtis, kad kiekvieno konkretaus elementariojo įvykio tikimybe galime laikyti skaičių $1/n$. Vadinasi, jei, atliekant bandymą, gali įvykti n elementariųjų įvykių, tai ekvivalentūs teiginiai: a) tie įvykiai vienodai galimi; b) kiekvieno jų tikimybė yra $1/n$.

2 *pvz.* Lošimo kauliukas yra simetriškas vienalytės medžiagos kubas su sienelėse pažymėtomis akutėmis 1, 2, 3, 4, 5, 6. Atsitiktinai metant kauliuką sienelės atsivertimo galimybės yra visiškai vienodos. Todėl galime laikyti, kad 1, 2, 3, 4, 5, 6 akučių pasirodymai yra vienodai galimi įvykiai, kurių kiekvieno tikimybė lygi $P=1/6$. Atitinkamai įvykio "*iškris lyginis akučių skaičius*" tikimybė yra $P=3\times(1/6)=1/2$.

3 *pvz.* Tarkime, kad dėžėje yra $n=15$ visiškai vienodų rutulių, kurie skiriasi tik spalva: 7 balti, 2 žali ir 6 raudoni. Rutuliai sumaišyti. Nežiūrėdami traukiame vieną rutulį. Kokia tikimybė, kad iš dėžės ištrauksime baltą (įvykis A), žalią (įvykis B) ar raudoną (įvykis C) rutulį? Įvykiui A palankių elementariųjų įvykių skaičius $m_A=7$, įvykiui B: $m_B=2$ ir įvykiui C: $m_C=6$. Naudodamiesi klasikine tikimybės apibrėžtimi, gausime:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{7}{15}, \quad \mathrm{P(B)} = \frac{m_B}{n} = \frac{2}{15}, \quad \mathrm{P(C)} = \frac{m_C}{n} = \frac{6}{15}.$$

Iš klasikinės tikimybės apibrėžties išplaukia šitokios tikimybės savybės:

1) kiekvieno įvykio A tikimybė tenkina nelygybes $0 \le P(A) \le 1$;

2) būtinojo įvykio tikimybė $P(\Omega)=1$;

3) negalimojo įvykio tikimybė $P(\varnothing)=0$;

4) jei įvykis A yra įvykio B atskiras atvejis $A \subset B$, tai $P(A) \le P(B)$.

Norint įrodyti šią nelygybę, pakanka nurodyti, kad skaičius elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A, yra ne didesnis už skaičių įvykių, palankių įvykiui B.

5) Jei įvykis A yra ***dviejų nesutaikomųjų įvykių*** A_1 ir A_2 sąjunga:

$$A=A_1 \cup A_2, \text{ tai } P(A)=P(A_1 \cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$$

– ***tikimybių sudėties teorema***. Tai taip pat lengvai įrodoma, nes skaičius elementariųjų įvykių, palankių A, yra elementariųjų įvykių, palankių A_1 ir A_2, skaičių suma.

Šis teiginys yra teisingas ir ***keliems nesutaikomiesiems įvykiams:***

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Jei poaibiai $A_1, \ldots, A_n$ sudaro elementariųjų įvykių aibės Ω skaidinį, tai:

$$P(A_1) + \ldots + P(A_n) = P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(\Omega) = 1.$$

6) Teisinga lygybė: $P(\overline{A})=1-P(A)$. Įvykiai A ir $\overline{A}$ yra nesutaikomieji, be to, $A \cup \overline{A}=\Omega$. Todėl $P(\overline{A})+P(A)=P(\Omega)=1$.

7) Bendruoju atveju įvykiams A ir B teisinga lygybė:

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B).$$

Įvykių A ir B sąjungos tikimybė lygi sumai tikimybių tų elementariųjų įvykių, kurie priklauso įvykiui $A \cup B$. Suma $P(A)+P(B)$ yra lygi sumai tikimybių elementariųjų įvykių, sudarančių aibę A ir aibę B, todėl sumoje $P(A)+P(B)$ tikimybės tų elementariųjų įvykių, kurie priklauso ir aibei A, ir aibei B (įvykis $A \cap B$), sudėtos po du kartus, t.y. elementariųjų įvykių, priklausančių įvykiui $A \cap B$, tikimybės išraiškoje $P(A)+P(B)$ susumuotos po du kartus. Todėl iš sumos $P(A)+P(B)$ atėmę $P(A \cap B)$, gausime įvykio $A \cup B$ tikimybę $P(A \cup B)$.

2. *Dažninė tikimybės apibrėžtis.*

Pagal klasikinę tikimybės apibrėžtį turime, kad, metant atsitiktinai lošimo kauliuką, įvykio "*atsivers 4 akutės* (*ketvertukas*)" tikimybė lygi P=1/6. Akivaizdu, šis tvirtinimas visiškai nereiškia, kad, metant lošimo kauliuką šešis kartus, būtinai vieną kartą atsivers ketvertukas. Kiekvienoje šešių metimų serijoje ketvertukas gali atsiversti vieną kartą, du kartus, gal būt, ir daugiau kartų, tačiau gali neatsiversti ir nė vieno karto.

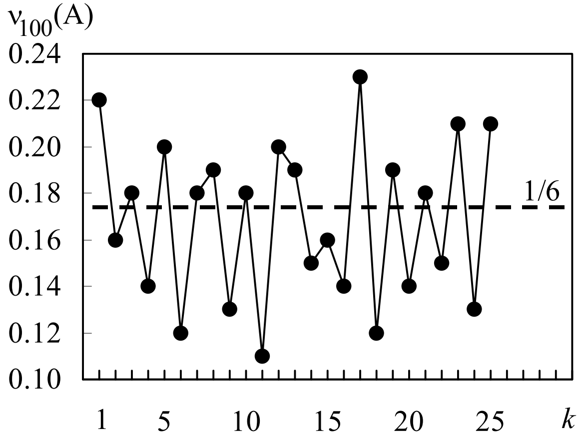
Tarkime, kad turime sąlygų kompleksą K, kurį galime realizuoti daug kartų. Kiekvieną kartą, jį realizavus, gali įvykti arba neįvykti atsitiktinis įvykis A. Pažymėkime $m_n(A)$ įvykių A skaičių, atlikus n bandymų.

Jei, atlikus tą patį bandymą tomis pačiomis sąlygomis n kartų, įvykis A įvyksta $m_n(A)$ kartų, tai santykis

$$\nu_n(A) = \frac{m_n(A)}{n}$$

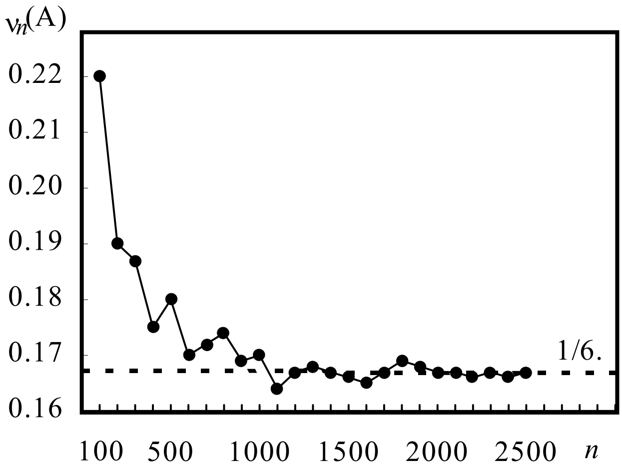
vadinamas įvykio A ***statistiniu dažniu***.

Statistinį dažnį galime apskaičiuoti tik remiantis atlikto bandymo duomenimis. Tais atvejais, kai žinoma įvykio A tikimybė, ją galima palyginti su to paties įvykio statistiniu dažniu.



1.9 pav. Įvykio A – *atsivers lošimo kauliuko ketvertukas* – statistinio dažnio kitimas nuo metimų eilės numerio k.

Grįžkime prie lošimo kauliuko mėtymo. Meskime lošimo kauliuką n=100 kartų (arba iš karto meskime 100 lošimo kauliukų) ir suskaičiuokime atvejus $m_n(A)$, kai atsivertė ketvertukas. Tada apskaičiuokime įvykio A ("*atsivertė ketvertukas*") statistinį dažnį $\nu_{100}(A)=m_n(A)/100$. Atlikime bandymų seriją ir pasekime, kaip keisis statistinis dažnis $\nu_{100}(A)$ nuo tokių bandymų serijos eilės numerio k (1.9 pav.). Kaip matyti iš 1.9 pav., statistinis dažnis atsitiktinai kinta apie šio įvykio tikimybę P=1/6. Jei bandymus pratęstume, tai šis vaizdas iš esmės nepasikeistų: gautume kitus statistinius dažnius, tačiau nestebėtume jokios statistinio dažnio nuokrypių nuo 1/6 didėjimo ar mažėjimo tendencijos.



1.10 pav. Įvykio statistinio dažnio priklausomybė nuo bandymų skaičiaus n.

Dabar ištirkime, kaip keisis įvykio A statistinis dažnis $\nu_n(A)$, didinant lošimo kauliuko metimų skaičių n, t.y. didinant bandymų skaičių. Tam tikros bandymų serijos duomenys pateikti 1.10 pav. Iš šio paveikslo akivaizdžiai matyti, kad, didinant bandymų skaičių n, įvykio statistinis dažnis $\nu_n(A)$ artėja prie to įvykio tikimybės P=1/6. Todėl ši statistinio dažnio savybė dažnai naudojama nežinomai įvykio tikimybei apibrėžti:

Skaičius, prie kurio artėja įvykio statistinis dažnis, didinant bandymų skaičių, vadinamas įvykio tikimybe arba statistine tikimybe:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n(A)}{n}.$$

Tikimybių teorija nagrinėja tik atsitiktinių įvykių su pastoviaisiais statistiniais dažniais $\nu_{n\to\infty}(A)$=const dėsnius.

Ne tik statistinis dažnis $\nu_{n\to\infty}(A)$, bet ir kitos atsitiktinių reiškinių charakteristikos dažnai būna pastovios. Tai galime pailiustruoti pavyzdžiu iš molekulinės fizikos. Dujos sudarytos iš be galo daug visą laiką judančių mažyčių dalelių – molekulių, kurių judėjimas yra chaotiškas. Molekulės susidūrinėja vienos su kitomis, atšoka, kinta jų judėjimo kryptis, greitis ir t.t. Tarkime, kad dujos yra uždarame inde. Dujų slėgis į indo sieneles yra molekulių smūgių rezultatas. Atrodo, slėgis, būdamas atsitiktinis reiškinys, turėtų svyruoti. Tačiau ir tiksliausi matavimai tokio svyravimo – fliuktuacijų – neparodo. Praeityje kinetinės dujų teorijos priešininkai šį faktą net mėgino panaudoti kaip savo argumentą. Iš tikrųjų dėl milžiniško molekulių skaičiaus smūgių į indo sieneles rezultatas išsilygina, ir slėgis būna gana pastovus. Tiktai ištobulėjus eksperimento technikai, kai galima buvo izoliuoti nedidelį molekulių skaičių, buvo pastebėti tokių labai praretintų dujų slėgio svyravimai.

1.2 lentelė. Lietuviškų raidžių pasikartojimo statistinis dažnis.

Raidė	Statistinis dažnis	Raidė	Statistinis dažnis	Raidė	Statistinis dažnis
i	0.13613	p	0.03079	ž	0.00977
a	0.11900	l	0.03069	ą	0.00607
s	0.08185	d	0.02647	į	0.00600
o	0.05976	v	0.02368	ū	0.00397
r	0.05513	j	0.01976	č	0.00371
n	0.05503	ė	0.01971	z	0.00251
t	0.05459	g	0.01925	c	0.00237
e	0.04968	y	0.01326	ę	0.00219
u	0.04819	š	0.01248	f	0.00181
k	0.04468	b	0.01070	ch	0.00105
m	0.03527	ų	0.01029	h	0.00038

<u>1.3 lentelė.</u> Angliškų raidžių pasikartojimo statistinis dažnis.

Raidė	Statistinis dažnis	Raidė	Statistinis dažnis	Raidė	Statistinis dažnis
tarpas	0.200	h	0.047	w	0.012
e	0.105	d	0.035	g	0.011
t	0.072	l	0.029	b	0.0105
o	0.0654	c	0.023	v	0.008
a	0.063	f	0.0225	k	0.003
n	0.059	u	0.0225	x	0.002
i	0.055	m	0.021	j	0.001
r	0.054	p	0.0175	q	0.001
s	0.052	y	0.012	z	0.001

<u>1.4 lentelė.</u> Rusiškų raidžių pasikartojimo statistinis dažnis.

Raidė	Statistinis dažnis	Raidė	Statistinis dažnis	Raidė	Statistinis dažnis
о	0.090	м	0.026	й	0.010
е	0.072	д	0.025	х	0.009
а	0.062	п	0.023	ж	0.007
и	0.062	у	0.021	ю	0.006
т	0.053	я	0.018	ш	0.006
н	0.053	ы	0.016	ц	0.004
с	0.045	з	0.016	щ	0.003
р	0.040	ь, ъ	0.014	э	0.002
в	0.038	б	0.014	ф	0.002
л	0.035	г	0.013	tarpas	0.175
к	0.028	ч	0.012		

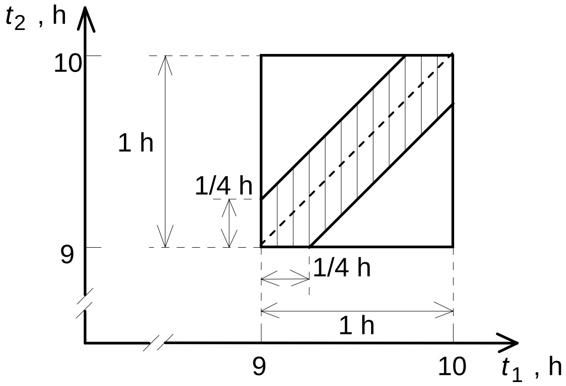
Dažninę tikimybės apibrėžtį dar pailiustruosime lietuviškų, angliškų ir rusiškų raidžių pasikartojimo grožinėje literatūroje statistiniais dažniais (žr. 1.2–1.4 lenteles). Pastarieji duomenys turi didelę reikšmę formuojant spaustuvėse raidžių rinkinius (kasas). Jie taip pat gali būti panaudoti telegrafijoje, siunčiant koduotus pranešimus ir t.t.

3. ***Geometrinė tikimybės apibrėžtis*.**

Iki šiol aptarėme baigtines elementariųjų įvykių aibes ir įvedėme tikimybės sąvoką, kai tiko vienodo galimumo principas. Apibendrindami šį principą, lengvai galime įvesti tikimybės sąvoką ir kai kurioms begalinėms elementariųjų įvykių aibėms.

***Pvz*.** Tarkime, kad du žmonės susitarė susitikti tam tikroje vietoje tarp devintos ir dešimtos valandos. Be to, jie susitarė, kad kiekvienas jų lauks ne ilgiau kaip ketvirtį valandos ir po to nueis. Kokia tikimybė, kad šie žmonės susitiks? Tarkime, kad pirmas žmogus atėjo laiku t_1, o antras – t_2. Vadinasi, plokštumos taškas (t_1, t_2) bus vienas iš galimų susitikimo įvykių. Visi galimi įvykiai yra kvadrato plokštumoje, kurio kraštinė lygi vienai valandai (1.11 pav.). Įvykis bus palankus (susitikimas įvyks), jei taškai (t_1, t_2) bus tokie, kad $|t_1 - t_2| \le 1/4$ h. Šie taškai yra užštrichuotoje kvadrato dalyje, t.y. kurią riboja tiesės $t_2 = t_1 - 1/4$ ir $t_2 = t_1 + 1/4$ bei kvadrato kraštinės. Kadangi visi įvykiai (t_1, t_2) yra vienodai galimi, tai susitikimo tikimybė bus lygi užštrichuoto kvadrato ploto santykiui su visu kvadrato plotu:

$$P = \frac{1 - (3/4)^2}{1} = \frac{7}{16}.$$



1.11 pav. Geometrinės tikimybės apibrėžties pavyzdys.

Čia panagrinėtas pavyzdys iliustruoja geometrinę tikimybės apibrėžtį

Atsitiktinio įvykio tikimybė lygi palankaus įvykiui įvykti ploto santykiui su visu nagrinėjamuoju plotu.

Dar pateiksime bendresnę geometrinę tikimybės apibrėžtį. Nagrinėsime s-matės (Euklido) erdvės R^s sritis, turinčias s-matį tūrį (tiesėje – ilgį, plokštumoje – plotą ir t.t.). Tarkime, kad Ω yra erdvės R^s baigtinio tūrio sritis. Elementariuoju įvykiu laikysime atsitiktinį bet kurio jos taško parinkimą, o atsitiktiniais įvykiais – taško parinkimą iš Ω srities dalių (turinčių tūrį) . Laikysime, kad galioja vienodo galimumo principas: turint dvi sritis $A_1 \subset \Omega$ ir $A_2 \subset \Omega$, kurių tūriai yra vienodi, o forma ir padėtis srityje Ω gali skirtis, nėra pagrindo teigti, kad parinkti tašką iš vienos tų sričių yra daugiau galimybių, negu iš kitos. Jei ši sąlyga tenkinama, tai įvykio – atsitiktinai parinkti tašką iš srities A – tikimybe laikome santykį V_A/V_Ω; čia raidė V reiškia s-matį tūrį.

Taip apibrėžta tikimybė turi tas pačias savybes kaip ir klasikinė tikimybė:

1) $0 \le P(A) \le 1$;
2) $P(\Omega)=1$;
3) $P(\varnothing)=0$;
4) jei $A \subset B$, tai $P(A) \le P(B)$;
5) jei $A \cap B=\varnothing$, tai $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$;
6) $P(\overline{A})=1-P(A)$.

4. *Aksiominė tikimybės apibrėžtis.*

Remdamiesi vien tik klasikine tikimybės apibrėžtimi ir jos geometriniu išplėtimu, negalime kurti griežtos matematinės tikimybių teorijos; be to, klasikinė tikimybės apibrėžtis pritaikoma tik gana siaurai atsitiktinių reiškinių klasei. Norėdami paversti tikimybių teoriją griežta disciplina, turime ją aksiomatizuoti. Taip daroma ir kitose mokslo šakose.

Aksioma - pradinis teiginys, sudarantis mokslinės teorijos kitų teiginių (teoremų) įrodymų pagrindą ir priimamas be įrodymo.

Sudarant aksiomų sistemas, parenkami tokie teiginiai, kurie nagrinėjamoje teorijoje laikomi tikrais ir iš kurių pagal logikos taisykles išvedami kiti tos teorijos teiginiai. Sąvokos, kuriomis formuluojamos aksiomos, laikomos pradinėmis, neapibrėžiamomis, o jomis apibrėžiamos visos kitos teorijos sąvokos.

Tikimybių teorija dažniausiai grindžiama A.Kolmogorovo sukurta aksiomų sistema, kuri remiasi bendrąja aibių ir matų teorija.

Elementariųjų įvykių erdve laikoma bet kuri netuščioji aibė Ω. Jos prigimtis mums nesvarbi. Atsitiktiniais įvykiais laikomi tos aibės poaibiai. Kiekvienam įvykiui – atitinkamam aibės Ω poaibiui – priskiriamas skaičius, vadinamas to įvykio tikimybe ir turintis tam tikras savybes.

A.Kolmogorovo sukurtoje tikimybių teorijos aksiomų sistemoje bet kurio atsitiktinio bandymo matematinį modelį sudaro tam tikra tikimybinė erdvė, nusakoma elementariųjų įvykių erdve ir jų tikimybėmis. Elementariaisiais įvykiais laikysime aibės Ω elementus. Be to, laikysime, kad Ω yra būtinasis įvykis, $\varnothing$ – negalimasis įvykis, $\overline{A}$ – priešingasis įvykiui A. Jei dvi aibės A ir B neturi bendrų elementų, tai įvykiai A ir B vadinami nesutaikomaisiais.

Pasinaudojant šiomis sąlygomis, įvedama tokia aksiominė tikimybės apibrėžtis:

Tikimybe vadiname skaitinę funkciją P, tenkinančią aksiomas:

1) $P(A) \geq 0$ (funkcija P yra neneigiama);
2) $P(\Omega)=1$ (būtinojo įvykio tikimybė lygi vienetui);
3) funkcija P yra adityvi: jei begalinės įvykių sekos $A_1, A_2, \ldots$ įvykiai neturi bendrų elementų (įvykiai nesutaikomi), tai įvykių sąjungos tikimybė lygi jų tikimybių sumai:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Visa tikimybių teorija grindžiama šiomis trimis aksiomomis. Tenka dar kartą pabrėžti, kad šios aksiomos yra postuluojamos ir jų įrodinėjimas neturi prasmės. Vienintelis šių aksiomų teisingumo kriterijus yra jų pagrindu sukurtos teorijos atitikimas realybei.

Paprasčiausia tikimybinė erdvė gaunama tada, kai elementariųjų įvykių erdvė $\Omega=\{\omega_i, i=1, 2, \ldots\}$ yra baigtinė arba suskaičiuojamoji. Šiuo atveju įvykių ω_i tikimybės $P(\omega_i)$ išreiškiamos taip:

$$0 \le P(\omega_i) \le 1, \qquad \sum_{\omega_i \in \Omega} P(\omega_i) = 1 .$$

Kai erdvė Ω susideda iš baigtinio elementų skaičiaus n ir $P(\omega_i)$ nepriklauso nuo i, t.y. $P(\omega_i)=1/n$, tai turime vadinamąją klasikinę schemą. Įvykio A, kurį sudaro m elementariųjų įvykių, tikimybė $P(A)=m/n$.

Tikimybę, apibrėžtą A.Kolmogorovo aksiomų sistemoje, galime įvairiai interpretuoti. Praktikoje dažniausiai remiamasi statistine interpretacija: funkcija $P(A)$ laikoma atsitiktinio įvykio A statistinio dažnio teorine išraiška. Sprendžiant kai kuriuos tikimybių teorijos uždavinius, funkcija $P(A)$ interpretuojama kaip protingo įsitikinimo, kad įvykis A įvyks, laipsnis. Ši tikimybės interpretacija vadinama psichologine.

1.5. Iš aksiomų išplaukiančios tikimybių savybės

Čia aptarsime kai kurias išvadas, išplaukiančias iš tikimybių teorijos aksiomų. Matysime, kad ir abstrakčiai įvesta tikimybės sąvoka turi tas pačias svarbiausias savybes kaip ir klasikinė arba geometrinė tikimybė.

1)

Tuščios aibės tikimybė $P(\varnothing)=0$.

Trečiojoje aksiomoje imame $A_1=A_2= \ldots =\varnothing$. Kadangi

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$$

ir įvykiai A_k yra nesutaikomieji, tai iš tos aksiomos išplaukia, kad

$$P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+ \ldots ,$$

o tai yra teisinga tik tada, kai $P(\varnothing)=0$.

2)

Jei baigtinės sekos įvykiai $A_1, A_2, \ldots , A_n$ yra nesutaikomieji, tai tų įvykių sąjungos tikimybė yra lygi atskirų įvykių tikimybių sumai: $$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Jei pagal trečiąją aksiomą ši lygybė teisinga begalinei nesutaikomųjų įvykių sekai ($n \to \infty$), tai akivaizdu, kad ji galioja ir baigtinei įvykių sekai, nes trūkstamuosius įvykius galime papildyti tuščiomis aibėmis $A_{n+1}=A_{n+2}= \ldots =\varnothing$, kurių tikimybių suma lygi nuliui.

3)

Bet kurių dviejų įvykių A ir B skirtumo tikimybė lygi įvykio, iš kurio atimame, ir tų įvykių sankirtos tikimybių skirtumui:

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) \quad \text{arba} \quad P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B).$$

Įvykius A ir B išskaidome į nesutaikomųjų įvykių sąjungas:

$$A=(A \setminus B)\cup(A\cap B), \quad B=(B \setminus A)\cup(A\cap B) ,$$

todėl

$$P(A)=P(A \setminus B)+P(A\cap B), \quad P(B)=P(B \setminus A)+P(A\cap B).$$

Iš čia

$$P(A \setminus B)=P(A)-P(A\cap B), \quad P(B \setminus A)=P(B)-P(A\cap B).$$

Jei įvykis ***A yra įvykio B dalis*** ($A\subset B$), tai

$$P(B \setminus A)=P(B)-P(A) ,$$

nes šiuo atveju $A\cap B=A$. Be to, $P(A)\leq P(B)$, nes tikimybė $P(B \setminus A)$ yra neneigiamas skaičius.

4)

Priešingojo įvykio tikimybė lygi vieneto ir to įvykio tikimybės skirtumui:

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

Kadangi įvykiai A ir $\overline{A}$ yra nesutaikomi ir jų sąjunga $A\cup \overline{A} =\Omega$, be to, $P(\Omega)=1$, todėl $P(\overline{A})+P(A)=1$ arba $P(\overline{A})=1-P(A)$.

5)

Bet kurių dviejų įvykių A ir B sąjungos tikimybė yra lygi tų dviejų įvykių tikimybių sumai, atėmus iš jos tų įvykių sankirtos tikimybę:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) .$$

Įvykių sąjungą $A \cup B$ išskaidome į nesutaikomųjų įvykių sąjungą:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B) \ ,$$

todėl

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B) =$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ .$$

Čia pasinaudojome įvykių skirtumų $(A \setminus B)$ ir $(B \setminus A)$ tikimybių išraiškomis. Pastaroji lygybė taip pat rodo, kad

$$\boxed{P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \ .}$$

Šią nelygybę galime apibendrinti ir bet kokių įvykių A_1, A_2, ... sekai:

$$\boxed{P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).}$$

Visų įvykių A_k sąjungą išreiškiame nesutaikomųjų įvykių sąjunga. Juos žymėsime:

$$A_1^* = A_1, \quad A_2^* = A_2 \setminus A_1, \quad A_3^* = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2),$$

$$A_4^* = A_4 \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3) \ \text{ ir t.t.}$$

Akivaizdu, kad

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^* \ .$$

Iš čia pagal trečiąją aksiomą galime užrašyti:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k^*\right).$$

Kadangi bet kuriam įvykiui A_k^* galioja $P(A_k^*) \leq P(A_k)$, todėl

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

6)

Bet kurių įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geq 2$) sekos sąjungai galioja lygybė

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{1 \leq k \leq n} P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) +$$

$$+ \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leq n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_m}).$$

Kai $n=2$, lygybė teisinga pagal ką tik įrodytą 5) savybę:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Kai $n=3$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P[(A_1 \cup A_2) \cup A_3] = P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P[(A_1 \cup A_2) \cap A_3)] .$$

Kadangi $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, tai

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P[(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)] =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq 3} P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq 3} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) + (-1)^{3-1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Kai $n=4$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P[(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup A_4] =$$

$$= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) + P(A_4) - P[(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4].$$

Kadangi pirmąjį narį jau turime apskaičiavę, todėl dabar pertvarkome trečiąjį narį:

$$P[(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4] = P[((A_1 \cup A_2) \cup A_3) \cap A_4] =$$

$$= P[((A_1 \cup A_2) \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4)] =$$

$$= P[(A_1 \cup A_2) \cap A_4] + P(A_3 \cap A_4) - P[(A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cap A_4)] =$$

$$= P[(A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4)] + P(A_3 \cap A_4) - P[(A_1 \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_3 \cap A_4)] =$$

$$=P(A_1 \cap A_4)+P(A_2 \cap A_4)+P(A_3 \cap A_4)-P(A_1 \cap A_2 \cap A_4)-$$

$$-P(A_1 \cap A_3 \cap A_4)-P(A_2 \cap A_3 \cap A_4)+P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Įrašę tikimybių $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ ir $P[(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4]$ išraiškas, gausime:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)-$$

$$-P(A_1 \cap A_2)-P(A_1 \cap A_3)-P(A_1 \cap A_4)-P(A_2 \cap A_3)-P(A_2 \cap A_4)-P(A_3 \cap A_4)+$$

$$+P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)+P(A_1 \cap A_2 \cap A_4)+P(A_1 \cap A_3 \cap A_4)+P(A_2 \cap A_3 \cap A_4)-$$

$$-P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)=$$

$$= \sum_{1 \le k \le 4} P(A_k) - \sum_{1 \le k_1 < k_2 \le 4} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2}\right) +$$

$$+ \sum_{1 \le k_1 < k_2 < k_3 \le 4} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}\right) + (-1)^{4-1} P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right)$$

Bendrąjį atvejį įrodysime taikydami matematinės indukcijos principą. Tarkime, kad ji teisinga kuriam nors $n \ge 2$, įrodysime jos teisingumą, kai $n+1$:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right] = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + P(A_{n+1}) -$$

$$- P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right] = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + P(A_{n+1}) - P\left[\bigcup_{k=1}^{n} \left(A_k \cap A_{n+1}\right)\right].$$

Pažymėję sankirtą $A_k \cap A_{n+1} = B_k$, gauname:

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{n} \left(A_k \cap A_{n+1}\right)\right] = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) ,$$

t.y. šią tikimybę galime išreikšti tiksliai taip pat kaip ir $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$, nes abiem atvejais k kinta nuo 1 iki n. Vadinasi,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right)=\sum_{1\le k\le n} P(A_k)-\sum_{1\le k_1<k_2\le n} P\left(A_{k_1}\cap A_{k_2}\right)+$$
$$+\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n} P\left(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap A_{k_3}\right)-\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1\cap\ldots\cap A_n)+$$
$$+P(A_{n+1})-\sum_{1\le k\le n} P(A_k\cap A_{n+1})-\sum_{1\le k_1<k_2\le n} P\left(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap A_{n+1}\right)-$$
$$-\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n} P\left(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap A_{k_3}\cap A_{n+1}\right)+\ldots+(-1)^n P(A_1\cap\ldots\cap A_n\cap A_{n+1}).$$

Gautame reiškinyje atitinkamai sugrupavę narius, turime:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right)=\sum_{1\le k\le n} P(A_k)-\sum_{1\le k_1<k_2<n+1} P\left(A_{k_1}\cap A_{k_2}\right)+$$
$$+\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n+1} P\left(A_{k_1}\cap A_{k_2}\cap A_{k_3}\right)-\ldots+(-1)^n P(A_1\cap\ldots\cap A_{n+1}).$$

Tokiu būdu, galime tvirtinti, kad ši lygybė yra teisinga bet kuriam baigtiniam įvykių skaičiui.

Be įrodymo nurodysime dar dvi akivaizdžias savybes.

7)

Jei įvykiai A_k (k=1, 2, ...) sudaro ***monotoniškai didėjančią seką***:

$A_1\subset A_2\subset \ldots \subset A_n\subset \ldots$ ir jų sąjunga

$$A=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k=\lim_{n\to\infty} A_n, \qquad \text{tai} \qquad P(A)=\lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

8)

Jei įvykiai A_k (k=1, 2, ...) sudaro ***monotoniškai mažėjančią seką***:

$A_1\supset A_2\supset \ldots \supset A_n\supset \ldots$ ir jų sankirta

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k=\lim_{n\to\infty} A_n, \qquad \text{tai} \qquad P(A)=\lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

1.6. Sąlyginė tikimybė

Kai kurių įvykių sąryšiai gali būti tokie, kad vienų įvykių tikimybė priklauso nuo kitų įvykių įvykimo. Įvesime šias apibrėžtis.

Įvykis A vadinamas ***statistiškai priklausomas*** nuo įvykių $B_1, ..., B_k$, jei įvykio A tikimybė ***priklauso*** nuo to, ar įvykiai $B_1, ..., B_k$ įvyko ar neįvyko.

Įvykis A vadinamas ***statistiškai nepriklausomas*** nuo įvykių $B_1, ..., B_k$, jei įvykio A tikimybė ***nepriklauso*** nuo to, ar įvykiai $B_1, ..., B_k$ įvyko ar neįvyko.

Pastaba: Dažniausiai žodis "statistiškai" praleidžiamas, bet iš tikrųjų čia kalbama apie statistinius dėsningumus, pasireiškiančius tais atvejais, kai atliekame daug bandymų.

Įvykio A tikimybę, apskaičiuotą įvykus įvykiui B (esant sąlygai B), vadiname sąlygine tikimybe ir žymėsime

$$P(A|B) .$$

Jei apskaičiuotoji įvykio A tikimybė nepriklauso nuo įvykio B įvykimo (nuo sąlygos B), tai tokią tikimybę $P(A)$ vadiname besąlygine arba tiesiog įvykio A tikimybe.

Pagal apibrėžtį įvykis A priklauso nuo įvykio B, jeigu

$$P(A|B) \neq P(A) .$$

Jei $P(A|B)=P(A)$, tai įvykiai A ir B yra nepriklausomi.

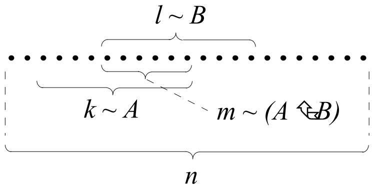
Kai kuriais atvejais, norint tik pasakyti, ar įvykiai yra priklausomi ar nepriklausomi, nebūtina apskaičiuoti tikimybes. Kartais tai aišku iš nagrinėjamojo reiškinio esmės. Pvz.: patikimas radijo siųstuvo darbas nepriklauso nuo to, kaip kitame linijos gale dirba imtuvas, ir atvirkščiai. Tačiau jų priklausomybė gali būti, jei imtuvas ir siųstuvas bus maitinami iš to paties maitinimo šaltinio.

Įvykių sankirtos (arba tikimybių daugybos) teorema.

Dviejų įvykių sankirtos $A \cap B$ (kartu įvyks abu įvykiai) tikimybė lygi vieno įvykio tikimybės ir kito įvykio sąlyginės tikimybės, kai įvyko pirmasis įvykis, sandaugai:

$$P(A \cap B)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B) .$$

Šią teoremą įrodysime, pasinaudodami įvykių schema (1.12 pav.)



1.12 pav. Iliustracija įvykių sankirtos tikimybės išvedimui.

Tarkime, kad bandymą sudaro n vienodai galimų elementariųjų įvykių erdvė, palankių įvykiui A elementariųjų įvykių skaičius yra k, palankių įvykiui B yra l, o palankių įvykių sankirtai $A \cap B$ (įvyks ir A, ir B) yra m, t.y.:

$$P(A) = \frac{k}{n}, \quad P(B) = \frac{l}{n}, \quad P(A \cap B) = \frac{m}{n}.$$

Apskaičiuosime sąlyginę tikimybę $P(B|A)$. Tarkime, kad įvyko įvykis A, tada iš visų vienodai galimų elementariųjų įvykių k, palankių įvykiui B bus tik m elementariųjų įvykių. Vadinasi:

$$P(B \mid A) = \frac{m}{k} = \frac{m/n}{k/n} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Visiškai panašiai galime įrodyti, kad:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

arba $$P(B \cap A) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)\ .$$

Šis sąryšis kartais vadinamas ***tikimybių daugybos teorema***.

Iš šio įrodymo aišku, kaip reikia įvesti sąlygines tikimybes aksiominiu būdu. Jei A ir B yra įvykiai ir $P(B)>0$, tai įvykio A ***sąlyginė tikimybė***, kai įvykis B yra įvykęs, vadinama:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Sąlyginė tikimybė taip pat tenkina šias aksiomas:

1a) $P(A|B)\geq 0$;

2a) $P(\Omega|B)=1$;

3a) Jei A_1, A_2, ... yra nesutaikomieji įvykiai, tai

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \mid B\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \mid B).$$

1a) Kadangi $P(A\cap B)\geq 0$ ir $P(B)>0$, tai iš apibrėžties išplaukia, kad ji neneigiama:

$$P(A|B)\geq 0.$$

2a) Kadangi $B\subset\Omega$ ir $\Omega\cap B=B$, todėl

$$P(\Omega \mid B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \quad \text{(būtinasis įvykis).}$$

Tarkime, kad įvykiai $A\subset\Omega$ ir $B\subset\Omega$ ir turime jų sankirtą $A\cap B$. Kadangi $(A\cap B)\subset B$, tai $P(A\cap B)\leq P(B)$, todėl visada galios nelygybės:

$$0 \leq P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq 1.$$

3a) Kadangi įvykiai A_1, A_2, ... yra nesutaikomieji, tai nesutaikomieji bus ir įvykiai $A_1\cap B$, $A_2\cap B$, ... , todėl pagal sąlyginės tikimybės apibrėžtį turime:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \mid B\right) = \frac{P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \cap B\right]}{P(B)} = \frac{P\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap B)\right]}{P(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \cap B)}{P(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \mid B).$$

Sąlyginės tikimybės tenkina tikimybių teorijos aksiomas, todėl sąlyginėms tikimybėms galioja tos pačios savybės, kurias įrodinėjome anksčiau besąlyginėms tikimybėms.

Tarkime, kad trys atsitiktiniai įvykiai A_1, A_2 ir A_3 priklauso tai pačiai aibei Ω. Apskaičiuokime dydį $P[A_3|(A_1 \cap A_2)]$, reiškiantį įvykio A_3 sąlyginę tikimybę, kai įvyko kartu abu įvykiai A_1 ir A_2 (t.y. įvyko įvykis $A_1 \cap A_2$). Pažymėję $B = A_1 \cap A_2$, galime užrašyti:

$$P[A_3 \mid (A_1 \cap A_2)] = P(A_3 \mid B) = \frac{P(A_3 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)}.$$

Iš čia

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) P[A_3|(A_1 \cap A_2)] =$$

$$= P(A_1) P(A_2|A_1) P[A_3|(A_1 \cap A_2)].$$

Šią lygybę galime apibrėžti taip: trijų įvykių sankirtos tikimybė yra lygi pirmojo įvykio tikimybei, padaugintai iš sąlyginės tikimybės įvykti antrajam įvykiui, kai įvyko pirmasis įvykis, ir padaugintai iš sąlyginės tikimybės įvykti trečiajam įvykiui, kai kartu įvyko abu pirmieji įvykiai (t.y. įvykis $A_1 \cap A_2$).

Visiškai panašiai galime užrašyti ir baigtinei įvykių sekai A_1, A_2, ..., A_n:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P[A_3|(A_1 \cap A_2)] \ldots$$

$$\ldots P[A_n|(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})].$$

Įvykių nepriklausomumas.

Turėjome, kad $P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$.

Tarkime, kad įvykis A nepriklauso nuo įvykio B, tada:

$$P(A|B) = P(A).$$

Iš šių dviejų lygybių gauname:

$$P(B|A) = P(B),$$

t.y. jei įvykis A nepriklauso nuo įvykio B, tai ir įvykis B nepriklauso nuo įvykio A. Iš šios išvados ir iš sąlyginės tikimybės apibrėžties išplaukia kita išvada:

> Dviejų nepriklausomų įvykių sankirtos tikimybė lygi tų įvykių tikimybių sandaugai:
>
> $$P(B \cap A) = P(A)P(B) .$$

Pastaroji lygybė yra pakankama sąlyga, kad įvykiai A ir B būtų nepriklausomi.

Kad geriau skirtume įvykių nepriklausomumą ir nesutaikomumą, įrodysime tokį teiginį:

Jei įvykių A ir B tikimybės yra nelygios nuliui ($P(A)>0$ ir $P(B)>0$) ir tie įvykiai yra nepriklausomi, tai jie nėra nesutaikomi.

Jei šie du įvykiai yra nepriklausomi, tai: $P(A \cap B)=P(A)P(B)>0$.

Jei įvykiai A ir B būtų nesutaikomi, tai $A \cap B=\varnothing$ ir tada:

$$P(A \cap B)=P(\varnothing)=0 ,$$

o tai prieštarauja anksčiau esančiai nelygybei, t.y. nepriklausomi įvykiai A ir B negali būti nesutaikomi.

Įvykių nepriklausomumo apibrėžtį galime išplėsti ir baigtinei ar suskaičiuojamai įvykių aibei.

Atsitiktiniai įvykiai A_1, A_2, ..., A_n yra nepriklausomi, jei bet kokiems sveikiems indeksams k_1, k_2, ..., k_s, tenkinantiems nelygybes

$$1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_s < n ,$$

galioja lygybė

$$P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_s}\right) = P\left(A_{k_1}\right) P\left(A_{k_2}\right) \ldots P\left(A_{k_s}\right),$$

t.y., kai bet kokiu būdu sudarytos įvykių sankirtos $A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_s}$ tikimybė lygi tų įvykių tikimybių sandaugai.

Pvz. Jei turime tris įvykius A_1, A_2, A_3, jų nepriklausomumui nusakyti reikia keturių lygybių:

$$P(A_1 \cap A_2)=P(A_1)P(A_2) , \quad P(A_1 \cap A_3)=P(A_1)P(A_3) ,$$

$$P(A_2 \cap A_3)=P(A_2)P(A_3) , \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3) .$$

Dar aptarsime keletą nepriklausomų įvykių savybių.

1)

Bet koks įvykis A ir būtinasis įvykis Ω yra nepriklausomi:

$$P(A \cap \Omega)=P(A)P(\Omega)=P(A) .$$

Kadangi $A \subset \Omega$, tai $A \cap \Omega = A$. Iš čia $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A)P(\Omega)$, nes $P(\Omega)=1$.

2)

> Jei įvykiai ***A* ir *B* nepriklausomi**, tai ir įvykių poros $\overline{A}$ ir $\overline{B}$, A ir $\overline{B}$, $\overline{A}$ ir B – taip pat nepriklausomi įvykiai:
>
> $$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) ,$$
> $$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) ,$$
> $$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B) .$$

Pvz. Įrodysime, kad įvykiai A ir $\overline{B}$ nepriklausomi. Įvykis $\overline{B} = \Omega \backslash B$. Tada:

$$P(A \cap \overline{B}) = P[A \cap (\Omega \backslash B)] = P[A \backslash (A \cap B)] = P(A) - P(A \cap B) =$$

$$= P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\overline{B}).$$

Likusios dvi lygybės įrodomos panašiu būdu.

Bendruoju atveju, jei nors vienos įvykių poros A ir B, $\overline{A}$ ir $\overline{B}$, A ir $\overline{B}$, $\overline{A}$ ir B įvykiai yra nepriklausomi, tai nepriklausomi bus ir likusių trijų porų įvykiai.

Tai galime apibendrinti ir daugeliui įvykių. Jei įvykiai A_1, ..., A_n yra nepriklausomi, tai nepriklausomi bus ir įvykiai $\overline{A_1}$, ..., $\overline{A_n}$:

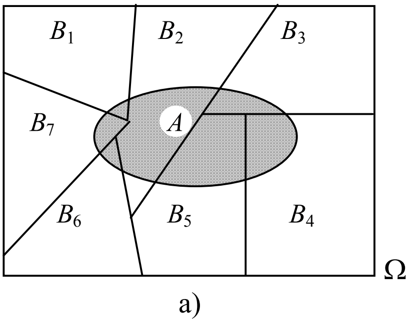
$$P\left(\overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_n}\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = P\left(\overline{A_1}\right)...P\left(\overline{A_n}\right) =$$
$$= \prod_{k=1}^{n} P\left(\overline{A_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left[1 - P\left(A_k\right)\right] \quad .$$

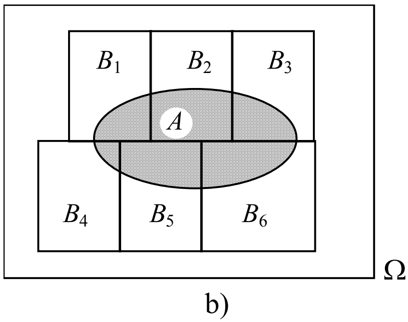
1.7. Pilnutinės tikimybės ir Bejeso formulės

Pilnutinės tikimybės formulė

Tarkime, kad žinome šias įvykių A, B_1, B_2,..., B_n (1.13 pav.) tikimybes: $P(B_1)$, ..., $P(B_n)$ ir $P(A|B_1)$, ..., $P(A|B_n)$. Laikome, kad įvykiai B_k yra nesutaikomieji, o įvykis A gali įvykti kartu tik su vienu įvykiu B_k, t.y.

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k \ .$$





1.13 pav. Iliustracija pilnutinės tikimybės išvedimui: a) kai įvykiai $B_1, ..., B_n$ sudaro elementariųjų įvykių erdvės Ω skaidinį $B_1 \cup ... \cup B_n = \Omega$, (n=7); b) kai įvykiai $B_1, ..., B_n$ nesudaro visos elementariųjų įvykių erdvės Ω, $B_1 \cup ... \cup B_n \neq \Omega$, (n=6).

> Jei atsitiktiniai įvykiai $B_1, ..., B_n$ yra nesutaikomi ir sudaro elementariųjų įvykių erdvės Ω skaidinį:
>
> $$B_1 \cup ... \cup B_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega,$$
>
> tai bet kurio įvykio A tikimybę galime apskaičiuoti taip:
>
> $$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + ... + \\ + P(A \mid B_n)P(B_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A \mid B_k)P(B_k) \quad .$$

Kadangi įvykiai $B_1, ..., B_n$ nesutaikomi (neturi bendrų elementų), tai ir įvykiai

$$A \cap B_1, A \cap B_1, ..., A \cap B_n$$

taip pat yra nesutaikomi. Iš čia įvykį A galime išreikšti taip:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_n) = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap B_k).$$

Todėl

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_n) = \\ = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A \mid B_k), \tag{1.7.1}$$

t.y. gavome pilnutinės tikimybės formulę.

Bejeso formulė

> Jeigu įvykiai $B_1, ..., B_n$ tenkina pilnutinės tikimybės formulės reikalavimus ir $P(A)>0$, tai sąlyginė tikimybė
>
> $$P\left(B_j \mid A\right) = \frac{P\left(B_j\right)P\left(A \mid B_j\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(B_k\right)P\left(A \mid B_k\right)}, j = 1,2,...,n.$$

Kadangi sąlyginė tikimybė

$$P\left(B_j \mid A\right) = \frac{P\left(B_j \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left(B_j\right)P\left(A \mid B_j\right)}{P(A)},$$

tai vietoj $P(A)$ įrašę jos išraišką pagal pilnutinės tikimybės formulę, gausime

$$P\left(B_j \mid A\right) = \frac{P\left(B_j\right)P\left(A \mid B_j\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P\left(B_k\right)P\left(A \mid B_k\right)}. \tag{1.7.2}$$

Ši formulė vadinama ***Bejeso*** (T.Bayes) ***formule, aposteriorinės tikimybės formule*** (*a posteriori* – po bandymo) arba ***hipotezių tikimybių formule.*** Pagal šią formulę surandame tikimybę $P(B_j|A)$ įvykti įvykiui B_j, kai įvyko įvykis A. Šioje formulėje tikimybė $P(B_k)$ dar vadinama ***apriorine tikimybe*** (*a priori* – iki bandymo).

Pilnutinės tikimybės ir Bejeso formules galima taikyti ir tada, kai įvykiai B_1, B_2,..., B_n nesudaro visos elementariųjų įvykių erdvės Ω (1.13 pav., b), tačiau visais atvejais įvykis A turi būti dalis įvykių B_1, B_2,..., B_n sąjungos, t.y.

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k .$$

1.8. Kai kurios kombinatorikos taisyklės ir formulės

Tikimybių teorijoje, kai tinka klasikinė tikimybės apibrėžtis, tenka skaičiuoti visus vienodai galimus ir palankius atvejus. Jei tokių atvejų nedaug, juos suskaičiuoti nesunku. Pakanka išvardyti visus galimus atvejus ir iš jų išrinkti palankius. Kai elementariųjų įvykių daug, tenka ieškoti įvairių taisyklių, palengvinančių tą darbą. Tada labai praverčia kombinatorika.

Tarkime, kad turime keletą elementų $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Bet kuris duotųjų elementų rinkinys $a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{ks}$ yra vadinamas ***junginiu*** (kombinacija). Skiriama: ***junginiai be pasikartojimų***, jei kiekvienos grupės elementai yra skirtingi, ***junginiai su pasikartojimais***, jei grupėse elementai gali pasikartoti. Dažnai tenka skaičiuoti, kiek junginių galima sudaryti iš duotųjų elementų pagal kokią nors taisyklę. Tokius uždavinius vadiname kombinaciniais, o juos nagrinėjantį matematikos skyrių – kombinatorika.

Pagrindinės junginių rūšys yra ***gretiniai***, ***kėliniai*** ir ***deriniai***.

Aptarsime keletą paprasčiausių kombinatorikos uždavinių.

1. ***Elementų junginiai iš įvairių aibių***. Tarkime, kad turime m baigtinių aibių: pirmojoje aibėje yra n_1 elementų $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n_1}$, antrojoje – n_2 elementų $a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n_2}$ ir t.t., paskutinėje m-ojoje aibėje – n_m elementų $a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn_m}$. Priminsime, kad ***aibės elementai visada yra laikomi skirtingais***. Visi junginiai po m elementų $a_{1i_1}, a_{2i_2}, \ldots, a_{mi_m}$ sudaromi taip, kad į kiekvieną junginį įeitų po vieną elementą iš kiekvienos aibės: pirmasis – iš pirmosios, antrasis – iš antrosios ir t.t., m-asis – iš m-tosios aibės. Pirmąjį junginio elementą a_{1i_1} galime parinkti iš pirmosios aibės n_1 būdais, antrąjį a_{2i_2} galime parinkti iš antrosios aibės n_2 būdais ir t.t., paskutinį a_{mi_m} galime parinkti n_m būdais. Todėl visų junginių skaičius yra $n_1\, n_2 \ldots n_m$.

Pažymėkime duotąsias elementų aibes $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Imkime tų aibių sandaugą $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$. Sandaugos elementai sudaryti iš visų galimų ką tik nagrinėtų junginių, todėl jų skaičius yra $n_1\, n_2 \ldots n_m$.

Aptarsime atskirą atvejį, kai aibės $A_1 = A_2 = \ldots = A_m = A$ ir aibė A turi n elementų $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Iš aibės A išrenkame kurį nors elementą a_{i_1}. Jį grąžiname atgal. Po to renkame kitą elementą a_{i_2}. Vėl grąžiname atgal. Taip tęsdami, po m veiksmų gausime junginį $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$. Tokie junginiai vadinami ***gretiniais su pasikartojimais*** iš n elementų po m elementų. Jų skaičius:

$$B_n^m = n^m. \qquad (1.8.1)$$

Gretinių su pasikartojimais skaičius lygus aibių sandaugos $A \times A \times \ldots \times A = A^m$ elementų skaičiui n^m.

2. ***Gretiniai be pasikartojimų***. Duota aibė iš n elementų $a_1, a_2, \ldots ,$ a_n.

Gretiniu be pasikartojimų iš n elementų po m elementų vadinamas bet kuris sutvarkytas duotosios aibės $\{a_1, a_2, \ldots , a_n\}$ poaibis iš m elementų $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m}$, kurios bet kurie du junginiai skiriasi vienas nuo kito kokiu nors elementu arba jų tvarka; elementai negali pasikartoti tame pačiame gretinyje.

Gretinius be pasikartojimų galime gauti šitokiu būdu: iš pradžių bet kaip parenkame a_{i_1} iš n aibės elementų ir jo nebegrąžiname (čia galimi n variantai); po to renkame antrąjį gretinio elementą a_{i_2} iš likusių n–1 aibės elementų, jo taip pat negrąžiname ir t.t. Pagaliau renkame m-ąjį gretinio elementą a_{i_m} iš likusių n–m+1 duotosios aibės elementų. Taigi, visų gretinių be pasikartojimų iš n elementų po m elementų skaičius yra:

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(\mathrm{n}-\mathrm{m}+1).$$

Sandauga $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m = m!$ vadinama skaičiaus m ***faktorialu***. Todėl gretinių skaičių galime užrašyti šitaip:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.8.2)$$

Kai $m=n$, ši formulė taip pat turės prasmę, jei laikysime kad $0!=1$.

3. ***Kėliniai be pasikartojimų***. Duota aibė iš n elementų.

Kiekviena elementų seka, sudaryta iš visų elementų be pasikartojimų, vadinama ***kėliniu be pasikartojimu*** iš n elementų.

Kiek jų yra? Arba: keliais skirtingais būdais galima perstatyti vietomis aibės elementus? Tai bus gretiniai iš n elementų po n elementų be pasikartojimų. Jų skaičius:

$$P_k = A_n^n = n(n-1)\dots 2\cdot 1 = \mathrm{n}!$$

$P_k = n!$ (1.8.3)

4. ***Kėliniai su pasikartojimais***. Duota aibė iš k elementų a_1, a_2, ... , a_k. Tarkime kad m_1, m_2, ... , m_k yra natūralieji skaičiai, o $n=m_1+m_2+ \dots + m_k$.

Kėliniais su pasikartojimais iš n elementų, kuriuose a_1 pasikartoja m_1 kartų, a_2 pasikartoja m_2 kartų ir t.t., a_k pasikartoja m_k kartų, vadinami kėliniais su pasikartojimais, kuriuose tie elementai pasikartoja nurodytą skaičių kartų.

Koks jų skaičius $P_k(m_1, m_2, \dots, m_k)$?

Imkime k elementų grupių, kurių pirmoji sudaryta iš m_1 elementų b_{11}, b_{12}, ... , b_{1m_1}, antroji - iš m_2 elementų b_{21}, b_{22}, ... , b_{2m_2}, ir t.t., k-toji - iš m_k elementų b_{k1}, b_{k2}, ... , b_{km_k}. ***Sakykime, kad visi elementai yra skirtingi***. Sudarykime iš visų jų kėlinius be pasikartojimų. Iš viso jų bus $n!$. Kiekviename kėlinyje bus m_1 pirmosios grupės elementų, m_2 antrosios grupės elementų, ... , m_k k-tosios grupės elementų. Dabar tarkime, kad visi pirmosios grupės elementai yra vienodi ir lygūs a_1, o visi kiti b_{kj} (k>1) skirtingi. Tada jau sudarytoje kėlinių sistemoje atsiras vienodų kėlinių, kurių bus $m_1!$, nes tiek yra būdų perstatyti vietomis pirmosios grupės elementus. Jei dabar visus antrosios grupės elementus taip pat sutapatintume su a_2, tai vėl atsirastų $m_2!$ vienodų kėlinių, nes tiek yra būdų perstatyti antrosios grupės elementus. Taip samprotaudami toliau, pagaliau gausime:

$$n! = P_k(m_1, m_2, \dots, m_k) m_1!\, m_2! \dots m_k!.$$

Iš čia

$P_k(m_1, m_2, \dots, m_\mathrm{k}) = \dfrac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_\mathrm{k}!}$. (1.8.4)

Šis uždavinys yra lygiavertis tokiam uždaviniui: turime n skirtingų objektų ir k dėžučių; reikia taip sudėlioti objektus į dėžutes, kad į j-ąją dėžutę (j=1,2, ... , k) patektų m_j objektų, $n=m_1+m_2+ ... +m_k$.

Skirtingus objektus a_1, a_2, ... , a_n galima išdėstyti (perstatyti) $n!$ skirtingais būdais. Paskui šiuos objektus suskirstome po m_j elementų į k grupes (dėžutes):

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots}_{m_1}, \ldots, \underbrace{a_{i-1}, a_i, a_{i+1}}_{m_j}, \ldots, \underbrace{a_{n-1}, a_n}_{m_k}$$

Kadangi mus domina, kad tam tikras objektų skaičius būtų tam tikroje dėžutėje, ir nedomina jų išdėliojimo dėžutėje eilės tvarka, t.y. į dėžutę jau patekę objektai laikomi vienodais: pirmojoje yra m_1 vienodų objektų, antrojoje - m_2 vienodų objektų, ..., k-tojoje dėžutėje - m_k vienodų objektų, todėl jau sudarytoje kėlinių $n!$ sistemoje atsiras $m_1!\ m_2!\ ...\ m_k!$ vienodų kėlinių, nes $m_1!$ būdų yra perstatyti vietomis pirmosios dėžutės objektus, $m_2!$ - antrosios, ..., $m_k!$ - k-tosios. Todėl sudėlioti objektus galima $P_k(m_1, m_2, ... , m_k)$ būdais.

5. ***Deriniai be pasikartojimų***. Duota n elementų aibė.

Deriniu be pasikartojimų iš n elementų po m elementų vadinamas bet kuris tos aibės poaibis, sudarytas iš m elementų ir besiskiriantis nors vienu elementu.

Čia elementų tvarka nesvarbi. Rasime derinių be pasikartojimų iš n elementų po m elementų skaičių C_n^m .

Imkime kurį nors ***derinį*** be pasikartojimų iš m elementų. Perstatinėdami jo elementus, galime gauti $m!$ gretinių be pasikartojimų. Padarę tą patį su visais deriniais, gausime visus gretinius iš n elementų po m elementų be pasikartojimų. Todėl:

$$A_n^m = C_n^m\ m!$$

Iš čia

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \,. \tag{1.8.5}$$

Iš šios lygybės išplaukia lygybė:

$$C_n^m = C_n^{n-m}. \tag{1.8.6}$$

Be to, laikysime, kad $C_n^0 = 1$. Deriniams žymėti vartojamas ir šitoks būdas: $C_n^m = \binom{n}{m}$.

Deriniams galioja lygybė:

$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1} \qquad (1 \le m \le n). \tag{1.8.7}$$

Ši lygybė dar vadinama Paskalio taisykle. Ji gana lengvai įrodoma:

$$C_n^m + C_n^{m-1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m+1)!}\left[(n-m+1)+m\right] = \frac{n!(n+1)}{m!(n-m+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!} = C_{n+1}^m.$$

Skaičiai C_n^m sutampa su koeficientais, gaunamais skleidžiant Niutono binomą $(x+a)^n$, todėl dar vadinami binominiais koeficientais. Gretinių, derinių ir kėlinių be pasikartojimų skaičius A_n^m, C_n^m ir P_m sieja formulė:

$$A_n^m = C_n^m \; P_m. \tag{1.8.8}$$

6. ***Deriniai su pasikartojimais***. Duota n skirtingų elementų. Iš jų sudarome junginius po m elementų, leisdami elementams kartotis. Elementų tvarka junginiuose neturi reikšmės. Tokius junginius vadiname deriniais su pasikartojimais iš n elementų po m elementų. Rasime jų skaičių D_n^m.

Tarkime, kad elementai, iš kurių sudaromi deriniai su pasikartojimais, yra a_1, a_2, ... , a_n. Sudarykime lentelę, kurioje yra m eilučių:

1 eilutė:	$a_1, a_2, \ldots, a_n$;
2 eilutė:	$a_1, a_2, \ldots, a_n$;
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -	
m eilutė:	$a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Iš pirmos eilutės imame kurį nors elementą; iš antrosios eilutės imsime elementą, esantį arba po pirmuoju, arba į dešinę nuo jo; iš trečiosios eilutės imsime elementą, esantį arba po elementu, paimtu iš antrosios eilutės, arba į dešinę nuo jo, ir t.t. Taip galime gauti bet kurį derinį su pasikartojimais iš n elementų po m elementų. Jų skaičius bus lygus skaičiui derinių be pasikartojimų, sudarytų iš lentelės

$$
\begin{array}{l}
b_1, b_2, \dots, b_n; \\
b_2, b_3, \dots, b_{n+1}; \\
- - - - - - - - - - \\
b_m, b_{m+1}, \dots, b_{n+m-1}
\end{array}
$$

elementų, imant po vieną iš kiekvienos eilutės anksčiau nurodyta tvarka. Kadangi šioje lentelėje yra $(n+m-1)$ skirtingų elementų, tai ieškomasis skaičius yra derinių skaičius iš $(n+m-1)$ elementų po m elementų:

$$\boxed{D_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^{n-1}\,. \qquad (1.8.9)}$$

Čia pateiktos formulės labai praverčia, skaičiuojant tikimybes. Kai elementų skaičius yra nedidelis, nesunku rasti įvairių elementų junginių skaičių. Uždavinys pasunkėja, kai elementų skaičius yra didelis. Tada skaičių faktorialams skaičiuoti tinka apytikslė vadinamoji Stirlingo formulė. Galima įrodyti, kad visiems natūraliesiems skaičiams n teisingos nelygybės:

$$\exp\left(\frac{1}{12n+1}\right) < \frac{n!}{(n/e)^n\sqrt{2\pi n}} < \exp\left(\frac{1}{12n}\right)$$

arba $$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad \text{(Stirlingo formulė).} \qquad (1.8.10)$$

1.5 lentelėje pateiktos faktorialų ir jų logaritmų vertės.

1.5 lentelė. Faktorialų ir jų logaritmų vertės.

n	$n!$	$\lg n!$	n	$n!$	$\lg n!$	n	$n!$	$\lg n!$	n	$n!$	$\lg n!$
1	1.00E+00	0.0000	26	4.03E+26	26.6056	51	1.55E+66	66.1906	76	1.89E+111	111.2754
2	2.00E+00	0.3010	27	1.09E+28	28.0370	52	8.07E+67	67.9066	77	1.45E+113	113.1619
3	6.00E+00	0.7782	28	3.05E+29	29.4841	53	4.27E+69	69.6309	78	1.13E+115	115.0540
4	2.40E+01	1.3802	29	8.84E+30	30.9465	54	2.31E+71	71.3633	79	8.95E+116	116.9516
5	1.20E+02	2.0792	30	2.65E+32	32.4237	55	1.27E+73	73.1037	80	7.16E+118	118.8547
6	7.20E+02	2.8573	31	8.22E+33	33.9150	56	7.11E+74	74.8519	81	5.80E+120	120.7632
7	5.04E+03	3.7024	32	2.63E+35	35.4202	57	4.05E+76	76.6077	82	4.75E+122	122.6770
8	4.03E+04	4.6055	33	8.68E+36	36.9387	58	2.35E+78	78.3712	83	3.95E+124	124.5961
9	3.63E+05	5.5598	34	2.95E+38	38.4702	59	1.39E+80	80.1420	84	3.31E+126	126.5204
10	3.63E+06	6.5598	35	1.03E+40	40.0142	60	8.32E+81	81.9202	85	2.82E+128	128.4498
11	3.99E+07	7.6012	36	3.72E+41	41.5705	61	5.08E+83	83.7055	86	2.42E+130	130.3843
12	4.79E+08	8.6803	37	1.38E+43	43.1387	62	3.15E+85	85.4979	87	2.11E+132	132.3238
13	6.23E+09	9.7943	38	5.23E+44	44.7185	63	1.98E+87	87.2972	88	1.85E+134	134.2683
14	8.72E+10	10.9404	39	2.04E+46	46.3096	64	1.27E+89	89.1034	89	1.65E+136	136.2177
15	1.31E+12	12.1165	40	8.16E+47	47.9116	65	8.25E+90	90.9163	90	1.49E+138	138.1719
16	2.09E+13	13.3206	41	3.35E+49	49.5244	66	5.44E+92	92.7359	91	1.35E+140	140.1310
17	3.56E+14	14.5511	42	1.41E+51	51.1477	67	3.65E+94	94.5619	92	1.24E+142	142.0948
18	6.40E+15	15.8063	43	6.04E+52	52.7811	68	2.48E+96	96.3945	93	1.16E+144	144.0632
19	1.22E+17	17.0851	44	2.66E+54	54.4246	69	1.71E+98	98.2333	94	1.09E+146	146.0364
20	2.43E+18	18.3861	45	1.20E+56	56.0778	70	1.20E+100	100.0784	95	1.03E+148	148.0141
21	5.11E+19	19.7083	46	5.50E+57	57.7406	71	8.50E+101	101.9297	96	9.92E+149	149.9964
22	1.12E+21	21.0508	47	2.59E+59	59.4127	72	6.12E+103	103.7870	97	9.62E+151	151.9831
23	2.59E+22	22.4125	48	1.24E+61	61.0939	73	4.47E+105	105.6503	98	9.43E+153	153.9744
24	6.20E+23	23.7927	49	6.08E+62	62.7841	74	3.31E+107	107.5196	99	9.33E+155	155.9700
25	1.55E+25	25.1906	50	3.04E+64	64.4831	75	2.48E+109	109.3946	100	9.33E+157	157.9700

1.9. Kombinatorikos taikymas ir dalelių statistikos

Panagrinėsime uždavinį, kuris vaidina svarbų vaidmenį, taikant tikimybių teoriją demografijoje, sociologijoje, gyventojų statistikoje, pramonės produkcijos kokybės patikrinimo statistikoje ir t.t.

1 *pavyzdys*. Daiktų grupėje yra $M+N$ vienetų, iš kurių M daiktų pasižymi tam tikra savybe A, o likusieji N daiktų šios savybės neturi. Iš šios daiktų grupės atsitiktinai paimame k daiktų. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus m daiktų turinčių A savybę, ir n daiktų, neturinčių šios savybės ($k=m+n$)?

Elementariaisiais įvykiais čia laikysime kiekvieną junginį iš $M+N$ daiktų po k daiktų. Visi jie laikomi vienodai galimais, be to, eilės tvarka čia neturi reikšmės. Todėl bendras įvykių skaičius lygus derinių skaičiui:

$$C_{M+N}^{k} = C_{M+N}^{m+n}.$$

Akivaizdu, kad $0 \le m \le M$ ir $0 \le n \le N$, nes priešingu atveju tikimybė lygi nuliui. Apskaičiuosime palankių elementariųjų įvykių skaičių. Jį lemia m daiktų parinkimo iš M daiktų, turinčių savybę A, ir n daiktų parinkimo iš N daiktų, neturinčių šios savybės, būdų skaičiaus sandauga. Todėl bendras palankių įvykių skaičius yra $C_M^m \cdot C_N^n$. Todėl ieškoma tikimybė:

$$P = \frac{C_M^m \cdot C_N^n}{C_{M+N}^{m+n}}. \qquad (1.9.1)$$

2 *pavyzdys*. Tarkime, kad turime n narvelių ir m dalelių. Dalelės atsitiktinai išdėstomos narveliuose. Reikia rasti galimų išdėstymų tikimybę.

Šis uždavinys labai svarbus, nagrinėjant fizikos, chemijos, biologijos, informatikos, inžinerijos ir pan. pagrindines problemas. Priklausomai nuo uždavinio esmės žodis "atsitiktinai" čia turi skirtingas prasmes. Pateiksime tris atvejus, kurie fizikoje atitinkamai vadinami Maksvelo ir Bolcmano, Bozės ir Einšteino, Fermio ir Dirako statistikomis.

***Maksvelo ir Bolcmano statistika*.**

Kiekviena iš m ***skirtingų dalelių*** su tikimybe $1/n$ gali patekti į bet kurį narvelį, nepriklausomai nuo kitų dalelių. Gauname iš viso n^m galimų išdėstymų, kurie vienas nuo kito skiriasi arba pačiomis dalelėmis, arba jų skaičiumi narveliuose. Dabar surasime tikimybę $P(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, kad pirmajame narvelyje bus k_1 dalelių, antrajame – k_2 dalelių ir t.t., o paskutiniame n-tajame – k_n dalelių, o $k_1+k_2+\ldots+k_n=m$. Iš visų n^m galimų išdėstymų pasirenkame vieną, kuris tenkintų anksčiau nurodytą sąlygą. Akivaizdu, norint nepažeisti anksčiau nurodytos sąlygos, daleles galime keisti tik vietomis, nekeičiant nurodyto dalelių skaičiaus kiekviename narvelyje. Tokių perstatymų skaičius lygus $m!$. Kadangi mus domina, kad tam tikras dalelių skaičius būtų tam tikrame narvelyje, ir nedomina jų išdėliojimo narvelyje eilės tvarka, t.y. į narvelį jau patekusios dalelės gali būti laikomos vienodomis: pirmajame yra k_1 vienodų dalelių, antrajame –

k_2 vienodų dalelių, ..., k-tajame – k_n vienodų dalelių, todėl jau sudarytoje kėlinių $m!$ sistemoje atsiras $k_1!\ k_2!\ ...\ k_n!$ vienodų kėlinių, nes $k_1!$ būdų yra perstatyti vietomis pirmojo narvelio daleles, $k_2!$ – antrojo, ..., $k_n!$ – k-tojo. Todėl palankių įvykių skaičius lygus:

$$\frac{m!}{k_1!\,k_2!...k_n!},$$

t.y., kėlinių su pasikartojimais skaičiui. Iš čia ieškomoji tikimybė:

$$\boxed{P(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{m!}{k_1!\,k_2!\,...\,k_n!} \cdot \frac{1}{n^m}\,. \qquad (1.9.2)}$$

Ši tikimybė gerai aprašo dujų molekulių pasiskirstymą, bet netinka elementariosioms dalelėms: elektronams, protonams, neutronams, α dalelėms ir t.t.

Kaip atskirą atvejį panagrinėkime uždavinį, kai $m \leq n$. Reikia rasti tikimybę, kad ***tam tikruose narveliuose bus po vieną dalelę***, o likusiuose - nė vienos. Esant šiai sąlygai, akivaizdu, kad:

$$k_1! = k_2! = ... = k_n! = 1,$$

todėl

$$P_1 = m!/n^m. \qquad (1.9.3)$$

Jei mus domins atvejis, kai dalelės ***po vieną yra bet kuriame narvelyje***, tai tikimybė padidės C_n^m kartų:

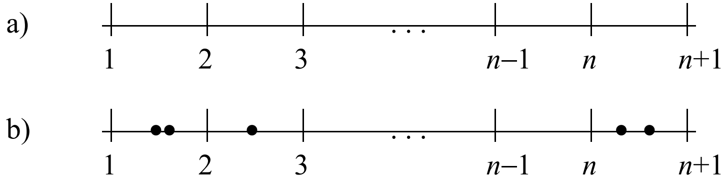
$$P_2 = C_n^m \cdot P_1 = \frac{n!}{n^m (n-m)!}\,. \qquad (1.9.4)$$

Bozės ir Einšteino statistika.

Laikoma, kad dalelių negalima atskirti vienų nuo kitų. Ši statistika tvirtina, kad atvejai, kai dalelės pasikeičia savo vietomis narveliuose, yra tapatūs: svarbu tik, kiek dalelių pateko į narvelius, bet nesvarbu kurios dalelės. Laikome, kad kiekvienas toks pasiskirstymas yra vienodai galimas elementarusis įvykis. Įrodysime, kad jų skaičius yra lygus derinių su pasikartojimais skaičiui:

$$D_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!} \,. \qquad (1.9.5)$$

Gulsčioje tiesėje atidėkime n+1 brūkšnelį (1.14 pav., a). Tarpai atitiks narvelius, o brūkšneliai – narvelių sieneles. Į tarpus bet kaip išdėstome m taškų (vienodų dalelių) (1.14 pav., b). Du kraštinius brūkšnelius (1 ir n+1) fiksuojame.



1.14 pav. Iliustracija Bozės ir Einšteino dalelių skirstinių tikimybės išvedimui.

Dabar visus likusius vidinius n–1 brūkšnelius ir m taškus perstatinėjame vietomis visais galimais būdais. Galimų perstatymų skaičius lygus (n+m–1)!, nes bendras objektų skaičius lygus (n –1+m). Tačiau tarp taip gautų perstatymų bus ir vienodų: kai vietomis keitėme (n–1) brūkšnelius (narvelių sieneles) ir kai vietomis keitėme m taškus. Todėl vienodų perstatymų skaičius lygus m!(n–1)!. Iš čia skirtingų perstatymų skaičius lygus

$$\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m \,,$$

t.y. gavome m vienodų dalelių skirstinių po n narvelius skaičių Bozės ir Einšteino statistikos prasme. Visi šie perstatymai yra vienodai galimi, todėl bet kurio iš jų tikimybė:

$$\boxed{P = \frac{1}{C_{n+m-1}^m} \,. \qquad (1.9.6)}$$

Įvertinkime anksčiau aptartus atvejus, kai $m<n$, t.y. tikimybę, kad tam tikruose narveliuose bus po vieną dalelę, o kituose – nė vienos. Ji lygi:

$$P_1 = \frac{1}{C_{n+m-1}^m} = \frac{m!\,(n-1)!}{(n+m-1)!} \,, \qquad (1.9.7)$$

nes bet kuris tam tikras dalelių pasiskirstymas yra vienodai galimas.

Tikimybė, kad bet kuriuose narveliuose bus po vieną dalelę bus C_n^m kartų didesnė:

$$P_2 = \frac{C_n^m}{C_{n+m-1}^m} = \frac{n!\left(n-1\right)!}{\left(n+m-1\right)!\left(n-m\right)!}. \qquad (1.9.8)$$

Bozės ir Einšteino statistika gerai aprašo fotonų, atomų branduolių ir atomų, turinčių lyginį elementariųjų dalelių skaičių, sistemas, tačiau ji netinka elektronų, protonų, neutronų sistemoms aprašyti. Pastarąsias sistemas aprašo Fermio ir Dirako statistika.

***Fermio ir Dirako statistika*.**

Ši reikalauja, kad narvelyje būtų viena dalelė arba nė vienos dalelės. Akivaizdu, kad m dalelių po n narvelius ($m \leq n$) galime išdėstyti C_n^m būdų, t.y. išdėstymų skaičius lygus derinių be pasikartojimų skaičiui. Šie deriniai yra vienodai galimi, todėl tikimybė :

$$P\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_n^m} & \text{, kai } 0 \leq k_j \leq 1 \left(j = 1,2,\ldots,n\right), \\ 0 & \text{, kitais atvejais.} \end{cases}$$

1.10. Bernulio (binominių) bandymų schema. Bernulio formulė

Praktikoje dažnai susiduriame su bandymais, panašiais į monetos mėtymą, kai daug kartų kartojamas tas pats bandymas, turintis dvi baigtis. Tarkime, kad mes atliekame n bandymų. Kiekvieno bandymo rezultatas yra atsitiktinis: gali įvykti arba įvykis A su tikimybe p, arba įvykiui A priešingas įvykis $\overline{A}$ su tikimybe $q=1-p$. Visi n bandymų rezultatai yra nepriklausomi. Nagrinėsime atvejį, kai iš n bandymų įvykis A gali įvykti k kartų (k=0, 1, 2, ..., n), t.y. surasime tikimybę $P_n(k)$, kad iš n bandymų įvykis A realizuojamas k kartų.

Tokia įvykių schema atitinka daugelį realių atvejų:

a) tikriname n gaminių, atsitiktinis įvykis A – nekokybiško gaminio aptikimas, $P_n(k)$ – tikimybė, kad iš n gaminių k bus nekokybiški;

b) registruojami n naujagimių, įvykis A – berniuko gimimas, $P_n(k)$ – tikimybė, kad iš n naujagimių bus k berniukų;

c) tikriname n loterijos bilietų, įvykis A – išlošimas, $P_n(k)$ – tikimybė, kad iš n bilietų išloš k bilietų;

d) eksperimento metu registruojami neutronai, įvykis A – neutrono, kurio energija yra tam tikrame intervale, registravimas, $P_n(k)$ – tikimybė, kad iš n registruotų neutronų nagrinėjamame energijos intervale bus užregistruota k neutronų.

Visais šiais atvejais tikimybė $P_n(k)$ aprašoma Bernulio (binomine) formule. Bernulio formulės esmę sudaro prielaida, kad, žinant įvykio A tikimybę, reikia surasti tikimybę, kad iš n bandymų įvykis A įvyks k kartų. Tarkime, kad viena iš palankių elementariųjų įvykių serijų yra tokia:

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_n;$$
$$\underbrace{A,\ A,\ \ldots, A,}_{k}\ \underbrace{\overline{A},\ \ldots,\ \overline{A}}_{n-k}.$$

Apskaičiuosime šios nepriklausomų įvykių serijos sankirtos tikimybę

$$P_1=P(A_1\cap\ldots\cap A_k\cap A_{k+1}\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)\ldots P(A_k)P(A_{k+1})\ldots P(A_n).$$

Kadangi

$$P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_k)=P(A)=p,$$

$$P(A_{k+1})=P(A_{k+2})=\ldots=P(A_n)=1-P(A)=P(\overline{A})=1-p=q,$$

todėl

$$P_1=\underbrace{P(A)P(A)\ldots P(A)}_{k}\underbrace{P(\overline{A})\ldots P(\overline{A})}_{n-k}=p^kq^{n-k}=p^k(1-p)^{n-k}.$$

Kitų mus dominančių elementariųjų įvykių serijų tikimybės yra lygiai tokios pat, nes įvykių sankirtos tikimybė nesikeičia, keičiant įvykius vietomis.

Dabar reikia tik surasti tų mus dominančių įvykių serijų skaičių, kai iš n bandymų, įvykis A įvyksta k kartų. Šis skaičius lygus derinių iš n elementų po k elementų skaičiui C_n^k. Vadinasi, ieškomoji tikimybė (Bernulio formulė)

$$\boxed{P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad (1.10.1)}$$

arba

$$P_n(k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}. \tag{1.10.2}$$

Čia naudinga prisiminti Niutono binomo formulę:

$$(a+b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}b^1 + C_n^2\, a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k\, a^k b^{n-k} + \ldots + C_n^n\, b^n .$$

Kai kuriais atvejais tikimybių skaičiavimus galime supaprastinti Niutono binomo formulėje prilyginę $a=p$ ir $b=1-p=q$.

2. ATSITIKTINIAI DYDŽIAI IR JŲ SKIRSTINIAI

2.1. Atsitiktinis dydis. Diskrečiojo atsitiktinio dydžio skirstinys

Dažnai bandymo rezultatas yra atsitiktinis įvykis, kurį atitinka kuris nors skaičius.

Atsitiktiniu vadinamas dydis, kuris bandymo metu gali įgyti tai vieną ar kitą vertę, būtent kokią – tai priklauso nuo atsitiktinių bandymo sąlygų ir kuri iš anksto negali būti nusakyta. Iš anksto gali būti žinomos tik tų dydžių įvykimo tikimybės.

Atsitiktinių dydžių pavyzdžiais gali būti:

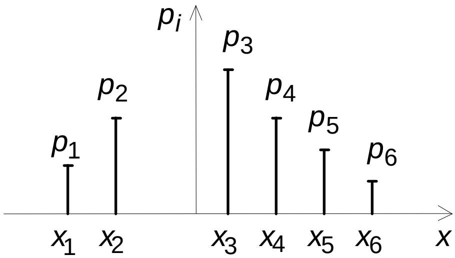
1) skaičius taškų, gaunamų metant lošimo kauliuką;
2) iškraipymų skaičius kodo kombinacijoje iš n ženklų, esant priėmimui su trukdžiais;
3) krepšinio kamuolio metimų skaičius iki pirmojo pataikymo į krepšį;
4) meteoritų skaičius, krentantis per metus į Žemės paviršių;
5) dujų molekulės greitis dėl smūgių su kitomis molekulėmis;
6) integrinės grandinės darbo trukmė ir t.t.

Pirmaisiais keturiais atvejais atsitiktinis dydis yra diskretusis, o pastaraisiais dviem – tolydusis. Verčių aibė, kurias bandymo metu gali įgyti atsitiktinis dydis, gali būti baigtinė ar begalinė. Begalinė aibė gali būti suskaičiuojamoji (t.y. jos elementus, kaip, pavyzdžiui, 3-iuoju ir 4-uoju atvejais, galime sunumeruoti) ir nesuskaičiuojamoji (5-asis ir 6-asis atvejis).

Aprašant atsitiktinį dydį, reikia nurodyti jo galimas vertes. Tačiau vien tik nurodydami jo galimas vertes, nevisiškai apibūdinsime atsitiktinį dydį. Reikia žinoti, kiek dažnai pasikartos vienos atsitiktinio dydžio vertės ir kiek retai – kitos, arba, o tai yra tas pats, kokia yra atsitiktinio dydžio tikimybė įgyti viena ar kitą vertę. Pavyzdžiui, 3-iuoju atveju geram krepšininkui tikimiausias kamuolio metimų skaičius iki pirmojo pataikymo į krepšį yra lygus 1 arba 2, o blogam šie skaičiai gali būti ir dideli.

Sąryšis, siejantis atsitiktinio dydžio vertes ir jų tikimybes, vadinamas atsitiktinio dydžio skirstiniu.

Atsitiktinį dydį pažymėsime simboliu X, jo galimas vertes x_i ir atitinkamas jų tikimybes p_i. Tada diskrečiojo atsitiktinio dydžio skirstinys gali būti pavaizduotas grafiškai (2.1 pav.) arba pateiktas lentelės pavidalu (2.1 lentelė), arba analiziniu būdu.



2.1 pav. Atsitiktinio dydžio skirstinys.

2.1 lentelė. Atsitiktinio dydžio skirstinys.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6

Aišku, kad

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \tag{2.1.1}$$

čia n - atsitiktinio dydžio X galimų verčių skaičius. Lygybė (2.1.1) vadinama ***skirstinio normavimo sąlyga***.

Skirstinys visiškai aprašo statistines diskrečiojo atsitiktinio dydžio charakteristikas. Gali būti pateikti ir kitokie jo aprašymo būdai, tačiau arba jie bus nepilnutiniai, arba lygiaverčiai skirstiniui.

2.2. Pasiskirstymo funkcija

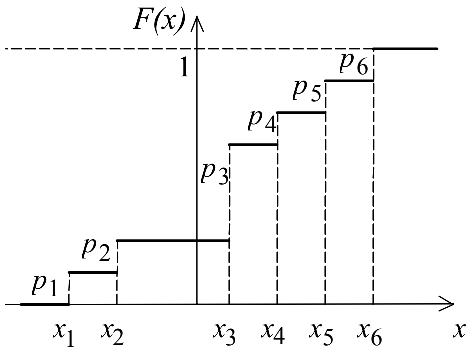
Skirstinys, anksčiau aptartas diskrečiajam dydžiui, netenka prasmės tolydžiajam dydžiui.

Universali charakteristika, tinkanti aprašyti kaip diskrečiuosius, taip ir tolydžiuosius dydžius, yra pasiskirstymo funkcija.

Pasiskirstymo funkcija* (*arba integraliniu tikimybių skirstiniu*) *vadinama funkcija F*(*x*), *atitinkanti tikimybę P, kad atsitiktinis dydis X įgis vertes, mažesnes už x, t.y. intervale nuo $(-\infty)$ iki x :

$$F(x)=P(X<x) . \qquad (2.2.1)$$

Panagrinėsime, kaip surandama diskrečiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija. Tegul atskirų verčių tikimybės pateiktos 2.1 pav. Kol funkcijos $F(x)$ argumentas yra mažesnis už x_1, pasiskirstymo funkcija $F(x)$ lygi nuliui, kadangi nėra nė vienos X vertės mažesnės už x_1. Taške (x_1+0) funkcija $F(x)$ šuoliškai įgyja vertę p_1 ir lieka pastovi intervale nuo x_1 iki x_2. $F(x)$ taške (x_2+0) šuoliškai padidėja dydžiu p_2, t.y. $F(x)=p_1+p_2$, nes įvykis – įgyti atsitiktiniam dydžiui vertes mažesnes už (x_2+0) – suskyla į du nepriklausomus įvykius: su tikimybe p_1 įgyti vertę x_1 ir su tikimybe p_2 – vertę x_2. Panašiai surandame pasiskirstymo funkciją ir likusioms x vertėms (2.2 pav.).



2.2 pav. Diskrečiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

Aptarsime ***pasiskirstymo funkcijos savybes***.

1) $F(-\infty)=0$. Ši savybė pažymi tą faktą, kad atsitiktinis dydis neturi verčių, kurios galėtų būti mažesnės už neigiamą begalybę.

2) $F(x)$ – nemažėjanti funkcija. Iš tikrųjų, tegul $x_2>x_1$, tada

$$P(X<x_2)=P(X<x_1)+P(x_1\le X<x_2)$$

arba

$$F(x_2)=F(x_1)+P(x_1 \le X < x_2)\ . \qquad (2.2.2)$$

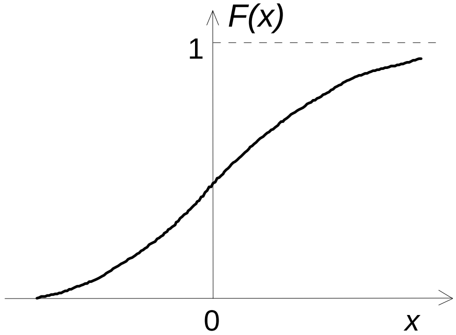
Kadangi tikimybė negali būti neigiama, tai iš pastarosios lygybės gauname, kad

$$F(x_2) \ge F(x_1),\ \text{kai}\ x_2 > x_1.$$

3) $F(\infty)=1$. Ši savybė pažymi tą faktą, kad įvykis – atsitiktiniam dydžiui įgyti vertes mažesnes už teigiamą begalybę – yra tikras.

Iki šiol kalba vyko apie diskrečiųjų dydžių pasiskirstymo funkciją. Tačiau visi čia pateikti nurodymai tinka ir tolydžiajam atsitiktiniam dydžiui.

Bendriausiu atveju $F(x)$ turės tam nemažėjančios funkcijos pavidalą ir tenkins anksčiau nurodytas savybes. Tolydžiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija yra tolydinė (2.3 pav.) arba turi kai kuriuose taškuose trūkius (šuolius).



2.3 pav. Tolydžiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

Bet kuri pasiskirstymo funkcija turi dar vieną savybę, vaidinančią ypatingą vaidmenį tolydiesiems atsitiktiniams dydžiams.

4) Tikimybė patekti atsitiktiniam dydžiui į intervalą nuo x_1 iki x_2 – lygi pasiskirstymo funkcijos skirtumui šiuose taškuose. Tuo lengva įsitikinti, perrašius lygybę (2.2.2), t.y.

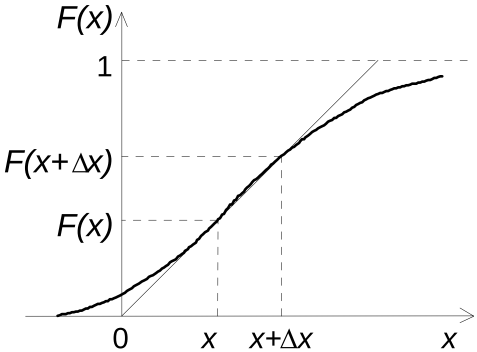
$$P(x_1 \le X < x_2)=F(x_2)-F(x_1)\ . \qquad (2.2.2\ \text{a})$$

Ši savybė galioja ir diskrečiojo atsitiktinio dydžio atveju, tačiau šiuo atveju intervalas apima kraštinį kairįjį tašką ir neapima kraštinio dešiniojo taško.

2.3. Tikimybės tankis

Surasime tokią tolydžiojo atsitiktinio dydžio charakteristiką, kuri leistų pasakyti, kiek vienos atsitiktinio dydžio vertės labiau tikimos už kitas. Priminsime, kad tokia diskrečiojo atsitiktinio dydžio charakteristika yra skirstinys.

Turėdami galvoje, kad tolydžiojo atsitiktinio dydžio bet kokios konkrečios vertės tikimybė lygi nuliui, panagrinėsime nedidelį intervalą, apimantį mus dominančią vertę x, ir po to artinsime intervalo ilgį į nulį.



2.4 pav. Iliustracija tikimybės tankio apibūdinimui.

Tegul duota tam tikra vertė x. Paimsime tam tikrą Δx. Laikydami, kad funkcija $F(x)$ diferencijuojama, ir pritaikę išraiškos (2.2.2 a) dešinei pusei Lagranžo teoremą, gausime, kad

$$P(x \le X < x + \Delta x) = \frac{[F(x + \Delta x) - F(x)]}{\Delta x}\Delta x \approx F'(x)\Delta x\,. \qquad (2.3.1)$$

Čia štrichas nurodo diferencijavimą. Esant duotam Δx, tikimybė, kad tolydusis atsitiktinis dydis yra intervale nuo x iki $x+\Delta x$, bus tuo didesnė, kuo didesnė F' taške x. Tokiu būdu funkcija F' gali būti ieškomąja charakteristika. Kol kas ši charakteristika nėra visiškai apibrėžta, nes priklauso nuo intervalo Δx. Kad panaikintume šią priklausomybę, surasime išraiškos (2.3.1) ribą, kai $\Delta x \to 0$. Gauname

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{dP}{dx}. \qquad (2.3.1\ \text{a})$$

Funkcija $F'(x)$ turi specialų pavadinimą – ***tikimybės tankis***. Jį žymėsime $w(x)$:

$$w(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{dP}{dx}. \qquad (2.3.2)$$

Iš čia pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} w(x)dx \qquad (2.3.3)$$

Atsižvelgdami į funkcijos $F(x)$ prasmę ir į išraišką (2.3.2), galime pateikti tokį apibrėžimą:

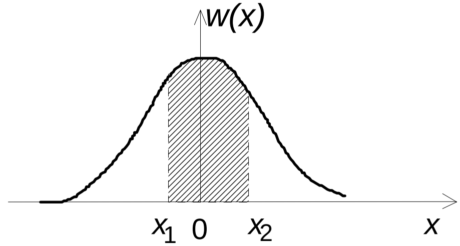
Atsitiktinio dydžio tikimybės tankiu vadinama tokia funkcija w(x), kuri padauginta iš mažo intervalo Δx, lygi tikimybei atsitiktiniam dydžiui patekti į intervalą nuo x iki x+Δx.

Pateiksime ***tikimybės tankio savybes***.

1) Tikimybės tankis – neneigiamas dydis, nes bet kokioms x vertėms $F(x)$ yra nemažėjanti funkcija.

2) Tikimybė, kad tolydusis atsitiktinis dydis bus intervale (x_1, x_2), lygi

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} w(x)dx - \int_{-\infty}^{x_1} w(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx. \qquad (2.3.4)$$



2.5 pav. Tikimybės tankis.

Tai tiesiogiai gauname integruodami išraišką (2.3.2). Ieškomąją tikimybę galime pavaizduoti grafiškai: ji lygi plotui, esančiam tarp kreivės $w(x)$ ir abscisių ašies intervale nuo x_1 iki x_2 (2.5 pav.).

3) Tikimybės tankio integralas begaliniame x intervale lygus vienetui:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 .$$

Ši išraiška vadinama tikimybės tankio ***normavimo sąlyga***.

2.4. Skaitinės atsitiktinio dydžio charakteristikos. Vidurkis

Kai kuriais atvejais atsitiktinis dydis aprašomas nesinaudojant pasiskirstymo funkcija ar tikimybės tankiu, o imant tam tikras jo skaitines charakteristikas.

Paprasčiausios ir svarbiausios atsitiktinio dydžio skaitinės charakteristikos yra statistinis vidurkis ir dispersija. Terminas "statistinis" dažnai praleidžiamas, jei vidurkis suprantamas, būtent, šia prasme.

Vidurkis yra atsitiktinio dydžio aritmetinio vidurkio tikimybinis apibendrinimas. Tegul vienas ir tas pats bandymas atliekamas tose pačiose sąlygose N kartų, ir atsitiktinis dydis m_1 kartų įgijo vertę x_1, m_2 kartų – vertę x_2, ..., m_n kartų – vertę x_n. Čia $m_1+m_2+...+m_n=N$. Surasime šio atsitiktinio dydžio aritmetinį vidurkį:

$$\begin{aligned} m_n(X) &= \frac{1}{N}(m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n) = \\ &= x_1\frac{m_1}{N} + x_2\frac{m_2}{N} + ... + x_n\frac{m_n}{N}. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Esant pakankamai ilgai bandymų serijai, įvykių, kad atsitiktinis dydis įgis vertes x_1, x_2, ..., x_n , santykiniai dažniai $\nu_1=m_1/N$, $\nu_2=m_2/N$, ..., $\nu_n=m_n/N$ grupuojasi apie šių verčių tikimybes $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_n)$. Vadinasi, esant pakankamai ilgai bandymų serijai, atsitiktinio dydžio aritmetinio vidurkio vertė artėja prie dydžio

$$M(X)=x_1p(x_1)+x_2p(x_2)+ ... +x_np(x_n) , \tag{2.4.2}$$

kuris vadinamas atsitiktinio dydžio vidurkiu. Paprastai atsitiktinio dydžio X vidurkio konkreti vertė žymima m_x.

Vadinasi, ***atsitiktinio dydžio vidurkiu vadinama vertė, apie kurią grupuojasi jo aritmetinio vidurkio vertės, esant pakankamai dideliam bandymų skaičiui*** ir kuri aprašoma lygybe (2.4.2).

Formulę (2.4.2) galime išreikšti tokiu būdu:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i). \qquad (2.4.3)$$

Kai atsitiktinis dydis tolydusis, tada

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, w(x) dx, \qquad (2.4.4)$$

nes $w(x)dx$ atitinka tikimybę dP, kad atsitiktinis dydis bus intervale nuo x iki $(x+dx)$.

Tarptautinis ir Lietuvos standartas LST ISO 31-11:1996 siūlo vidurkinimo veiksmą žymėti kampiniais skliaustais:

$$M(X) = \langle X \rangle.$$

Vėliau, būtent, taip ir žymėsime.

Labai dažnai tenka nagrinėti atsitiktinių dydžių funkcijas $\varphi(X)$. Šios funkcijos įgyja atsitiktines vertes tik tada, kai įvyksta pats atsitiktinis dydis X. Todėl šios funkcijos – tai nauji atsitiktiniai dydžiai. Diskrečiojo atsitiktinio dydžio X, jo funkcijos $\varphi(X)$ ir jų tikimybės pavaizduotos 2.2 lentelėje. Funkcija $\varphi(X)$ įgyja konkrečią vertę, pvz., $\varphi(x_1)$ tik tada, kai $x=x_1$; vadinasi, atsitiktinio dydžio X ir jo funkcijos $\varphi(X)$ tikimybių skirstiniai yra tie patys.

2.2 lentelė. Atsitiktinio dydžio X ir jo funkcijos $\varphi(X)$ skirstiniai.

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
$\varphi(X)$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\varphi(x_3)$	$\varphi(x_4)$	$\varphi(x_5)$	$\varphi(x_6)$

Vadinasi, diskrečiojo atsitiktinio dydžio funkcijos $\varphi(X)$ vidurkis

$$M(\varphi(X)) = p_1\varphi(x_1) + p_2\varphi(x_2) + \ldots + p_n\varphi(x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i\varphi(x_i). \qquad (2.4.5)$$

Panašiai tolydinio atsitiktinio dydžio funkcijos $\varphi(X)$ vidurkis lygus

$$M(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) w(x) dx . \qquad (2.4.5\ \text{a})$$

Aptarsime kai kurias **vidurkio savybes**.

1) Atsitiktinio dydžio, padauginto iš pastovaus skaičiaus, vidurkis lygus jo vidurkiui padaugintam iš to paties skaičiaus:

$$M(cX)=cM(X)=cm_x . \qquad (2.4.6)$$

2) Atsitiktinių dydžių sumos (skirtumo) teorinis vidurkis lygus jų vidurkių sumai (skirtumui):

$$M(X \pm Y)=M(X) \pm M(Y) . \qquad (2.4.7)$$

Įrodymo supaprastinimui laikysime, kad kiekvienas iš atsitiktinių dydžių X ir Y įgyja po dvi galimas vertes: x_1 ir x_2 su tikimybe p_1 ir p_2, y_1 ir y_2 su tikimybe q_1 ir q_2. Tada galimos $X \pm Y$ vertės bus $x_1 \pm y_1$, $x_1 \pm y_2$, $x_2 \pm y_1$ ir $x_2 \pm y_2$. Jų tikimybes žymėsime atitinkamai $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$.

Pagal vidurkio apibrėžtį (2.4.3)

$$M(X \pm Y)=(x_1 \pm y_1)p_{11}+(x_1 \pm y_2)p_{12}+(x_2 \pm y_1)p_{21}+(x_2 \pm y_2)p_{22}$$

arba

$$M(X \pm Y)=x_1(p_{11}+p_{12}) + x_2(p_{21}+p_{22}) \pm y_1(p_{11}+p_{21}) \pm y_2(p_{12}+p_{22}).$$

Parodysime, kad $p_{11}+p_{12}=p_1$. Įvykis, kad dydis X turės vertę x_1 (šio įvykio tikimybė lygi p_1), sukelia kitą įvykį, kad $X \pm Y$ įgys vertes $x_1 \pm y_1$ ir $x_1 \pm y_2$ (šio įvykio tikimybė lygi $p_{11}+p_{12}$), ir atvirkščiai. Tokiu būdu, $p_{11}+p_{12}=p_1$. Visiškai panašiai galime parodyti, kad $p_{21}+p_{22}=p_2$, $p_{11}+p_{21}=q_1$ ir $p_{12}+p_{22}=q_2$. Atsižvelgę į šias lygybes, gauname, kad

$$M(X \pm Y)=x_1p_1+x_2p_2 \pm (y_1q_1+y_2q_2)=M(X) \pm M(Y).$$

Panašiai šią lygybę galime apibendrinti ir didesniam atsitiktinių dydžių skaičiui.

3) ***Nepriklausomųjų*** atsitiktinių dydžių sandaugos vidurkis lygus vidurkių sandaugai:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y). \qquad (2.4.8)$$

Tegul X ir Y – nepriklausomi. X įgyja vertes x_1, x_2, ..., x_n, kurių tikimybės p_1, p_2, ..., p_n, o Y įgyja vertes y_1, y_2, ..., y_m, kurių tikimybės q_1, q_2, ..., q_m.

Tikimybė, kad X turės vertę x_k ir kartu Y turės vertę y_l, t.y. tikimybė, kad sandauga $X \cdot Y$ turės vertę $x_k \cdot y_l$ (pagal tikimybių sandaugos teoremą), lygi $p_k \cdot q_l$. Pasinaudoję vidurkio apibrėžtimi, gauname:

$$M(XY) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} x_k y_l p_k q_l = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \sum_{l=1}^{m} y_l q_l = M(X)M(Y).$$

Panašią lygybę galime užrašyti ir esant daugiau atsitiktinių dydžių bei tolydiesiems dydžiams.

Dažnai naudojama sąvoka – ***centruotasis atsitiktinis dydis***. Atsitiktinis dydis vadinamas centruotu, jei jo vertės atskaitomos atžvilgiu vidurkio. Centruotąjį atsitiktinį dydį žymėsime $\overset{\circ}{X}$:

$$\overset{\circ}{X} = X - M(X) = X - m_x . \qquad (2.4.9)$$

Aišku, kad centruotojo atsitiktinio dydžio vidurkis lygus nuliui.

2.5. Dispersija

Yra visa eilė uždavinių, kuriuose pakanka žinoti tik atsitiktinio dydžio vidurkį. Pavyzdžiui, perdegus apšvietimo lempai, tai paprastai nesukelia sunkių pasekmių. Ji pakeičiama antra, trečia, ir t.t., t.y. čia domimės vidutine jos veikimo trukme. Esant atsakingam elementui ir norint išvengti nereikalingų pasekmių, tikslinga tą elementą pakeisti anksčiau, negu jis susigadins. Todėl reikia žinoti, koks yra tų elementų patikimo darbo laiko nuokrypis nuo jų vidutinės vertės.

Tikimybių teorijoje atsitiktinio dydžio verčių sklaidai apibūdinti naudojama speciali charakteristika – ***dispersija***.

Atsitiktinio dydžio dispersija – tai atitinkamo centruoto atsitiktinio dydžio kvadrato statistinis vidurkis.

Dažniausiai dispersija žymima $D(X)$ arba σ_x^2. Vadinasi, diskrečiojo atsitiktinio dydžio dispersija išreiškiama šitaip:

$$D(x)=\sigma_x^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_i \ , \tag{2.5.1}$$

o tolydžiojo atsitiktinio dydžio formule:

$$\sigma_x^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 w(x)dx \, . \tag{2.5.2}$$

Dispersija turi atsitiktinio dydžio kvadrato dimensiją, todėl dar dažnai naudojama *kita charakteristika* – ***atsitiktinio dydžio vidutinis kvadratinis nuokrypis (***dar vadinamas ***standartiniu nuokrypiu), jis lygus kvadratinei šakniai iš dispersijos.***

Iš (2.5.1) ir (2.5.2) matyti, kad atsitiktinio dydžio $Y=cX$ dispersija lygi

$$\sigma_y^2=c^2\sigma_x^2 \, . \tag{2.5.3}$$

Surasime ryšį tarp necentruotojo atsitiktinio dydžio kvadrato vidurkio, jo vidurkio ir dispersijos:

$$\sigma_x^2=M[(X-m_x)^2]=M[X^2-2m_xX+m_x^2]=$$

$$=M(X^2)-2m_xM(X)+m_x^2=M(X^2)-m_x^2 \, . \tag{2.5.4}$$

Šią formulę dažnai vartosime, skaičiuojant dispersiją.

Dviejų ***nepriklausomųjų*** atsitiktinių dydžių sumos (skirtumo) dispersija lygi šių atsitiktinių dydžių dispersijų ***sumai***:

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)=\sigma_x^2+\sigma_y^2 \ . \tag{2.5.5}$$

Pagal apibrėžtį

$$D(X\pm Y)=M[(X\pm Y-M(X\pm Y))^2]=$$

$$=M[\{(X-m_x)\pm(Y-m_y)\}^2]=M(\overset{\circ}{X}{}^2)+M(\overset{\circ}{Y}{}^2)\pm 2M(\overset{\circ}{X}\,\overset{\circ}{Y})$$

Kadangi X ir Y nepriklausomi, tai $M(\overset{\circ}{X}\,\overset{\circ}{Y})=M(\overset{\circ}{X})M(\overset{\circ}{Y})$, tačiau centruotojo atsitiktinio dydžio vidurkis lygus nuliui, todėl

$$D(X\pm Y)=\sigma_x^2+\sigma_y^2 \, .$$

Pabrėšime, kad, skirtingai nuo vidurkio, dviejų nepriklausomųjų atsitiktinių dydžių skirtumo dispersija lygi jų dispersijų sumai, o ne skirtumui.

2.6. Atsitiktinių dydžių momentai

Gerokai bendresnės atsitiktinio dydžio skaitinės charakteristikos, negu vidurkis ir dispersija, yra jo momentai. Skiriami ***pradiniai*** ir ***centriniai momentai***.

Atsitiktinio dydžio k-tosios eilės pradiniu momentu vadiname k-tojo laipsnio atsitiktinio dydžio vidurkį. k-tosios eilės centriniu momentu vadiname k-tojo laipsnio centruotojo atsitiktinio dydžio vidurkį.

Pagal apibrėžtį diskrečiojo ir tolydžiojo atsitiktinio dydžio momentus galime išreikšti taip:

$$m_k = M\left(X^k\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \,, \tag{2.6.1}$$

$$m_k = M\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k w(x) dx \,, \tag{2.6.2}$$

$$\mu_k = M(\overset{\circ}{X}{}^k) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_x\right)^k p_i \,, \tag{2.6.3}$$

$$\mu_k = M(\overset{\circ}{X}{}^k) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_x\right)^k w(x) dx \,. \tag{2.6.4}$$

Pagal šias apibrėžtis atsitiktinio dydžio vidurkis yra pirmosios eilės pradinis momentas, o dispersija – antrosios eilės centrinis momentas.

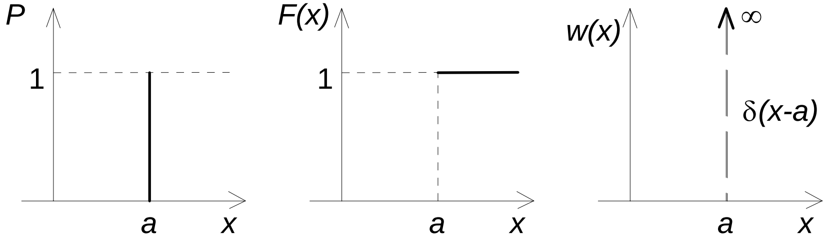
Žinant atsitiktinio dydžio skirstinį arba jo tikimybės tankį, galime apskaičiuoti bet kurios eilės momentą.

2.7. Atsitiktinių dydžių skirstiniai

1. *Išsigimęs atsitiktinio dydžio skirstinys.*

Pastovų dydį a=*const* galime nagrinėti kaip atskirą atsitiktinio dydžio X atvejį, kai jis su tikimybe P=1 įgyja vienintelę vertę a (2.6 pav., a). Jo pasiskirstymo funkcija

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{kai } x \le a;\\ 1, & \text{kai } x > a.\end{cases}$$



a) b) c)

2.6 pav. Pastoviojo dydžio (išsigimusiojo atsitiktinio dydžio) tikimybė (a), pasiskirstymo funkcija (b) ir tikimybės tankis (c).

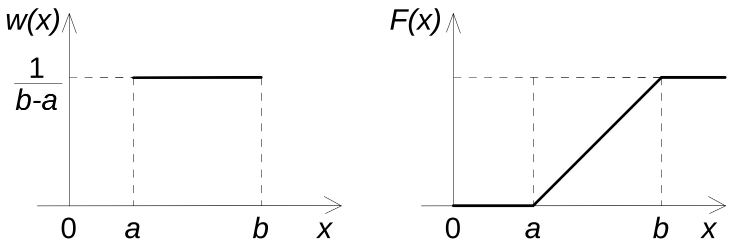
Toks atsitiktinis dydis ir jo pasiskirstymo funkcija vadinama išsigimusiaisiais. Šitokiam atsitiktiniam dydžiui galime užrašyti ir tikimybės tankį delta funkcijos pavidalu:

$$w(x)=\delta(x-a)\ . \qquad (2.7.1)$$

2. ***Tolygusis skirstinys***.

Tolydusis atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs tolygiai, jei jo tikimybės tankis (2.7 pav., a) yra pastovus:

$$w(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{kai } a \le x \le b;\\ 0, & \text{kai } x < \text{a ir } x > b.\end{cases} \qquad (2.7.2)$$



a) b)

2.7 pav. Tolygiojo skirstinio tikimybės tankis (a) ir pasiskirstymo funkcija (b).

Nesunku įrodyti, kad šiuo atveju pasiskirstymo funkcija

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{kai } x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{kai } a < x < b; \\ 1, & \text{kai } x \ge b. \end{cases}$$

Šio tolydžiojo atsitiktinio dydžio vidurkis

$$M(X)=m_x=\int_a^b x\,w(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{1}{2}(b+a),$$

o atsitiktinio dydžio dispersija

$$D(X)=\sigma_x^2=\int_a^b (x-m_x)^2 w(x)dx=\int_a^b x^2 w(x)dx-m_x^2=\frac{1}{12}(b-a)^2 .$$

3. *Binominis skirstinys.*

Tegul tam tikro įvykio A tikimybė lygi p, tai tikimybė $P_n(k)$, kad įvykis po n bandymų pasikartos k kartų, aprašoma formule:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}p^k q^{n-k}, \qquad (2.7.3)$$

čia q=1–p. Šis skirstinys vadinamas binominiu, nes kaip buvo parodyta anksčiau, tikimybė atitinka binominio skleidimo eilute koeficientus:

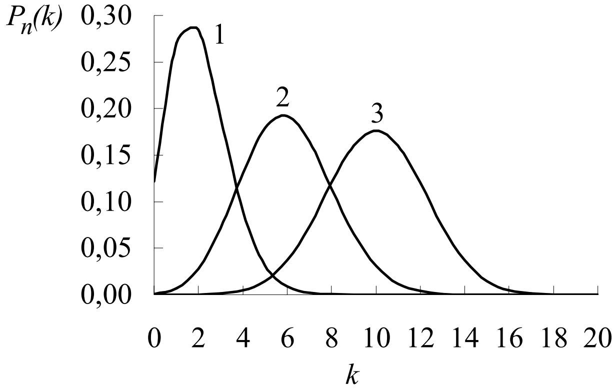
$$(pa+q)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} a^k . \qquad (2.7.4)$$

Iš pastarosios lygybės, kai a=1, gauname binominio skirstinio normavimo sąlygą:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=1. \qquad (2.7.4\ \text{a})$$

2.8 pav. pateikti binominiai skirstiniai, kai bandymų skaičius n=20, o įvykio A tikimybė p įgyja šias vertes: p_1=0,1; p_1=0,3; p_3=0,5. Matome, kad, kuo mažiau p skiriasi nuo 1/2, tuo simetriškesnis yra skirstinys.

Apskaičiuosime, kad įvykis A pasikartos k kartų, vidurkį (čia k yra atsitiktinis dydis), kai bandymas kartojamas n kartų. Tuo tikslu lygybę (2.7.4) diferencijuojame pagal a:



2.8 pav. Binominiai skirstiniai, kai n=20, o p įgyja vertes $1-0{,}1$; $2-0{,}3$ ir $3-0{,}5$.

$$np(pa+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} a^{k-1} \qquad (2.7.5)$$

ir prilyginame a=1:

$$np = \sum_{k=0}^{n} kP_n(k) = m_k \,, \qquad (2.7.6)$$

t.y. vidurkis lygus np. Apskaičiuosime dispersiją. Padauginame lygybės (2.7.5) abi puses iš a ir išdiferencijuojame pagal a:

$$npa(pa+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} a^k \,,$$

$$n(n-1)p^2 a(pa+q)^{n-2} + np(pa+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} a^{k-1} \,,$$

ir, prilyginę a=1, gauname:

$$n(n-1)p^2 + np = \sum_{k=0}^{n} k^2 P_n(k) = M\left(k^2\right).$$

Iš šios išraiškos pagal formulę (2.20) surandame dispersiją:

$$\sigma_k^2 = M\left(k^2\right) - m_k^2 = npq\,. \qquad (2.7.7)$$

Tada vidutinis kvadratinis nuokrypis $\sigma_k = \sqrt{npq}$.

Iš gautų rezultatų matyti, kad vidutinio kvadratinio nuokrypio ir vidurkio santykis yra atvirkščiai proporcingas kvadratinei šakniai iš n, t.y. didėjant bandymų skaičiui, santykinė dydžio k sklaida mažėja, o absoliutinė – didėja.

4. ***Puasono skirstinys***.

Dažnai pasitaiko tokių uždavinių (atvejų), kai reikia taikyti binominį skirstinį, esant dideliam bandymų skaičiui n. Tada skaičiavimai tampa gerokai sudėtingesni. Todėl įdomu žinoti binominio skirstinio asimptotinį artinį, esant dideliam n.

Atsitiktinis dydis yra pasiskirstęs pagal Puasono skirstinį, kai jis įgyja vertes x_k=k (k yra sveikas neneigiamas skaičius) su tikimybe

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},$$

čia λ yra tam tikras teigiamas skaičius.

Šį tikimybių skirstinį galime gauti ir kaip binominio skirstinio ribą, kai bandymų skaičius n artėja į begalybę: kai $n\to\infty$, sandauga $np=\lambda$, t.y. vidurkis lieka baigtinis, o įvykio tikimybė $p=\lambda/n$ mažėja.

Į formulę (2.7.3) įrašome $p=\lambda/n$; $q=1-\lambda/n$:

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}.$$

Surasime ribą $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k)$:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left[1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}.$$

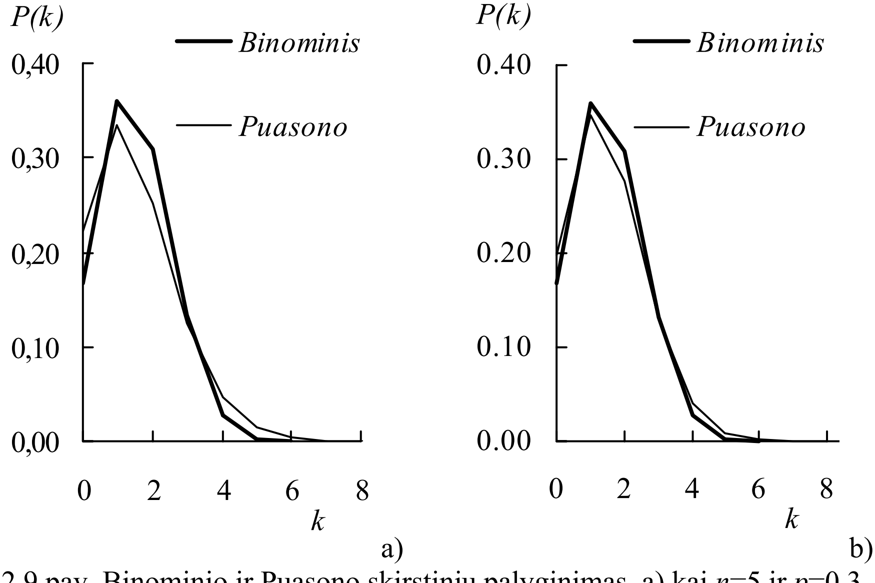
Pasinaudoję iš ribų teorijos žinomomis formulėmis

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1,$$

galime parašyti:

$$P(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \qquad (2.7.8)$$

2.9a pav. palyginti binominis skirstinys, kai n=5 ir p=0,3 (t.y. $\lambda=np$=1,5) ir Puasono skirstinys, esant tam pačiam λ=1,5. 2.9b pav. atvaizduoti tie patys skirstiniai, kai n=10 ir p=0,15 bei λ=1,5. Jei n būtų dar didesnis (pvz., n>100), tai binominio ir Puasono skirstinių grafikai beveik visiškai sutaptų.



2.9 pav. Binominio ir Puasono skirstinių palyginimas, a) kai n=5 ir p=0,3, b) kai n=10 ir p=0,15. Visais atvejais $\lambda=np$=1,5.

Kaip buvo nurodyta anksčiau, parametras $np=\lambda$ turi vidurkio prasmę. Tuo nesunku įsitikinti:

$$M(k)=\sum_{k=0}^{\infty}kP(k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\nu}}{\nu!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$$

Parodysime, kad Puasono skirstinio dispersija taip pat lygi λ. Tuo tikslu iš pradžių apskaičiuosime antrosios eilės pradinį momentą:

$$M\left(k^2\right)=\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=$$

$$=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k-1)+1\right]\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right].$$

Tačiau

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\lambda^{\nu}}{\nu!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda\,,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda}=1\,,$$

todėl

$$M(k^2)=\lambda(\lambda+1).$$

Vadinasi, dispersija

$$\sigma_k^2=M\left(k^2\right)-m_k^2=\lambda(\lambda+1)-\lambda^2=\lambda\,,$$

t.y. atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal Puasono dėsnį, dispersija lygi vidurkiui.

Tenka pažymėti, kad daugelyje uždavinių Puasono skirstinys susidaro ne kaip asimptotinis, o kaip visiškai atskiras (nepriklausomas) skirstinys.

5. *Normalusis (Gauso) skirstinys*.

Normalusis (Gauso) skirstinys taikomas labai plačiai ir vaidina ypatingą vaidmenį visų skirstinių tarpe.

Vėliau bus įrodyta, kad tikimybės tankis sumos nepriklausomų arba silpnai priklausomų, mažų (t.y. vaidinančių maždaug vienodą vaidmenį) sandų (dedamųjų), be galo didinant jų skaičių, gali priartėti kiek norima arti prie normaliojo skirstinio, nepriklausomai nuo to, kokį skirstinį turėjo šie sandai (*centrinė ribinė teorema*).

Jei turėsime galvoje, kad tikimybinis aprašymas taikomas dažniausiai kaip tik tada, kai reikia įskaityti didžiulį skaičių įvairių atsitiktinių poveikių, turinčių maždaug vienodą įtaką, tai paaiškės, kaip dažnai tenka, aprašant atsitiktinius dydžius, susidurti su normaliuoju skirstiniu.

Atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal normalųjį dėsnį, tikimybės tankis nenormuotu pavidalu išreiškiamas taip:

$$w(x) = C\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right];$$

čia m, σ ir C - skirstinio parametrai.

Surasime šiuos parametrus. Atliekame skirstinio normavimą:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx = 1 .$$

Pakeitę $t = (x-m)/\sigma\sqrt{2}$, gausime:

$$C\sigma\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = 1 .$$

Kadangi $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$, tai $C = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Tada skirstinio tikimybės tankis įgauna įprastinį savo pavidalą:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] . \qquad (2.7.9)$$

Parodysime, kad parametras m atitinka vidurkį, o σ^2 - dispersiją.

Tuo tikslu surasime atsitiktinio dydžio X, kurio tikimybės tankis aprašomas formule (2.7.9), vidurkį:

$$M(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx + \frac{m}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx.$$

Pirmasis integralas lygus nuliui, nes pointegrinė funkcija yra nelyginė. Išraiška

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx = 1$$

pagal normavimo sąlygą.

Tokiu būdu,

$$M(X)=m,$$

t.y. parametras m atitinka vidurkį. Surasime normaliojo atsitiktinio dydžio dispersiją:

$$D(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx.$$

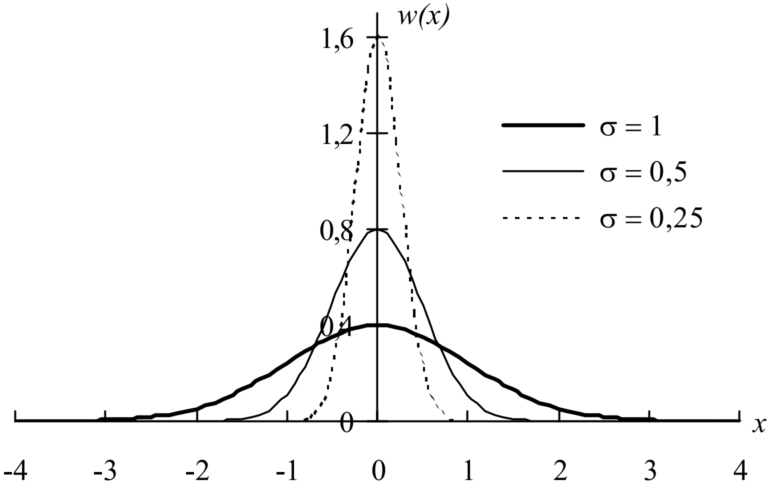
Pakeitę $t=(x-m)/\sigma\sqrt{2}$, gauname

$$D(x)=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2\,\mathrm{e}^{-t^2}\,dt=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t\,d\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right)=$$

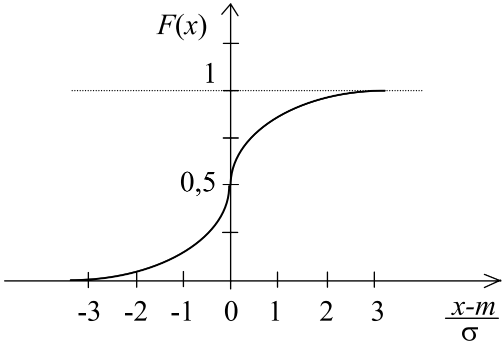
$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left(-t\,\mathrm{e}^{-t^2}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt=\sigma^2.$$

Vadinasi, parametras σ atitinka vidutinį kvadratinį nuokrypį, o σ^2 – dispersiją.

Tikimybės tankio (2.7.9) grafikas parodytas 2.10 pav.



2.10 pav. Normaliojo tolydžiojo atsitiktinio dydžio tikimybės tankio grafikai, esant skirtingiems σ: 1,0; 0,5; 0,25.



2.11 pav. Normaliojo tolydžiojo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

Normaliojo atsitiktinio dydžio tikimybių pasiskirstymo funkcija išreiškiama taip:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx. \qquad (2.7.10)$$

Jos grafikas parodytas 2.11 pav.

Apskaičiuosime tikimybę, kad normalusis atsitiktinis dydis bus tam tikrame intervale, t.y.

$$P(a \le x < b)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{a}^{b}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]dx.$$

Paėmę naują kintamąjį $t=(x-m)/\sigma$, gauname

$$P(a \le x < b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right), \qquad (2.7.11)$$

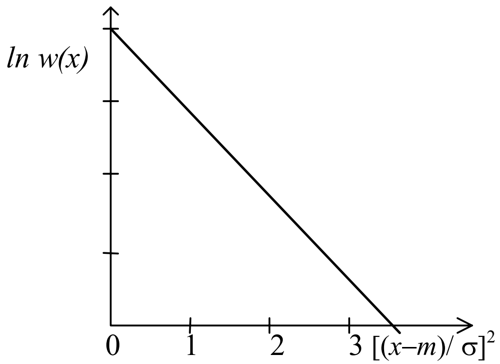
čia

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \qquad (2.7.12)$$

– tikimybės integralas, dažniausiai pateikiamas lentele. Pasinaudoję šia lentele (2.3 lentelė) ir formule (2.7.11), randame, kad normaliojo atsitiktinio dydžio tikimybė turėti vertes intervale nuo -σ iki σ (atžvilgiu vidutinės vertės) lygi 0,683, intervale (-2σ, 2σ) lygi 0,954 ir intervale (-3σ, 3σ) lygi 0,997.

2.3 lentelė. Funkcijos $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$ vertės, $\Phi(z)+\Phi(-z)=1$.

z	0	2	4	6	8
-0.0	0.5000	0.4920	0.4840	0.4761	0.4681
-0.1	0.4602	0.4522	0.4443	0.4364	0.4286
-0.2	0.4207	0.4129	0.4052	0.3974	0.3897
-0.3	0.3821	0.3745	0.3669	0.3594	0.3520
-0.4	0.3446	0.3372	0.3300	0.3228	0.3156
-0.5	0.3085	0.3015	0.2946	0.2877	0.2810
-0.6	0.2743	0.2676	0.2611	0.2546	0.2483
-0.7	0.2420	0.2358	0.2297	0.2236	0.2177
-0.8	0.2119	0.2061	0.2005	0.1949	0.1894
-0.9	0.1841	0.1788	0.1736	0.1685	0.1635
-1.0	0.1587	0.1539	0.1492	0.1446	0.1401
-1.1	0.1357	0.1314	0.1271	0.1230	0.1190
-1.2	0.1151	0.1112	0.1075	0.1038	0.1003
-1.3	0.0968	0.0934	0.0901	0.0869	0.0838
-1.4	0.0808	0.0778	0.0749	0.0721	0.0694
-1.5	0.0668	0.0643	0.0618	0.0594	0.0571
-1.6	0.0548	0.0526	0.0505	0.0485	0.0465
-1.7	0.0446	0.0427	0.0409	0.0392	0.0375
-1.8	0.0359	0.0344	0.0329	0.0314	0.0301
-1.9	0.0288	0.0274	0.0262	0.0250	0.0239
-2.0	0.0228	0.0217	0.0207	0.0197	0.0188
-2.1	0.0179	0.0170	0.0162	0.0154	0.0146
-2.2	0.0139	0.0132	0.0125	0.0119	0.0113
-2.3	0.0107	0.0102	0.0096	0.0091	0.0087
-2.4	0.0082	0.0078	0.0073	0.0069	0.0066
-2.5	0.0062	0.0059	0.0055	0.0052	0.0049
-2.6	0.0047	0.0044	0.0041	0.0039	0.0037
-2.7	0.0035	0.0033	0.0031	0.0029	0.0027
-2.8	0.0026	0.0024	0.0023	0.0021	0.0020
-2.9	0.0019	0.0018	0.0016	0.0015	
-3.0	0.0013				



2.12 pav. Normaliojo skirstinio tikrinimo iliustracija.

Norint įsitikinti, ar iš tikrųjų yra normalusis skirstinys, y ašyje atidedame $\ln w(x)$, o x ašyje − dydį $[(x-m)/\sigma]^2$. Ši priklausomybė turi būti tiesinė (2.12 pav.).

2.8. Kiti dažnai pasitaikantys skirstiniai

Be binominio, normaliojo ir Puasono skirstinių teoriniuose ir eksperimentiniuose atsitiktinių dydžių tyrimuose galime susidurti ir su kitais skirstiniais. Galimų skirstinių skaičius yra labai didelis, kadangi bet kuri neneigiama funkcija $w(x)>0$, tenkinanti normavimo sąlygą, gali atitikti tam tikrą tikimybės tankį.

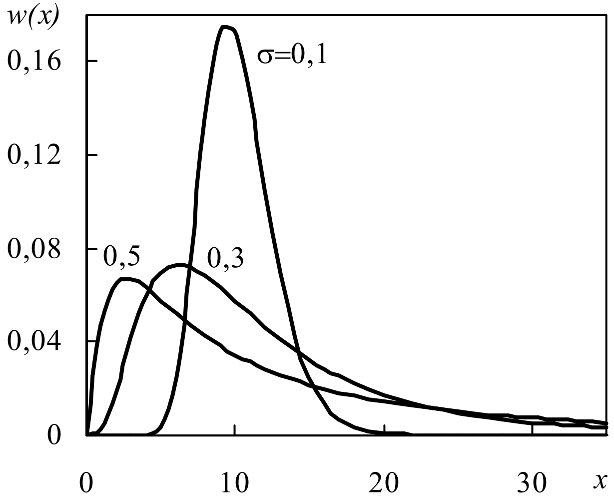
Lognormalusis skirstinys

Labai dažnai tenka susidurti su skirstiniu, kai atsitiktinio dydžio verčių logaritmai turi normalųjį skirstinį (2.13 pav.):

$$w(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\lg x - \lg m)^2}{2\sigma^2}\right]d(\lg x), \quad (x>0).$$

Iš šios išraiškos gauname, kad

$$M(\lg x) = \lg m, \quad D(\lg x) = \sigma^2 .$$



2.13 pav. Lognormaliojo skirstinio tikimybės tankio grafikai, esant skirtingoms vidutinio kvadratinio nuokrypio σ vertėms.

Gama skirstinys.

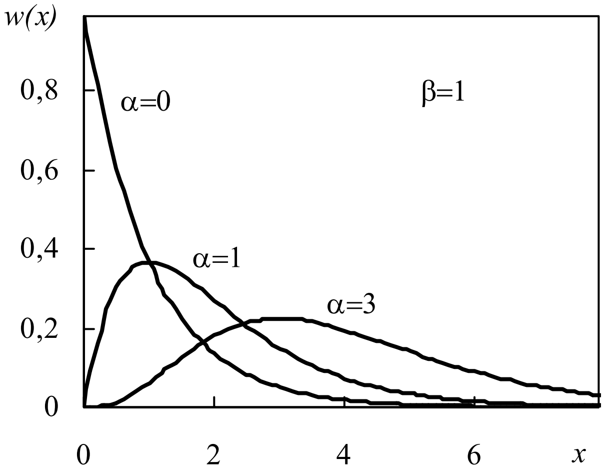
Gana dažnai taikomas ir gama skirstinys, ypač patikimumo ir masinio aptarnavimo teorijoje. Gama skirstinio tikimybės tankis išreiškiamas formule:

$$w(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta\Gamma(\alpha+1)}\left(\dfrac{x}{\beta}\right)^{\alpha} & \text{, kai } x>0;\\ 0 & \text{, kai } x\le 0;\end{cases}$$

čia $\alpha>-1$ ir $\beta>0$ yra skirstinio parametrai; gama funkcija

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,t^{\alpha}dt.$$

Gama skirstinio tikimybės tankio grafikai, esant skirtingoms α vertėms, pateikti 2.14 pav. Esant didelėms α vertėms, gama skirstinys yra artimas normaliajam skirstiniui.



2.14 pav. Gama skirstinio tikimybės tankio grafikai.

Pasinaudoję gama funkcijos savybe

$$\Gamma(n+\alpha+1)=(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)\,\Gamma(\alpha+1),$$

(čia n-sveikas skaičius) gauname pradinius momentus:

$$M(X^n)=\beta^n(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n)\ .$$

Turint šią išraišką, nesunku apskaičiuoti vidurkį m_x ir dispersiją σ_x^2 ir išreikšti skirstinio parametrus α ir β per vidurkį ir dispersiją:

$$\alpha = \left(\frac{m_x}{\sigma_x}\right)^2 - 1 , \qquad \beta = \frac{\sigma_x^2}{m} .$$

χ^2 skirstinys.

Tarkime, kad turime n nepriklausomų normaliųjų atsitiktinių dydžių X_1, X_2, ..., X_n , kurių vidurkis m_i=0 ir dispersija σ_i^2 =1. Šių atsitiktinių dydžių kvadratų sumą pažymėkime χ^2:

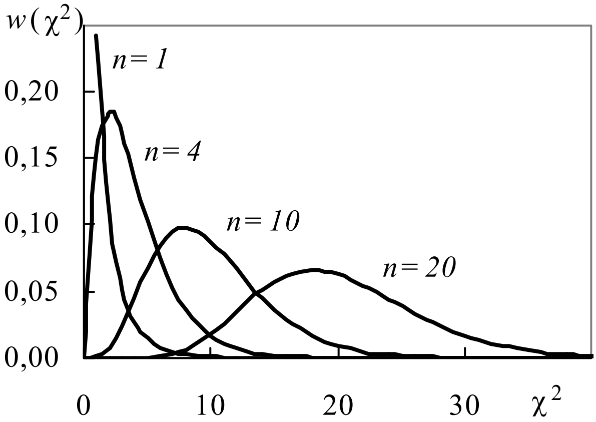
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad (0 \le \chi^2 < \infty) .$$

Dydis n vadinamas χ^2 skirstinio laisvės laipsnių skaičiumi. Šių atsitiktinių dydžių sumos χ^2 tikimybės tankis priklauso nuo n ir lygus

$$w(\chi^2) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\chi^2\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} ;$$

čia $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ – gama funkcija:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2n-1)}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \approx 1{,}77 .$$



2.15 pav. χ^2 skirstinio tikimybės tankio grafikai.

χ^2 skirstinio tikimybės tankio grafikai, esant skirtingiems n, pateikti 2.15 pav.

Akivaizdu, kad vidurkis $M(\chi^2)=n$, t.y. laisvės laipsnių skaičiui, nes kiekvieno $M(\chi_i^2)=\sigma_i^2=1$. χ^2 skirstinys yra dalinis gama skirstinio atvejis, kai $\alpha=(n/2)-1$ ir $\beta=2$.

Koši skirstinys.

Koši skirstinį turi tolydusis atsitiktinis dydis, kurio tikimybės tankis

$$w(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)},$$

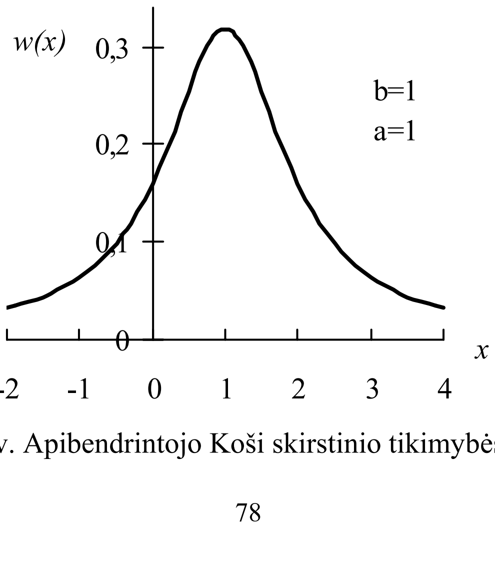
o pasiskirstymo funkcija

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x\,.$$

Skiriamas ir apibendrintasis Koši skirstinys, kurio tikimybės tankis (2.16 pav.)

$$w(x)=\frac{b}{\pi\left(b^2+(x-a)^2\right)} \qquad (b>0).$$

Šis skirstinys ypatingas tuo, kad neturi baigtinių momentų.



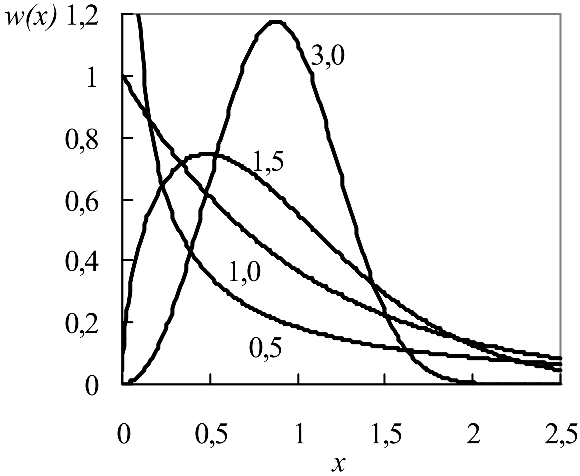
2.16 pav. Apibendrintojo Koši skirstinio tikimybės tankis.

Veibulo skirstinys.

Patikimumo ir masinio aptarnavimo teorijoje labai dažnai vartojamas Veibulo skirstinys. Jo tikimybės tankis išreiškiamas formule:

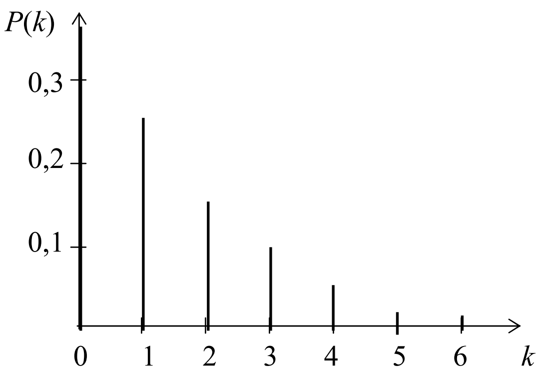
$$w(x) = \gamma x^{\gamma-1} e^{-x^{\gamma}}, \quad (x>0 \text{ ir } \gamma>0).$$

Veibulo skirstinio tikimybės tankio grafikai, esant skirtingiems γ, pateikti 2.17 pav.



2.17 pav. Veibulo skirstinio tikimybės tankio grafikai.

Geometrinis skirstinys.



2.18 pav. Geometrinis skirstinys, kai p=0,4.

Diskretusis atsitiktinis dydis X turi geometrinį skirstinį, jei jis įgyja visas sveikąsias neneigiamas vertes k su tikimybe

$$P(k)=p(1-p)k\ ,$$

čia p – fiksuotas skaičius ($0<p<1$). Geometrinio skirstinio grafikas, kai $p=0{,}4$, pateiktas 2.18 pav.

Laplaso skirstinys.

Tolydusis atsitiktinis dydis turi Laplaso skirstinį, jei jo tikimybės tankis

$$w(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\ ,$$

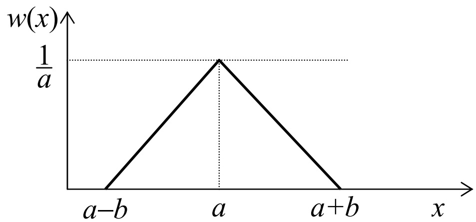
o pasiskirstymo funkcija

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} & ,\text{kai } x\le 0;\\ 1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} & ,\text{kai } x>0.\end{cases}$$

Trikampiškasis (Simpsono) skirstinys.

Taip vadinamas tolydžiųjų atsitiktinių dydžių skirstinys, kurio tikimybės tankis yra trikampio pavidalo (2.19 pav.):

$$w(x)=\begin{cases}\frac{1}{b^2}(b-|x-a|) & ,\text{kai } |x-a|<\mathrm{b};\\ 0 & ,\text{kai } |x-a|\ge \mathrm{b}.\end{cases}$$



2.19 pav. Trikampiškojo skirstinio tikimybės tankis.

2.9. Tikimybės tankio transformavimas

Nagrinėjant vidurkį, buvo minėta, kad, žinant atsitiktinio dydžio X tikimybės tankį $w(x)$, lengvai galime apskaičiuoti šio atsitiktinio dydžio įvairių funkcijų $\varphi(X)$ parametrus: vidurkį, dispersiją ir kitus momentus. Pvz., $\varphi(X)=X^k$:

$$M[\varphi(X)] = M\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k w(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)w(x)dx\,.$$

Tačiau, nagrinėjant įvairių atsitiktinių signalų praėjimą pro įvairias tiesines ir netiesines grandines, reikia žinoti ir atsitiktinių dydžių funkcijos $Y=\varphi(X)$ tikimybės tankį $w(y)$, t.y. funkciją $\varphi(X)$ nagrinėjant kaip naują atsitiktinį dydį Y.

Tarkime, kad naujas atsitiktinis dydis Y yra susietas su atsitiktiniu dydžiu X sąryšiu:

$$Y = \varphi(X). \tag{2.9.1}$$

Laikome, kad atsitiktinio dydžio X tikimybės tankis $w(x)$ yra žinomas. Reikia rasti atsitiktinio dydžio Y tikimybės tankį $w(y)$.

Tarkime, kad egzistuoja vienintelė atvirkštinė funkcija:

$$X = f(Y), \tag{2.9.2}$$

t.y. dydis x susietas su dydžiu y funkciniu sąryšiu:

$$x = f(y).$$

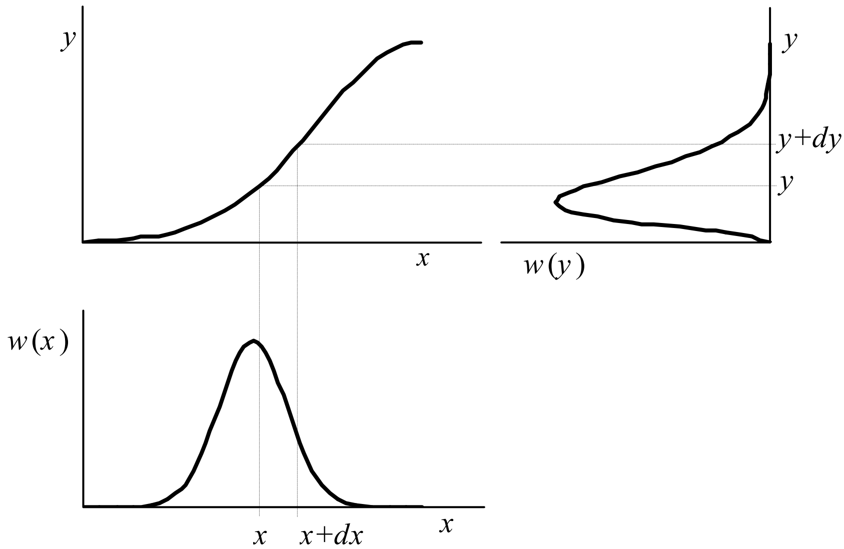
Kadangi atsitiktiniai dydžiai X ir Y susieti vienintele funkcine priklausomybe, tai iš to fakto, kad atsitiktinis dydis X su tikimybe $w(x)\mathrm{d}x$ yra intervale $(x,\ x+dx)$, turime, kad atsitiktinis dydis Y yra intervale $(y,\ y+dy)$ su ta pačia tikimybe (2.20 pav.):

$$w(y)dy = w(x)dx.$$

Gautąją lygybę perrašome taip:

$$w(y) = w(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|.$$

Modulio ženklas paimtas tam, kad užtikrintume tikimybės tankio neneigiamumą. Vietoje x įrašę jo išraišką $x=f(y)$, galutinai gauname:



2.20 pav. Tikimybės tankio transformavimo iliustracija.

$$w(y) = w[f(y)]\left|\frac{df(y)}{dy}\right| . \qquad (2.9.3)$$

Jei atvirkštinė funkcija $x=f(y)$ yra ne vienintelė, o turi n sprendinių, tai susidaro n nesutampančių galimybių (2.21 pav.):

$$x_1 \le X \le x_1+dx_1 ;$$
$$x_2 \le X \le x_2+dx_2 ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n \le X \le x_n+dx_n ;$$

atitinkančių atsitiktinio dydžio Y buvimui intervale:

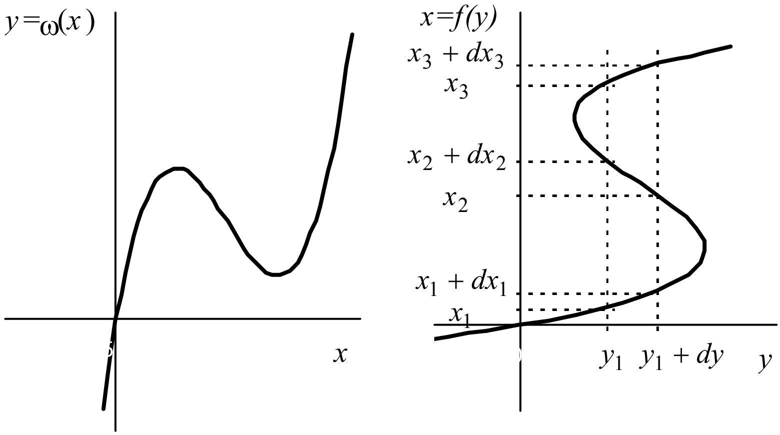
$$y_1 \le Y \le y_1+dy .$$

Vadinasi, pagal įvykių sąjungos tikimybės formulę galime užrašyti:

$$w(y)dy=w(x_1)dx_1+w(x_2)dx_2+\ldots+w(x_n)dx_n ,$$

arba

$$w(y) = w(x_1)\left|\frac{dx_1}{dy}\right| + w(x_2)\left|\frac{dx_2}{dy}\right| + \ldots + w(x_n)\left|\frac{dx_n}{dy}\right| ,$$



2.21 pav. Tikimybės tankio transformavimo iliustracija,
kai funkcija x=f(y) turi kelias sprendinių šakas.

t.y.:
$$w(y)=\sum_{i=1}^{n} w[f_i(y)]\left|\frac{df_i(y)}{dy}\right|, \qquad (2.9.4)$$

čia $f_i(y)$ - i-toji atvirkštinės funkcijos šaka.

Pvz. Tarkime, kad atsitiktinius dydžius X ir Y sieja funkcija

$$y=\varphi(x)=ax^2 \qquad (a>0).$$

Reikia surasti atsitiktinio dydžio Y tikimybės tankį $w(y)$, jei žinoma, kad X yra normalusis atsitiktinis dydis:

$$w(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Apskaičiuojame atvirkštinę funkciją

$$x_{1,2}=f_{1,2}(y)=\pm\sqrt{y/a},$$

kuri turi dvi šakas:

$$x_1=f_1(y)=\sqrt{y/a} \quad \text{ir} \quad x_2=f_2(y)=-\sqrt{y/a}.$$

Surandame atvirkštinių funkcijų išvestinių pagal y modulius:

$$\left|\frac{df_1(y)}{dy}\right| = \left|\frac{df_2(y)}{dy}\right| = \frac{1}{2\sqrt{a\,y}} \quad .$$

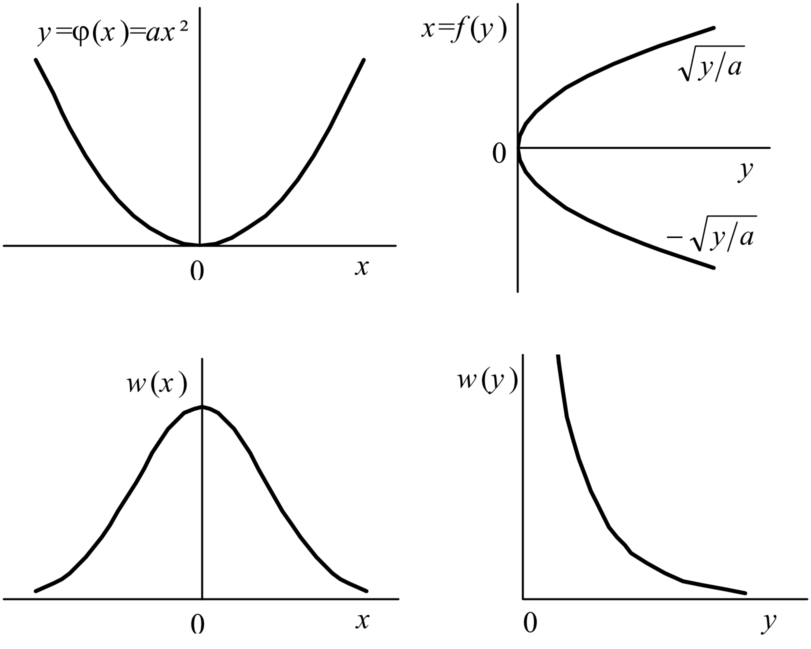
Kadangi atvirkštinė funkcija $f(y)$ turi dvi sprendinių šakas ir, kai $a>0$, neturi neigiamų verčių, tai, pasinaudoję sąryšiu (2.9.4), gauname:

$$w(y) = \begin{cases} w[f_1(y)]\left|\dfrac{df_1(y)}{dy}\right| + w[f_2(y)]\left|\dfrac{df_2(y)}{dy}\right| & \text{, kai} \quad y \geq 0; \\ 0 & \text{, kai} \quad y < 0. \end{cases}$$

Įrašę funkcijų $f_1(y)$ ir $f_2(y)$ išraiškas, gauname

$$w(y) = \begin{cases} \left[w\left(\sqrt{y/a}\right) + w\left(-\sqrt{y/a}\right)\right] \big/ \left(2\sqrt{a\,y}\right) & \text{, kai} \quad y \geq 0; \\ 0 & \text{, kai} \quad y < 0. \end{cases}$$

Iš čia:



2.22 pav. Atsitiktinio dydžio kvadratinis transformavimas.

$$w(y)=\frac{1}{2\sqrt{a\,y}}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y}{2a\sigma^2}\right)+\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y}{2a\sigma^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi a y}}\exp\left(-\frac{y}{2a\sigma^2}\right),\ \text{kai } y\geq 0;$$

$w(y)$=0 , kai y<0.

Šių skaičiavimų rezultatų iliustracija pateikta 2.22 pav.

Vadinasi, tolydžiojo atsitiktinio dydžio Y=φ(X) skaitines charakteristikas galime apskaičiuoti dviem būdais. Pavyzdžiui, atsitiktinio dydžio Y=φ(X) vidurkį ir dispersiją galime išreikšti šitaip:

$$m_y=M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} y\,w(y)dy\ ;$$

$$\sigma_y=D(Y)=M(\overset{\circ}{Y}{}^2)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(y-m_y\right)^2 w(y)dy\ ,$$

arba

$$m_y=M(\varphi(X))=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,w(x)dx\ ;$$

$$\sigma_y=D(\varphi(X))=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi(x)-m_y\right)^2 w(x)dx\ .$$

Antrasis būdas dažniausiai yra paprastesnis, nes nereikia papildomai apskaičiuoti tikimybės tankio $w(y)$.

2.10. Skirstinių parametrai

Be vidurkio ir dispersijos skirstiniams apibūdinti vartojamos ir kitos skirstinų skaitinės charakteristikos: kvantiliai, moda, asimetrijos ir eksceso koeficientai , entropija ir t.t.

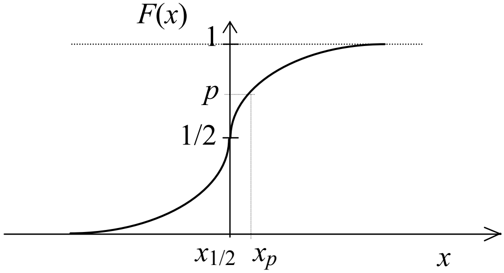
Kvantiliai.

Atsitiktinio dydžio x_p vertė, kuri tenkina lygybę (2.23 pav.)

$$F(x_p)=p; \tag{2.10.1}$$

vadinama p eilės ***kvantiliu***. Čia $F(x)$ – pasiskirstymo funkcija.

Kvantilis $x_{1/2}$, kai p=1/2, vadinamas ***mediana***.



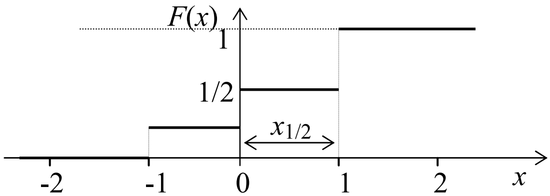
2.23 pav. Tolydžiojo atsitiktinio dydžio kvantilio x_p ir medianos $x_{1/2}$ apibūdinimas.

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio atveju gali būti, kad lygybę

$$F(x_p)=p$$

tenkina kelios x_p vertės. Tada kiekvieną tokią vertę vadiname kvantiliu.

Pvz.: tarkime, kad atsitiktinis dydis X gali įgyti tris vertes : x_1=-1, x_2=0 ir x_3=1 su atitinkamomis tikimybėmis: 1/4, 1/4, 1/2. 2.24 pav. pateikta šio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.



2.24 pav. Diskrečiojo atsitiktinio dydžio medianos apibūdinimas.

Kiekviena intervalo [0; 1) x vertė yra mediana, nes visame šiame intervale tenkinama lygybė

$$F(0\leq x_{1/2}<1) = 1/2. \qquad (2.10.2$$

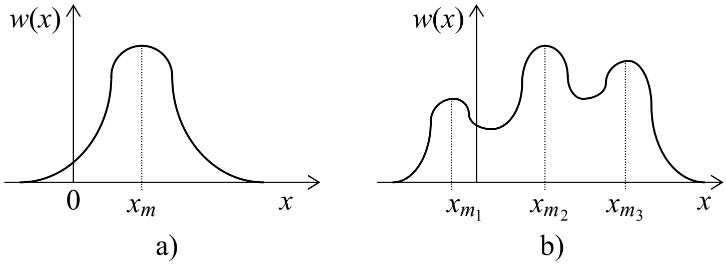
Kvantiliai $x_{1/4}$, $x_{3/4}$ vadinami ***kvartiliais***.

Kvantiliai $x_{0,1}$, $x_{0,2}$, …., $x_{0,9}$ vadinami ***deciliais***.

Kvantiliai $x_{0,01}$, $x_{0,02}$, ….,$x_{0,99}$ vadinami ***procentiliais***.

Moda.

Moda – tai tolydžiojo atsitiktinio dydžio vertė x_m , esant kuriai jo tikimybės tankis įgyja didžiausią vertę: $w(x_m)=w_{\max}(x)$. Pagal modų skaičių skiriama vienmodis, dvimodis ir daugiamodis skirstiniai, turintys vieną, dvi ir kelias modas (smailes) (2.25 pav.).



2.25 pav. Vienmodžio (a) ir daugiamodžio (b) skirstinių tikimybės tankiai.

Asimetrijos ir eksceso koeficientai.

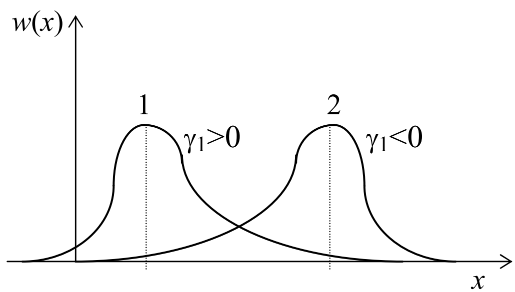
Visų simetriškų skirstinių nelyginiai centriniai momentai yra lygūs nuliui. Todėl tikslinga juos panaudoti skirstinių asimetrijai apibūdinti. Tuo tikslu asimetrijai išreikšti priimta vartoti trečiąjį centrinį momentą

$$\mu_3 = M\left[(x-m_1)^3\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m_1)^3 w(x)dx, \qquad (2.10.3)$$

kurį galime išreikšti per pradinius momentus:

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3, \qquad (2.10.4)$$

čia $m_i=M(X^i)$. Asimetrija aprašoma nedimensiniu koeficientu



2.26 pav. Nesimetriškieji tikimybės tankiai.

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \tag{2.10.5}$$

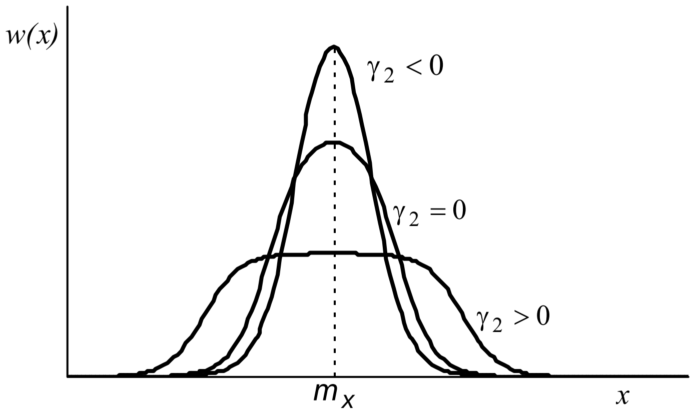
kuris vadinamas ***asimetrijos koeficientu***. 2.26 pav. pavaizduoti tolydžiųjų atsitiktinių dydžių tikimybės tankio grafikai: 2 kreivė turi neigiamą, o 1 kreivė – teigiamą asimetrijos koeficientą.

Ketvirtasis centrinis momentas $\mu_4 = M[(X - m_1)^4]$ vartojamas apibūdinti skirstinio viršūnės smailumą, t.y. apskaičiuoti eksceso koeficientą:

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \tag{2.10.6}$$

jis pasirinktas taip, kad normaliojo skirstinio atveju būtų lygus nuliui (normaliojo skirstinio $\mu_4 = 3\sigma^4$).

Jei eksceso koeficientas yra neigiamas, tai rodo, kad nagrinėjamojo atsitiktinio dydžio tikimybės tankio viršūnė yra smailesnė, negu normaliojo atsitiktinio dydžio, ir atvirkščiai (2.27 pav.).



2.27 pav. Tikimybės tankiai, kurie turi skirtingus eksceso koeficientus.

Vadinasi, įvertinant asimetrijos ir eksceso koeficientus, galime pasakyti, kiek nagrinėjamasis skirstinys yra artimas normaliajam skirstiniui.

Entropija.

Dabar aptarsime atsitiktinio dydžio skaitinę charakteristiką, apibūdinančią jo skirstinio neapibrėžtumą. Neapibrėžtumą nusako tik atsitiktinio dydžio tikimybės (tikimybės tankis); pačios atsitiktinio dydžio vertės čia neturi reikšmės. Būtinumas įvesti neapibrėžtumą kaip tam tikrą charakteristiką kyla dėl to, kad skirstiniai, turintys vienodus pirmuosius kelis momentus, gali turėti skirtingus neapibrėžtumus.

Aptarkime diskretųjį atsitiktinį dydį, turintį tolygųjį skirstinį: $p_i=1/n$, čia n-galimų verčių skaičius. Kuo didesnis n, t.y. kuo mažesnė tikimybė $p_i=1/n$, tuo didesnis yra neapibrėžtumas ir tuo pačiu didesnis informacijos kiekis yra gaunamas, kai įvykis įvyksta. Vadinasi, neapibrėžtumas ir informacijos kiekis yra vienodai apibrėžiami: jie nusakomi ta pačia charakteristika – ***entropija***.

$$H(X)=M(-\log_2 p)=-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i \, . \qquad (2.10.7)$$

Kai logaritmo pagrindas lygus 2, tai entropija išreiškiama bitais.

Entropija - tai vidutinis neapibrėžtumas (informacijos kiekis), tenkantis vienai atsitiktinio dydžio vertei (simboliui, ženklui).

Tolygiojo diskrečiojo skirstinio atveju

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i =-\log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i =\log n =-\log_2 p_i \, .$$

Čia būtina skirti šiuos du skirtingus klausimus.

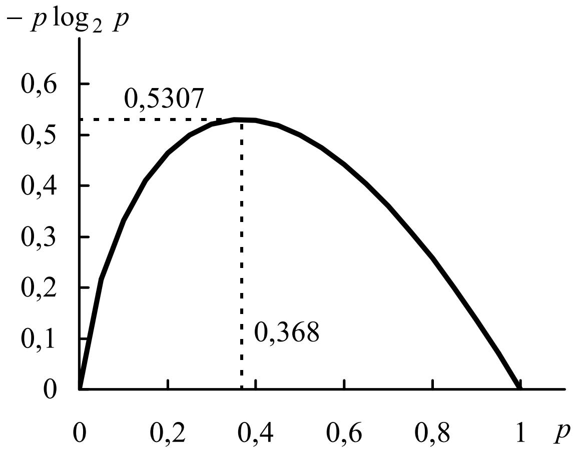
Pirmas: kokių tikimybių atsitiktinio dydžio vertės yra labiausiai neapibrėžtos? Kaip jau minėta, kuo mažesnės tikimybės, tuo didesnis neapibrėžtumas. Pvz., metant monetą, tikimybės, kad atsivers skaičius arba herbas (galimų verčių skaičius n=2), yra lygios p_i=1/2, t.y.

$$H(X)=-\log_2 p_i =-\log_2\frac{1}{2}=1 \quad \text{bitas}\, .$$

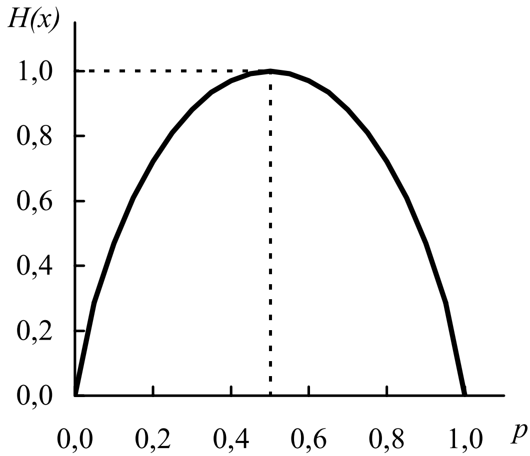
Metant simetrišką lošimo kauliuką (galimų verčių skaičius n=6), p_i=1/6, todėl

$$H(X)=-\log_2 p_i =-\log_2\frac{1}{6}=\log_2 6\approx 2{,}585 \quad \text{bito}\, .$$

Antras: kokių tikimybių atsitiktinio dydžio vertės turi didžiausią svorį entropijoje? Norint atsakyti į šį klausimą, reikia nagrinėti išraiškos ($-p\log p$) priklausomybę nuo p. Kaip matyti iš 2.28 pav., ir artimų vienetui, ir labai mažų tikimybių svoriai entropijoje yra labai maži, o didžiausią svorį entropijoje turi tos atsitiktinio dydžio vertės, kurių tikimybė p=1/e=0,368.



2.28 pav. Atsitiktinių dydžių tikimybių svoriai entropijoje.



2.29 pav. Atsitiktinio dydžio, įgyjančio dvi vertes
su tikimybėmis p ir q (p+q=1), entropijos priklausomybė nuo p.

Pateiksime dar vieną pavyzdį, rodantį, kaip keičiasi entropija atsitiktinio dydžio, galinčio įgyti tik dvi vertes x_1 ir x_2 atitinkamai su tikimybėmis p ir q=1–p. 2.29 pav. parodyta šio atsitiktinio dydžio entropijos

$$H(X) = -p\log_2 p - q\log_2 q = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$$

priklausomybė nuo p. Ši priklausomybė (2.29 pav.) rodo, kad didžiausia entropija (neapibrėžtumas) yra tada, kai atsitiktinių dydžių x_1 ir x_2 tikimybės yra lygios p=q=1/2.

Apskaičiuosime ir palyginsime binominio ir Puasono skirstinių entropijas, esant tam pačiam vidurkiui.

Binominio skirstinio atveju tikimybė, kad tam tikras įvykis iš n bandymų pasikartos k kartų, išreiškiamas formule

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

todėl entropija

$$H(x) = -\sum_{k=0}^{n} P_n(k)\log_2[P_n(k)] = -\sum_{k=0}^{n} P_n(k)\log_2\left[C_n^k p^k q^{n-k}\right] =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} P_n(k)\left[\log_2 C_n^k + k\log_2 p + (n-k)\log_2 q\right] = -\sum_{k=0}^{n} P_n(k)\log_2 C_n^k -$$

$$-\log_2 p\sum_{k=0}^{n} k\,P_n(k) - n\log_2 q\sum_{k=0}^{n} P_n(k) + \log_2 q\sum_{k=0}^{n} k\,P_n(k) \quad .$$

Kadangi, kai k=0 ir k=n, $C_n^k = 1$ t.y. $\log_2 C_n^0 = \log_2 C_n^n = 0$; be to,

$$\sum_{k=0}^{n} k\,P_n(k) = M(k) = np, \qquad \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1.$$

Tada

$$\begin{aligned} H(X) &= -np\log_2 p - n\log_2 q + np\log_2 q - \sum_{k=1}^{n-1} P_n(k)\log_2 C_n^k = \\ &= -n(p\log_2 p + q\log_2 q) - \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k p^k q^{n-k}\log_2 C_n^k . \end{aligned} \tag{2.10.8}$$

Puasono skirstinys aprašomas tikimybėmis

$$P(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ ...)\ ,$$

todėl šiuo atveju entropija

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{k=0}^{\infty} P(k)\log_2[P(k)] = -\sum_{k=0}^{\infty} P(k)\log_2\left[\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right] = \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} P(k)[k\log_2\lambda - \lambda\log_2 e - \log_2(k!)] = \\ &= -\log_2\lambda\sum_{k=0}^{\infty} k\,P(k) + \lambda\log_2 e\sum_{k=0}^{\infty} P(k) + \sum_{k=0}^{\infty} P(k)\log_2(k!) = \\ &= -\lambda\log_2\lambda + \lambda\log_2 e + \sum_{k=2}^{\infty} P(k)\log_2(k!) = \\ &= \lambda\log_2\left(\frac{e}{\lambda}\right) + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\log_2(k!), \end{aligned} \quad (2.10.9)$$

čia sumavimas nuo k=2, nes $\log_2(0!)=\log_2 1=0$ ir $\log_2(1!)= 0$.

Binominio, Puasono ir tolygiojo skirstinių entropijos palygintos 2.4 lentelėje.

2.4 lentelė. Binominio, Puasono ir tolygiojo skirstinių entropijų palyginimas.

Skirstinys	*Entropija, bitais*	*Bandymo sąlygos*
Tolygusis	2,585	n=6; p_i=1/6
Binominis	2,198	n=5; p=q=0,5; np=2,5 (k=0, 1, ..., 5; k turi 6 vertes)
Puasono	2,638	λ=2,5 (k=0, 1, 2, ...)_

Kaip matyti iš šios lentelės, binominio skirstinio, esant atsitiktinio dydžio *k* verčių skaičiui 6, t.y. tam pačiam skaičiui kaip ir tolygiojo skirstinio, entropija yra gerokai mažesnė, negu tolygiojo skirstinio. Jei turėtume $p\neq q$, tai binominio skirstinio entropija būtų dar mažesnė. Taip yra todėl, kad binominio skirstinio atveju atsitiktinio dydžio vertės, artimos vidurkiui, yra labiau tikimos, t.y. šiuo atveju neapibrėžtumas yra mažesnis. Tai, kad Puasono skirstinio entropija, esant duotoms sąlygoms (žr. 2.4 lentelę) yra didesnė už tolygiojo skirstinio entropiją (n=6), paaiškinama tuo, kad Puasono skirstinio atveju atsitiktinio dydžio vertės kinta nuo 0 iki ∞. Vadinasi, galime tvirtinti, kad entropija yra sistemos netvarkos matas.

Tolydinių atsitiktinių dydžių skirstinių entropija apibrėžiama panašiai:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} w(x) \log_2 [w(x)] dx \,. \qquad (2.10.10)$$

Kaip buvo aptarta anksčiau, įvairių kalbų abėcėlių raidžių statistinis dažnis (tikimybė) kinta labai plačiose ribose. Abėcėlė turėtų didžiausią entropiją, jei kiekvienos raidės statistinis dažnis būtų vienodas.

2.5 lentelėje pateiktos lietuvių, anglų ir rusų kalbų abėcėlių entropijos.

2.5 lentelė. Lietuvių, anglų ir rusų kalbų abėcėlių entropijos.

Abėcėlė	Raidžių keikis N	Didžiausioji entropija, $H_{\max} = \log_2 N$, bitais	Entropija $H = -\sum_{i=1}^{N} \nu_i \log_2 \nu_i$
Lietuvių	32	5	4,31
Anglų	27	4,75	4,03
Rusų	32	5	4,35

2.11. Charakteringoji funkcija

Dabar aptarsime dar vieną iš pagrindinių atsitiktinių dydžių charakteristikų, savo reikšme prilygstančia skirstiniui, t.y. apibūdinsime charakteringąją funkciją ir išnagrinėsime jos savybes.

Atsitiktinio dydžio X charakteringąja funkcija vadiname funkcijos e^{juX} vidurkį:

$$\Theta(u) = M\left(e^{juX}\right). \qquad (2.11.1)$$

Čia u – realusis dydis, j – menamasis vienetas.

Diskrečiojo atsitiktinio dydžio X, kurio vertės x_i įgyjamos su tikimybėmis p_i , charakteringoji funkcija

$$\Theta(u) = M\left(\mathrm{e}^{juX}\right) = \sum_i p_i e^{jux_i} \ . \qquad (2.11.2)$$

Kadangi funkcijos modulis

$$\left|\mathrm{e}^{j\alpha}\right| = \left|\cos\alpha + j\sin\alpha\right| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$$

ir $\sum_i p_i = 1$, vadinasi, eilutė $\sum_i p_i e^{jux_i}$ tolygiai ir absoliučiai konverguoja. Todėl charakteringoji funkcija $\Theta(u)$ yra kiekvienai realiai u vertei tolydinė, nes ji yra tolygiai konverguojančios tolydinių funkcijų eilutės suma.

Pvz. Tarkime, kad atsitiktinis dydis X gali įgyti vertes x_1=-1 ir x_2=1 su tikimybėmis p_1=p_2=1/2. Apskaičiuosime šio atsitiktinio dydžio charakteringąją funkciją:

$$\Theta(u) = \sum_{i=1}^{2} p_i e^{jux_i} = 0{,}5\,\mathrm{e}^{-ju} + 0{,}5\,\mathrm{e}^{ju} =$$
$$= 0{,}5(\cos u - j\sin u) + 0{,}5(\cos u + j\sin u) = \cos u \quad .$$

Jei X yra tolydusis atsitiktinis dydis su tikimybės tankiu $w(x)$, tai jo charakteringoji funkcija išreiškiama lygybe:

$$\Theta(u) = M\left(\mathrm{e}^{juX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{jux} w(x)dx \ .$$

Šiuo atveju

$$\left|\Theta(u)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{jux} w(x)dx\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{e}^{jux} w(x)\right| dx = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1 , \qquad (2.11.3)$$

nes $|\mathrm{e}^{jux}|$=1. Todėl charakteringoji funkcija gali būti surasta bet kokiam atsitiktiniam dydžiui.

Pasinaudodami delta funkcijos išraiška kompleksiniu pavidalu

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{juy} dy , \qquad (2.11.4)$$

surasime tikimybės tankio išraišką per charakteringąją funkciją. Užrašome tolydžiojo atsitiktinio dydžio charakteringąją funkciją:

$$\Theta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{jux} w(x) dx \ .$$

Padauginame abi lygybės puses iš e^{jux_1} ir integruojame pagal u:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(u) \mathrm{e}^{-jux_1} du = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{jux} w(x) \mathrm{e}^{-jux_1} dx du =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ju(x-x_1)} du \right] w(x) dx =$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_1) w(x) dx = 2\pi w(x_1) .$$

Atlikdami veiksmus, čia pasinaudojome (2.11.4) lygybe. Iš pastarosios lygybės gauname:

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(u) \mathrm{e}^{-jux} du \ , \qquad (2.11.5)$$

t.y. gavome, kad atsitiktinio dydžio tikimybės tankis (2.11.5) ir charakteringoji funkcija (2.11.3) yra susieti Furjė transformacijos formulėmis:

$$\boxed{g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{jxy} dx \, , \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \mathrm{e}^{-jxy} dy \qquad (2.11.6)}$$

Vadinasi, žinant atsitiktinio dydžio tikimybės tankį, visados galime surasti ir jo charakteringąją funkciją, ir atvirkščiai, t.y. charakteringoji funkcija visiškai aprašo atsitiktinį dydį. Iš (2.11.3) matyti, kad dydžio u matavimo vienetas yra $[x]^{-1}$, t.y sutampa su tikimybės tankio matavimo vienetu, o pati charakteringoji funkcija yra nedimensinis dydis: realusis arba menamasis skaičius.

Dabar aptarsime kai kurias charakteringosios funkcijos savybes.

1) Kai u=0,

$$\Theta(u) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) \mathrm{e}^{j0x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) dx = 1, \tag{2.11.7}$$

ši lygybė dar vadinama ***normavimo sąlyga***.

2) Iš lygybių

$$\Theta(u) = M\left(\mathrm{e}^{juX}\right) = M(\cos uX) + jM(\sin uX)$$

ir

$$\Theta(-u) = M\left(\mathrm{e}^{-juX}\right) = M(\cos uX) - jM(\sin uX) = \Theta^*(u)$$

matyti, kad $\Theta(u)$ ir $\Theta(-u)$ yra kompleksiniai jungtiniai skaičiai.

3) Jei atsitiktinio dydžio skirstinys yra simetriškas ($w(x)=w(-x)$), tai

$$\begin{aligned} \Theta(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{jux} w(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos ux\, w(x) dx + j \int_{-\infty}^{\infty} \sin ux\, w(x) dx = \\ &= 2\int_{0}^{\infty} \cos ux\, w(x) dx \quad , \end{aligned} \tag{2.11.8}$$

t.y. charakteringoji funkcija yra reali ir lyginė dydžio u funkcija.

4) Jei $\Theta_x(u)$ yra atsitiktinio dydžio X charakteringoji funkcija, tai atsitiktinio dydžio $Y=aX+b$ charakteringoji funkcija lygi

$$\begin{aligned} \Theta_y(u) &= M\left(\mathrm{e}^{ju(aX+b)}\right) = M\left(\mathrm{e}^{jauX}\mathrm{e}^{jbu}\right) = \\ &= M\left(\mathrm{e}^{jauX}\right) M\left(\mathrm{e}^{jbu}\right) = \Theta_x(au)\mathrm{e}^{jbu} . \end{aligned} \tag{2.11.9}$$

5) Vienas Iš naudingesnių charakteringosios funkcijos pritaikymų yra momentų skaičiavimo supaprastinimas. Jei egzistuoja atsitiktinio dydžio X k-tos eilės pradiniai momentai, tai charakteringoji funkcija turi k-tos eilės išvestines, t.y.

$$\frac{\partial \Theta(u)}{\partial u} = j \int_{-\infty}^{\infty} x\, w(x) \mathrm{e}^{jux} dx \ :;$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(u)}{\partial u^2} = j^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, w(x) \mathrm{e}^{jux} dx \ :;$$

. . . .

$$\frac{\partial^k \Theta(u)}{\partial u^k} = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, w(x) \mathrm{e}^{jux} dx\,.$$

Paėmę u=0, gauname

$$\left.\frac{\partial^k \Theta(u)}{\partial u^k}\right|_{u=0} = j^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, w(x) dx = j^k M\left(X^k\right),$$

iš čia

$$\boxed{M\left(X^k\right) = \frac{1}{j^k} \left.\frac{\partial^k \Theta(u)}{\partial u^k}\right|_{u=0}.} \qquad (2.11.10)$$

Visiškai panašiai galime užrašyti ir centruotiesiems atsitiktiniams dydžiams:

$$\boxed{M\left(\overset{\circ}{X}{}^k\right) = M\left[\left(X - m_x\right)^k\right] = \frac{1}{j^k} \left.\frac{\partial^k \Theta(u)}{\partial u^k}\right|_{u=0}.} \qquad (2.11.11)$$

Lygybės (2.11.10) ir (2.11.11) galioja ir diskrečiojo atsitiktinio dydžio atveju.

6) Jei egzistuoja bet kurios eilės pradiniai ar centriniai momentai, tai charakteringąją funkciją galime išreikšti šiais momentais Makloreno eilutės pavidalu.

Čia pasinaudosime funkcijos e^x skleidiniu eilute

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

Tada

$$\Theta(u) = M\left(\mathrm{e}^{juX}\right) = M\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(juX)^k}{k!}\right] = M\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k!} (ju)^k\right].$$

Iš čia

$$\boxed{\Theta(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M\left(X^k\right)}{k!} (ju)^k\,.} \qquad (2.11.12)$$

Visiškai analogiškai galime užrašyti centruotajam atsitiktiniam dydžiui:

$$\Theta(u)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M(\overset{\circ}{X}{}^{k})}{k!}(ju)^{k}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M\left[(X-m_x)^{k}\right]}{k!}(ju)^{k} \qquad (2.11.13)$$

Išraiškos (2.11.12) ir (2.11.13) galioja tiek diskretiesiems, tiek ir tolydiesiems atsitiktiniams dydžiams.

Kadangi pagal formules (2.11.10) ir (2.11.11), žinant atsitiktinio dydžio charakteringąją funkciją, lengvai surandame bet kurios eilės momentus, surasime dažniausiai naudojamų skirstinių charakteringąsias funkcijas.

a) Atsitiktinis dydis X ***tolygiai pasiskirstęs*** intervale $[a, b]$, t.y. $w(x)=1/(b-a)$, o už šio intervalo ribų $w(x)=0$. Šio dydžio charakteringoji funkcija

$$\Theta(u)=\int_{-\infty}^{\infty}w(x)\mathrm{e}^{jux}dx=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}\mathrm{e}^{jux}dx=\frac{1}{b-a}\frac{\mathrm{e}^{jub}-\mathrm{e}^{jua}}{ju}. \qquad (2.11.14)$$

b) ***Binominio skirstinio*** atveju charakteringoji funkcija

$$\Theta(u)=M\left(\mathrm{e}^{juk}\right)=\sum_{k=0}^{n}P_n(k)\mathrm{e}^{juk}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}\mathrm{e}^{juk}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(p\mathrm{e}^{ju}\right)^k q^{n-k}=\left(p\mathrm{e}^{ju}+q\right)^n. \qquad (2.11.15)$$

c) ***Puasono skirstinio*** atveju charakteringoji funkcija

$$\Theta(u)=\sum_{k=0}^{n}P_n(k)\mathrm{e}^{juk}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^{\mathrm{k}}}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{juk}=$$
$$=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\lambda\mathrm{e}^{ju}\right)^{\mathrm{k}}}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{ju}}=\mathrm{e}^{\lambda\left(\mathrm{e}^{ju}-1\right)}. \qquad (2.11.16)$$

d) Apskaičiuosime tolydžiojo atsitiktinio dydžio, turinčio ***normalųjį skirstinį***, charakteringąją funkciją:

$$\Theta(u)=\int_{-\infty}^{\infty}w(x)\mathrm{e}^{jux}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{jux}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{jux-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Pertvarkome laipsnio rodiklį:

$$jux-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}=\left(\frac{ju\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\frac{ju\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2+ju(x-m)+jum-\frac{(x-m)^2}{\sigma\sqrt{2}}=$$

$$=\left(jum-\frac{1}{2}u^2\sigma^2\right)-\left[\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}-\frac{ju\sigma}{\sqrt{2}}\right]^2=\left(jum-\frac{1}{2}u^2\sigma^2\right)-\frac{\left[(x-m)-ju\sigma^2\right]^2}{2\sigma^2}.$$

Įrašę šį rodiklį į charakteringosios funkcijos išraišką, turime

$$\Theta(u)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{jum-\frac{1}{2}u^2\sigma^2}e^{-\frac{\left[(x-m)-ju\sigma^2\right]^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Pakeitę $(x-m)-ju\sigma^2=y$, gauname

$$\Theta(u)=e^{jum-\frac{1}{2}u^2\sigma^2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=e^{jum-\frac{1}{2}u^2\sigma^2}. \tag{2.11.17}$$

Kai m=0 ir σ=1, turime

$$\Theta(u)=e^{-\frac{u^2}{2}}. \tag{2.11.18}$$

2.12. Kumuliantai

Kai kuriais atvejais atsitiktinį dydį patogu apibūdinti ne momentais, o kumuliantais. Kumuliantus gauname skleisdami Makloreno eilute charakteringosios funkcijos logaritmą $\ln\Theta(u)$. Pasinaudoję funkcijos $\ln(1+z)$ skleidiniu Makloreno eilute

$$\ln(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+...$$

ir pakeitę 1+z į $\Theta(u)$, galime užrašyti:

$$\ln\Theta(u)=[\Theta(u)-1]-\frac{1}{2}[\Theta(u)-1]^2+\frac{1}{3}[\Theta(u)-1]^3-...,$$

Kadangi pagal formulę (2.11.12) charakteringoji funkcija

$$\Theta(u) = M\left(e^{juX}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M\left(X^k\right)}{k!} (ju)^k ,$$

todėl

$$\ln \Theta(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M\left(X^k\right)}{k!} (ju)^k - \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M\left(X^k\right)}{k!} (ju)^k\right]^2 + \\ + \frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M\left(X^k\right)}{k!} (ju)^k\right]^3 - \dots \quad . \tag{2.12.1}$$

Dešinė šios išraiškos pusė yra kintamojo (ju) daugianaris. Atlikę šio daugianario pertvarkymus, jį galime užrašyti šitaip:

$$\ln \Theta(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k}{k!} (ju)^k , \tag{2.12.2}$$

čia koeficientai χ_k vadinami ***kumuliantais***. Iš išraiškų (2.12.1) ir (2.12.2) palyginimo gauname:

$$\begin{aligned} &\chi_1 = M(X) && - \text{vidurkis;} \\ &\chi_2 = M\left(X^2\right) - [M(X)]^2 = D(X) = \sigma_x^2 && - \text{dispersija;} \\ &\chi_3 = M\left(X^3\right) - 3M(X)M\left(X^2\right) + 2[M(X)]^3 = M(\mathring{X}^3) = \mu^3 ; \\ &\chi_4 = M\left(X^4\right) - 3\left[M\left(X^2\right)\right]^2 - 4M(X)M\left(X^3\right) + \\ &+ 12M\left(X^2\right)[M(X)]^2 - 6[M(X)]^4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 ; \end{aligned} \tag{2.12.3}$$

čia k – k-tosios eilės centriniai momentai. Matome, kad pradedant χ_4, kumuliantai skiriasi nuo centrinių momentų.

Pradinius momentus galime išreikšti kumuliantais:

$$\begin{aligned} &m_1 = M(X) = \chi_1 ; \\ &m_2 = M\left(X^2\right) = \chi_2 + \chi_1^2 ; \\ &m_3 = M\left(X^3\right) = \chi_3 + 3\chi_1\chi_2 + \chi_1^3 ; \\ &m_4 = M\left(X^4\right) = \chi_4 + 3\chi_2^2 + 4\chi_1\chi_3 + 6\chi_1^2\chi_2 + \chi_1^4 . \end{aligned} \tag{2.12.4}$$

Taip pat nesunku parodyti, kad atsitiktinio dydžio skirstinio asimetrijos ir eksceso koeficientai gali būti išreikšti kumuliantais taip:

$$\gamma_1 = \chi_3 \big/ \chi_2^{3/2} \; ; \tag{2.12.5}$$

$$\gamma_2 = \chi_3 \big/ \chi_2^{2} \; . \tag{2.12.6}$$

2.13. Generuojančioji funkcija

Tiriant diskrečiuosius atsitiktinius dydžius, kurie įgyja tik sveikąsias vertes k=0, 1, 2, ..., patogiau vietoje charakteringųjų funkcijų vartoti generuojančiąsias funkcijas. Tarkime, kad X yra atsitiktinis dydis ir tikimybė, kad atsitiktinis dydis įgys vertę k, lygi p_k.

Atsitiktinio dydžio X, įgyjančio sveikąsias vertes, generuojančioji funkcija $\psi(s)$ išreiškiama lygybe

$$\psi(s) = M\left(s^X\right) = \sum_k p_k s^k \; , \tag{2.13.1}$$

čia $-1 \le s \le 1$.

Kai s=1, tai $\psi(1) = \sum_k p_k = 1$

t.y. lygybės (2.13.1) dešinės pusės eilutė intervale $|s|\le 1$ absoliučiai ir tolygiai konverguoja. Todėl generuojančioji funkcija yra tolydinė. Ji vienareikšmiškai nusako dydžio X tikimybinį skirstinį p_k, nes $\psi(s)$ galima tik vieninteliu būdu išskleisti nurodyto pavidalo laipsnine eilute.

Surasime generuojančiosios funkcijos išraiškas binominio ir Puasono skirstinių atvejais:

$$\psi(s) = \sum_{k=0}^{n} P(k) s^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} s^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (ps)^k q^{n-k} = (ps+q)^n , \tag{2.13.2}$$

$$\psi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k) s^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} s^k = \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda s} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda s} = \mathrm{e}^{-\lambda(1-s)} . \tag{2.13.3}$$

Jei egzistuoja atsitiktinio dydžio X l-asis momentas, tai jį galima išreikšti generuojančiosios funkcijos išvestinėmis pagal s taške s=1.

Apskaičiuojame:

$$\psi'(s) = \sum_k k p_k s^{k-1} ,$$

$$\psi''(s) = \sum_k k(k-1) p_k s^{k-2} , \qquad (2.13.4)$$

todėl, kai s=1,

$$\psi'(1) = \sum_k k p_k = M(k)$$

$$\psi''(1) = \sum_k k(k-1) p_k = \sum_k \left(k^2 - k\right) p_k = M\left(k^2\right) - M(k) . \qquad (2.13.5)$$

Iš čia

$$M\left(k^2\right) = \psi''(1) + \psi'(1) , \qquad (2.13.6)$$

ir dispersija

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= M\left(k^2\right) - [M(k)]^2 = \\ &= \psi''(1) + \psi'(1) - [\psi'(1)]^2 = \psi''(1) + \psi'(1)[1 - \psi'(1)] . \end{aligned} \qquad (2.13.7)$$

2.14. Atsitiktinių skaičių gavimas

Paprasčiausi atsitiktinių skaičių generatoriai

Įrenginiai ar priemonės, kuriomis gauname atsitiktinius skaičius, vadinami atsitiktinių skaičių generatoriais. Dažniausiai skiriamos trys šitokių generatorių rūšys: urnos, kauliukai, ruletės.

Urnos. Į urną (dėžę) sudėkime dešimt vienodų rutuliukų, pažymėtų skaitmenimis nuo 0 iki 9. Atsitiktinai ištraukiame vieną rutulį. Tarkime, kad tai buvo rutulys, pažymėtas skaičiumi 4. Užrašykime šį skaičių ir grąžinkime rutulį į urną. Rutulius gerai išmaišę ir vėl ištraukiame vieną. Tarkime, kad tai buvo rutulys, pažymėtas skaičiumi 1. Užrašykime šį skaičių ir vėl grąžinkime rutulį į urną, gerai išmaišykime juos ir vėl ištraukime vieną. Taip atlikdami veiksmus, gausime netaisyklingą skaičių seką, pavyzdžiui, šitokią:

4, 1, 0, 5, 1, 4, 3, 7, 4, 0, 6, 4, 1, 0, 3, 7, 5, 7, 1, 8, ...

Turėdami šiuos atsitiktinius skaičius, galime sudaryti tam tikrus jų rinkinius. Pavyzdžiui, mums reikia keturženklių atsitiktinių skaičių. Šiuo atveju užtenka tik sugrupuoti iš eilės po keturis anksčiau gautus atsitiktinius skaičius:

4105, 1437, 4064, 1037, 5718, ...

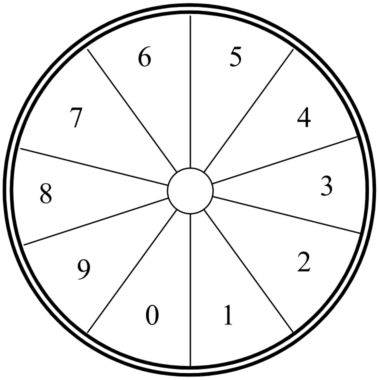
Tam tikras urnos atvejis yra ir lototronas, naudojamas televizijos sportinių lošimų laidose.

Kauliukai. Vienas iš paprasčiausių atsitiktinių skaičių generatorių yra kauliukai, jų pavyzdžiais gali būti lošimo kauliukas, moneta ir pan., su atitinkamai surašytais skaičiais ant sienelių. Tarkime, kad turime lošimo kauliuką, kurio sienelės pažymėtos skaitmenimis 0, 1, 2, 3, 4, o šeštoji – uždažyta; be to, turime monetą, kurioje skaičius pažymėtas "5", o herbas – "0". Mesdami kartu ir kauliuką, ir monetą, kiekvieną kartą suskaičiuokime ir užrašykime iškritusių taškų skaičių (žr. 2.6 lentelę). Jei kauliukas atsiverčia uždažytąja sienele, tai toks metimas neužskaitomas. Šitokie generatoriai taip pat leidžia sudaryti atsitiktinių skaičių seką, turinčią visus skaitmenis nuo 0 iki 9, iš kurios toliau nesunku sudaryti bet kuriuos kitus rinkinius.

2.6 lentelė. Lošimo kauliuko ir monetos atsivertusių skaičių suma.

Kauliuko sienelės skaičius	0		1		2		3		4	
Monetos sienelės skaičius	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
Skaičių suma	0	5	1	6	2	7	3	8	4	9

Ruletės. Ruletę taip pat galime panaudoti atsitiktinių skaičių gavimui. Ją sudaro skritulys, padalytas į tam tikrą skaičių vienodų sektorių, kurių kiekvienas pažymėtas tam tikru skaičiumi, ir besisukanti rodyklė (arba riedantis rutulys). Jei skritulį padaliname į 10 lygių sektorių ir juos pažymime skaitmenimis nuo 0 iki 9 (2.30 pav.), tai gausime analogišką urnoms ir kauliukams atsitiktinių skaičių generatorių. Stumtelėję ruletės rodyklę ir palaukę, kol ji sustos atsitiktinai ties kuriuo nors sektoriumi, užrašome jo numerį (skaičių) ir, taip vėl kartodami bandymą, gausime atsitiktinių skaičių seką.



2.30 pav. Ruletė.

Atsitiktinių skaičių lentelės.

Atsitiktinių skaičių lentelės pavyzdys pateiktas 2.7 lentelėje. Šioje lentelėje pateikti 300 keturženklių atsitiktinių skaičių. Ji gali būti sudaryta

2.7 lentelė. Atsitiktinių keturženklių skaičių lentelė.

0655	8453	4467	3384	5320	0709	2523	9224	6271	2607
5255	5161	4889	7429	4647	4331	0010	8144	8638	0307
6314	8951	2335	0174	6993	6157	0063	6006	1736	3775
3157	9764	4862	5848	6919	3135	2837	9910	7791	8941
9052	9565	4635	0653	2254	5704	8865	2627	7959	3682
4105	4105	3187	4312	1596	9403	6859	7802	3180	4499
1437	2851	6727	5580	0368	4746	0604	7956	2304	8417
4064	4171	7013	4631	8288	4785	6560	8851	9928	2439
1037	5765	1562	9869	0756	5761	6346	5392	2986	2018
5718	8791	0754	2222	2013	0830	0927	0466	7526	6610
5127	2302	1392	4413	9651	8922	1023	6265	7877	4733
9401	2423	6301	2611	0656	0400	5998	1863	9182	9032
4064	5228	4153	2544	4125	9854	6380	6650	8567	5045
5458	1402	9849	9886	5579	4171	9844	0159	2260	1314
2461	3497	9785	5678	4471	2873	3724	8900	7852	5843

4320	4558	2545	4436	9265	6675	7989	5592	3759	3431
3466	8269	9926	7429	7516	1126	6345	4576	5059	7746
9313	7489	2464	2575	9284	1787	2391	4245	5618	0146
5179	8081	3361	0109	7730	6256	1303	6503	4081	4754
3010	5081	3300	9979	1970	6279	6307	7935	4977	0501
9599	9828	8740	6666	6692	5590	2455	3963	6463	1609
4242	3961	6247	4911	7264	0247	0583	7679	7942	2482
3585	9123	5014	6328	9659	1863	0532	6313	3199	7619
5950	3384	0276	4503	3333	8967	3382	3016	0639	2007
8462	3145	6582	8605	7300	6298	6673	6406	5951	7427
0456	0944	3058	2545	3756	2436	2408	4477	5707	5441
0672	1281	8697	5409	0653	5519	9720	0111	4745	7979
5163	9690	0413	3043	1014	0228	5460	2835	3294	3674
4995	9115	5273	1293	7894	9050	1378	2220	3756	9795
6751	6447	4991	6458	9307	3371	3243	2958	4738	3996

vienu iš anksčiau aprašytų būdų, panaudojant atsitiktinių skaičių generatorius. Kaip matyti, lentelėje skaičiai išsidėstę atsitiktine tvarka: žinant vieną skaičių, nieko negalime pasakyti apie tai, koks bus sekantis skaičius, tačiau atsitiktinumas turi savo dėsningumus – statistinius. Jei suskaičiuosime, kiek kartų šioje lentelėje kartojasi tam tikras skaitmuo, tai gausime šiuos duomenis:

Skaitmuo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pasikartojimų skaičius N_i	118	110	114	125	135	135	132	116	93	122
Statistinis dažnis $\nu_i = N_i / N$	0,099	0,090	0,095	0,104	0,113	0,113	0,110	0,097	0,078	0,102

Iš šių duomenų matyti, kad skaitmenų pasirodymo statistinis dažnis ν_i yra artimas šio įvykio tikimybei p_i=0,1, nes visų skaitmenų kiekis N yra pakankami didelis (šiuo atveju N=1200).

Žinoma lentelė, kurioje yra 1000000 atsitiktinių skaičių, kurių skirstinys:

X:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i:	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Sudaryti geras atsitiktinių skaičių lenteles yra gana sudėtingas uždavinys. Jos labai kruopščiai tikrinamos pagal tam tikrus testus.

Kompiuterinis atsitiktinių skaičių su tolygiuoju skirstiniu gavimas.

Naudojant kompiuterį, dažniausiai sudaromi atsitiktiniai skaičiai, kurie tenkina tolygųjį skirstinį, o iš jo, taikant tam tikras taisykles, gaunami kiti skirstiniai. Kompiuteriu gauti atsitiktiniai skaičiai vadinami pseudoatsitiktiniais skaičiais, nes juos galima pakartoti, tačiau jie tenkina atsitiktinumo kriterijus. Tokie skaičiai labai patogūs tada, kai reikia patikrinti sukurtas programas.

Daugelyje kompiuterinių atsitiktinių skaičių generatorių sudarytoje atsitiktinių skaičių sekoje kiekvienas atsitiktinis skaičius panaudojamas sekančio atsitiktinio skaičiaus gavimui pagal tam tikrą algoritmą (taisyklę). Labiausiai paplitęs yra atsitiktinių skaičių generatorius, kurio pagrindą sudaro palyginimo ir atėmimo veiksmai. Jei duotas pradinis skaičius x_0, tai kiekvienas sekantis sekos skaičius apskaičiuojamas pagal šią taisyklę:

$$x_n = (ax_{n-1} + c)\operatorname{mod} m\ , \qquad (2.14.1)$$

čia a, c, m – natūralieji skaičiai. Žymėjimas

$$y=z \operatorname{mod} m$$

reiškia, kad iš z atimamas m tol, kol gauname $0 \le y \le m$; pvz., 515mod(100)=15. Kadangi m yra didžiausias sveikas skaičius, kurį galime gauti pagal formulę (2.14.1), todėl didžiausias galimas nepasikartojančių skaičių periodas lygus m.

Tinkamai parinkę x_0, a, c ir m, galime gauti atsitiktinių skaičių seką, kurioje bus visi sveiki skaičiai nuo 0 iki $m-1$. Daugelio šiuolaikinių kompiuterių atsitiktinių skaičių generavimo periodas m yra labai didelis, t.y. dažnai viršija praktinius poreikius. Kadangi dažniausiai reikia atsitiktinių skaičių su tolygiuoju skirstiniu intervale [0, 1], todėl kompiuteriniai generatoriai pateikia skaičius

$$u_n = x_n / m \ ,$$

kurie visados yra intervale [0, 1]. Čia pateikto metodo pranašumas – didelė atsitiktinių skaičių sekos apskaičiavimo sparta.

Kai kuriais atvejais kompiuteriuose kaip atsitiktinių skaičių generatoriai naudojami elektroninių elementų triukšmų šaltiniai. Tačiau tokie generatoriai nepatogūs tada, kai reikia patikrinti skaičiavimus, nes neįmanoma pakartoti šių atsitiktinių skaičių, o juos lygiagrečiai užrašant neefektyviai panaudojama kompiuterio atmintis.

Diskrečiųjų atsitiktinių skaičių su skirtingais skirstiniais gavimas.

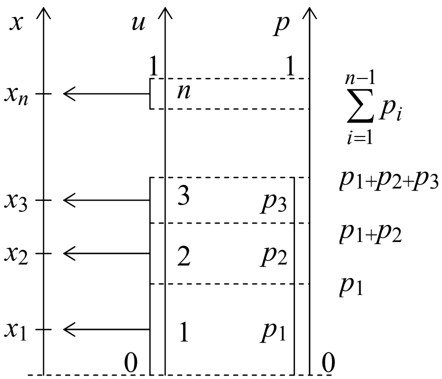
Skaičiavimuose dažniausiai reikia turėti atsitiktinius skaičius, tenkinančius įvairius tikimybinius skirstinius. Čia ir toliau visus likusius skirstinius gausime, panaudodami tolygųjį skirstinį, kurio atsitiktiniai skaičiai u_j yra intervale [0, 1].

Tarkime, kad reikia gauti atsitiktinius skaičius X, tenkinančius šį skirstinį:

X:	x_1	x_2	x_3		$x_{n\text{-}1}$	x_n
p_i:	p_1	p_2	p_3		$p_{n\text{-}1}$	p_n

Paimkime atsitiktinį dydį u, turintį tolygųjį skirstinį intervale $0 \le u \le 1$; suskaidykime šį vienetinį intervalą į n intervalų, kurio kiekvieno ilgis lygus atitinkamai tikimybei $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ (2.31 pav.). Gautus naujus intervalus sunumeruokime nuo 1 iki n. Bandymas atliekamas tokiu būdu: generuojamas atsitiktinis skaičius u_j iš intervalo [0, 1]; jei skaičius u_j patenka, pavyzdžiui, į padalinimo intervalą i=3, tai atsitiktiniam dydžiui x_i priskiriame skaičių x_3 ir t.t. Kuo didesnė yra tam tikro skaičiaus x_i pasirodymo tikimybė p_i, tuo didesnis yra i-tojo intervalo ilgis, tuo dažniau atsitiktinis dydis u_j pateks į šį intervalą, t.y. tuo dažniau kartosis ir atsitiktinis dydis x_i.

Pavyzdžiui, reikia gauti atsitiktinį dydį, įgyjantį vertę x_1=0 su tikimybe p ir vertę x_2=1 su tikimybe q=1–p, t.y. tenkinantį binominį skirstinį. Kai atsitiktinio dydžio u, turinčio tolygųjį skirstinį intervale [0, 1], generuojamos vertės $0 \le u_j < p$, X priskiriame vertę x_1=0, o kai $p \le u_j \le 1$, X priskiriame vertę x_2=1.



2.31 pav. Diskrečiųjų atsitiktinių skaičių, turinčių tam tikrą nurodytą tikimybinį skirstinį, gavimo iliustracija.

Tolydžiųjų atsitiktinių dydžių su skirtingais skirstiniais gavimas. Tarkime, kad reikia gauti atsitiktinius skaičius ξ, pasiskirsčiusius intervale $[a, b]$, kurių tikimybės tankis $w(x)$. Įrodysime, kad atsitiktinis dydis ξ turės tikimybės tankį $w(x)$, jei juos apskaičiuosime iš šios lygties:

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} w(x)dx = u, \tag{2.14.2}$$

čia atsitiktinis dydis u turi tolygųjį skirstinį intervale $[0, 1]$, t.y. jo tikimybės tankis $w(u)=1$, o pasiskirstymo funkcija

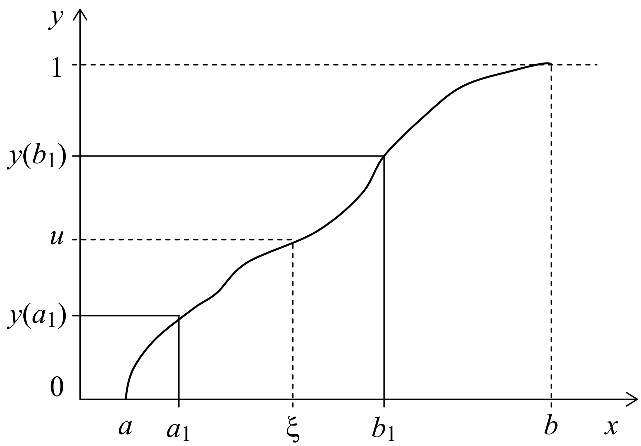
$$F(u) = \int_0^u w(u')du' = u \ .$$

Įrodymui aptarsime funkciją $y = \int_a^x w(x')dx'$.

Pagal tikimybės tankio savybes turime, kad

$$y(a)=0, \quad y(b)=1, \quad \text{ir} \quad \frac{dy}{dx} = w(x) > 0,$$

t.y. funkcija $y(x)$ monotoniškai didėja nuo 0 iki 1, kai x kinta nuo a iki b (2.32 pav.). Todėl bet kuri tiesė $y=u$, kur $0<u<1$, kirs kreivę $y=f(x)$ tiktai



2.32 pav. Tolydžiųjų atsitiktinių dydžių, turinčių tam tikrą tikimybės tankį, gavimo iliustracija.

vieninteléje vietoje, kurios vertė abscisių ašyje lygi x=ξ. Vadinasi, lygtis (2.14.2) turi tik vienintelį sprendinį.

Dabar parinkime bet kurį x kitimo intervalą (a_1, b_1), esantį intervalo [a, b] viduje (2.32 pav.). Šio intervalo taškus $a_1<x<b_1$ atitiks kreivės $y=y(x)$ ordinatės, tenkinančios nelygybę:

$$y(a_1) < y < y(b_1) \, ,$$

t.y. jei ξ priklauso intervalui $a_1<\xi<b_1$, tai u priklauso intervalui $y(a_1)<u<y(b_1)$, ir atvirkščiai. Vadinasi,

$$P\{a_1<\xi<b_1\}=P\{y(a_1)<u<y(b_1)\}. \qquad (2.14.3)$$

Kadangi u yra tolygiai pasiskirstęs intervale [0, 1], tai

$$P\{y(a_1) < u < y(b_1)\} = y(b_1) - y(a_1) = \int_{a_1}^{b_1} w(x)dx \, . \qquad (2.14.4)$$

Todėl

$$P\{a_1 < \xi < b_1\} = \int_{a_1}^{b_1} w(x)dx \, , \qquad (2.14.5)$$

o tai reiškia, kad atsitiktinis dydis ξ, kuris yra lygties (2.14.2) sprendinys, turi tikimybės tankį $w(x)$. Iš čia išplaukia ši išvada:

Jei $u_1, ..., u_n$ yra tolygiai pasiskirsčiusio intervale [0, 1] atsitiktinio dydžio u vertės, tai $x_i = F^{-1}(u_i)$ [čia $F^{-1}(u_i)$ yra atvirkštinė funkcija šios išraiškos $F(x_i) = u_i$; $i = 1, 2, \ldots, n$] yra atsitiktinio dydžio X vertės, kurių pasiskirstymo funkcija yra $F(x)$ (arba kurių tikimybės tankis lygus $w(x)$).

Pvz., reikia gauti atsitiktinį dydį, kurio tikimybės tankis

$$w(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{, kai } x > 0; \\ 0 & \text{, kai } x \le 0. \end{cases}$$

Iš čia pasiskirstymo funkcija

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-x'} dx' = 1 - \mathrm{e}^{-x} = u \; .$$

Išreiškiame x:

$$x = -\ln(1-u) \; .$$

Vadinasi, jei imsime

$$x_i = -\ln(1-u_i)$$

čia u atsitiktinis dydis, kintantis intervale [0, 1], kurio tikimybės tankis $w(u)=1$, tai atsitiktinis dydis X turės tikimybės tankį $w(x)=\mathrm{e}^{-x}$ $(x>0)$.

3. ATSITIKTINIAI VYKSMAI

3.1. Bendrosios žinios apie atsitiktinius vyksmus

Atsitiktinis vyksmas – tai bet kokio (fizikinio) dydžio atsitiktinis kitimas tam tikroje abstrakčioje erdvėje.

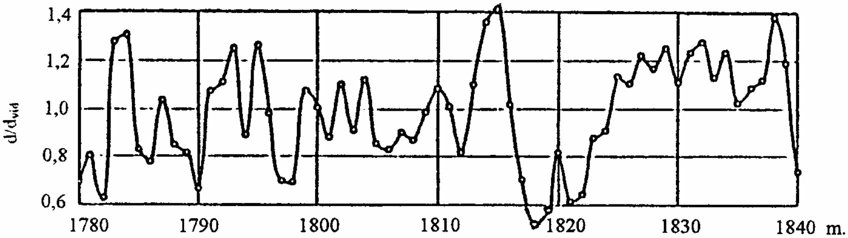
Iki šiol nagrinėjome atsitiktinius dydžius, kiekvienam elementariam įvykiui priskirdami tam tikrą skaičių sistemą. Tačiau praktikoje sutinkame daug sudėtingesnius, priklausančius nuo atsitiktinumo, vyksmus. Pavyzdžiui, skrendančio lėktuvo nuotolis nuo žemės paviršiaus tam tikrame laiko intervale yra atsitiktinė laiko funkcija. Kitas pavyzdys: elektros energijos suvartojimo Vilniaus mieste priklausomybė nuo laiko taip pat yra atsitiktinė funkcija – atsitiktinis vyksmas. Vandens aukščio kitimas nuo laiko upėje tam tikroje vietoje taip pat yra atsitiktinis vyksmas.

Konkretus atsitiktinio vyksmo pavidalas (fotografija, oscilograma) tam tikrame bandyme vadinamas atsitiktinio vyksmo ***realizacija*** (kartais kaip sinonimas naudojamas terminas – atsitiktinio vyksmo *trajektorija*).

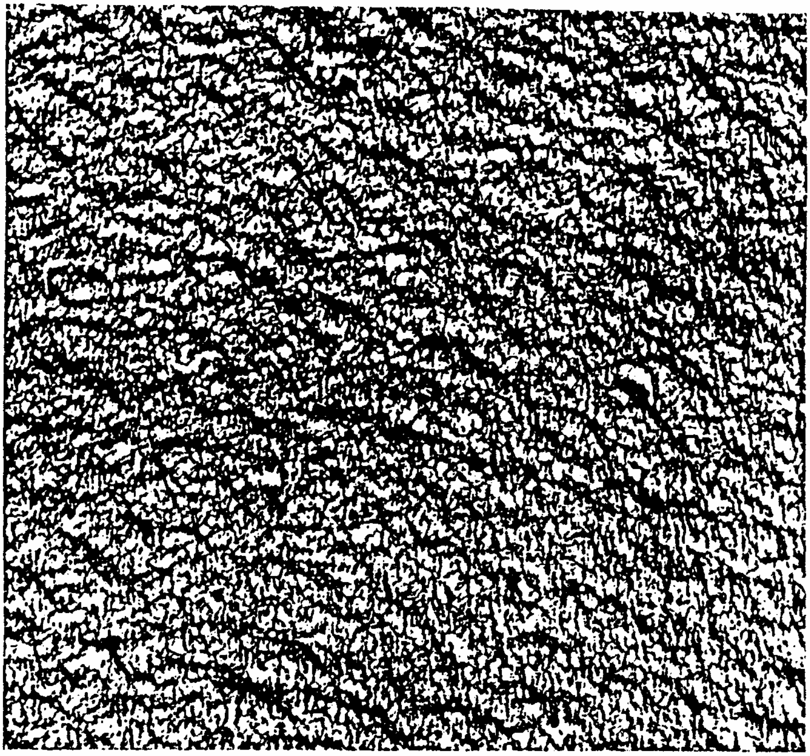
Formaliam atsitiktinio vyksmo priklausomybės nuo argumento žymėjimui naudojamos atsitiktinės funkcijos. Jei $X(t)$ – atsitiktinė funkcija, tai jos vertė, esant fiksuotam argumentui $t=t_1$, yra atsitiktinis dydis. Tai reiškia, kad, esant vienodoms bandymo sąlygoms, realizacijų vertės $X(t_1)$, gautos tapatingose sistemose, bus skirtingos.

Fizikoje dažniausiai tenka susidurti su atsitiktiniais vyksmais, priklausančiais nuo vieno argumento – laiko. Be to, kaip atsitiktinis vyksmas čia suprantamas atsitiktinis šiluminis dalelių judesys, slėgio, energijos, temperatūros, srovės stiprio, įtampos, lauko stiprio ir kitų dydžių atsitiktinis kitimas nuo laiko. Tačiau bendruoju atveju argumentas t gali turėti ir kitokią prasmę.

3.1 pav. pateiktos dviejų skirtingų atsitiktinių vyksmų realizacijos: a) atsitiktinis vyksmas, nusakantis Hilo upės baseino (Š. Amerikoje) 142 medžių rievių vidutinio storio kitimą 1780–1840 metais, b) jūros paviršiaus fotografija tam tikru laiku. Nors abu šie vyksmai yra atsitiktiniai, tačiau jų reikšmė daugeliu atvejų yra skirtinga. Pirmoji realizacija gamtininkams gali duoti daug informacijos apie klimato kitimą toje vietoje minėtajame laikotarpyje, o antroji – vargu, ar gali suteikti įdomesnės informacijos, nebent apie atsitiktinį bangų erdvinį pasiskirstymą.



a)



b)

3.1 pav. Dviejų skirtingų atsitiktinių vyksmų realizacijos: a) atsitiktinis vyksmas, atitinkantis Hilo upės baseino (Š. Amerikoje) 142 medžių rievių vidutinio storio *d* kitimą 1780–1840 metais; b) jūros paviršiaus fotografija tam tikru laiku.

Nepriklausomų atsitiktinių dydžių sekas $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ taip pat galima nagrinėti kaip atsitiktinius vyksmus, kai parametras $T=\{1, 2, ..., n\}$. Panašiai atsitiktinių dydžių dalinių sumų $S_n= X_1+ X_2+...+ X_n$ (n=1, 2, ...) sekos taip pat yra atsitiktiniai vyksmai.

Vyksmai, kurių T yra visų sveikųjų skaičių seka arba jos dalis arba bet kokia baigtinė arba suskaičiuojamoji aibė, vadinami diskrečiojo laiko vyksmais arba atsitiktinėmis sekomis.

Jei T yra baigtinis ar begalinis realiųjų skaičių intervalas, tai $X(t)$ (čia $t \in T$) vadinamas tolydžiojo laiko vyksmu arba tiesiog tolydžiuoju vyksmu.

Tolydžiojo atsitiktinio vyksmo pavyzdžiais gali būti jau anksčiau minėtieji vyksmai: šiluminis (chaotinis) dalelių judesys, dujų slėgio, energijos, temperatūros kitimas ir pan.

3.2. Atsitiktinio vyksmo tikimybės tankis

Tarkime, kad turime n visiškai vienodų sistemų (3.2 pav.), sudarančių tam tikrą ansamblį (t.y. pilną įvykių grupę). Tegul visos veikia vienu metu ir vienodomis sąlygomis.

Jei prie kiekvienos sistemos prijungsime vienodus registravimo prietaisus ir vienu ir tuo pačiu metu atskaitysime jų vertes, tai gausime skirtingas atsitiktinio vyksmo $X(t)$ vertes:

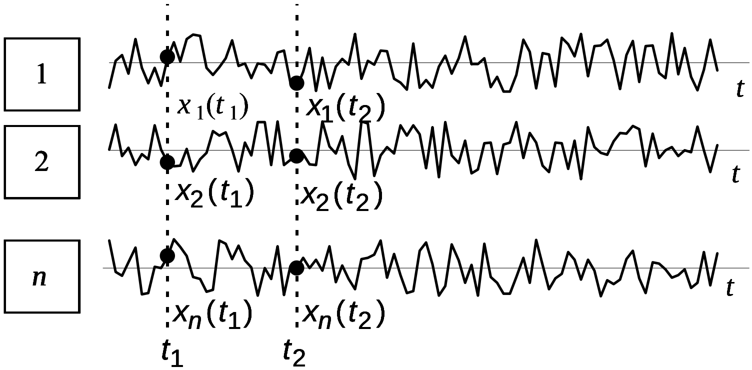
$$x_1(t_1), x_2(t_1), ..., x_n(t_1).$$

Iš šio bendro skaičiaus n išskiriame tas n_1 vertes, kurios yra pakankamai mažame intervale $(x, x+\Delta x)$. Tada, esant pakankami dideliam skaičiui n, santykis n_1/n artėja prie įvykio tikimybės patekti į intervalą $(x, x+\Delta x)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_1}{n} = P(x \le X < x + \Delta x). \tag{3.2.1}$$

Tačiau pagal tikimybės tankio apibrėžtį

$$P(x \le X(t_1) < x + \Delta x) = w_1(x, t_1)\Delta x, \tag{3.2.2}$$



3.2 pav. Iliustracija tolydžiojo atsitiktinio vyksmo tikimybės tankiui apibūdinti.

čia parametras t_1 nurodo apibrėžtą laiką. Funkcija $w_1(x,\ t_1)$ vadinama atsitiktinio vyksmo ***vienmačiu tikimybės tankiu***. Vienmatis tikimybės tankis yra svarbi, tačiau nepilna atsitiktinio vyksmo charakteristika. Ji aprašo atsitiktinį vyksmą tik apibrėžtu, fiksuotu laiku, nieko nenurodydama apie tolimesnį vyksmo pobūdį. Galima sakyti, kad vienmatis tikimybės tankis yra statinė atsitiktinio vyksmo charakteristika ir nieko nepasako apie vystymosi dinamiką.

Gerokai išsamesnė atsitiktinio vyksmo charakteristika yra dvimatis tikimybės tankis, apibūdinantis tikimybinį ryšį tarp atsitiktinių funkcijų bet kokiais dviem laikais t_1 ir t_2 (3.2 pav.). Dvimatis tikimybės tankis apibrėžiamas visiškai panašiai vienmačiam tikimybės tankiui. Tarkime, kad turime n nagrinėjamų sistemų vertes dviem apibrėžtais laikais t_1 ir t_2:

$$x_1(t_1),\, x_2(t_1),\, ...,\, x_n(t_1)\ ;$$
$$x_1(t_2),\, x_2(t_2),\, ...,\, x_n(t_2)\ .$$

Iš šių verčių išskiriame tas n_2 vertes, kurios laiku t_1 yra intervale $(x_1,\ x_1+\Delta x_1)$ ir laiku t_2 yra intervale $(x_2,\ x_2+\Delta x_2)$. Tada galime parašyti, kad

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n_2}{n} = P\big(x_1 \le X(t_1) < x_1+\Delta x_1; x_2 \le X(t_2) < x_2+\Delta x_2\big) = \\ = w_2(x_1, x_2, t_1, t_2)\Delta x_1 \Delta x_2\ . \tag{3.2.3}$$

Funkcija $w_2(x_1,\ x_2,\ t_1,\ t_2)$ vadinama dvimačiu tikimybės tankiu. Dvimatis tikimybės tankis taip pat nevisiškai apibūdina atsitiktinį vyksmą: jis parodo tikimybinį ryšį tik dviem apibrėžtais laikais.

Atsitiktinis vyksmas gerokai išsamiau apibūdinamas daugiamačiais tikimybės tankiais:

$$
\begin{aligned}
&P(x_1 \le X(t_1) < x_1 + \Delta x_1; x_2 \le X(t_2) < x_2 + \Delta x_2; \ldots \\
&\ldots; x_n \le X(t_n) < x_n + \Delta x_n) = w_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t_1, t_2, \ldots, t_n)\Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n \ .
\end{aligned}
\quad 3.2.4)
$$

n-matis tikimybės tankis $w_n(x_1,x_2,..,x_n,t_1,t_2,..,t_n)$ apibrėžia atsitiktinio vyksmo tikimybinį ryšį bet kuriais n apibrėžtais laikais. Vadinasi, atsitiktinis vyksmas tuo tiksliau aprašomas n-mačiu tikimybės tankiu, kuo didesnis n.

n-mačio tikimybės tankio savybės:

1) Jis yra neneigiamas: $w_n(x_1,x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n) \geq 0$. (3.2.5)

2) Tenkina normavimo sąlygą:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} w_n(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots t_n)dx_1\ldots dx_n = 1\ . \qquad (3.2.6)
$$

3) Tenkina simetrijos sąlygą: funkcija $w_n(x_1,x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n)$ yra simetrinė savo argumentų atžvilgiu, t.y. ji nesikeičia, pakeitus argumentus x_1, x_2, ..., x_n vietomis.

4) Tenkina suderinamumo sąlygą, t.y. bet kokiam $m<n$ galioja lygybė:

$$
\begin{aligned}
&w_m(x_1,\ldots,x_m,t_1,\ldots,t_m) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} w_n(x_1,\ldots,x_m,\ldots,x_n,t_1,\ldots t_m,\ldots t_n)dx_{m+1}\ldots dx_n\ .
\end{aligned}
\qquad (3.2.7)
$$

Ši lygybė parodo, jei žinomas n-matis tikimybės tankis, tai integruojant galime gauti bet kurį mažesnės eilės tikimybės tankį.

3.3. Sąlyginis tikimybės tankis

Turėjome (žr. 1.6 paragrafą), kad dviejų įvykių sankirtos tikimybę galime išreikšti sąlygine tikimybe:

$$P(A \cap B)=P(B)P(A|B) ,$$

arba bendruoju atveju:

$$P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid (A_1 \cap A_2))...P(A_n \mid (A_1 \cap ... \cap A_{n-1})).$$

Visiškai panašius sąryšius galime užrašyti ir tikimybės tankiui. Tarkime, kad žinome atsitiktinio vyksmo $X(t_2)$ vertes x_2 laiku t_2. Bendriausiu atveju vertės (x_2, t_2) suteikia tam tikrą informaciją apie atsitiktinio vyksmo vertes (x_1,t_1). Vadinasi, tikimybės tankį $w_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$, aprašantį atsitiktinių vyksmų vertes (x_1, t_1) ir (x_2, t_2), kai žinome vertę (x_2,t_2), galime užrašyti šitaip:

$$w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = w_1(x_2, t_2)w(x_1, t_1 \mid x_2, t_2), \tag{3.3.1}$$

arba

$$w(x_1, t_1 \mid x_2, t_2) = \frac{w_2(x_1, x_2, t_1, t_2)}{w_1(x_2, t_2)}, \tag{3.3.2}$$

čia $w_1(x_2,t_2)>0$. Tikimybės tankis $w(x_1,t_1,|x_2,t_2)$ vadinamas atsitiktinio vyksmo $X(t_1)$ sąlyginiu tikimybės tankiu, kai žinomas atsitiktinis vyksmas $X(t_2)$. Sąlyginis tikimybės tankis $w(x_1,t_1,|x_2,t_2)$ turi ne mažiau informacijos apie $X(t_1)$, negu besąlyginis tikimybės tankis $w_1(x_1,t_1)$. Kiek padidėjo informacija apie $X(t_1)$, kai žinome $X(t_2)$, priklauso nuo konkrečių sąlygų. Tačiau kai kuriais atvejais informacija apie $X(t_1)$ nepadidėja, t.y.

$$w(x_1, t_1 \mid x_2, t_2) = w_1(x_1, t_1).$$

Tada iš (3.3.1) formulės turime:

$$w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = w_1(x_1, t_1)w_1(x_2, t_2). \tag{3.3.3}$$

Šis sąryšis išreiškia būtiną ir pakankamą sąlygą, kad atsitiktinio vyksmo vertės laikais t_1 ir t_2 yra nepriklausomos.

Kitu ribiniu atveju, kai $X(t_1)$ ir $X(t_2)$ susietos funkcine priklausomybe $X(t_1) = g[X(t_2)]$: žinant $X(t_2)$, viską žinome ir apie $X(t_1)$.

Aptariamu atveju dvimatis tikimybės tankis turi delta funkcijos pavidalą:

$$w_2(x_1,x_2,t_1,t_2)=w_1(x_2,t_2)\delta[x_1-g(x_2)]. \tag{3.3.4}$$

Sąlyginis tikimybės tankis taip pat tenkina normavimo sąlygą:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x_1,t_1 \mid x_2,t_2)dx_1=1. \tag{3.3.5}$$

Formules (3.3.3) – (3.3.5) galime apibendrinti ir *n*-mačiu atveju.

3.4. Daugiamatė charakteringoji funkcija

Kaip buvo nurodyta anksčiau (žr. 2.11 paragrafą), aprašant atsitiktinius dydžius, vietoje tikimybės tankio galime naudoti charakteringąją funkciją. Visiškai panašiai atsitiktiniam vyksmui apibūdinti n fiksuotais laikais (arba n atsitiktinių dydžių rinkiniui $\{X(t_1), ..., X(t_n)\}$) n-matę charakteringąją funkciją galime užrašyti taip:

$$\begin{aligned}&\Theta_n(u_1,u_2,...,u_n,t_1,t_2,...,t_n)=\\&=M\left[\mathrm{e}^{j(u_1x_1+u_2x_2+...+u_nx_n)}\right]=<\mathrm{e}^{j(u_1x_1+u_2x_2+...+u_nx_n)}>=\\&=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{j(u_1x_1+...+u_nx_n)}w_n(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n)dx_1...dx_n .\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

čia ir toliau kampiniais skliaustais <...> žymėsime vidurkinimo veiksmą, kitaip tariant, statistinį vidurkinimą.

Pritaikę atvirkštinę Furjė transformaciją, gauname:

$$\begin{aligned}&w_n(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n)=\\&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-j(u_1x_1+...+u_nx_n)}\Theta_n(u_1,...,u_n,t_1,...,t_n)du_1...du_n .\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

n-matė charakteringoji funkcija taip pat turi simetrijos savybę savo argumentų u_1, ..., u_n atžvilgiu, t.y. ji nesikeičia, sukeitus argumentus u_1, ..., u_n vietomis.

n-matės charakteringosios funkcijos ***normavimo sąlyga***:

$$\Theta(0,...,0)=1. \tag{3.4.3}$$

Turint n-matę charakteringąją funkciją $\Theta_n(u_1, ..., u_n, t_1, ..., t_n)$, visados galime surasti mažesnės eilės charakteringąją funkciją $\Theta_n(u_1, ..., u_k, t_1, ..., t_k)$,, kur $k<n$:

$$\Theta_k(u_1,...,u_k,t_1,t_2,...,t_k) = \Theta_n(u_1,...,u_k,0,...,0,t_1,...,t_n). \qquad (3.4.4)$$

Jei atsitiktinio vyksmo vertės $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$ yra nepriklausomos, tai

$$w_n(x_1,...,x_{n,},t_1,...,t_n) = \prod_{k=1}^{n} w_1(x_k,t_k) \ ,$$

todėl

$$\Theta_n(u_1,...,u_{n,},t_1,...,t_n) = \prod_{k=1}^{n} \Theta_1(u_k). \qquad (3.4.5)$$

Ši sąlyga taip pat yra būtina ir pakankama, kad atsitiktiniai dydžiai $X(t_1)$, $X(t_2)$, ..., $X(t_n)$ būtų nepriklausomi.

Kai $u_1=u_2=...=u_n=u$, gauname atsitiktinių dydžių sumos $S_n=X_1+X_2+...+X_n$ charakteringąją funkciją

$$\Theta_{S_n}(u) = M\left[e^{ju(X_1+...+X_2)}\right] = \Theta_n(u,...,u). \qquad (3.4.6)$$

Jei X_1, X_2, ..., X_n yra nepriklausomi, tai iš (3.4.5) ir (3.4.6) lygybių gauname:

$$\Theta_{S_n}(u) = \prod_{k=1}^{n} \Theta_{1X_k}(u); \qquad (3.4.7)$$

čia $\Theta_{1X_k}(u)$ – atsitiktinio dydžio X_k charakteringoji funkcija. Vadinasi, nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos charakteringoji funkcija lygi atskirų dėmenų charakteringųjų funkcijų sandaugai.

Daliniu atveju, kai visi dėmenys turi vienodus skirstinius,

$$\Theta_{S_n}(u) = \Theta_{1X_k}^{n}(u). \qquad (3.4.8)$$

Ši charakteringųjų funkcijų savybė yra labai patogi, jas naudojant nepriklausomų atsitiktinių dydžių sumos savybių tyrimui.

Pvz. Tarkime, kad turime n nepriklausomų normaliųjų atsitiktinių dydžių sumą, kurios dėmenų tikimybės tankio parametrai $M(X_k)=a_k$ ir σ_k^2 (k=1, 2, ..., n). Tada sumos charakteringoji funkcija

$$\Theta_{S_n}(u)=\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{ja_k u-\frac{1}{2}\sigma_k^2 u^2}=\mathrm{e}^{ju\sum\limits_{k=1}^{n} a_k-\frac{1}{2}u^2\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2}=\mathrm{e}^{jum-\frac{1}{2}u^2\sigma^2}; \qquad (3.4.9)$$

čia

$$m=\sum_{k=1}^{n} a_k , \qquad \sigma^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 .$$

Vadinasi, nepriklausomų normaliųjų atsitiktinių dydžių suma taip pat turi normalųjį skirstinį. Panašią išvadą galime gauti ir nagrinėjant priklausomų normaliųjų atsitiktinių dydžių sumą.

3.5. Daugiamatė tikimybių pasiskirstymo funkcija

Dažnai vietoje tikimybių tankio taikomos tikimybių pasiskirstymo funkcijos. Atsitiktinių vyksmų vienmatė tikimybių pasiskirstymo funkcija užrašoma panašiai kaip ir tolydiesiems atsitiktiniams dydžiams:

$$F_1(x_1,t_1)=P[X(t_1)<x_1]=\int_{-\infty}^{x_1} w_1(x_1,t_1)dx . \qquad (3.5.1)$$

Akivaizdu, kad x_1 vertėms, esant kurioms funkcija $F_1(x_1, t_1)$ yra diferencijuojama, galioja lygybė

$$w_1(x_1,t_1)=\frac{\partial F_1(x_1,t_1)}{\partial x_1}. \qquad (3.5.2)$$

Panašiai apibrėžiama dvimatė ir n-matė pasiskirstymo funkcijos:

$$F_1(x_1,x_2,t_1,t_2)=P[X(t_1)<x_1;X(t_2)<x_2]=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} w_1(x_1',x_2',t_1,t_2)dx_1'dx_2'; \quad (3.5.3)$$

$$\begin{aligned} &F_1(x_1,x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n)= \\ &=P[X(t_1)<x_1;X(t_2)<x_2;...;X(t_n)<x_n]= \\ &=\int_{-\infty}^{x_1}...\int_{-\infty}^{x_n} w_n(x_1',...,x_n',t_1,...,t_n)dx_1'..dx_n'. \end{aligned} \qquad (3.5.4)$$

Jei egzistuoja mišriosios išvestinės, galime užrašyti šias lygybes:

$$w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}, \qquad (3.5.5)$$

$$w_n(x_1, ..., x_n, t_1, ..., t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, ..., x_n, t_1, ..., t_n)}{\partial x_1 .. \partial x_n}. \qquad (3.5.6)$$

Pasiskirstymo funkcija taip pat tenkina simetrijos savybę, t.y. ji nesikeičia, jos argumentus $x_1,...,x_n$ sukeitus vietomis.

Kadangi tarp tikimybės tankio $w_n(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n)$, charakteringosios funkcijos $\Theta_n(u_1,...,u_n,t_1,...,t_n)$ ir pasiskirstymo funkcijos $F_n(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n)$ yra vienareikšmis ryšys, tai kiekviena iš jų visiškai apibūdina atsitiktinį vyksmą, o skaičiavimuose naudojame tą, su kuria lengviau galime atlikti matematinius veiksmus.

3.6. Daugiamačiai momentai

Nors atsitiktinis vyksmas visiškai aprašomas daugiamačiais tikimybės tankiais, charakteringosiomis ar pasiskirstymo funkcijomis, tačiau kai kuriais atvejais gerokai lengviau galima gauti tam tikrus įverčius, naudojant paprastesnes atsitiktinio vyksmo charakteristikas: momentus ir koreliacijos funkcijas.

Panašiai atsitiktiniams dydžiams atsitiktinio vyksmo i_1 eilės vienmatis (kuris priklauso nuo vieno argumento t) pradinis momentas išreiškiamas šitaip:

$$M_{i_1}(t) = < X^{i_1}(t) > = \int_{-\infty}^{\infty} x^{i_1} w_1(x,t) dx, \qquad (3.6.1)$$

čia <...> - statistinio vidurkinimo skliaustai. Momentas, apibūdinantis atsitiktinį vyksmą dviem skirtingais laikais t_1 ir t_2, vadinamas ***dvimačiu momentu***, t.y. (i_1+i_2) eilės dvimatis pradinis momentas išreiškiamas taip:

$$M_{i_1 i_2}(t_1, t_2) = < X_1^{i_1}(t_1) X_2^{i_2}(t_2) > = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{i_1} x_2^{i_2} w_2(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2. \qquad (3.6.2)$$

Atitinkamai pradinis momentas $M_{i_1,...,i_n}(t_1,...,t_n)$, priklausantis nuo

n nesutampančių argumentų $t_1,...,t_n$, vadinamas $(i_1+...+i_n)$ eilės n-mačiu momentu:

$$M_{i_1,...,i_n}(t_1,...,t_n) = < X_1^{i_1}(t_1)...X_n^{i_n}(t_n) > = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} x_1^{i_1}...x_n^{i_n} w_n(x_1,...,x_n,t_1,...,t_n) dx_1...dx_n. \tag{3.6.3}$$

Kaip matyti, momento eilę nusako laipsnio rodiklių suma $(i_1+...+i_n)$, o jo argumentų $t_1,...,t_n$ skaičius – jo n-matiškumą.

Visiškai taip pat apibrėžiami ir centriniai momentai:

$$\mu_{i_1}(t) = < [X(t) - M_1(t)]^{i_1} > = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^{i_1} w_1(x,t) dx, \tag{3.6.4}$$

$$\mu_{i_1 i_2}(t_1,t_2) = < [X_1(t_1) - M_1(t_1)]^{i_1} [X_2(t_2) - M_1(t_2)]^{i_2} > = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - M_1(t_1)]^{i_1} [x_2 - M_1(t_2)]^{i_2} w_2(x_1,x_2,t_1,t_2) dx_1 dx_2; \tag{3.6.5}$$

$$\mu_{i_1...i_n}(t_1,...,t_n) = < [X_1(t_1) - M_1(t_1)]^{i_1} ... [X_n(t_n) - M_1(t_n)]^{i_n} > = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - M_1(t_1)]^{i_1} ... [x_n - M_1(t_n)]^{in} w_n(x_1,..,x_n,t_1,..,t_n) dx_1...dx_n. \tag{3.6.6}$$

Daugiamačiai momentai naudojami apibūdinti ne tik atsitiktinius vyksmus, bet ir atsitiktinius dydžius. Tolydžiųjų atsitiktinių dydžių atveju daugiamačiai momentai išreiškiami visiškai taip pat kaip tai nurodyta (3.6.1) – (3.6.6) formulėse, tik vietoje atsitiktinių vyksmų $X_1(t_1)$, $X_2(t_2)$, ..., $X_n(t_n)$ čia reikia įrašyti atsitiktinius dydžius X_1, X_2, ...,X_n ir jų vidurkius, kurie nepriklauso nuo argumento t. Pavyzdžiui, atsitiktinių dydžių X ir Y (i_1+i_2) eilės dvimačiai pradinis ir centrinis momentai išreiškiami taip:

$$m_{i_1 i_2} = M\left(X^{i_1} Y^{i_2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{i_1} y^{i_2} w_2(x,y) dx dy, \tag{3.6.7}$$

$$\mu_{i_1 i_2} = M\left(\overset{\circ}{X}{}^{i_1} \overset{\circ}{Y}{}^{i_2}\right) = M\left[(X - m_x)^{i_1} (Y - m_y)^{i_2}\right] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^{i_1} (y - m_y)^{i_2} w_2(x,y) dx dy. \tag{3.6.8}$$

Kai atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra diskretieji, tai jų (i_1+i_2) eilės dvimačiai pradinis ir centrinis momentai užrašomi taip:

$$m_{i_1 i_2} = M\left(X^{i_1} Y^{i_2}\right) = \sum_j \sum_k x_j^{i_1} x_k^{i_2} p_{jk}; \tag{3.6.9}$$

$$\mu_{i_1 i_2} = M\left(\overset{\circ}{X}{}^{i_1} \overset{\circ}{Y}{}^{i_2}\right) = \sum_j \sum_k \left(x_j - m_x\right)^{i_1} \left(y_k - m_y\right)^{i_2} p_{jk}. \tag{3.6.10}$$

čia p_{jk} – įvykių x_j ir y_k sankirtos tikimybė $P(X=x_j,\ Y=y_k)$. Tuo atveju, kai įvykiai X ir Y nepriklausomi:

$$w_2(x, y) = w_1(x) w_1(y), \qquad p_{jk} = p_j p_k\,. \tag{3.6.11}$$

Iš čia

$$\begin{aligned} m_{i_1 i_2} &= M\left(X^{i_1} Y^{i_2}\right) = M\left(X^{i_1}\right) M\left(Y^{i_2}\right), \\ \mu_{i_1 i_2} &= M\left(\overset{\circ}{X}{}^{i_1} \overset{\circ}{Y}{}^{i_2}\right) = M\left(\overset{\circ}{X}{}^{i_1}\right) M\left(\overset{\circ}{Y}{}^{i_2}\right), \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

t.y. dvimačiai momentai išreiškiami atitinkamų vienmačių momentų sandauga.

Kaip jau buvo aptarta anksčiau, momentus galime gauti diferencijuodami atitinkamų atsitiktinių vyksmų ir atsitiktinių dydžių charakteringąsias funkcijas.

3.7. Koreliacijos funkcija

> ***Koreliacijos funkcija*** – tai atitinkamų centruotų atsitiktinių vyksmų sandaugos vidurkis.

Koreliacijos funkcija $K_2(t_1,\ t_2)$, kuri priklauso nuo dviejų laiko argumentų, vadinama dvimate koreliacijos funkcija:

$$\begin{aligned} K_2(t_1, t_2) &= \left< \left[X_1(t_1) - M_1(t_1)\right]\left[X_2(t_2) - M_1(t_2)\right] \right> = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x_1 - M_1(t_1)\right]\left[x_2 - M_1(t_2)\right] w_2(x_1, x_2, t_1, t_2)\, dx_1 dx_2. \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

Dvimatę koreliacijos funkciją galime išreikšti ir šitaip:

$$K_2(t_1,t_2) = < X_1(t_1)X_2(t_2) > - < X_1(t_1)M_1(t_2) > - < M_1(t_1)X_2(t_2) > + \\ + < M_1(t_1)M_1(t_2) > = < X_1(t_1)X_2(t_2) > - < M_1(t_1)M_1(t_2) > . \qquad (3.7.2)$$

Necentruotų atsitiktinių dydžių sandaugos vidurkis $<X_1(t_1)X_2(t_2)>$ vadinamas ***kovariacijos funkcija***, tačiau literatūroje dažnai sutinkami atvejai, kai koreliacijos ir kovariacijos funkcijų apibrėžimai yra sukeisti vietomis. Čia nurodysime tik tiek, kad šios dvi funkcijos iš esmės nesiskiria: iš (3.7.1) ir (3.7.2) formulių palyginimo matyti, kad jos skiriasi tik nariu $M_1(t_1)M_1(t_2)$, kurį nusako vidurkių sandauga, dažniausiai, tai yra tam tikras pastovus skaičius.

Koreliacijos funkcija, kuri apibūdina vyksmus trim skirtingais laikais t_1, t_2 ir t_3 vadinama trimate koreliacijos funkcija:

$$K_3(t_1,t_2,t_3) = < [X_1(t_1) - M_1(t_1)][X_2(t_2) - M_1(t_2)][X_3(t_3) - M_1(t_3)] > = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - M_1(t_1)][x_2 - M_1(t_2)] \times \\ [x_3 - M_1(t_3)] w_3(x_1,x_2,x_3,t_1,t_2,t_3) dx_1 dx_2 dx_3 .$$

Nesunku parodyti, kad koreliacijos funkcijas $K_2(t_1,\ t_2)$, $K_3(t_1,\ t_2,\ t_3)$ ir t.t. galime gauti skleidžiant Makloreno eilute n-matės charakteringosios funkcijos logaritmą.

Toliau ypatingą vaidmenį vaidins tik dvimatė koreliacijos funkcija $K_2(t_1,\ t_2)$, todėl ją tiesiog vadinsime koreliacijos funkcija. Kai reikės aukštesnės eilės koreliacijos funkcijų, tai jas vadinsime pilnais pavadinimais.

Ne tik atsitiktiniams vyksmams, bet ir atsitiktiniams dydžiams apibūdinti naudojama koreliacijos funkcija. Pavyzdžiui, jei turime du atsitiktinius dydžius X ir Y, kurių vidurkiai atitinkamai yra m_x ir m_y, tai jų koreliacijos funkcija išreiškiama taip:

$$K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)] \quad . \qquad (3.7.4)$$

Kai atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra diskretieji, tai

$$K_{xy} = \sum_j \sum_k (x_j - m_x)(y_k - m_y) p_{jk} , \qquad (3.7.5)$$

o kai – tolydieji, tai

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)w_2(x,y)dxdy\,. \tag{3.7.6}$$

Prieš pradėdami išsamiau nagrinėti koreliacijos funkcijos savybes, trumpai apibūdinsime nuostoviuosius (stacionariuosius) ir nenuostoviuosius (nestacionariuosius) vyksmus.

3.8. Nuostovieji ir nenuostovieji vyksmai

Atsitiktinis vyksmas $X(t)$ vadinamas nuostoviuoju ***siaurąja prasme***, jei jo n-matis tikimybės tankis $w_n(x_1,x_2,..,x_n,t_1,t_2,..,t_n)$ nesikeičia, pastūmus laiko ašyje vienodai visus laikus $t_1,t_2,..,t_n$, t.y., esant bet kokiems n ir t_0, galioja lygybė:

$$w_n(x_1,x_2,..,x_n,t_1,t_2,..,t_n)=w_n(x_1,x_2,..,x_n,t_1-t_0,t_2-t_0,..,t_n-t_0) \tag{3.8.1}$$

Kitaip tariant, atsitiktinis vyksmas vadinamas nuostoviuoju siaurąja prasme, jei jo tikimybės tankis nesikeičia, pakeitus laiko atskaitos pradžią. Šiems nuostoviesiems vyksmams panašias tikimybės tankiui išraiškas (3.8.1) galime užrašyti charakteringajai ir pasiskirstymo funkcijoms:

$$\Theta_n(u_1,u_2,..,u_n,t_1,t_2,..,t_n)=\Theta_n(u_1,u_2,..,u_n,t_1-t_0,t_2-t_0,..,t_n-t_0)\,,$$

$$F_n(x_1,x_2,..,x_n,t_1,t_2,..,t_n)=F_n(x_1,x_2,..,x_n,t_1-t_0,t_2-t_0,..,t_n-t_0)\,,$$

momentams ir koreliacijos funkcijai:

$$M_{i_1\ldots i_n}(t_1,\ldots,t_n)=M_{i_1\ldots i_n}(t_1-t_0,\ldots,t_n-t_0)\,,$$

$$K_2(t_1,t_2)=K_2(t_1-t_0,t_2-t_0)\,,$$

nes visas jas nusako tikimybės tankis.

Nuostovieji atsitiktiniai vyksmai gaunami nusistovėjus sistemos darbo veikai, kai išorės sąlygos nekinta. Nuostovieji vyksmai yra dalinis nenuostoviųjų vyksmų atvejis. Nenuostoviojo vyksmo pavyzdžiu gali būti bet kuris atsitiktinis vyksmas pereinamuoju laikotarpiu, pavyzdžiui, chaotinis vandens molekulių judesys į jį įpylus šiek tiek karštesnio vandens, dujų molekulių judesys uždarame inde, jei staiga pakaitinsime tik vieną indo sienelę, ir pan.

Pasinaudodami (3.8.1) lygybe, galime parašyti, kad

$$w_1(x_1,t_1)=w_1(x_1,t_1-t_1)=w_1(x_1)\ , \qquad (3.8.2)$$

$$w_2(x_1,x_2,t_1,t_2)=w_2(x_1,x_2,t_1-t_1,t_2-t_1)=w_2(x_1,t_1,\tau)\ ,\ (\text{čia}\ \ \tau=t_2-t_1) \qquad (3.8.3)$$

ir t.t. Vadinasi, nuostoviojo atsitiktinio vyksmo n-matis tikimybės tankis (momentai, koreliacijos funkcijos) priklauso ne nuo n, o tik nuo (n–1) laiko argumentų, nes vieną iš pasirinktų laiko argumentų visados galime sutapatinti su laiko atskaitos pradžia (pavyzdžiui, t_1=0).

Kaip matyti iš (3.8.2) formulės, nuostoviojo vyksmo vienmatis tikimybės tankis nepriklauso nuo pasirinktojo laiko. Todėl vienmatis tikimybės tankis ir vienmačiai momentai nieko nepasako apie nuostoviojo atsitiktinio vyksmo kitimą nuo laiko. Pavyzdžiui, pakeitus laiko mastelį k kartų, vienmatis tikimybės tankis nepasikeis, t.y., vyksmas, kintantis k kartų sparčiau ar lėčiau, turės tą patį vienmatį tikimybės tankį.

Nuostoviojo atsitiktinio vyksmo momentus ir koreliacijos funkciją žymėsime mažosiomis raidėmis. Nuostoviojo vyksmo statistinis vidurkis nepriklauso nuo laiko:

$$m=<X(t)>=\int_{-\infty}^{\infty} x w_1(x)dx\,. \qquad (3.8.4)$$

Koreliacijos funkcija $k_2(t_1,t_2)$ priklauso tik nuo laikų t_1 ir t_2 skirtumo $\tau=t_2-t_1$ ir lygi:

$$\begin{aligned} k_2(t_1,t_2)=k(\tau)&=<[X_1(t_1)-m][X_2(t_2)-m]>= \\ &=<[X_1(t_1)][X_2(t_2)]>-m^2= \\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m)(x_2-m)w_2(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2 \end{aligned} \qquad (3.8.5)$$

Nuostoviojo vyksmo dispersija

$$\begin{aligned} \sigma_x^2&=<\left[\overset{\circ}{X}(t)\right]^2>=<[X(t)-m]^2>= \\ &=<[X(t)]^2>-m^2=k(0)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 w_1(x)dx \end{aligned} \qquad (3.8.6)$$

yra pastovi ir lygi koreliacijos funkcijos vertei, kai jos argumentas τ=0.

Sprendžiant kai kuriuos praktinius uždavinius, n-mačiai tikimybės tankiai netiriami, o panaudojamas tik vidurkio pastovumas ir koreliacijos funkcijos $k(t_1,t_2)$ priklausomybė nuo laiko skirtumo $\tau=t_2-t_1$. Tuo tikslu naudojama kita nuostovumo sąvoka – ***nuostovumas plačiąja prasme***.

Atsitiktinis vyksmas $X(t)$ vadinamas ***nuostoviuoju plačąja prasme***, jei jo vidurkis pastovus (t.y. nepriklauso nuo laiko), o koreliacijos funkcija $k(t_1,t_2)$ priklauso tik nuo argumentų t_1 ir t_2 skirtumo:

$$k(t_1,t_2)=k(t_2-t_1)=k(\tau) \qquad (\tau=t_2-t_1).$$

Bendriausiu atveju nuostovumas plačiąja prasme nėra tapatingas nuostovumui siaurąja prasme. ***Nuostovieji vyksmai siaurąja prasme visada bus nuostovūs ir plačiąja prasme, bet ne atvirkščiai.***

Yra viena svarbi ir labai plati nuostoviųjų vyksmų klasė, kuriai nuostovumas siaurąja ir plačiąja prasme visiškai sutampa – tai normalieji nuostovieji vyksmai, nes jų tikimybės tankis visiškai apibrėžiamas vidurkiu ir koreliacijos funkcija, kai $\tau=0$, t.y. dispersija $\sigma^2=k(0)$:

$$w(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right].$$

3.9. Koreliacijos funkcijos savybės

Koreliacijos funkcija tarp vieno ir to paties atsitiktinio vyksmo verčių skirtingais laikais vadinama ***autokoreliacijos funkcija***.

Bendriausiu atveju autokoreliacijos funkcija išreiškiama (3.7.1) formule, o nuostoviojo atsitiktinio vyksmo atveju – formule:

$$k(\tau)=<[X(t)-m_x][X(t+\tau)-m_x]>=<X(t)X(t+\tau)>-m_x^2. \quad (3.9.1)$$

Čia ir toliau aptarsime tik nuostoviuosius atsitiktinius vyksmus. Jei turime du atsitiktinius vyksmus $X(t)$ ir $Y(t)$, kurių vidurkiai m_x ir m_y, tai galime nagrinėti koreliacijos funkciją tarp šių vyksmų:

$$k_{xy}(t_1,t_2)=<[X(t_1)-m_x][Y(t_2)-m_y]>,$$

$$k_{yx}(t_1,t_2) = <[Y(t_1) - m_y][X(t_2) - m_x]>. \qquad (3.9.2)$$

Šios koreliacijos funkcijos vadinamos abipusės koreliacijos funkcijomis. Jei koreliacijos funkcijos $k_{xy}(t_1,t_2)$ ir $k_{yx}(t_1,t_2)$ priklauso tik nuo $\tau = t_2 - t_1$, tai atsitiktiniai vyksmai $X(t)$ ir $Y(t)$ vadinami pastoviai susietais. Akivaizdu, kad pastoviai susietiems atsitiktiniams vyksmams galioja šios koreliacijos funkcijų lygybės:

$$k_{xy}(t_1,t_2) = k_{xy}(\tau) = k_{yx}(-\tau). \qquad (3.9.3)$$

Koreliacijos funkcijos fizikinei prasmei išaiškinti aptarkime du dalinius atvejus, kai du nuostovieji vyksmai $X(t)$ ir $Y(t)$ yra: 1) nepriklausomi $[w_2(x,y)=w_1(x)w_1(y)]$ ir 2) susieti tiesine priklausomybe.

1) Jei atsitiktiniai vyksmai yra $X(t)$ ir $Y(t+\tau)$ yra nepriklausomi, tai galime užrašyti, kad:

$$\begin{aligned} k_{xy}(t,t+\tau) &= <[X(t) - m_x][Y(t+\tau) - m_y]> = \\ &= <[X(t) - m_x]><[Y(t+\tau) - m_y]> \equiv 0. \end{aligned} \qquad (3.9.4)$$

Gavome, kad $k_{xy}(t, t+\tau)=0$. Vadinasi, ***jei nuostovieji atsitiktiniai vyksmai nepriklausomi, tai jų abipusės koreliacijos funkcija lygi nuliui, esant bet kokioms t ir τ vertėms.*** Atvirkštinis teiginys gali galioti tik atskirais atvejais.

2) Tarkime, kad atsitiktiniai vyksmai $X(t)$ ir $Y(t)$ susieti tiesine priklausomybe:

$$X(t)=aY(t)+b\ ,$$

čia a ir b – pastovūs skaičiai. Tada

$$m_x = <X(t)> = <aY(t)+b> = am_y + b;$$

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= <[X(t) - m_x]^2> = <[(a\,Y(t)+b) - (a\,m_y + b)]^2> = \\ &= <[a(Y(t) - m_y)]^2> = a^2\,\sigma_y^2\ ; \end{aligned}$$

$$\sigma_x = a\sigma_y\ ;$$

Šiuo atveju abipusės koreliacijos funkcija lygi

$$k_{xy}(t,t+\tau) =< \left[(X(t)-m_x)(Y(t+\tau)-m_y)\right] >=$$
$$=< \left[a(Y(t)-m_y)(Y(t+\tau)-m_y)\right] >= ak_y(t,t+\tau) = ak_y(\tau), \qquad (3.9.5)$$

t.y., jei atsitiktinis vyksmas $X(t)$ yra išreiškiamas atsitiktiniu vyksmu $Y(t)$ tiesine priklausomybe, tai jų abipusės koreliacijos funkcija $k_{xy}(t,t+\tau)=k_{xy}(\tau)$ lygi atsitiktinio vyksmo $Y(t)$ autokoreliacijos funkcijai, padaugintai iš to paties tiesinę priklausomybę nusakančio daugiklio a.

Todėl galime tvirtinti, kad koreliacijos funkcija nusako tiesinį sąryšį tarp vieno arba dviejų atsitiktinių vyksmų verčių pasirinktais laikais.

Toliau dažniausiai teks susitikti su nuostoviųjų vyksmų autokoreliacijos funkcija. Todėl toliau aptarsime pagrindines autokoreliacijos funkcijos savybes.

1) Autokoreliacijos funkcija yra lyginė:

$$k(\tau)=k(-\tau). \qquad (3.9.6)$$

Tai tiesiog seka iš nuostoviojo atsitiktinio vyksmo apibrėžties, t.y iš jo charakteristikų nepriklausomumo nuo laiko atskaitos pradžios pasirinkimo, t.y.

$$k(\tau) =< [X(t)-m_x][X(t+\tau)-m_x] >=$$
$$=< [X(t-\tau)-m_x][X(t)-m_x] >= k(-\tau).$$

2) Absoliučioji autokoreliacijos funkcijos vertė, esant bet kokioms τ vertėms, negali viršyti jos vertės, kai τ=0, t.y.

$$|k(\tau)| \le k(0)=\sigma^2. \qquad (3.9.7)$$

Šis rezultatas gaunamas iš nelygybės, nusakančios, kad vidurkis neneigiamos funkcijos negali būti neigiamas:

$$< \{[X(t)-m_x] \pm [X(t+\tau)-m_x]\}^2 > \ge 0 \,.$$

Iš čia

$$< [X(t)-m_x]^2 > \pm 2 < \{[X(t)-m_x][X(t+\tau)-m_x]\} > +$$
$$+ < [X(t+\tau)-m_x]^2 >= 2\sigma_x^2 \pm 2k_x(\tau) \ge 0,$$

t.y.

$$|k(\tau)| \le \sigma^2 = k(0)\,.$$

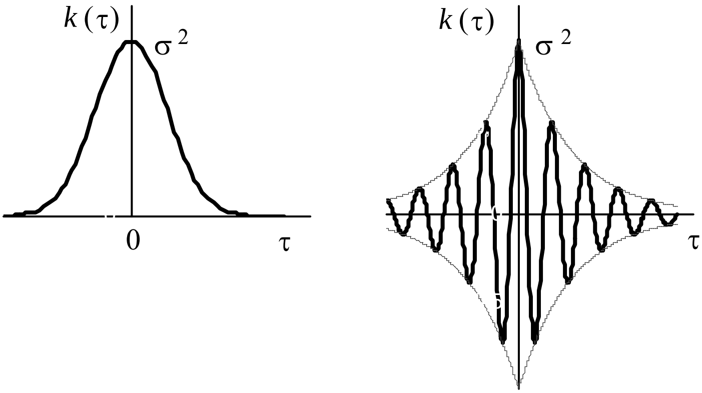
3) Daugelio nuostoviųjų atsitiktinių vyksmų autokoreliacijos funkcija artėja į nulį, kai laiko intervalas $\tau = t_2 - t_1$ artėja į begalybę:

$$\lim_{\tau \to \infty} k(\tau) = 0\,, \tag{3.9.8}$$

t.y. nuostovieji atsitiktiniai vyksmai turi baigtinį sąsajos laiką: atsitiktinio vyksmo vertės, nutolusios viena nuo kitos dideliu laiko intervalu, yra nepriklausomos arba nekoreliuotos.

Vadinasi, nuostoviojo atsitiktinio vyksmo autokoreliacijos funkcija yra lyginė τ funkcija, turi didžiausią vertę, kai $\tau=0$, lygią dispersijai $\sigma^2 = k(0)$, ir sumažėja iki nulio, kai $\tau \to \infty$.

3.3 pav. pavaizduotos dvi autokoreliacijos funkcijos, tenkinančios anksčiau minėtas sąlygas.



3.3 pav. Autokoreliacijos funkcijos pavyzdžiai.

Tačiau ne bet kuri funkcija, tenkinanti anksčiau minėtas sąlygas, gali būti autokoreliacijos funkcija.

4) Nuostoviojo atsitiktinio vyksmo autokoreliacijos funkcija turi tenkinti dar vieną papildomą sąlygą:

$$\int_0^\infty k(\tau)\cos 2\pi f\tau d\tau \geq 0.$$

Čia f yra teigiamas dydis ir turi dažnio prasmę. Ši sąlyga nusako, kad realaus atsitiktinio vyksmo galia negali būti neigiama.

Nurodysime, kad abipusės koreliacijos funkcija šių savybių neturi.

3.10. Koreliacijos koeficientas

Aukščiau pateiktos koreliacijos funkcijų išraiškos rodo, kad jos priklauso ne tik nuo sąsajos tarp atsitiktinių vyksmų, bet ir nuo jų dispersijų dydžio. Iš tikrųjų, pavyzdžiui, jei viena iš funkcijų $X(t)$ ar $Y(t)$ mažai nukrypsta nuo vidurkio, tai koreliacijos funkcijos vertės bus mažos nepriklausomai nuo sąsajos stiprumo tarp šių funkcijų.

Tuo tikslu kiekybinei sąsajai tarp atsitiktinių funkcijų verčių nusakyti naudojamos normuotos (santykinės) autokoreliacijos ir abipusės koreliacijos funkcijos. Jos apibrėžiamos šitaip:

$$r(\tau) = \frac{k(\tau)}{\sigma^2}, \tag{3.10.1}$$

$$r_{xy}(t_1, t_2) = \frac{k_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{3.10.2}$$

Normuotos koreliacijos funkcijos $r(\tau)$ ir $r_{xy}(t_1,t_2)$ vadinamos atitinkamai ***autokoreliacijos ir abipusės koreliacijos koeficientais***.

Iš (3.9.5) ir (3.10.2) išraiškų matyti, jei atsitiktinės funkcijos susietos tiesine priklausomybe, tai sutampančiais laikais (τ=0) jų abipusės koreliacijos koeficientas bet kuriuo laiku t yra lygus 1. Jei atsitiktinės funkcijos nepriklausomos, tai koreliacijos koeficientas lygus nuliui. Vadinasi, galime pasakyti, kad koreliacijos koeficientas apibūdina tiesinę priklausomybę tarp vieno arba dviejų atsitiktinių vyksmų funkcijų verčių pasirinktais laikais.

Nuostovieji vyksmai $X(t)$ ir $Y(t)$, kurių koreliacijos koeficientas tarp $X(t)$ ir $Y(t+\tau)$, esant bet kokioms τ vertėms, lygus nuliui, vadinami nekoreliuotais.

Iš anksčiau nurodytų autokoreliacijos funkcijų savybių gauname šias autokoreliacijos koeficiento savybes:

1) $r(\tau)=r(-\tau)$;

2) $|r(\tau)|\le r(0)=1$;

3) $\lim\limits_{\tau\to\infty} r(\tau) = 0$;

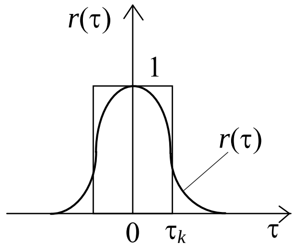
4) $\int\limits_0^\infty r(\tau)\cos 2\pi f\tau \, d\tau \ge 0$. (3.10.3)

Kalbant apie tolydžiojo laiko atsitiktinius vyksmus ir koreliacijos koeficiento priklausomybę nuo laiko τ, dar vartojamas terminas – koreliacijos trukmė τ_k, apytiksliai nusakanti laiko intervalą, kuriame nagrinėjamojo vyksmo vertės yra koreliuotos (susietos), o už šio intervalo, t.y. vertės, nutolusios didesniais už τ_k laiko intervalais, yra nekoreliuotos (nesusietos). Koreliacijos trukmė τ_k išreiškiama taip:

$$\tau_k = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} r(\tau)d\tau \qquad (3.10.4)$$

arba

$$\tau_k = \frac{1}{k(0)}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)d\tau = \frac{1}{k(0)}\int_{0}^{\infty} k(\tau)d\tau\,. \qquad (3.10.5)$$



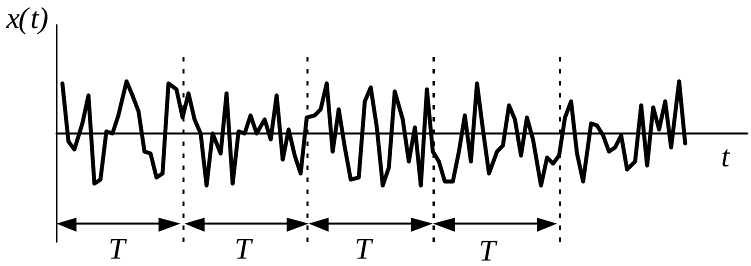
3.4. pav. Koreliacijos trukmės geometrinė iliustracija.

Geometriškai koreliacijos trukmė lygi pusei pagrindo stačiakampio, kurio aukštis lygus $r(0)=1$ ir turinčiam tą patį plotą kaip ir plotas, esantis tarp kreivės $r(\tau)$ ir abscisių ašies (3.4 pav.).

3.11. Nuostovieji ergodiniai vyksmai

Iki šiol tam tikros atsitiktinio vyksmo charakteristikos (momentai, koreliacijos funkcijos ir kt.) buvo apibrėžiamos kaip atitinkami statistiniai vidurkiai, t.y. kaip be galo didelio skaičiaus visiškai vienodų sistemų ansamblio realizacijų vidutinės vertės. Tačiau daugelio nuostoviųjų siaurąja prasme vyksmų ankščiau minėtas charakteristikas galime gauti vidurkindami atitinkamus dydžius, panaudodami pakankamai ilgą vieną realizaciją nuo laiko.

Tokia galimybė fiziškai yra pateisinama, nes nuostovusis atsitiktinis vyksmas yra vienalytis laiko atžvilgiu: viena pakankamai ilga nuo laiko realizacija gali turėti visą informaciją apie atsitiktinį vyksmą. Pavyzdžiui, tarkime, kad 3.5 pav. pateikta tam tikra atsitiktinio vyksmo realizacija. Jei ją padalysime į laiko intervalus T, kurių ilgis gerokai viršija šio atsitiktinio vyksmo koreliacijos trukmę τ_k, tai tokio atsitiktinio vyksmo vertes skirtinguose laiko intervaluose galime laikyti nepriklausomais. Iš kitos pusės, galime laikyti, kad atsitiktinį vyksmą kiekviename T intervale kuria atskiri tapatingos prigimties atsitiktinių vyksmų šaltiniai, t.y. lyg turėtume daug skirtingų realizacijų. Apie tokius nuostoviuosius vyksmus sakoma, kad jie turi ***ergodiškumo*** savybę.



3.5 pav. Iliustracija laikinio ir statistinio vidurkinimo tapatumui apibūdinti.

Neliesdami griežtų matematinių ergodinio vyksmo pagrindimų, nurodysime, kad būtina ir pakankama nuostoviojo ergodinio vyksmo prielaida yra ta, kad jo autokoreliacijos funkcija tenkintų šią ribinę sąlygą:

$$\lim_{\tau\to\infty} k(\tau) = 0\,. \tag{3.11.1}$$

Vadinasi, apskaičiuojant ergodinių vyksmų charakteristikas, statistinį vidurkinimą galime pakeisti vidurkinimu pagal laiką vienos labai ilgos realizacijos, būtent:

$$< Z(t) >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T z(t)dt\,, \tag{3.11.2}$$

čia $Z(t)$ – tam tikra nuostoviojo ergodinio vyksmo charakteristika. Pavyzdžiui, atsitiktinio vyksmo $X(t)$ vidurkį, dispersiją ir autokoreliacijos funkciją galime išreikšti šitaip:

$$m_x = \overline{x(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt\,, \tag{3.11.3}$$

$$\sigma_x^2 = \overline{[x(t)-m_x]^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-m_x]^2 dt\,, \tag{3.11.4}$$

$$\begin{aligned} k_x(\tau) &= \overline{[x(t)-m_x][x(t+\tau)-m_x]} = \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-m_x][x(t+\tau)-m_x]dt \end{aligned} \tag{3.11.5}$$

Čia brūkšnys virš atitinkamo reiškinio atitinka simbolinį vidurkinimo pagal laiką žymėjimą. Vadinasi, autokoreliacijos funkciją galime apskaičiuoti dviem būdais:

$$k_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_x)(x_2-m_x)w_2(x_1,x_2,\tau)dx_1dx_2 \tag{3.11.6}$$

arba

$$k_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-m_x][x(t+\tau)-m_x]dt. \tag{3.11.7}$$

Akivaizdžiai matyti, kad, naudojant statistinį vidurkinimą su tikimybės tankiu $w_2(x_1,x_2,\tau)$, reikia apskaičiuoti dvilypį integralą, o vidurkinant pagal laiką – tik paprastą integralą.

3.12. Harmoninio vyksmo autokoreliacijos funkcija

Surasime harmoninio signalo autokoreliacijos funkciją:

$$s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)\,, \tag{3.12.1}$$

kurio amplitudė A_0 ir dažnis $\omega_0=2\pi f$ yra pastovūs, o pradinė fazė φ kinta atsitiktiniu būdu tolygiai visame intervale nuo 0 iki 2π, t.y. tikimybės tankis

$$w(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\,. \tag{3.12.2}$$

Šio vyksmo vidurkis lygus nuliui:

$$
\begin{aligned}
m_s &= < s(t) > = A_0 < \cos(\omega_0 t + \varphi) > = \\
&= A_0 < \cos\omega_0 t \cos\varphi - \sin\omega_0 t \sin\varphi > = \\
&= A_0 \left[\cos\omega_0 t < \cos\varphi > - \sin\omega_0 t < \sin\varphi > \right] = 0,
\end{aligned}
$$

čia $<\cos\varphi>=0$ ir $<\sin\varphi>=0$, nes visos φ vertės intervale $[0, 2\pi]$ vienodai galimos.

Tada šio signalo autokoreliacijos funkciją galime išreikšti šitaip:

$$
\begin{aligned}
k_s(\tau) &= < s(t)s(t+\tau) > = A_0^2 < \cos(\omega_0 t + \varphi)\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \varphi) > = \\
&= \frac{1}{2} A_0^2 [< \cos\omega_0\tau > + < \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\varphi) >] = \frac{1}{2} A_0^2 \cos\omega_0\tau,
\end{aligned}
\tag{3.12.3}
$$

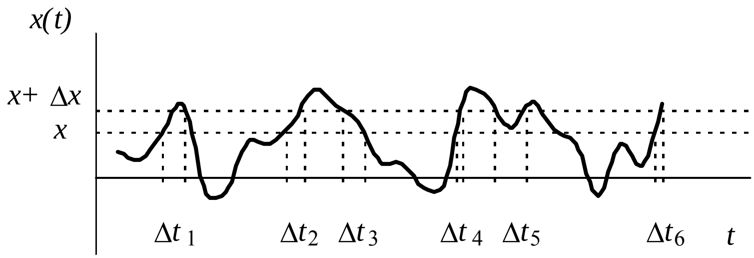
nes $< \cos(2\omega_0 t + \omega_0\tau + 2\varphi) > = 0$. Gavome, kad autokoreliacijos funkcija taip pat yra harmoninė funkcija, turinti tą patį periodą (ciklinį dažnį $\omega_0 = 2\pi f$) kaip ir pradinis signalas. Skirtingai nuo atsitiktinio vyksmo, harmoninio signalo autokoreliacijos funkcija, kai $\tau \to \infty$, neartėja į nulį. Ši savybė ir panaudojama išskirti silpną harmoninį signalą $s(t)$ iš intensyvesnio atsitiktinio signalo $X(t)$ fono.

Čia taip pat nurodysime, kad harmoninis signalas, nors ir yra nuostovusis vyksmas, tačiau jis nėra ergodinis, nes $\lim\limits_{\tau\to\infty} k(\tau)$ neartėja į nulį, todėl jam bendruoju atveju statistinio vidurkinimo negalime pakeisti vidurkinimu pagal laiką.

3.13. Vienmačio tikimybės tankio radimas

Tikimybė nuostoviajam vyksmui $X(t)$ patekti į intervalą $[x, x+\Delta x]$ lygi vienmačiam tikimybės tankiui $w(x)$, padaugintam iš intervalo pločio Δx Todėl dažnai vienmatis tikimybės tankis dar vadinamas amplitudžių skirstiniu. Panagrinėsime realizaciją, kuri parodyta 3.6 pav.

Tikimybę, kad atsitiktinio vyksmo $X(t)$ vertės pateks į intervalą nuo x iki $x+\Delta x$, galime surasti skaičiuodami santykį T_X/T, čia $T_x = \sum\limits_i \Delta t_i$ – suminė atsitiktinio vyksmo $X(t)$ buvimo intervale $[x, x+\Delta x]$ trukmė. Kuo didesnė bendra realizacijos trukmė T, tuo santykis T_X/T tiksliau atitiks



3.6 pav. Vienmačio tikimybės tankio radimas.

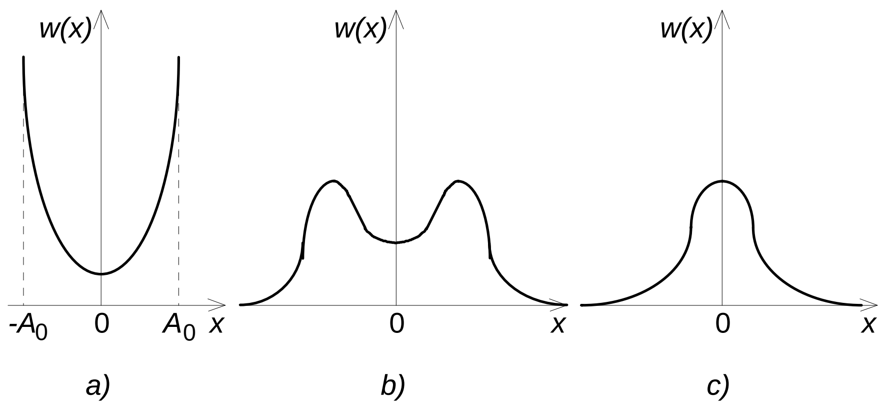
nagrinėjamojo vyksmo tikimybę patekti į intervalą [x, $x+\Delta x$]. Šį tvirtinimą galime užrašyti taip:

$$P[x \le X(t) < x + \Delta x] = \lim_{T \to \infty} \frac{T_x}{T} \approx w(x)\Delta x. \qquad (3.13.1)$$

Iš čia

$$w(x) \approx \frac{P[x \le X(t) < x + \Delta x]}{\Delta x}$$

arba ribiniu atveju, kai $\Delta x \to 0$, gauname:



3.7 pav. Tikimybės tankio grafikai: a) harmoninio signalo $x(t)=A_0\cos \omega t$; b) harmoninio signalo ir atsitiktinio vyksmo sumos; c) atsitiktinio vyksmo.

$$w(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P[x \le X(t) \le x + \Delta x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{T \to \infty} \frac{T_x}{T \Delta x}. \qquad (3.13.2)$$

Vadinasi, nuostoviojo vyksmo vienmačio tikimybės tankio radimas nusakomas santykio T_X/T radimu. Gali būti labai įvairūs santykio T_X/T radimo būdai. Vienas iš paprasčiausių būdų – tai santykio T_X/T nustatymas pagal elektrinio vamzdelio švytėjimo ryškį, nesant skleidimo.

3.7 pav. pavaizduoti kai kurių vyksmų tikimybės tankiai.

Kaip išplaukia iš normavimo sąlygos, bendras plotas tarp $w(x)$ kreivės ir abscisių ašies turi būti lygus 1.

3.14. Didžiųjų skaičių dėsnis

Nagrinėdami atsitiktinį įvykį A, kurio tikimybė $P(A)$, apskritai negalime iš anksto pasakyti, ar įvykis A įvyks, ar neįvyks nagrinėjamajame eksperimente. Bet, kai tikimybė $P(A)$ yra artima 1 arba 0, jau daugiau galime pasakyti apie jo įvykimą arba neįvykimą atskirame eksperimente. Jei $P(A)$=0,01, tai įvykis A vidutiniškai įvyks vieną kartą iš 100 bandymų. Jei $P(A)$=0,99, tai iš 100 bandymų įvykis A vidutiniškai neįvyks tik vieną kartą. Vadinasi, pirmuoju atveju įvykį A galime laikyti praktiškai negalimu, o antruoju – praktiškai būtinu.

Įvykiai, kurių tikimybės artimos 1 arba 0, pasitaiko tiriant daugelį atsitiktinių reiškinių. Tegul atliekame kažkokio fizikinio dydžio n nepriklausomų matavimų. Kiekvieno matavimo rezultatą x_i galime nagrinėti kaip atsitiktinį dydį, kurio vidurkis m ir dispersija σ^2. Apskaičiuosime matavimo rezultatų aritmetinio vidurkio

$$A = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (3.14.1)$$

statistinį vidurkį m_x ir dispersiją σ_x^2. Akivaizdu, kad

$$m_x = M(A) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{n\,m}{n} = m. \qquad (3.14.2)$$

Skaičiuojant atsitiktinio dydžio A dispersiją, jį centruojame:

$$\mathring{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathring{x}_i \quad ;$$

čia $\mathring{x}_i = x_i - m$. Tada

$$\sigma_x^2 = D(A) = M\left(\mathring{A}^2\right) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathring{x}_i\right)^2 = \frac{n\,\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \qquad (3.14.3)$$

Vadinasi, n nepriklausomų, vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių aritmetinio vidurkio dispersija yra n kartų mažesnė už kiekvieno dydžio dispersiją, o vidutinis kvadratinis nuokrypis – $\sqrt{n}$ kartų mažesnis už kiekvieno dydžio vidutinį kvadratinį nuokrypį. Kai n didelis, tai dispersija yra maža, t.y. atsitiktinis dydis A yra beveik pastovus ir lygus m.

Apskritai, kai tiriame daug atsitiktinių reiškinių, konkretūs atskirų atsitiktinių reiškinių ypatumai dažnai beveik neturi įtakos tokių reiškinių vidutiniam rezultatui: atsitiktiniai nuokrypiai, pasitaikantys atskirais atvejais, vieni kitus išlygina. Vidurkių pastovumas ir sudaro vadinamojo didžiųjų skaičių dėsnio turinį plačiąja prasme.

Nagrinėjant matematiškai, didžiųjų skaičių dėsnis yra susijęs su atsitiktinių dydžių konvergavimo sąvokomis. Apibrėšime tiksliau šią sąvoką. Tarkime, kad $\{X_n\}$ yra bet kokių atsitiktinių dydžių seka. Pažymėkime jos dalines sumas

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad .$$

Jei egzistuoja tokia realiųjų skaičių seka m_n ir tokia teigiamų skaičių seka n, kad

$$Y_n = \frac{S_n - m_n}{n}$$

konverguoja pagal tikimybę į 0, tai sakoma, kad seka $\{X_n\}$ tenkina didžiųjų skaičių dėsnį su normavimo konstantomis m_n ir n.

Tai galime apibrėžti ir taip:

> Atsitiktinių dydžių Y_n seka konverguoja pagal tikimybę į 0, kai bet kuriam ε>0 galioja lygybė
>
> $$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0 \quad .$$

Šis apibrėžimas nereiškia, jog atsitiktinis dydis Y_n konverguoja į nulį klasikine prasme. Jeigu atsitiktinių dydžių Y_n seka konverguoja pagal tikimybę į nulį, tai iš to dar neseka, kad kiekvienam ε galima rasti tokį baigtinį $n=n_0$, kad visiems $n>n_0$ būtų patenkinta nelygybė $|Y_n|\le\varepsilon$. Iš konvergavimo pagal tikimybę išplaukia tik, kad įvykio $|Y_n|>\varepsilon$ tikimybė artėja į nulį, kai $n\to\infty$.

Čebyševo nelygybė.

Aptariant atsitiktinių dydžių dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį, nurodėme, kad šios charakteristikos apibūdina atsitiktinio dydžio verčių sklaidą, t.y. nuokrypį nuo vidurkio. Tačiau jos tiesiogiai neduoda kiekybinių įverčių, su kokia tikimybe galimi dideli nuokrypiai. Į šį klausimą atsako Čebyševo nelygybė. Be to, šį nelygybė sudaro didžiųjų skaičių dėsnio pagrindą. Čebyševo nelygybės įrodymą pradėsime nuo atsitiktinio dydžio X dispersijos išraiškos:

$$\sigma_x^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2\,p_i\ . \qquad (3.14.4)$$

Imkime bet kurį teigiamą skaičių ε. Jei dispersijos išraiškoje (3.14.4) atmesime visus narius, kurie $|x_i-m_x|\le\varepsilon$, ir paliksime tik tuos, kurie $|x_i-m_x|>\varepsilon$, tai lygybės (3.14.4) dešinės pusės suma tik sumažės, t.y.

$$\sigma_x^2\ge\sum_{|x_i-m_x|>\varepsilon}(x_i-m_x)^2\,p_i\ .$$

Ši suma dar labiau sumažės, jei dydį $(x_i-m_x)^2$ pakeisime mažesniu dydžiu ε^2:

$$\sigma_x^2\ge\varepsilon^2\sum_{|x_i-m_x|>\varepsilon}p_i$$

arba

$$\frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}\ge\sum_{|x_i-m_x|>\varepsilon}p_i\ .$$

Čia po sumos ženklu yra atsitiktinio dydžio tikimybės, nurodančios, kad atsitiktinio dydžio X vertės x_i nukrypsta nuo vidurkio m_x į vieną ar kitą pusę dydžiu, didesniu už ε. Pagal tikimybių sudėties (sąjungos) taisyklę ši tikimybių suma atitinka tikimybę, kad atsitiktinis dydis *X* įgys kokią nors vertę, nutolusią nuo vidurkio daugiau už ε, t.y. apibūdina tikimybę

$$P(|X - m_x| > \varepsilon) \geq \sum_{|x_i - m_x| > \varepsilon} p_i \cdot \qquad (3.14.5)$$

Vadinasi,

$$P(|X - m_x| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}. \qquad (3.14.6)$$

Gautoji nelygybė vadinama ***Čebyševo nelygybe***. Ji leidžia įvertinti tikimybę, kad atsitiktinis dydis *X* nukryps nuo vidurkio daugiau už nurodytą dydį ε, jei tik yra žinoma dydžio *X* dispersija.

Pavyzdys. Jei matuojamojo kabelio ilgio vidurkis lygus 200 m, o vidutinis kvadratinis nuokrypis lygus σ=5 m (σ^2=25 m^2). Tada vieno matuojamojo kabelio ilgio nuokrypio, didesnio už 3 m, tikimybė yra didesnė už 1/2 (tiksli tikimybės vertė gali būti apskaičiuota tik žinant tikimybių skirstinį). Tačiau 100 kabelių ilgių aritmetinio vidurkio vidutinis kvadratinis nuokrypis, kaip tai buvo parodyta ankščiau (žr. formulę (3.14.3)), bus $\sqrt{100}$ =10 kartų mažesnis, negu atskirai paimto matavimo rezultato, t.y. jis bus 0,5 m. Todėl pagal Čebyševo nelygybę (3.14.6)

$$P(|A - 200| > 3) \leq \frac{(0{,}5)^2}{3^2} = \frac{1}{36} \approx 0{,}03 \ .$$

Vadinasi, nuokrypio nuo 100 matavimų rezultatų aritmetinio vidurkio, didesnio už 3 m, tikimybė yra labai maža. Šiuo atveju Čebyševo nelygybę galime užrašyti taip:

$$P(|A - m| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}, \qquad (3.14.7)$$

čia σ^2 – vieno matavimo rezultato dispersija. Anksčiau aptartam pavyzdžiui gauname:

$$P(|A - 200| > \varepsilon) \leq \frac{25}{\varepsilon^2 n}.$$

Dydį ε galime parinkti mažą, pavyzdžiui, ε=0,5 m, tada

$$P\left(|A-200|>0{,}5\right)\leq\frac{100}{n}.$$

Jei matavimų skaičius n yra labai didelis, tai nelygybės dešinė pusė gali būti kiek norima maža. Pavyzdžiui, kai n=10000, ji lygi 0,01.

Didžiųjų skaičių dėsnis.

Tokiu būdu, iš anksčiau pateiktų rezultatų, galime apibrėžti vieną iš pagrindinių tikimybių teorijos teoremų, taip vadinamą didžiųjų skaičių dėsnį:

Jei atsitiktiniai dydžiai $X_1,...,X_n$ yra nepriklausomi ir jie turi tą patį vidurkį m ir dispersiją σ^2, tai aritmetinis vidurkis

$$A=\frac{S_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}, \tag{3.14.8}$$

esant pakankamai dideliems n, su tikimybe 1 kiek norima mažai skirsis nuo statistinio vidurkio m.

Šio dėsnio esmę sudaro tai, kad didelio skaičiaus atsitiktinių dydžių aritmetinio vidurkio rezultatų sklaida yra labai nedidelė, kai tuo tarpu atskiras atsitiktinis dydis gali įgyti vertes, labai nutolusias nuo statistinio vidurkio. Didžiųjų skaičių dėsnis yra gana svarbus praktiškai taikant tikimybių teoriją. Kai jis tinka, su atsitiktiniais dydžiais, kurie yra didelio skaičiaus atsitiktinių reiškinių vidutiniai rezultatai, dažniausiai galime atlikti veiksmus kaip su pastoviaisiais dydžiais.

Iki šiol nagrinėjome atvejį, kai atsitiktiniai dydžiai $X_1,...,X_n$ turėjo tą patį vidurkį ir tą pačią dispersiją. Tačiau didžiųjų skaičių dėsnis taikomas ir esant gerokai bendresnėms prielaidoms. Tarkime, kad nepriklausomų atsitiktinių dydžių X_1, ..., X_n vidurkiai yra skirtingi ir lygūs m_1, ..., m_n, atitinkamai jų dispersijos yra taip pat skirtingos: σ_1^2, ..., σ_n^2. Tada atsitiktinio dydžio

$$A=\frac{S_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

vidurkis $$m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m_i\ .$$

Pagal Čebyševo nelygybę galime užrašyti, kad

$$P(|A-m|>\varepsilon)\leq\frac{\sigma_A^2}{\varepsilon^2}, \qquad (3.14.9)$$

čia σ_A^2 – atsitiktinio dydžio A dispersija:

$$\sigma_A^2=\frac{1}{n^2}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2 .$$

Nors dispersijos σ_i^2 yra skirtingos, tačiau laikysime, kad jos yra apibrėžtos, t.y., kad kiekviena iš jų yra mažesnė už tam tikrą teigiamą skaičių σ_0^2 : $\sigma_i^2<\sigma_0^2$, tada

$$\sigma_A^2<\frac{1}{n^2}n\sigma_0^2=\frac{\sigma_0^2}{n} .$$

Iš čia Čebyševo nelygybę (3.14.9) išreiškiame taip:

$$P(|A-m|>\varepsilon)<\frac{\sigma_0^2}{n\varepsilon^2}. \qquad (3.14.10)$$

Nepriklausomai nuo to, koks parinktas mažas dydis ε, dešinę nelygybės pusę galime gauti kiek norima mažą, jei tik atsitiktinių dydžių skaičius n bus pakankamai didelis.

Dabar galime apibrėžti gerokai ***bendresnį*** didžiųjų skaičių dėsnį:

Jei atsitiktiniai dydžiai $X_1,\ldots,X_n$ yra nepriklausomi, o jų kiekvieno dispersija neviršija tam tikro teigiamo dydžio, tai, esant pakankamai dideliam atsitiktinių dydžių skaičiui n, jų aritmetinis vidurkis

$$A=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

su tikimybe, kiek norima artima 1, turės, kiek norima, mažus nuokrypius nuo statistinio vidurkio m.

Bernulio didžiųjų skaičių dėsnis.

Simboliu $\{X_n=k/n\}$ pažymėkime seką diskrečiųjų atsitiktinių dydžių, kurių tikimybės aprašomos Bernulio (binomine) formule:

$$P\left(X_n=\frac{k}{n}\right)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, \tag{3.14.11}$$

čia $0<p<1$, o k įgyja vertes 0, 1, 2, ..., n. Kadangi binominio skirstinio atveju, kad iš n bandymų įvykis A, kurio tikimybė lygi p, pasikartos k kartų, vidurkis

$$M(k)=np,$$

tai atsitiktinio dydžio $X_n=k/n$ vidurkis

$$M(X_n)=M\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{np}{n}=p, \tag{3.14.12}$$

t.y. vidurkis $M(X_n)$ lygus įvykio A pasirodymo tikimybei.

Bernulio didžiųjų skaičių dėsnis apibrėžiamas taip:

> Bernulio formule (3.14.11) apibrėžta atsitiktinių dydžių seka $\{X_n-p\}$ pagal tikimybę artėja į nulį, t.y. kiekvienam $\varepsilon>0$
>
> $$\lim_{n\to\infty} P(|X_n-p|>\varepsilon)=0 \tag{3.14.13}$$

Iš pradžių apskaičiuosime atsitiktinio dydžio X_n dispersiją:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2&=M[X_n-M(X_n)]^2=M\left(\frac{k}{n}-p\right)^2=\\&=\frac{M(k-np)^2}{n^2}=\frac{np(1-p)}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}.\end{aligned} \tag{3.14.14}$$

Bernulio didžiųjų skaičių dėsnį įrodome, pasinaudoję Čebyševo nelygybe:

$$P(|X_n-m_x|>\varepsilon)=P(|X_n-p|>\varepsilon)\le\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}<\frac{1}{n\varepsilon^2}. \tag{3.14.15}$$

Iš šios nelygybės ir seka, kad

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - p\right| > \varepsilon\right) = 0 .$$

Kadangi santykis k/n yra įvykio A statistinis dažnis, tai Bernulio didžiųjų skaičių dėsnis tvirtina: jeigu n yra pakankamai didelis, tai tikimybė, kad įvykio A statistinis dažnis skirsis nuo įvykio A tikimybės p, yra artima nuliui.

Pastaba. Atkreipsime dėmesį į vieną ypatingą aplinkybę. Tarkime, kad matuojame tam tikrą dydį a. Pakartoję vienodomis sąlygomis n kartų matavimus, gausime tam tikrus nevisiškai sutampančius skaičius: x_1, x_2, ..., x_n. Kaip dydžio a apytikslę vertę imame aritmetinį vidurkį

$$a \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Klausimas: Ar galima gauti kiek norima tikslią vertę a, jei atlikti pakankamai didelį matavimų skaičių?

Taip bus tik tada, jei matuojant nėra sisteminės matavimo paklaidos, t.y. jei

$$M(X_i)=a \quad (\text{kai } i=1, 2, ..., n)$$

ir jei pačios matavimų vertės neturi neapibrėžties; kitais žodžiais tariant, kad matuojant atskaitome tas prietaiso parodymo vertes, kurias iš tikrųjų turi matuojamasis dydis. Jei matavimo prietaiso rodmens paklaida yra skalės padala δ, akivaizdu, kad šiuo atveju aritmetinis vidurkis turės tą pačią paklaidą δ kaip ir kiekviena išmatuotoji vertė x_i.

Vadinasi, jei prietaiso matavimo paklaida yra tam tikras dydis δ, tai taikant didžiųjų skaičių dėsnį, t.y. didinant matavimų skaičių n, nėra ko tikėtis padidinti matavimo tikslumą – matavimo paklaida aprašo atsitiktinių dydžių sumos parametrų įvertinimo tikslumą, tačiau nepadidina matavimo prietaiso tikslumo.

3.15. Centrinė ribinė teorema

Centrinėje ribinėje teoremoje nagrinėjamos sąlygos, kurioms esant atsitiktinių dydžių suma yra pasiskirsčiusi pagal normalųjį skirstinį. Praktikoje šios sąlygos būna gana dažnai išpildytos, todėl normalusis skirstinys yra labai svarbus. Normaliuoju skirstiniu pavyksta gerai aprašyti atsitiktinių dydžių sumą, kai ji gaunama sumuojant pakankamai didelį skaičių nepriklausomų (arba silpnai priklausomų) atsitiktinių dydžių, kurių kiekvieno įtaka sumos skirstiniui yra nedidelė. Šiuo atveju dėmenų tikimybių skirstiniai gali būti įvairūs, net ir visų skirtingi. Kaip tik tokia situacija ir yra tipiška, stebint realius fizikinius atsitiktinius dydžius.

Iš to, kas čia pasakyta, negalime daryti išvados, kad bet kokių atsitiktinių dydžių sumą galime laikyti pasiskirsčiusią pagal normalųjį skirstinį. Jei nagrinėsime atsitiktinių dydžių sumą, kurioje dominuoja vienas arba keli atsitiktiniai dydžiai, tai tokios sumos tikimybių skirstinys gali gerokai skirtis nuo normaliojo skirstinio. Atsitiktinių dydžių, aprašomų skirstiniais, kuriems neegzistuoja momentai, suma taip pat netenkina normaliojo skirstinio. Pavyzdžiui, atsitiktinių dydžių, turinčių Koši skirstinius, suma visados turi taip pat Koši skirstinį ir neaprašoma normaliuoju skirstiniu. Yra ir dar keletas išimčių.

Čia pateiksime tik vieną iš centrinės ribinės teoremos įrodymų. Jų yra gana daug ir įvairių tiek apibrėžimo prasme, tiek ir jų įrodymo būdų.

Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai X_1, X_2, ..., X_n yra nepriklausomi ir turi vienodus skirstinius su vienodais vidurkiais m_i=m ir vienodomis dispersijomis $\sigma_i^2 = \sigma^2$.

Sudarome šių atsitiktinių dydžių sumą:

$$S_{nx} = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{3.15.1}$$

ir apskaičiuojame jos vidurkį ir dispersiją:

$$M(S_{nx}) = M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = nm \tag{3.15.2}$$

$$D(S_{nx}) = M\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = M\left[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - m)\right]^2 = n\sigma^2 . \tag{3.15.3}$$

Užrašome normuotą sumą

$$S_n = \frac{S_{nx} - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i - nm\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m). \tag{3.15.4}$$

Iš pastarosios lygybės turime, kad

$$M(S_n)=0, \quad D(S_n)=M\left(S_n^2\right)=\sigma_{S_n}^2=1. \tag{3.15.5}$$

Centrinė ribinė teorema: Kai $n\to\infty$, normuotos sumos S_n tikimybių pasiskirstymo funkcija $F_{Sn}(x)$ artėja prie normaliojo skirstinio, kurio vidurkis m=0 ir dispersija σ^2=1, pasiskirstymo funkcijos

$$\lim_{n\to\infty} F_{S_n}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\,, \tag{3.15.6}$$

arba kurios charakteringoji funkcija

$$\lim_{n\to\infty}\Theta_{S_n}(u)=\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Vienas efektyviausių, nagrinėjant atsitiktinių dydžių sumos tikimybių skirstinius, yra charakteringųjų funkcijų taikymas.

Užrašome centruotojo atsitiktinio dydžio (X_i–m) charakteringąją funkciją:

$$\Theta_i(u)=M\left(\mathrm{e}^{ju(X_i-m)}\right)=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{j^k\mu_k}{k!}u^k\,; \tag{3.15.7}$$

čia $\mu_k=M\left[(X_i-m)^k\right]$ – atsitiktinio dydžio X_i k-tos eilės centriniai momentai (sumavimas pradedamas nuo k=2, nes μ_1=0).

Tada normuoto atsitiktinio dydžio $(X_i-m)/\left(\sigma\sqrt{n}\right)$ charakteringoji funkcija lygi

$$\Theta_i\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{2}}\right)=M\left(\mathrm{e}^{ju\frac{X_i-m}{\sigma\sqrt{n}}}\right)=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{j^k\mu_k}{\sigma^k n^{k/2}k!}u^k\,. \tag{3.15.8}$$

Kaip buvo parodyta anksčiau, nepriklausomų dydžių sumos charakteringoji funkcija lygi atskirų dėmenų charakteringųjų funkcijų sandaugai, o kai šie atsitiktiniai dydžiai turi vienodus tikimybių skirstinius, ji išreiškiama šitaip:

$$\Theta_{S_n}(u) = \Theta_1^n\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{j^k \mu_k u^k}{\sigma^k n^{k/2} k!}\right)^n =$$
$$= \left(1 - \frac{u^2}{2n} - \frac{j\mu_3 u^2}{6\sigma^3 n^{3/2}} + \frac{\mu_4 u^4}{24\sigma^4 n^2} - \ldots\right)^n, \tag{3.15.9}$$

čia pasinaudojome lygybe $\mu_2=\sigma^2$, t.y. kad antros eilės vienmatis centrinis momentas yra dispersija. Kai $n\to\infty$, gauname 1^∞ neapibrėžtį. Šios neapibrėžties išaiškinimui išnagrinėsime normuotos atsitiktinių dydžių sumos charakteringosios funkcijos $\Theta_{S_n}(u)$ logaritmą:

$$\ln\left[\Theta_{S_n}(u)\right] = n\ln\left(1 - \frac{u^2}{2n} - \frac{j\mu_3 u^2}{6\sigma^3 n^{3/2}} + \frac{\mu_4 u^4}{24\sigma^4 n^2} - \ldots\right). \tag{3.15.10}$$

Išdėstome šį logaritmą eilute [$\ln(1+y)\approx y$]:

$$\ln\left[\Theta_{S_n}(u)\right] = -\frac{u^2}{2} - \frac{j\mu_3 u^2}{6\sigma^3 n^{1/2}} + \frac{\mu_4 u^4}{24\sigma^4 n} - \ldots \quad . \tag{3.15.11}$$

Kai $n\to\infty$, gauname

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left[\Theta_{S_n}(u)\right] = -\frac{u^2}{2} \quad , \tag{3.15.12}$$

iš čia

$$\lim_{n\to\infty} \Theta_{S_n}(u) = \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}. \tag{3.15.13}$$

Gautoji išraiška atitinka normaliojo skirstinio charakteringąją funkciją

$$\Theta\ (u) = \mathrm{e}^{jmu - \frac{1}{2}u^2\sigma^2},$$

kai m=0 ir σ^2=1. Taigi gavome normalųjį skirstinį, kurio parametrai m=0 ir σ^2=1. Todėl galime užrašyti, kad atsitiktinių dydžių normuotos sumos S_n tikimybės tankis $w(S_n)$ ir pasiskirstymo funkcija $F_{Sn}(x)$ turės šias išraiškas:

$$\lim_{n\to\infty} w\left(S_n\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{S_n^2}{2}} \tag{3.15.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_{S_n}\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{S_n^2}{2}}\, dS_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\, dy\,. \tag{3.15.15}$$

Imkime, kad s_1 ir s_2 yra bet kurie skaičiai: $s_1<s_2$. Tada iš pastarosios lygybės galime užrašyti:

$$\lim_{n\to\infty} P(s_1 < S_n < s_2) = \lim_{n\to\infty}\left[F_1(s_2) - F_1(s_1)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\,. \tag{3.15.16}$$

Iš (3.15.4) ir (3.15.16) turime:

$$P(s_1 < S_n < s_2) = P\left(s_1 < \frac{S_{nx} - nm}{\sigma\sqrt{n}} < s_2 \right)\,.$$

Įvedę žymėjimus:

$$x_1 = s_1\sigma\sqrt{n} + nm, \quad x_2 = s_2\sigma\sqrt{n} + nm, \tag{3.15.17}$$

lygybę (3.15.16) galime užrašyti tokiu pavidalu:

$$\lim_{n\to\infty} P(s_1 < S_{nx} < s_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \qquad ; \tag{3.15.18}$$

čia s_1 ir s_2 apskaičiuojami pagal formules (3.15.17). Vadinasi, atsitiktinis dydis S_{nx}, apibrėžtas formule (3.15.1), yra asimptotiškai normalusis, kurio vidurkis lygus nm, o dispersija lygi $n\sigma^2$.

Visiškai panašiai galime įrodyti ir bendresnį atvejį, kai sumuojamieji atsitiktiniai dydžiai turi skirtingus skirstinius ir atitinkamai skirtingus vidurkius ir dispersijas.

4. MATEMATINĖS STATISTIKOS ELEMENTAI

4.1. Bendrosios žinios

Skaitinė arba kiekybinė informacija – tai ***duomenys***, o ***statistika*** yra duomenų rinkimo, sutvarkymo ir analizavimo mokslas. Duomenys – tai daugybė atskirų faktų, kurie sudaro statistinę informaciją. Jei pradiniai duomenys yra iškreipti, tai išvados, padarytos remiantis tokiais duomenimis, teturi menką vertę arba neturi jos iš viso.

Atrodytų, kad rinkti duomenis yra labai paprasta, tačiau taip nėra. Surinkti patikimus ir naudingus duomenis – tai dažniausiai pats sunkiausias statistinio tyrimo etapas. Kiekvienas statistinis teiginys tiesiogiai ar netiesiogiai apibūdina tam tikrą individų ar objektų grupę. Statistikoje šis individų ar objektų reiškinys vadinamas ***aibe*** (kartais *populiacija*). Tiksliai apibūdinti tiriamąją aibę yra būtina, kad žinotume apie ką kalbame. Atrodytų, kad tai savaime suprantamas dalykas, tačiau dažnai tai nepadaroma – kartais dėl nerūpestingumo, kartais dėl to, kad iš tikrųjų to nė neįmanoma padaryti. Pavyzdžiui, kas turima galvoje, kai sakoma “*Lietuvos gyventojai*”. Ar čia įskaitomi Lietuvoje laikinai gyvenantys užsieniečiai, ar įskaitomi Lietuvos gyventojai, kurie šiuo metu yra išvykę į kitas šalis? Klausimų gali būti ir daugiau.

Matematinė statistika nagrinėja stebėjimo duomenų matematinio aprašymo ir analizavimo būdus.

Tipiškas matematinės statistikos uždavinys gali būti nusakytas šitaip. Sakysime, kad turime aibę objektų, kuriuos tiriame pagal kuriuos nors požymius, o pačius požymius galime apibūdinti skaičiais. Visą tiriamųjų elementų aibę įprasta vadinti ***visuotine aibe***, arba tiesiog aibe, jei šio termino vartojimas aukščiau minėtąją prasme nekelia abejonių. Visuotinės aibės elementus galime tirti įvairių požymių atžvilgiu. Paprastai tiriamojo požymio pasiskirstymas visuotinėje aibėje nėra žinomas. Norint jį nustatyti, reikėtų ištirti visus šios aibės objektus. Toks tyrimas vadinamas ***ištisiniu tyrimu***. Tai gali pareikalauti daug darbo ir lėšų, o kartais toks tyrimas iš principo nėra galimas. Ištisinio tyrimo alternatyva yra ***pasirinktinis tyrimas***, t.y. elgiamasi šitaip: ***atsitiktinai*** parenkama visuotinės aibės objektų dalis, ištiriamas reiškinio požymio pasiskirstymas tame poaibyje ir iš jo sprendžiama apie to požymio pasiskirstymą visuotinėje aibėje. Statistikoje ***baigtinis poaibis, sudarytas iš visuotinės aibės elementų , vadinamas imtimi***. Imtis dažnai apibrėžiama ir taip:

> Statistiniam tyrimui pasirinkta tiriamųjų objektų dalis vadinama ***imtimi***.

Taikant matematinės statistikos metodus, galima įvertinti tiriamojo požymio pasiskirstymą visuotinėje aibėje, kai žinomas požymio pasiskirstymas imtyje. Matematinės statistikos metodai tinka tik tada, kai imtis yra ***reprezentatyvi***, t.y. kai ji teisingai atspindi tiriamojo požymio galimų verčių proporcijas visuotinėje aibėje. Imtį galima sudaryti įvairiai. Galima atsitiktinai paimti kurį nors visuotinės aibės objektą, po to grąžinti jį į visuotinę aibę ir toliau vėl atsitiktinai paimti bet kurį tos aibės objektą. Tačiau galime kiekvieno parinkto objekto į visuotinę aibę nebegrąžinti. Parinkimai gali būti nepriklausomi ir priklausomi.

Matematinėje statistikoje stengiamasi imtis aprašyti atsitiktinių dydžių terminais ir parametrais. Paprasčiausiu atveju tinka šitokia schema. Tiriame atsitiktinį dydį su nežinoma pasiskirstymo funkcija. Stebime tą dydį n kartų. Gauname n stebėjimo duomenų $-$ imtį. Iš jos reikia spręsti apie nežinomą pasiskirstymo funkciją. Didžioji dalis klausimų, kuriuos tenka spręsti matematinėje statistikoje, yra dviejų tipų.

1) ***Įverčių teorija***. Jos tikslas nurodyti būdus, kuriais galima būtų įvertinti stebimų atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkciją arba kitas skirstinių charakteristikas: vidurkį, dispersiją ir pan. Dažnai, remiantis kokiais nors teoriniais samprotavimais ar praktine patirtimi, galima teigti, kad pasiskirstymo funkcija yra žinomo analizinio pavidalo, bet priklauso nuo vieno ar kelių nežinomų parametrų. Reikia įvertinti tuos parametrus.

Pavyzdys. Metame lošimo kauliuką. Realūs lošimo kauliukai nėra visiškai simetriški. Iš stebėjimo duomenų, pavyzdžiui, reikia įvertinti keturių akučių atsivertimo tikimybę p. Suprantama, iš stebėjimo duomenų negalime tiksliai nusakyti nežinomų skirstinių charakteristikų, galime tik apytiksliai jas įvertinti.

2) ***Hipotezių tikrinimas***. Bet kokia prielaida apie stebimojo atsitiktinio dydžio skirstinį vadinama (***statistine***) ***hipoteze***. Reikia patikrinti, ar stebėjimo duomenys neprieštarauja tai prielaidai. Hipotezė H vadinama ***paprastąja***, kai ji yra sudaryta iš vieno elemento, ir ***sudėtingąja***, kai ji sudaryta iš daugiau elementų. Tikrinamoji paprastoji hipotezė dar vadinama ***nuline hipoteze H_0***. Priešingoji hipotezė vadinama alternatyva.

Grįškime prie minėto pavyzdžio apie lošimo kauliuką. Hipotezė $-$ ketvertuko atsivertimo tikimybė p_4=1/6 (kauliukas simetriškas) $-$ yra paprastoji, jos alternatyva yra $p_4 \neq 1/6$. Hipotezė $p_4 > 1/6$ yra sudėtingoji.

4.2. Imties elementų grupavimas ir vaizdavimas

Dažniausiai imtį sudaro skaičiai – kurių nors atsitiktinių dydžių vertės, kurias žymėsime $x_1, x_2, ..., x_n$.

Pavyzdys. Tris visiškai vienodus lošimo kauliukus metėme 75 kartus (n=75). Kaip atsitiktinį dydį nagrinėsime kiekvieno metimo trijų lošimo kauliukų atsivertusių akučių sumą s_i, kuri gali kisti nuo 3 iki 18. 4.1 lentelėje surašyti šių bandymų duomenys.

4.1 lentelė. Trijų lošimo kauliukų atsivertusių akučių sumos s_i bandymų duomenys.

Atsivertusių akučių suma									
Eil. Nr.	s_i vertė	Eil. Nr.	s_i vertė	Eil. Nr.	s_i vertė	Eil. Nr.	s_i vertė	Eil. Nr.	s_i vertė
1	12	16	10	31	8	46	11	61	13
2	16	17	11	32	7	47	13	62	9
3	11	18	9	33	11	48	11	63	11
4	18	19	13	34	11	49	8	64	13
5	9	20	10	35	14	50	9	65	8
6	10	21	10	36	6	51	9	66	8
7	14	22	13	37	11	52	12	67	10
8	8	23	15	38	13	53	13	68	7
9	12	24	11	39	10	54	13	69	10
10	12	25	9	40	9	55	12	70	9
11	11	26	14	41	11	56	10	71	10
12	10	27	10	42	10	57	10	72	8
13	11	28	12	43	9	58	14	73	15
14	10	29	12	44	9	59	14	74	11
15	4	30	10	45	12	60	12	75	10

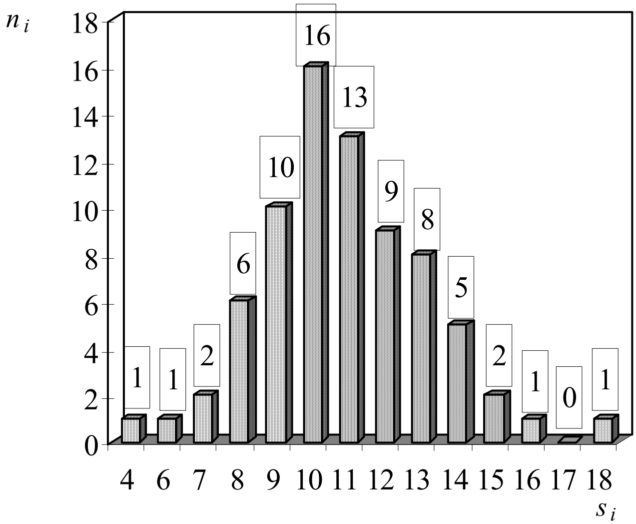
4.1 lentelėje pateikti skaičiai – tai nesutvarkyta informacija. Remiantis tokia nesutvarkyta informacija, sunku daryti kokias nors išvadas, ypač, kai skaičių yra šimtai ir tūkstančiai. Kaip glaustai perteikti visą šioje lentelėje esančią informaciją? Pirmasis būdas sutvarkyti duomenis – išdėstyti juos didėjimo tvarka. Didėjimo tvarka išrikiuota imtis vadinama ***sutvarkyta imtimi***. Tolimesnis imties tvarkymo veiksmas – ***imties grupavimas***, t.y. pateikti imties duomenis jų pasikartojimo dažnių lentele. 4.2 lentelėje pirmame stulpelyje nurodytos akučių sumos s_i įgyjamos vertės (kitais atvejais, ypač kai galimų verčių skaičius yra didelis, grupavimo intervalai, arba grupavimo intervalų centrai), antrame stulpelyje – imties verčių pasikartojimo dažnis n_i (arba į intervalą patekusių duomenų skaičius), o trečiojoje – imties verčių pasikartojimo santykinis dažnis $\nu_i=n_i/n$ (čia n – bendras imties duomenų skaičius). Iš šios lentelės matome, kad 16 kartų trijų lošimo kauliukų atsivertusių akučių suma buvo lygi 10; 8 kartus ji buvo lygi 13, nė karto akučių suma nebuvo lygi 3, 5 ir 17 ir pan. Kartais patogiau pasikartojimo dažnius n_i pateikti ne konkrečiais skaičiais, o santykiniais dažniais $\nu_i=n_i/n$, kurie dar gali būti išreiškiami procentais: $\nu_i\cdot 100\%$.

4.2 lentelė. 4.1 lentelės duomenų pasikartojimo lentelė
(santykinis dažnis pateiktas 0,001 tikslumu).

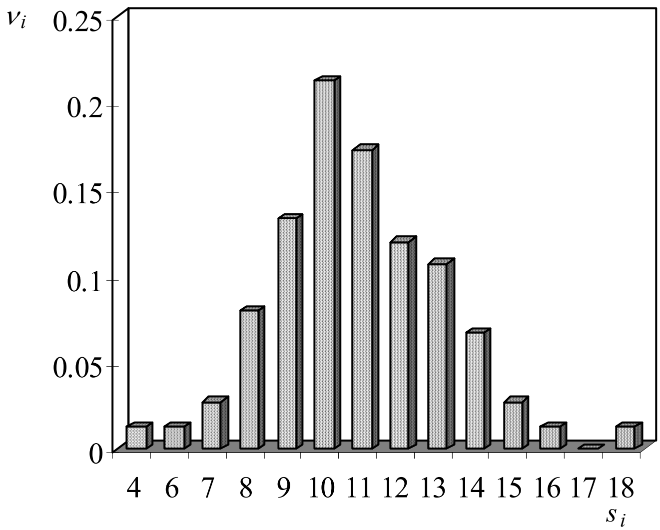
Akučių suma s_i	Pasikartojimų dažnis n_i	Santykinis dažnis ν_i	Akučių suma s_i	Pasikartojimų dažnis n_i	Santykinis dažnis ν_i
4	1	0,013	12	9	0,120
6	1	0,013	13	8	0,107
7	2	0,027	14	5	0,067
8	6	0,080	15	2	0,027
9	10	0,133	16	1	0,013
10	16	0,213	18	1	0,013
11	13	0,173			

Nors 4.2 lentelė yra gerokai akivaizdesnė už 4.1 lentelę, tačiau norėtųsi dar akivaizdesnio imties duomenų pateikimo. Todėl statistiniai duomenys labai dažnai vaizduojami grafiškai. Grafinis imties vaizdas yra diagrama arba histograma. 4.1 pav. pateikta taip vadinamoji stulpelinė diagrama, t.y. stulpeliais parodyta pasikartojimo dažnio n_i priklausomybė

nuo atsivertusių akučių sumos s_i. Stulpelio aukštis atitinka skaičių n_i, pastarasis kartais užrašomas virš stulpelio.



4.1 pav. Imties duomenų pasikartojimo dažnių stulpelinė diagrama.



4.2 pav. Imties duomenų histograma.

Kai nubraižyto stulpelio aukštis lygus santykiniam dažniui ν_i, tai gautasis grafikas (4.2 pav.) vadinamas histograma. Akivaizdu, diagrama ir histograma skiriasi tik vertikaliosios ašies masteliu. Histograma yra vienas paprasčiausių ir labai paplitusių statistinių duomenų pateikimo būdų. Statistikoje histogramos vartojamos dažniau nei diagramos, nes skirtingo duomenų skaičiaus diagramas daug sunkiau tarpusavyje palyginti negu histogramas. Histogramos rodo, kokiomis proporcijomis duomenys pasiskirstę pasirinktuose intervaluose. Vos žvilgtelėję į ją (4.2 pav.), iš karto matome bendrą vaizdą.

Jei atsitiktiniai dydžiai yra diskretieji, tai braižant histogramos stulpelius, tarp jų yra tam tikri tarpai. Kai atsitiktiniai dydžiai yra tolydieji, tada tarp jų grupavimo elementų tarpų nėra ir gretimi histogramos stulpeliai liečiasi vienas su kitu. Kai vertė patenka tiksliai ant dviejų stulpelių ribos, tai ji dažniausiai, jei nenurodyta atskirai, priskiriama prie dešiniojo stulpelio.

Kai duomenų intervalų skaičius yra nedidelis, kitas dažnai naudojamas santykinių dažnių (dažniausiai išreikštų procentais) vaizdavimo būdas yra skritulinė histograma. Skritulinė histograma ypač dažnai vartojama pateikiant gyventojų surašymo duomenis, juos apibūdinant tam tikrais požymiais.

4.3. Imčių charakteristikos

Čia aptarsime kai kurias imčių charakteristikas.

Imties pločiu vadinamas didžiausiosios ir mažiausiosios imties verčių skirtumas.

Imties plotį žymėsime raide d:

$$d = s_{\max} - s_{\min}. \tag{4.3.1}$$

4.2 lentelėje pateikto pavyzdžio imties plotis

$$d = 18 - 4 = 14 .$$

Imties plotis – vienas iš imties sklaidos charakteristikų.

Imties centru vadinamas didžiausiosios ir mažiausiosios imties verčių aritmetinis vidurkis.

Imties centras – taško, apie kurį išsidėsčiusios imties vertės, skaitinė charakteristika:

$$c = \frac{1}{2}(s_{\min} + s_{\max}). \tag{4.3.2}$$

4.2 lentelėje pateikto pavyzdžio imties centras

$$c = \frac{1}{2}(4 + 18) = 11.$$

Imties mediana yra kita svarbi, dažnai vartojama skaitinė imties duomenų charakteristika. Norėdami ją rasti, pirma turime išdėstyti gautus duomenis didėjimo tvarka. Po to, imame skaičių, esantį šios rikiuotės viduryje. Šis skaičius ir yra ***mediana***. Galimi du atvejai.

a) Bendras duomenų skaičius n yra nelyginis. Vidurinio skaičiaus numeris yra $(n+1)/2$, todėl tas skaičius ir yra mediana. b) Skaičius n yra lyginis. Turime du vidurinius skaičius, kurių numeriai yra $n/2$ ir $n/2+1$. Mediana yra tų skaičių vidurkis.

Pavyzdžiui, turint pasikartojimo dažnių lentelę (4.2.lentelę), nebereikia išdėstyti imties duomenų didėjimo tvarka, šioje lentelėje tai jau atlikta. Bendras 4.2 lentelės duomenų skaičius n=75, todėl sąraše yra vienintelis vidurinis numeris. Tai (75+1)/2=38. Taigi žinome, kad mediana lygi 38-ajam taip sutvarkyto sąrašo skaičiui (nereikėtų painioti – mediana yra ne 38, o 38-asis skaičius tame sąraše) $\hat{s}_{1/2}=11$. Tai reiškia, kad pusė akučių sumos verčių yra lygios 11 arba mažiau, o kita pusė verčių lygi 11 arba daugiau.

Gana dažna klaida yra medianos (vidurio) ir vidurkio painiojimas. Mediana perskiria surūšiuotus duomenis didėjimo tvarka į dvi dalis: apatinę pusę ir viršutinę pusę.

Išsiaiškinę imties "apatinės pusės" ir "viršutinės pusės" prasmę, galime apibrėžti kvartilius. Pirmasis kvartilis $\hat{s}_{1/4}$ yra apatinės pusės mediana, o trečiasis kvartilis $\hat{s}_{3/2}$ yra viršutinės pusės mediana, t.y. mediana padalija imties duomenis į dvi puses, o kvartiliai – padalija duomenis į ketvirčius. Tai vaizdžiai iliustruoja 4.3 pav. pateiktos sutvarkytas imties padalijimas.

Nors nemažą duomenų užtenka apibūdinti čia ką tik minėtais skaičiais: mažiausioji duomenų vertė, pirmasis kvartilis, mediana, trečiasis kvartilis ir didžiausioji duomenų vertė, tačiau pagrindinės ir dažniausiai vartojamos imties skaitinės charakteristikos yra imties vidurkis ir dispersija.

25% imties duomenų verčių	25% imties duomenų verčių	25% imties duomenų verčių	25% imties duomenų verčių		
$s_{\min}$	$\hat{s}_{1/4}$	$\hat{s}_{1/2}$	$\hat{s}_{3/2}$	$s_{\max}$	s_i
(mažiausioji duomenų vertė)	(pirmasis kvartilis)	(mediana)	(trečiasis kvartilis)	(didžiausioji duomenų vertė)	

4.3 pav. Sutvarkytos imties padalijimas.

Imties $X_1, X_2, ..., X_n$ ***vidurkiu*** vadinamas aritmetinis vidurkis

$$\hat{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \ . \tag{4.3.3}$$

Sugrupuotos imties vidurkis apskaičiuojamas pagal formulę:

$$\hat{X} = \frac{1}{n}\left(s_1 n_1 + s_2 n_2 + ... + s_k n_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} s_i n_i \ , \tag{4.3.4}$$

čia k – imties padalijimo grupių (intervalų ir pan.) skaičius, s_i – imties i-tosios grupės vertė.

Imties $X_1, X_2, ..., X_n$ ***dispersija*** vadinama imties duomenų ir jos vidurkio skirtumų kvadratų suma, padalyta iš n–1.

Dispersiją žymėsime $\hat{\sigma}^2$, ji išreiškiama formule:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(X_1 - \hat{X}\right)^2 + \left(X_2 - \hat{X}\right)^2 + ... + \left(X_n - \hat{X}\right)^2\right] = \\ = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{X}\right)^2 \ . \tag{4.3.5}$$

Sugrupuotiems duomenims taikome formulę:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\left[\left(s_1 - \hat{X}\right)^2 n_1 + \left(s_2 - \hat{X}\right)^2 n_2 + \ldots + \left(s_k - \hat{X}\right)^2 n_k\right] = \\ = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\left(s_i - \hat{X}\right)^2 n_i \ . \tag{4.3.6}$$

Kartais (4.3.5) ir (4.3.6) formulėse vietoj $n-1$ imamas n, tačiau dalijant iš $n-1$, tiksliau įvertinama stebimo atsitiktinio dydžio dispersija.

Imties X_1, X_2, ..., X_n ***vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu*** arba standartiniu nuokrypiu vadinama kvadratinė šaknis iš imties dispersijos:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{X}\right)^2} \ . \tag{4.3.7}$$

Toliau pateiksime dar keletą labai svarbių imties charakteristikų.

Imties tikimybiniu skirstiniu vadiname atsitiktinio dydžio X sąlyginį skirstinį, nusakomą tikimybėmis

$$\hat{P}(X = X_i \mid X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n} \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{4.3.8}$$

Imties pasiskirstymo funkcija vadiname tikimybę

$$\hat{F}(x) = \hat{P}(X = x \mid X_1, \ldots, X_n) = \tag{4.3.9}$$

$$\frac{\{\textit{skaičius atsitiktinių dydžių } X_i\textit{, mažesnių už } x\}}{n} \ .$$

Imties charakteringąją funkciją aprašome formule:

$$\hat{\Theta}(u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{juX_i} \ . \tag{4.3.10}$$

Imties pradinius ir centrinius momentus atitinkamai išreiškiame taip:

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \, , \tag{4.3.11}$$

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{X}\right)^k \, . \tag{4.3.12}$$

Imties skirstinio ***asimetrijos ir eksceso koeficientai*** išreiškiami taip:

$$\hat{\gamma}_1 = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3} \, , \qquad \hat{\gamma}_2 = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} - 3 \, . \tag{4.3.13}$$

Imties koreliacijos funkcija

$$\hat{k}_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ik} - \hat{X}_i\right)\left(X_{jk} - \hat{X}_j\right). \tag{4.3.14}$$

Imties koreliacijos koeficientas

$$\hat{r}_{ij} = \frac{\hat{k}_{ij}}{\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j} \, . \tag{4.3.15}$$

Histograma yra imties ***tikimybės tankio*** atitikmuo:

$$\hat{w}(x) = \hat{w}(n_i) = \frac{n_i}{nh} \, ; \tag{4.3.16}$$

čia h − atsitiktinio dydžio skaidymo intervalo žingsnis (ilgis), n − bendras intervalų (žingsnių) skaičius, n_i − duomenų verčių skaičius i-tajame intervale.

Ankščiau apibrėžėme atsitiktinio dydžio X tikimybinio skirstinio charakteristikų imties atitikmenis. Norėdami įvertinti, kaip šie atitikmenys atitinka teorines charakteristikas, turime ištirti jų savybes. Kadangi imties atitikmenys yra atsitiktiniai dydžiai, tai jų savybes galime nusakyti tik tikimybiškai, t.y. nurodydami pasiskirstymo arba tikimybės tankio funkcijas, skaitines charakteristikas ir pan.

Skirdami tikslią skaitinę informaciją apie visuotinę aibę nuo imtimi grindžiamos statistinės informacijos, statistikai naudoja terminą ***parametras***, kai kalbama apie ištisinį tyrimą, ir terminą ***parametro įvertis***, kai duomenys yra gauti iš imties. Rasti parametrą dažniausiai yra labai sunku, o kartais ir neįmanoma.

Imties paklaida – tai parametro ir parametro įverčio skirtumas. Imties paklaidą sudaro atsitiktinė ir sistemingoji paklaida. ***Atsitiktinė paklaida*** atsiranda todėl, kad parametro įvertis negali suteikti visiškai tikslios informacijos apie visuotinę aibę, nes ji remiasi tik imtimi; ji priklauso nuo imties didumo. Sistemingąją paklaidą dažniausiai lemia ***imties iškreiptis***, atsirandanti dėl prasto jos sudarymo.

4.4. Matavimo paklaidų įvertinimas

Įvertindami imties vidurkį ir dispersiją, nurodėme, kad dispersija arba vidutinis kvadratinis nuokrypis apibūdina gautų duomenų sklaidą. Dabar aptarsime, kokią įtaką šita duomenų neapibrėžtis turi įvertinant tam tikrus parametrus.

Tarkime, kad norime surasti stačiakampio gretasienio tūrį V, kurio ilgis l, plotis d ir aukštis h, t.y. turime išmatuoti tris dydžius l_0, d_0 ir h_0, kurie ir apibrėžia tikrąjį tūrį:

$$V_0=l_0\cdot d_0\cdot h_0. \tag{4.4.1}$$

Žinant dydžių l_0, d_0 ir h_0 matavimo paklaidas, reikia surasti apskaičiuoto tūrio V_0 nustatymo paklaidą, t.y. žinant $\Delta l=l-l_0$, $\Delta d=d-d_0$ ir $\Delta h=h-h_0$, reikia surasti ΔV:

$$\Delta V=V-V_0=l\cdot d\cdot h-l_0\cdot d_0\cdot h_0=(l_0+\Delta l)\cdot(d_0+\Delta d)\cdot(h_0+\Delta h)-l_0\cdot d_0\cdot h_0\ . \tag{4.4.2}$$

Jei šioje išraiškoje paliksime tik pirmos eilės mažus dydžius ir atmesime narius, turinčius sandaugas $\Delta l\Delta d$, $\Delta l\Delta h$, $\Delta h\Delta d$ ir $\Delta l\Delta d\Delta h$, gausime:

$$\Delta V\cong d_0\cdot h_0\cdot\Delta l+l_0\cdot h_0\cdot\Delta d+l_0\cdot d_0\cdot\Delta h. \tag{4.4.3}$$

Padaliję abi puses iš $V_0=l_0\cdot d_0\cdot h_0$, turime:

$$\frac{\Delta V}{V_0}\approx\frac{\Delta l}{l_0}+\frac{\Delta d}{d_0}+\frac{\Delta h}{h_0}\,. \tag{4.4.4}$$

Išraišką (4.4.3) galime užrašyti bendresniu pavidalu:

$$\Delta V \approx \Delta l \frac{\partial V}{\partial l}\bigg|_{d_0, h_0} + \Delta d \frac{\partial V}{\partial d}\bigg|_{l_0, h_0} + \Delta h \frac{\partial V}{\partial h}\bigg|_{l_0, l_0}, \qquad (4.4.5)$$

nes

$$\frac{\partial V}{\partial l}\bigg|_{d_0, h_0} = d_0 h_0, \quad \frac{\partial V}{\partial d}\bigg|_{l_0, h_0} = l_0 h_0, \quad \frac{\partial V}{\partial h}\bigg|_{l_0, d_0} = l_0 d_0 .$$

Lygybė (4.4.5) rodo, kad nagrinėjamojo dydžio absoliučiosios paklaidos formulę bendruoju atveju galime gauti diferencijuojant ir diferencialą dx_i pakeičiant Δx_i arba išdėstant tiriamąjį dydį Teiloro eilute ir imant tik pirmos eilės mažus dydžius.

Tačiau dažniausiai nežinome, kokios yra tikrosios nustatomųjų dydžiu paklaidos. Daugelyje atvejų žinome tik skirstinio, aprašančio ieškomąjį dydį, vidutinį kvadratinį nuokrypį. Kaip, žinant atskiro parametro vidutinį kvadratinį nuokrypį, įvertinti suminio parametro neapibrėžtį?

Tarkime, kad reikia surasti dydį x, kuris priklauso mažiausiai nuo dviejų kintamųjų u ir v, kurie ir yra matuojami, t.y.

$$x=f(u,v). \qquad (4.4.6)$$

Galime laikyti, nors tai ne visados tikslu, kad labiausiai tikima x vertė yra išreiškiama aritmetiniais vidurkiais:

$$\hat{x} = f(\hat{u}, \hat{v}). \qquad (4.4.7)$$

Suminio x dydžio neapibrėžtis gali būti surasta, nagrinėjant atskirus matavimo duomenis:

$$x_i=f(u_i,v_i). \qquad (4.4.8)$$

Jei matavimo duomenų skaičius yra pakankamai didelis, tai suvidurkinus (4.4.8) išraiškos vertes, šis vidurkis sutaps su išraiška (4.4.7). Tokiu būdu, iš duomenų, aprašytų (4.4.7) ir (4.4.8) lygybėmis, apskaičiuojame x dispersiją:

$$\sigma_x^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{x})^2 . \qquad (4.4.9)$$

Visiškai panašiai, kaip buvo gauta išraiška (4.4.5), dydžio x pokyčius galime išreikšti taip:

$$x_i - \hat{x} \approx (u_i - \hat{u})\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_v + (v_i - \hat{v})\left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_u . \tag{4.4.10}$$

Iš (4.4.9) ir (4.4.10) galime išreikšti dydžio x dispersiją kintamųjų u ir v dispersijomis σ_u^2 ir σ_v^2:

$$\sigma_x^2 \approx \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(u_i-\hat{u})\frac{\partial x}{\partial u}+(v_i-\hat{v})\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(u_i-\hat{u})^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+(v_i-\hat{v})^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+2(u_i-\hat{u})(v_i-\hat{v})\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right]=$$

$$= \sigma_u^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\sigma_v^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+2k_{uv}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right). \tag{4.4.11}$$

Jei dydžių u ir v pokyčiai yra nekoreliuoti, tai koreliacijos funkcija k_{uv}=0, t.y. išraišką (4.4.11) galime išreikšti taip:

$$\boxed{\sigma_x^2 \approx \sigma_u^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\sigma_v^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2} \tag{4.4.12}$$

Ši išraiška gali būti apibendrinta ir didesniam kintamųjų skaičiui. Toliau laikysime, kad kintamųjų pokyčiai yra nekoreliuoti. Toliau pateiksime kai kurias formules.

Sumavimas ir atėmimas

Jei x išreiškiamas kintamųjų u ir v sumos arba skirtumo pavidalu

$$x=au\pm bv ,$$

tai dalinės išvestinės yra konstantos:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=a, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\pm b .$$

Tada

$$\sigma_x^2 = a^2\sigma_u^2 + b^2\sigma_v^2 . \tag{4.4.13}$$

Daugyba ir dalyba

Jei x išreiškiamas kintamųjų u ir v sandauga

$$x=\pm auv \ ,$$

tai dalinės išvestinės

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\pm av, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\pm au \, .$$

Tada

$$\sigma_x^2=a^2v^2\sigma_u^2+a^2u^2\sigma_v^2$$

arba

$$\frac{\sigma_x^2}{x^2}=\frac{\sigma_u^2}{u^2}+\frac{\sigma_v^2}{v^2} \, . \tag{4.4.14}$$

Kai

$$x=\pm\frac{au}{v} \ ,$$

visiškai panašiai gauname:

$$\frac{\sigma_x^2}{x^2}=\frac{\sigma_u^2}{u^2}+\frac{\sigma_v^2}{v^2} \, . \tag{4.4.15}$$

Užrašysime dar keletą labiausiai paplitusių išraiškų:

$$x=a\mathrm{e}^{\pm bu}: \quad \frac{\sigma_x}{x}=b\sigma_u \, ;$$

$$x=au^{\pm b}: \quad \frac{\sigma_x}{x}=b\frac{\sigma_u}{u} \, ;$$

$$x=a\ln(bu): \quad \sigma_x=a\frac{\sigma_u}{u} \, .$$

4.5. Duomenų apdorojimas mažiausių kvadratų būdu

Tarkime, kad matavimo duomenis sudaro pora (x_i, y_i), čia x nepriklausomas kintamasis. Gautus duomenis norime aprašyti tiesine priklausomybe:

$$y=a+bx. \tag{4.5.1}$$

Koeficientus a ir b reikia taip parinkti, kad turėtume mažiausius nuokrypius tarp išmatuotų verčių y_i ir apskaičiuotų iš lygybės (4.5.1) $y=f(x_i)$. Apskaičiuojame nuokrypius:

$$\Delta y_i = y_i - (a + bx_i). \tag{4.5.2}$$

Jei koeficientai a ir b gerai parinkti, tai nuokrypiai Δy_i yra santykinai nedideli (aišku, jei matavimo duomenų sklaida nėra didelė).

Kiekvienai pasirinktai vertei $x=x_i$ galime apskaičiuoti tikimybę p_i, laikydami, kad matavimo rezultatai y_i turi normalųjį skirstinį su vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu σ apskaičiuotų verčių $y(x_i)$ atžvilgiu:

$$p_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma} \right)^2 \right]. \tag{4.5.3}$$

Jei iš viso turime n nepriklausomų matavimų, tai tikimybė, aprašanti šiuos duomenis, lygi tikimybių sandaugai:

$$\begin{aligned} P(a,b) = \prod_{i=1}^{n} p_i &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - y(x_i)}{\sigma} \right)^2 \right] = \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta y_i}{\sigma} \right)^2 \right]. \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

Koeficientai a ir b bus parinkti geriausiai, jei ši tikimybė bus didžiausia arba eksponentėje esanti suma bus mažiausia. Šią eksponentėje esančią sumą žymėsime χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta y_i}{\sigma} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sigma^2}(y_i - a - bx_i)^2 \right]. \tag{4.5.5}$$

Čia pateiktas duomenų aprašymo tiesine priklausomybe būdas turi duoti mažiausią χ^2 vertę, t.y. turi duoti mažiausią nuokrypių kvadratų sumą, todėl šis aproksimavimo būdas ir vadinamas mažiausių kvadratų būdu.

Norint surasti koeficientus a ir b, kurie duotų mažiausią χ^2 vertę, reikia surasti χ^2 išvestines pagal a ir b ir jas prilyginti nuliui:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 \right]. = -\frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i) = 0\,; \tag{4.5.6}$$

$$\frac{\partial\chi^2}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-a-bx_i)^2\right].=-\frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}[x_i(y_i-a-bx_i)]=0\,. \quad (4.5.7)$$

Iš šių lygčių galime užrašyti šias dvi lygybes:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}y_i=\sum_{i=1}^{n}a+\sum_{i=1}^{n}bx_i=an+b\sum_{i=1}^{n}x_i\ ;\\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum_{i=1}^{n}ax_i+\sum_{i=1}^{n}bx_i^2=a\sum_{i=1}^{n}x_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ .\end{cases}. \qquad (4.5.7)$$

Šios lygties sprendimui pasinaudojame tiesinių lygčių sistemos

$$\begin{cases}A_1x+B_1y=C_1\ ;\\ A_2x+B_2y=C_2\ .\end{cases}$$

sprendiniu:

$$x=\frac{B_2C_1-B_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}=\frac{\begin{vmatrix}C_1 & B_1\\ C_2 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}C_1 & B_1\\ C_2 & B_2\end{vmatrix}}{\Delta}\,,$$

$$y=\frac{A_1C_2-A_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}}{\Delta}\,,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}.$$

Vadinasi, gauname:

$$a=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{n}y_i & \sum_{i=1}^{n}x_i\\ \sum_{i=1}^{n}x_iy_i & \sum_{i=1}^{n}x_i^2\end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right) \qquad (4.5.10)$$

$$b = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i \right), \tag{4.5.11}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 . \tag{4.5.12}$$

4.3 lentelėje ir 4.4 pav. pateiktas šitokių skaičiavimų pavyzdys: iš matavimo duomenų reikia surasti temperatūros pasiskirstymo tiesinę aproksimaciją išilgai metalinio strypo, kurio galai yra atitinkamai pastoviose 0°C ir 100°C temperatūrose. Strypo ilgis lygus 10 cm, matavimai atliekami kas 1 cm.

4.3 lentelė. Temperatūros išilgai metalinio strypo matavimo rezultatai.

i	x_i, cm	T_i, °C	x_i^2	$x_i\, T_i$	T_i^2	$T=a+bx_i$	$\Delta_i^2 = \Delta T_i^2$
1	1,0	15,6	1,0	15,6	243,36	14,2	1,96
2	2,0	17,5	4,0	35,0	306,25	23,6	37,21
3	3,0	36,6	9,0	109,8	1339,56	33,0	12,96
4	4,0	43,8	16,0	175,2	1918,44	42,4	1,96
5	5,0	58,2	25,0	291,0	3387,24	51,8	40,96
6	6,0	61,6	36,0	369,6	3794,56	61,2	0,16
7	7,0	64,2	49,0	449,4	4121,64	70,6	40,96
8	8,0	70,4	64,0	563,2	4956,16	80,0	92,16
9	9,0	98,8	81,0	889,2	9761,44	89,4	88,36
suma	45,0	466,7	285,0	2898,0	29828,65		316,69

Toliau pateikiame skaičiavimo rezultatus:

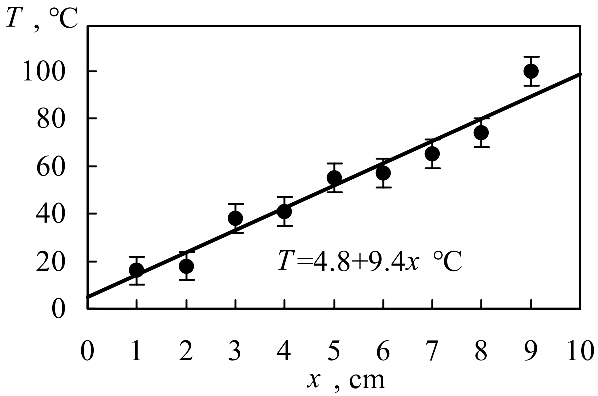
a=4,8 (°C), b=9,4 (°C/cm);

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(T_i - a - bx_i) = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta T_i)^2 = 45{,}24 \ \text{(°C)}^2;$$

σ_T=6,7 °C; tikimoji paklaida σ_t=(2/3)σ_T≈4,5 °C;

$$\sigma_a^2 \approx \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\Delta} = 23{,}9\,, \quad \sigma_a = 4{,}9\ ^\circ\mathrm{C};$$

$$\sigma_b^2 \approx \frac{n\sigma^2}{\Delta} = 0{,}754\,, \quad \sigma_b = 0{,}87\ ^\circ\mathrm{C/cm}.$$



4.4 pav. Temperatūros priklausomybe nuo padėties metaliniame strype.

Dydžio y įverčio dispersiją surandame įprastiniu būdu:

$$\sigma_y^2 \approx \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_1 - a - bx_i) = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta y_i)^2 \qquad (4.5.13)$$

Vietoje n čia dalijame n–2; skaičius 2 čia atitinka įvertinamų parametrų skaičių. Šitaip tiksliau įvertinama paklaida.

Jei neatsižvelgsime į sistemingąsias paklaidas, kurios sukelia sąsajas tarp atskirų įvertinamų parametrų pokyčių (neapibrėžčių), tai bendruoju atveju įvertinamojo parametro z (šiuo atveju a ir b) dispersiją galime išreikšti taip:

$$\sigma_z^2 \approx \sum_{k=1}^{n} \sigma_{y_k}^2 \left(\frac{\partial z}{\partial y_k}\right)^2 \qquad (4.5.14)$$

Laikome, kad $\sigma_{y_k}^2 \approx \sigma_y^2$. Šioje išraiškoje esančios išvestinės gali būti įvertintos, imant lygčių (4.5.10) išvestines:

$$\frac{\partial a}{\partial y_k} = \frac{1}{\Delta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - x_k \sum_{i=1}^{n} x_i\right); \tag{4.5.15}$$

$$\frac{\partial b}{\partial y_k} = \frac{1}{\Delta}\left(n x_k - \sum_{i=1}^{n} x_i\right); \tag{4.5.16}$$

$$\Delta = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 .$$

Iš lygčių (4.5.14) – (4.5.16) gauname:

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_y^2}{\Delta^2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 - 2x_k \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} x_i + x_k^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] = \\ &= \frac{\sigma_y^2}{\Delta^2}\left[n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] = \\ &= \frac{\sigma_y^2}{\Delta^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] = \frac{\sigma_y^2}{\Delta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 . \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

Visiškai panašiai įvertiname ir parametro *b* dispersiją:

$$\begin{aligned} \sigma_b^2 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_y^2}{\Delta^2}\left[n^2 x_k^2 - 2n x_k \sum_{i=1}^{n} x_i + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] = \\ &= \frac{\sigma_y^2}{\Delta^2}\left[n^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] = \\ &= \frac{n\sigma_y^2}{\Delta^2}\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right] = n\frac{\sigma_y^2}{\Delta} . \end{aligned} \tag{4.5.18}$$

Visiškai panašiai galime išreikšti aproksimacijas ir kitokiomis funkcijomis: laipsninėmis, logaritminėmis ir pan.

LITERATŪRA

1. J. Kubilius. Tikimybių teorija ir matematinė statistika. – Vilnius: VU leidykla, 1996.
2. J. Kruopis. Matematinė statistika. – Vilnius: Mokslo ir enciklopedijų leidykla, 1993.
3. S. Liutikienė, V. Liutikas. Elementarioji tikimybių teorija ir statistika. – Kaunas: Šviesa, 1996.
4. M. Fišas. Tikimybių teorija ir matematinė statistika. – Vilnius: Mintis, 1968.
5. E. R. Dougherty. Probability and statistics for the engineering, computing and physical sciences. – New Jersey: Prentics Hall/Englewood Cliffs, 1990.
6. S. M. Ross. Introduction to probability and statistics for engineers and scientists. – New York: John Wiley, 1987.
7. Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. Теория вероятностей. – М: Наука, 1969.
8. М. В. Волькенштейн. Энтропия и информация. – М: Наука, 1986.
9. Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин. Элементарное введение в теорию вероятности. – М: Наука, 1982.
10. В. П. Чистяков. Курс теории вероятности. – М: Наука, 1982.
11. А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров. Введение в теорию вероятности.
12. Ю. А. Розанов. Случайные процессы. – М: Наука, 1979.
13. Ю. А. Розанов. Лекции по теории вероятностей. – М: Наука, 1986.

TURINYS

3. ATSITIKTINIAI VYKSMAI

4. MATEMATINĖS STATISTIKOS ELEMENTAI