

VILNIAUS GEDIMINO TECHNIKOS UNIVERSITETAS

R. BAUŠYS, J. KASNAUSKAS

Teorinė mechanika I. Uždavinių sprendimo vadovas

MOKOMOJI KNYGA

Vilnius „Technika“ 2001

R. Baušys, J. Kasnauskas. TEORINĖ MECHANIKA I. UŽDAVINIŲ SPRENDIMO VADOVAS Mokomoji knyga. V.: Technika, 2001. 56 p.

Knygoje pateiktos žinios apie teoretinės mechanikos statikos principų taikymą įvairiems uždaviniams spręsti. Pateikiami svarbiausių tipinių uždavinių sprendimo pavyzdžiai, išsamūs jų komentarai. Nagrinėjama susikertančiųjų, plokščiųjų ir erdviųjų jėgų sistemų pusiausvyra, kūnų sistemos pusiausvyra bei aptariami slydimo trinties uždavinių sprendimo ypatumai.

Leidinyi skirtas VGTU pagrindinių studijų studentams spręsti savarankiško darbo užduotis.

Leidinį rekomendavo Fundamentinių mokslų fakulteto studijų komitetas

Recenzavo habil. dr. prof. G. Kulvietis
 habil. dr. prof. M. Leonavičius

VGTU leidyklos „Technika“ 487 mokomosios metodinės literatūros knyga

© R. Baušys, J. Kasnauskas, 2001
© VGTU leidykla „Technika“, 2001

TURINYS

TURINYS.....	3
Pratarmė.....	4
1. Statikos uždavinių sprendimo principai	5
2. Susikertančių jėgų sistemos pusiausvyra	5
3. Plokščioji jėgų sistema	10
4. Kūnų sistemos pusiausvyra	20
5. Slydimo trintis	32
6. Plokščiųjų santvarų skaičiavimas.....	37
7. Erdvinė jėgų sistema	45
Literatūra	56

PRATARMĖ

Teorinė mechanika yra viena iš svarbiausių disciplinų, rengiant aukštos kvalifikacijos inžinerijos specialistus. Ja remiasi tokios bendrosios inžinerinės disciplinos, kaip medžiagų mechanika, taikomoji mechanika, mašinų ir prietaisų elementai. Remiantis teorinės mechanikos principais sprendžiami daugelis inžinerinių uždavinių, projektuojamos mašinos ir statiniai.

Mokantis teorinės mechanikos, reikia įgyti uždavinių sprendimo įgūdžių. Todėl būtina savarankiškai spręsti pakankamai uždavinių. Šiame leidinyje pateikiami statikos uždavinių sprendimo pavyzdžiai ir savarankiško darbo užduotys. Kartu pateikiami savarankiškai spręsti skirtų uždavinių teisingi sprendimo rezultatai.

Knyga skirta visų specialybių ir mokymo formų (dieninio ir neakivaizdinio) VGTU studentams. Tai pirmasis tokio pobūdžio leidinys, kuriame pateikiami savarankiško sprendimo užduočių variantai ir jų rezultatai.

Autoriai atsiprašo už pasitaikančius netikslumus.

1. STATIKOS UŽDAVINIŲ SPRENDIMO PRINCIPAI

Sprendžiant teorinės mechanikos uždavinius, taikomi įvairūs modeliai, aprašantys supaprastintų (idealizuotų) inžinerinių objektų būvį. Šie modeliai būtini norint sėkmingai taikyti mechanikos principus. Sėkmingas modelio sukūrimas leidžia efektyviai išspręsti inžinerinėje praktikoje pasitaikančius mechanikos uždavinius.

Bendrieji teorinės mechanikos uždavinių sprendimo etapai būtų tokie:

1. Atlikti inžinerinio uždavinio analizę ir susieti tiriamą fizinį uždavinį su atitinkamais teorinės mechanikos principais.
2. Sudaryti uždavinio modelį ir pateikti idealizacijos schemas.
3. Taikant būtinus teorinės mechanikos principus, sudaryti idealizuoto objekto būvį aprašančias lygtis.
4. Skaitiškai išspręsti sudarytą lygčių sistemą. Būtina taikyti bendrąją parametrų dimensijų sistemą.
5. Atlikti gautų skaitinių rezultatų inžinerinį įvertinimą.
6. Išsprendus problemą, atlikti tyrinėto teorinės mechanikos uždavinio papildomą analizę – ar nėra kitų galimų uždavinio sprendimo būdų.

Sudarant teorinės mechanikos uždavinių skaitinius modelius taikomi šie supaprastinimai (idealizacijos): materialusis taškas ir standusis kūnas. Materialusis taškas turi masę, bet jo geometriniai matmenys yra be galo maži. Kai tyrinėjamas inžinerinis objektas modeliuojamas materialiuoju tašku, lygtys, gautos taikant teorinės mechanikos principus, labai supaprastėja, nes nereikia įvertinti objekto geometrijos. Standusis kūnas suprantamas kaip be galo didelio materialųjų taškų skaičiaus kombinacija. Visi šie materialieji taškai išlaiko tuos pačius atstumus vienas nuo kito, pridėjus išorines apkrovas. Taigi analizuojant kūną veikiančias jėgas nereikia atsižvelgti į objekto medžiagos savybes.

Paprastai sprendžiant statikos uždavinius taikomas analizinis metodas. Standžiojo kūno pusiausvyra suprantama kaip rimties būseną kitų jėgų atžvilgiu. Laisvąjį kūną veikiančių jėgų atsisvėrimas yra būtina, bet nepakankama pusiausvyros sąlyga. Veikiant atsvertai jėgų sistemai, laisvasis kūnas tikrai išsaugo buvusią rimties būseną.

Taikant analizinį skaičiavimo metodą, spręsti pradedame išsiaiškindami uždavinio esmę, nustatydami žinomus ir skaičiuojamuosius parametrus, sudarome objekto brėžinį. Tolesnę sprendimo eigą galima suskirstyti į šiuos etapus:

- nustatoma taškas ar kūnas, kurio pusiausvyra tyrinėjama;
- brėžinyje parodomos žinomos aktyviosios jėgos;
- kūnas atpalaiduojamas nuo ryšių, jie pakeičiami ekvivalentiškėmis reakcijos jėgomis;
- nustatomas bendras nežinomųjų dydžių skaičius ir tiriamas uždavinio statinis išsprendžiamumas;
- pasirenkamos koordinačių ašys ir sudaromos pusiausvyros lygtys, įvertinant visų kūną veikiančių jėgų (aktyviųjų ir ryšių reakcijos) poveikį;
- sprendžiant pusiausvyros lygtis nustatomos nežinomosios jėgos.

Daugumoje statikos uždavinių iš anksto negalima žinoti ne tik jėgos didumo, bet ir tikslios reakcijos jėgos krypties. Šiais atvejais reakcijos jėga paprastai skaidoma į komponentes, sutampančias su pasirinktų koordinačių ašių kryptimis. Jeigu skaičiavimo metu kurios nors jėgos ar jos komponentės didumas gaunamas su neigiamu algebriniu ženklu, tai žinome, kad tikroji šios jėgos kryptis yra priešinga pasirinktajai. Jei uždavinio sąlyga reikalauja rasti kūno poveikį į kurį nors ryšį, tai galima nustatyti ryšio reakciją, o kūno poveikis į ryšį visada yra tokio pat didumo tik priešingos krypties jėga.

Nagrinėjant kūnų sistemos pusiausvyrą, galima tirti kiekvieno atskiro sistemos kūno pusiausvyrą. Šiuo atveju kūnų sąveikos jėgos yra vienodo didumo ir priešingų kryptių. Galima tyrinėti visą kūnų sistemą kaip geometriškai nekintamą standųjį objektą, jeigu gautos pusiausvyros lygtys tinka kai kurioms nežinomoms jėgoms skaičiuoti.

2. SUSIKERTANČIŲJŲ JĖGŲ SISTEMOS PUSIAUSVYRA

Sprendžiant teorinės mechanikos uždavinius dažnai taikoma materialiojo taško idealizacija. Ši prielaida leidžia gerokai supaprastinti pagrindinių lygčių sistemą. Materialiojo taško idealizacija taikoma, kai

objekto skaičiuojamojoje schemoje aktyviųjų ir reaktyviųjų jėgų veikimo linijos kertasi viename taške. Šiuo atveju turime susikertančiųjų jėgų sistemą.

Susikertančiųjų jėgų sistemos būtina ir pakankama pusiausvyros sąlyga yra atstojamosios

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k \quad (2.1)$$

lygybė nuliui. Ši sąlyga plokščiajai susikertančiųjų jėgų sistemai išreiškiama dviem analizinėmis lygtimis

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}_{kx} &= 0, \\ \sum \bar{F}_{ky} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

arba momentų pusiausvyros lygtimis

$$\begin{aligned} \sum \bar{M}_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum \bar{M}_B(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

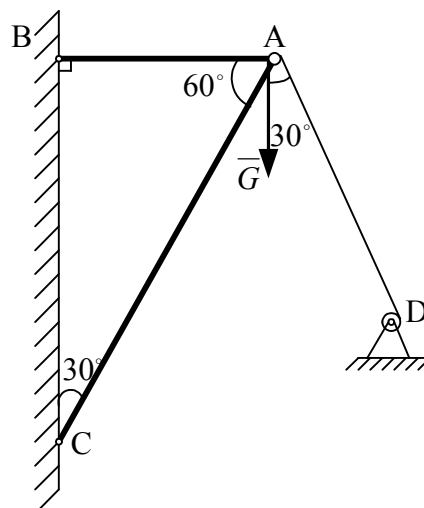
Šiuo atveju taškai A ir B negali būti vienoje tiesėje su jėgų susikirtimo tašku.

Erdvinei susikertančiųjų jėgų sistemai atstojamoji $\bar{R} = 0$ išreiškiama trimis pusiausvyros sąlygų lygtimis

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}_{kx} &= 0, \\ \sum \bar{F}_{ky} &= 0, \\ \sum \bar{F}_{kz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

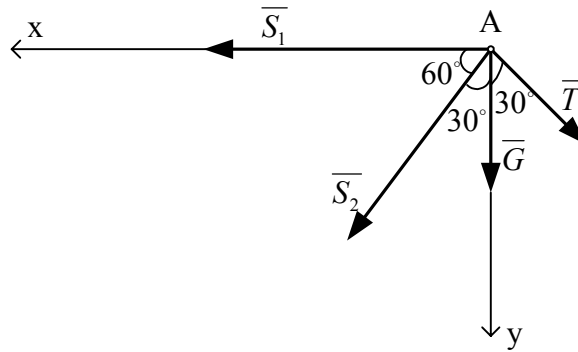
2.1 uždavinys

Krovins, kurio svoris $G=10$ kN, pakabintas lynu. Lynas per mažą skridinį A gali būti vyniojamas ant ritės D . Apskaičiuoti keltuvo strypų AB ir AC reakcijas. Strypinės konstrukcijos bei lyno išdėstymo kampas parodytas 2.1 brėžinyje.



2.1 brėž.

Pradžioje sudarome uždavinio sprendimo skaičiuojamąją schemą. Žinodami, kad strypų reakcijos nukreiptos išilgai strypų, o lyno reakcija sutampa su lyno kryptimi, tašką A atpalaiduojame nuo ryšių. 2.2 brėžinyje parodytos visos tašką A veikiančios jėgos.



2.2 brėž.

Čia S_1 ir S_2 strypų reakcijos, T – lyno reakcija.

Parenkamos koordinatinių ašys x ir y , ir užrašomos statinės pusiausvyros lygtys, projektuojant visas jėgas į šias ašis:

$$\sum \bar{F}_{kx} = 0, \quad S_1 + S_2 \cos 60^\circ - T \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum \bar{F}_{ky} = 0, \quad S_2 \cos 30^\circ + G + T \cos 30^\circ = 0.$$

Lyno reakcija $T = G$, kadangi lynas visuose taškuose įtemptas vienoda jėga. Todėl

$$S_2 \cos 30^\circ + T(1 + \cos 30^\circ) = 0,$$

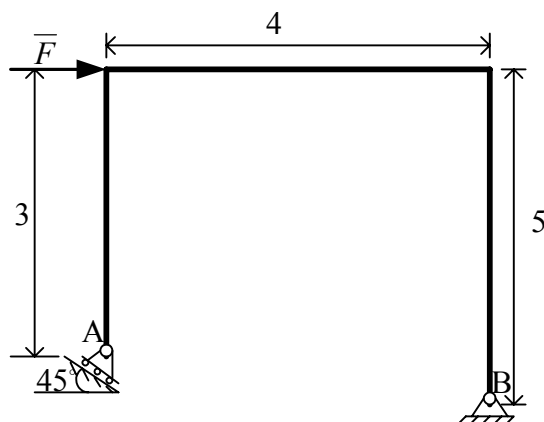
$$S_2 = -\frac{T(1 + \cos 30^\circ)}{\cos 30^\circ} = -\frac{10(1 + 0,866)}{0,866} = -21,55 \text{ kN},$$

$$S_1 = (T - S_2) \cos 60^\circ = (10 + 21,55)0,5 = 15,78 \text{ kN}.$$

Neigiamas reakcijos S_2 ženklas rodo, kad šis strypas yra gniuždomas.

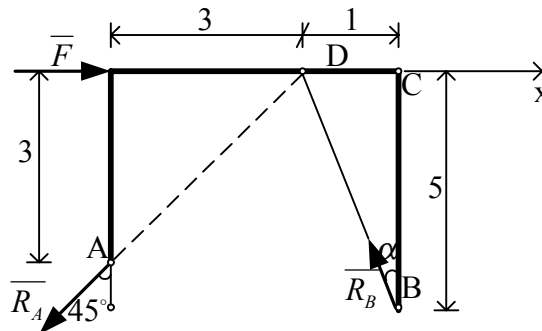
2.2 uždavinys

Standusis rėmas (2.3 brėž.), įtvirtintas nejudriuoju šarnyru B ir judriuoju šarnyru A , veikiamas horizontaliosios jėgos $F = 20 \text{ kN}$. Skaičiuojamos šarnyrų reakcijos.



2.3 brėž.

Sudarydami uždavinio sprendimo skaičiuojamąją schemą, rėmo ryšius pakeičiame atitinkamomis reakcijos jėgomis. Šioje skaičiuojamojoje schemoje rėmą veikia trys nelygiagrečios jėgos. Tai išorinės apkrovos jėga \vec{F} ir šarnyrų reakcijos. Pusiausvyra įmanoma, kai šios jėgos kertasi viename taške. Sudaryta skaičiuojamoji schema parodyta 2.4 brėž.



2.4 brėž.

Šiam uždaviniui spręsti taikome momentų pusiausvyros lygtis (2.3). Taškai A ir B nėra vienoje tiesėje su jėgų susikirtimo tašku D , todėl momentų lygtys rašomos šių taškų atžvilgiu. Gaunamos šios pusiausvyros lygtys:

$$\begin{aligned}\sum \bar{M}_A(\vec{F}_k) &= 0, & -3F + 4R_B \cos \alpha - 2R_B \sin \alpha &= 0, \\ \sum \bar{M}_B(\vec{F}_k) &= 0, & -5F + 2R_A \cos 45^\circ + 4R_A \cos 45^\circ &= 0.\end{aligned}$$

Iš pirmosios lygties išreiškiame

$$R_B = \frac{3F}{4 \cos \alpha - 2 \sin \alpha}.$$

Čia $\tan \alpha = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{5} = 0,2$, $\alpha = \arctg 0,2 = 11,3^\circ$, $\sin \alpha = 0,197$, $\cos \alpha = 0,981$. Taigi

$$R_B = \frac{3 \cdot 20}{4 \cdot 0,981 - 2 \cdot 0,197} = 17 \text{ kN}.$$

Iš antrosios lygties gauname

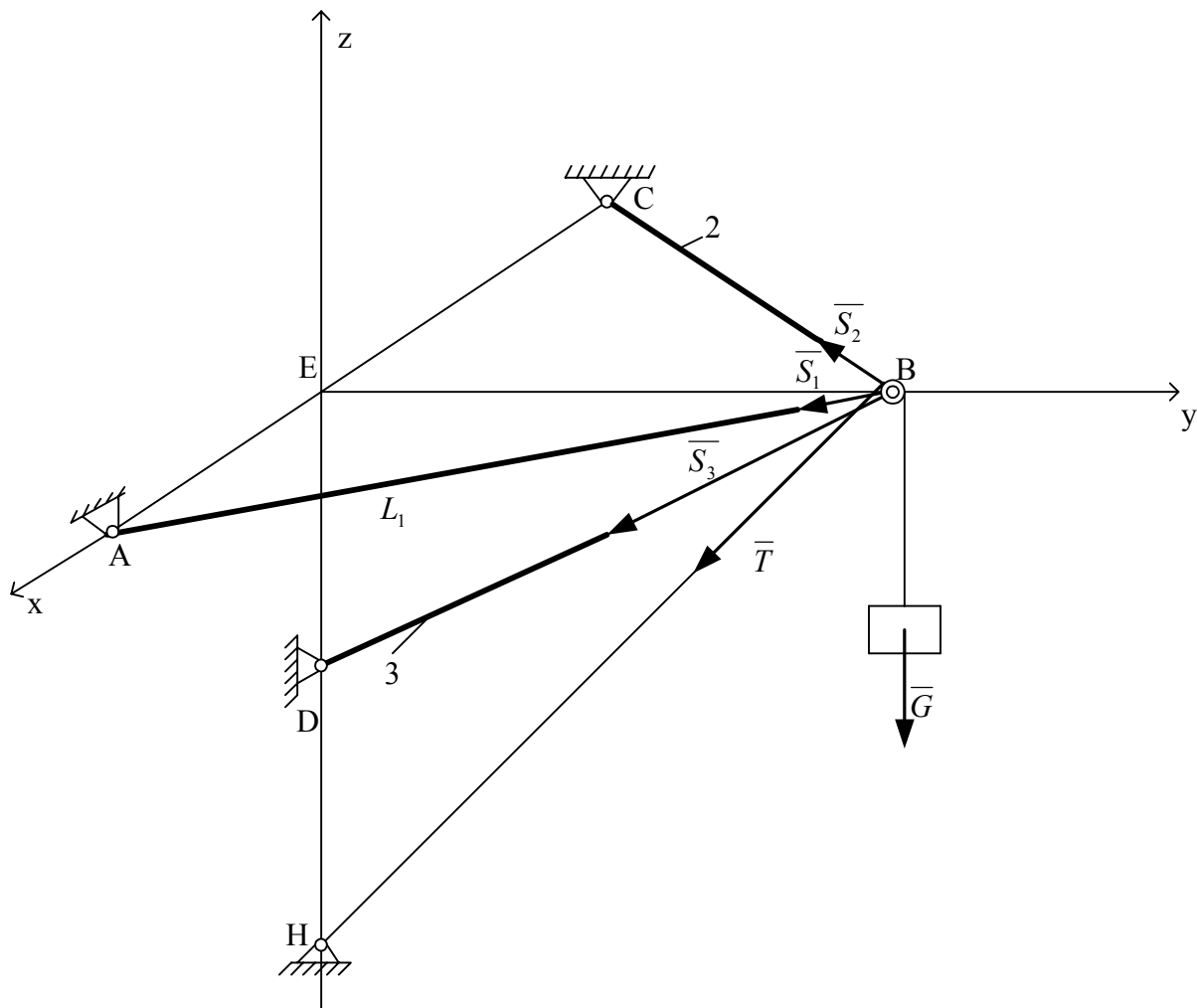
$$R_A = \frac{5F}{6 \cos 45^\circ} = \frac{5 \cdot 20}{6 \cdot 0,707} = 23,57 \text{ kN}.$$

Sprendinį galima patikrinti užrašius jėgų projekcijų pusiausvyros lygtį

$$\sum F_{kx} = F - R_A \cos 45^\circ - R_B \sin \alpha = 20 - 23,57 \cdot 0,707 - 17 \cdot 0,197 \approx 0. \text{ (Lygtis tenkinama)}$$

2.3 uždavinys

Šiame uždavinyje nagrinėjama erdvinės susikertančiųjų jėgų sistemos pusiausvyra, taikant lygtis (2.4). Krovinys, kurio svoris $G = 20 \text{ kN}$, laikomas lynu, permestu per skridinį B ir užvyniotu ant ritės H . Konstrukcijos schema pateikta 2.5 brėž. Sistemos geometrija aprašoma taip: $AE = EC$, $AB = BC$. $\angle EBB = 60^\circ$, $\angle DBH = 30^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$. Skaičiuojamos konstrukcijos trijų strypų AB , BC ir BD reakcijos.



2.5 brėž.

Pradžioje sudarome uždavinio sprendimo skaičiuojamąją schemą. Laikome strypų reakcijas nukreiptomis išilgai jų ašių, o lino įtempimo jėgą – išilgai lino. Spręsdami šį uždavinį tyrinėjame tašką B. Ši laisvąjį tašką veikiančios jėgos parodytos 2.5 brėž. Tai erdvinė susikertančių jėgų sistema. Užrašome taško B pusiausvyros lygtis

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, & S_1 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & -S_1 \sin 45^\circ - S_2 \sin 45^\circ - S_3 \cos 30^\circ - T \cos 60^\circ &= 0, \\ \sum F_{kz} &= 0, & -S_3 \cos 60^\circ - T \cos 30^\circ - G &= 0.\end{aligned}$$

Pirmoji lygtis rodo, kad $S_1 = S_2$. Iš trečiosios lygties, įvertinant $T = G$, randama

$$S_3 = -2G(1 + \cos 30^\circ) = -2 \cdot 20(1 + 0,866) = -74,64 \text{ kN}.$$

Iš antrosios lygties randame

$$S_1 = S_2 = \frac{-S_3 \cos 30^\circ - T \cos 60^\circ}{2 \cos 45^\circ} = \frac{74,64 \cdot 0,866 - 20 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,707} = 38,64 \text{ kN}.$$

Pagal skaičiavimo rezultatus, trečiasis strypas yra gniuždomas, o kiti du – tempiami.

3. PLOKŠČIOJI JĖGŲ SISTEMA

Bendruoju atveju, kai tyrinėjama objektą veikiančių jėgų sistema neturi jokių ypatumų, taikoma standžio kūno idealizacija. Daugelyje inžinerinių uždavinių veikiančios apkrovos yra simetrinės, todėl jų sprendimas gali būti supaprastintas. Šiuo atveju visos tyrinėjama objektą veikiančios jėgos projektuojamos į vieną plokštumą. Taip gaunama plokščioji jėgų sistema.

Jėgų sistemos, veikiančios standų kūną ir išdėstytos vienoje plokštumoje, pusiausvyros būtina ir pakankama sąlyga yra suminės jėgos ir suminio momento lygybė nuliui, t. y.

$$\begin{aligned}\sum \bar{F}_k &= 0, \\ \sum M_O(\bar{F}_k) &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Analiziniu pavidalu šios pusiausvyros sąlygos gali būti išreikštos trimis būdais:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, \\ 1. \quad \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum M_O(\bar{F}_k) &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, \\ 2. \quad \sum M_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum M_B(\bar{F}_k) &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\sum M_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ 3. \quad \sum M_B(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum M_C(\bar{F}_k) &= 0.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Pirmajame variante tašku O gali būti bet kuris plokštumos taškas. Antrajame variante x ašis negali būti statmena atkarpai AB . Trečiajame variante taškai A , B ir C negali būti vienoje tiesėje. Atskiuro varianto pasirinkimas galimas bet kuriam statikos uždaviniui, kai tyrinėjama plokščiosios jėgų sistemos pusiausvyra.

3.1 uždavinys

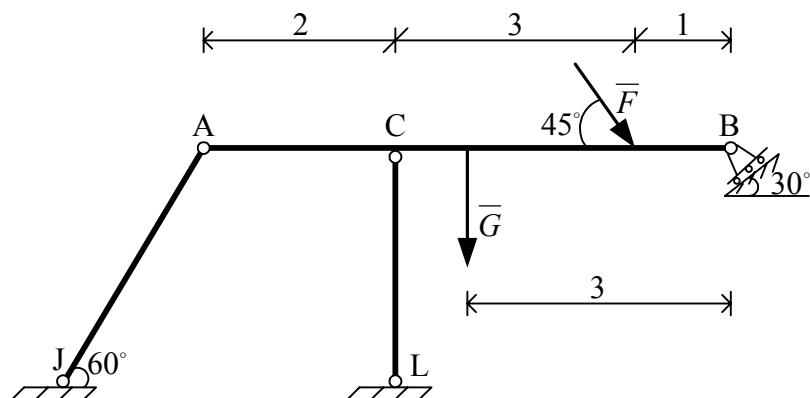
Vienalytė horizontalioji sija AB , kurios svoris $G=12$ kN, įtvirtinta judrioju šarnyru B , o taškuose A ir C atremta strypais AJ ir CL . Strypų galuose yra šarnyriniai sujungimai. Strypų svoriai atliekant skaičiavimus neįvertinami. Konstrukcijos schema parodyta 3.1 brėž. Čia pateikti ir sijos matmenys. Jėgos dydis yra $F=16$ kN. Skaičiuojamos sijos atramų reakcijos.

Sprendimo pradžioje sudarome uždavinio skaičiuojamąją schemą. Kadangi sija vienalytė ir vienodo skerspjūvio, svorio jėgos G pridėties taškas yra sijos viduryje. Atpalaiduojame siją nuo visų ryšių. Strypų reakcijos jėgų kryptys sutampa su jų kryptimis, o judriojo šarnyro B reakcijos jėga statmena nuožulniajai plokštumai. Laisvosios sijos schema parodyta 3.2 brėžinyje.

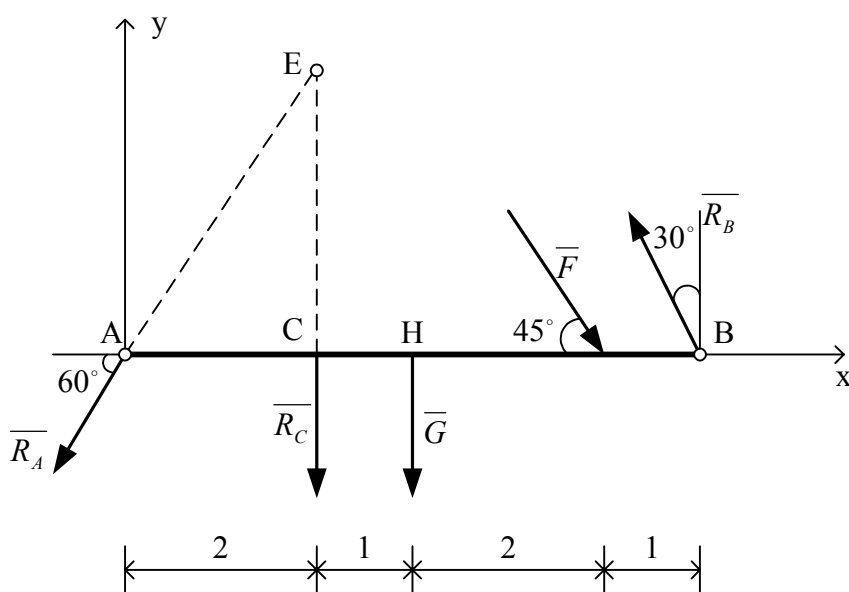
Pradžioje užrašome momentų pusiausvyros lygtį $\sum M_E(\bar{F}_k)=0$, kur taškas E yra jėgų R_A ir R_C susikirtimo taškas. Čia $EC = AC \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2 \cdot 1,73 = 3,46$ m.

Taigi ši momentų pusiausvyros lygtis turės pavidalą

$$-G - 3F \cos 45^\circ + 3,46F \cos 45^\circ + 4R_B \cos 30^\circ - 3,46R_B \cos 60^\circ = 0.$$



3.1 brėž.



3.2 brėž.

Taikydami šią lygtį apskaičiuojame reakcijos jėgos R_B dydį

$$R_B = \frac{G - 0,46F \cos 45^\circ}{4 \cos 30^\circ - 3,46 \cos 60^\circ} = \frac{12 - 0,46 \cdot 16 \cdot 0,707}{4 \cdot 0,866 - 3,46 \cdot 0,5} = 3,93 \text{ kN}.$$

Po to užrašome sijų veikiančių jėgų projekcijų lygtis

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}_{kx} &= 0, \\ -R_A \cos 60^\circ + F \cos 45^\circ - R_B \cos 60^\circ &= 0, \\ R_A &= \frac{F \cos 45^\circ - R_B \cos 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{16 \cdot 0,707 - 3,93 \cdot 0,5}{0,5} = 18,69 \text{ kN}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}_{ky} &= 0, \\ -R_A \cos 30^\circ - R_C - G - F \cos 45^\circ + R_B \cos 30^\circ &= 0, \\ R_C &= -R_A \cos 30^\circ - G - F \cos 45^\circ + R_B \cos 30^\circ = \\ &= -18,69 \cdot 0,866 - 12 - 16 \cdot 0,707 + 3,93 \cdot 0,866 = -36,1 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Patikrinimui užrašome momentų pusiausvyros lygtį

$$\sum M_H(\bar{F}_k) = 0,$$

$$3R_A \cos 30^\circ + R_C - 2F \cos 45^\circ + 3R_B \cos 30^\circ = 0,$$

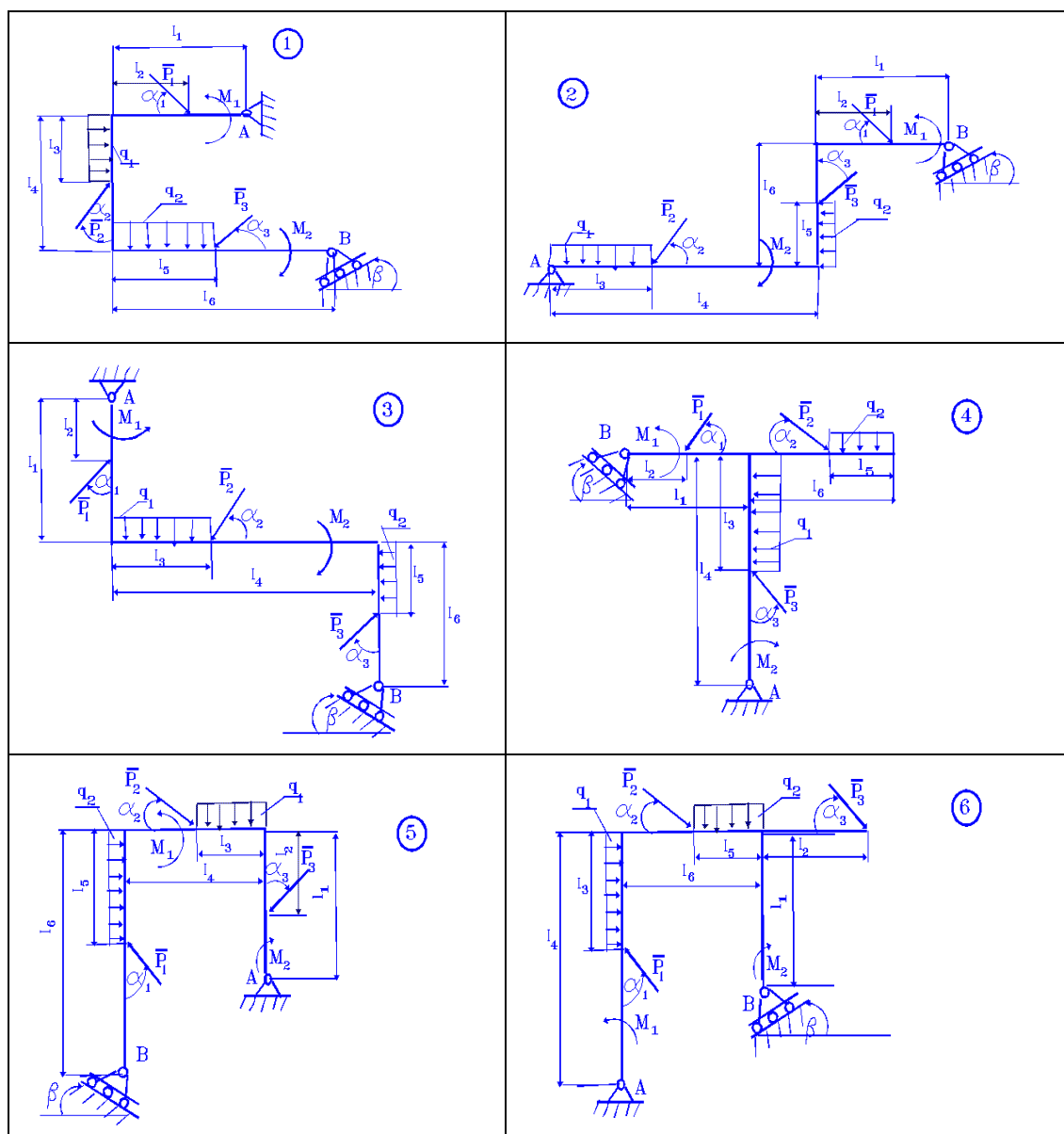
$$3 \cdot 18,69 \cdot 0,866 - 36,1 - 2 \cdot 16 \cdot 0,707 + 3 \cdot 3,93 \cdot 0,866 = 0,045 \approx 0.$$

Šis rezultatas leidžia tikėti sprendiniais.

3.2 uždavinys

Uždavinys skirtas rėmo, įtvirtinto nejudriuoju A ir judriuoju B šarnyrais, atramų reakcijoms skaičiuoti. Galimi rėmų variantai pateikti 3.1 lentelėje.

3.1 lentelė. Uždavinių variantų schemas



3.2 lentelėje išspausdintos skaitmeninės atskirų variantų duomenų reikšmės. Lentelėje nurodytas konkretios schemas numeris (SCH), matmenys metrais, jėgų, paskirstytųjų apkrovų, porų momentų ir

kampų reikšmės. Kai kurios jėgos duotam variantui gali būti lygios nuliui. Tuo atveju nuliui lygi apkrova ar momentas neturi būti vaizduojama sprendžiant konkrečią užduotį.

3.2 lentelė. Uždavinių variantų pradiniai duomenys

512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
1	4	6.	4.	3.	7.	5.	8.	5.	90.	3.	45.	0.	0.	30.	.0	1.5	0.	5.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
2	4	6.	4.	3.	7.	5.	8.	6.	90.	3.	45.	0.	0.	60.	.0	1.5	5.	0.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
3	5	4.	2.	5.	9.	3.	6.	0.	0.	8.	90.	10.	60.	30.	1.0	.0	0.	7.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
4	6	6.	4.	3.	7.	5.	8.	0.	0.	7.	90.	8.	45.	30.	1.5	.0	6.	0.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
5	5	4.	2.	5.	9.	3.	6.	2.	90.	6.	30.	0.	0.	30.	.0	.5	0.	2.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
6	2	4.	2.	4.	8.	3.	6.	9.	30.	0.	0.	7.	90.	30.	.0	1.5	0.	8.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
7	2	4.	2.	5.	9.	3.	6.	0.	0.	4.	90.	10.	30.	45.	2.0	.0	7.	0.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
8	5	4.	2.	5.	9.	3.	6.	0.	0.	5.	90.	5.	60.	30.	1.5	.0	6.	0.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
9	4	4.	2.	5.	9.	3.	6.	7.	90.	6.	30.	0.	0.	60.	2.0	.0	0.	8.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
10	3	4.	2.	3.	7.	3.	6.	0.	0.	4.	90.	9.	30.	60.	.5	.0	0.	8.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
11	1	5.	3.	4.	8.	4.	7.	4.	90.	5.	60.	0.	0.	60.	.0	1.0	4.	0.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
12	3	4.	2.	4.	8.	3.	6.	8.	30.	0.	0.	5.	90.	45.	.0	.5	0.	4.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
13	3	5.	3.	4.	8.	4.	7.	2.	60.	0.	0.	6.	90.	60.	.0	1.5	0.	7.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
14	6	5.	3.	4.	8.	4.	7.	0.	0.	5.	90.	3.	30.	45.	.0	2.0	7.	0.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
15	5	5.	3.	3.	7.	4.	7.	0.	0.	7.	90.	2.	60.	45.	.0	.5	0.	6.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
16	1	6.	4.	5.	9.	5.	8.	0.	0.	3.	90.	10.	45.	60.	.0	2.0	0.	5.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
17	3	6.	4.	3.	7.	5.	8.	0.	0.	10.	90.	3.	60.	30.	.0	2.0	2.	0.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
18	5	5.	3.	3.	7.	4.	7.	0.	0.	8.	90.	9.	45.	30.	2.0	.0	8.	0.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
19	5	6.	4.	3.	7.	5.	8.	9.	45.	0.	0.	8.	90.	60.	.0	2.0	5.	0.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
20	3	4.	2.	4.	8.	3.	6.	7.	45.	0.	0.	7.	90.	60.	1.5	.0	0.	2.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
21	1	4.	2.	3.	7.	3.	6.	0.	0.	8.	90.	8.	45.	45.	2.0	.0	10.	0.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
22	6	5.	3.	3.	7.	4.	7.	0.	0.	7.	90.	7.	60.	45.	1.5	.0	0.	3.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
23	2	6.	4.	4.	8.	5.	8.	5.	45.	0.	0.	10.	90.	45.	1.0	.0	2.	0.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
24	3	4.	2.	3.	7.	3.	6.	6.	90.	2.	30.	0.	0.	60.	.0	1.5	0.	2.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
25	6	4.	2.	4.	8.	3.	6.	9.	60.	0.	0.	3.	90.	45.	.0	1.0	0.	5.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
26	4	6.	4.	3.	7.	5.	8.	0.	0.	5.	90.	9.	60.	45.	.0	1.0	0.	10.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
27	2	5.	3.	5.	9.	4.	7.	0.	0.	8.	90.	5.	30.	45.	.0	1.0	0.	3.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
28	3	4.	2.	5.	9.	3.	6.	8.	60.	0.	0.	6.	90.	60.	.0	1.0	8.	0.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
29	6	4.	2.	4.	8.	3.	6.	0.	0.	6.	90.	4.	45.	60.	1.5	.0	7.	0.
512	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	BET	q1	q2	M1	M2
30	5	6.	4.	3.	7.	5.	8.	2.	90.	4.	30.	0.	0.	60.	1.0	.0	0.	6.

Ši užduotis skirta plokščiosios jėgų sistemos pusiausvyros uždavinių sprendimo įgūdžiams įtvirtinti.

Sprendžiant šią užduotį patogiau pirmąją f užrašyti momentų sumos lygtį centro A atžvilgiu, nes jame veikia dvi skaičiuojamos reakcijų komponentės $\overline{A_x}$ ir $\overline{A_y}$. Nustatoma judriojo šarnyro reakcija $\overline{R_B}$. Komponentės $\overline{A_x}$ ir $\overline{A_y}$ neskaičiuojamos projektuojant rėmą, kaip laisvą kūną veikiančios jėgos į pasirinktas koordinačių ašis. Skaičiavimui patikrinti užrašoma momentų sumos lygtis apie bet kurį plokštumos tašką, per kurį nepraeina reakcijų veikimo tiesės. Teisingai apskaičiavus reakcijas ir užrašius patikrinimo lygtį, ši lygtis turi virsti tapatybe (momentų suma prilygti nuliui). 3.3 lentelėje išspausdintos pateiktų uždavinių reakcijų reikšmės.

3.3 lentelė. Uždavinių variantų reakcijų reikšmės

N	SCH	R2	R1x	R1y	Qp1	Qp2
1	4	-6.608	1.183	20.344	.000	7.500
2	4	-5.017	2.223	18.130	.000	7.500
3	5	9.246	4.037	9.993	5.000	.000
4	6	19.820	-.247	-4.508	4.500	.000
5	5	-1.403	-3.994	4.215	.000	1.500
6	2	5.377	6.394	-.157	.000	4.500
7	2	7.513	10.313	17.348	10.000	.000
8	5	8.597	.032	7.555	7.500	.000
9	4	1.555	3.457	9.222	10.000	.000
10	3	-5.247	.044	.329	1.500	.000
11	1	4.862	-.120	3.069	.000	4.000
12	3	-2.416	-5.792	-5.220	.000	1.500
13	3	-.708	-1.119	-.646	.000	6.000
14	6	11.849	5.780	6.122	.000	8.000
15	5	3.525	-2.761	5.507	.000	2.000
16	1	-1.703	2.596	17.922	.000	10.000
17	3	5.659	4.572	3.599	.000	10.000
18	5	10.614	1.057	11.172	6.000	.000
19	5	-29.517	29.926	8.394	.000	10.000
20	3	-3.546	-8.878	2.823	6.000	.000
21	1	2.562	-6.531	3.845	6.000	.000
22	6	21.036	6.875	-1.812	4.500	.000
23	2	1.717	7.679	6.321	4.000	.000
24	3	2.029	-1.525	-.015	.000	4.500
25	6	1.601	8.927	.368	.000	3.000
26	4	-2.320	9.434	7.140	.000	5.000
27	2	4.308	9.546	9.284	.000	4.000
28	3	-3.598	-6.812	-2.201	.000	3.000
29	6	14.272	3.531	1.692	6.000	.000
30	5	-8.080	5.533	9.040	3.000	.000

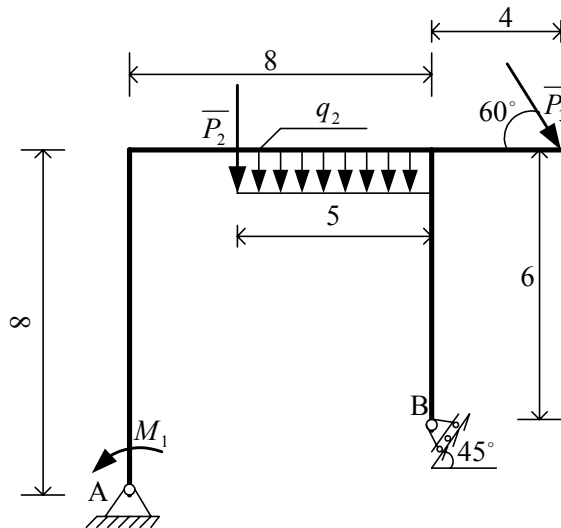
3.2 uždavinio sprendimo pavyzdys

Pateikiamas uždavinio, sudaryto pagal analogiškus duomenis, sprendimas. Uždavinio schemą, sudarytą pagal užduoties duomenis, pateikiame 3.4 brėžinyje.

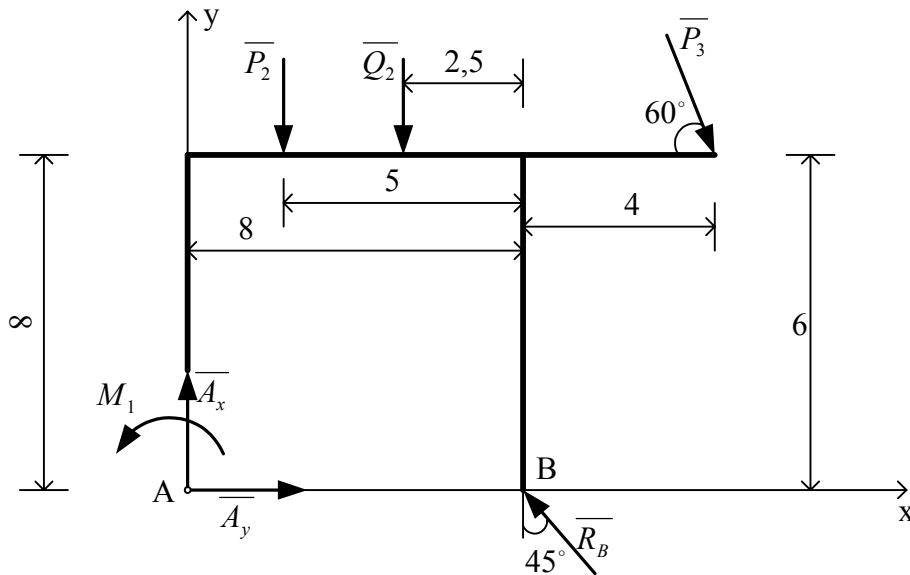
Tyrinėjamo rėmo matmenys pateikiami brėžinyje. Lygios nuliui apkrovos nėra parodytos brėžinyje.

Čia: $M_1 = 6 \text{ kNm}$, $P_2 = 7 \text{ kN}$, $P_3 = 9 \text{ kN}$, $q_2 = 1 \text{ kN/m}$.

Sudarome skaičiuojamąją uždavinio schemą, ryšius pakeisdami atitinkamomis reakcijos jėgomis. 3.5 brėžinyje ryšių reakcijos jėgos parenkamos taip: $\overline{R_B}$ – statmena atraminei plokštumai, o šarnyro reakcija A pateikiama komponentėmis $\overline{A_x}$, $\overline{A_y}$. Paskirstytąją apkrovą pakeičiame sutelktąja jėga $Q_2 = q_2 l_5 = 1,5 = 5 \text{ kN}$.



3.4 brėž.



3.5 brėž.

Pradžioje užrašome momentų, veikiančių centro A atžvilgiu, pusiausvyros lygtį:

$$\sum M_A = 0,$$

$$M_1 - 3P_2 - 5,5Q_2 - 8P_3 \cos 60^\circ - 12P_3 \cos 30^\circ + 2R_B \cos 45^\circ + 8R_B \cos 45^\circ = 0.$$

Čia P_3 ir R_B vertinamos dviem komponentėmis.

Lygtyje esanti viena nežinomoji reakcijos jėga R_B skaičiuojama taip:

$$R_B = \frac{3P_2 - M_1 + 5,5Q_2 + 8P_3 \cos 60^\circ + 12P_3 \cos 30^\circ}{10 \cos 45^\circ},$$

$$R_B = \frac{3,7 - 6 + 5,5 \cdot 5 + 8 \cdot 9 \cdot 0,5 + 12 \cdot 9 \cdot 0,866}{10 \cdot 0,707} = 24,33 \text{ kN}.$$

Tada užrašome veikiančių jėgų projekcijų į koordinatinių ašis lygtis:

$$\begin{aligned}\sum P_{kx} &= 0, \\ A_x - R_B \cos 45^\circ + P_3 \cos 60^\circ &= 0, \\ \sum P_{ky} &= 0, \\ A_y - P_2 - Q_2 - P_3 \cos 30^\circ + R_B \cos 45^\circ &= 0.\end{aligned}$$

Sprendami šias lygtis skaičiuojame atramos A reakcijų komponentes:

$$\begin{aligned}A_x &= R_B \cos 45^\circ - P_3 \cos 60^\circ, \\ A_x &= 24,33 \cdot 0,707 - 9 \cdot 0,5, \\ A_x &= 12,70 \text{ kN}, \\ A_y &= P_2 + Q_2 + P_3 \cos 30^\circ - R_B \cos 45^\circ = 0, \\ A_y &= 7 + 5 + 9 \cdot 0,866 - 24,33 \cdot 0,707, \\ A_y &= 2,59 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Patikrinimui užrašome momentų sumos lygtį centro D atžvilgiu:

$$\begin{aligned}\sum M_D &= -12A_y + 8A_x + M_1 + 9P_2 + 6,5Q_2 - 6R_B \cos 45^\circ - 4R_B \cos 45^\circ = \\ &= -12 \cdot 2,59 + 8 \cdot 12,70 + 6 + 9 \cdot 7 + 6,5 \cdot 5 - 10 \cdot 24,33 \cdot 0,707 = 0,007.\end{aligned}$$

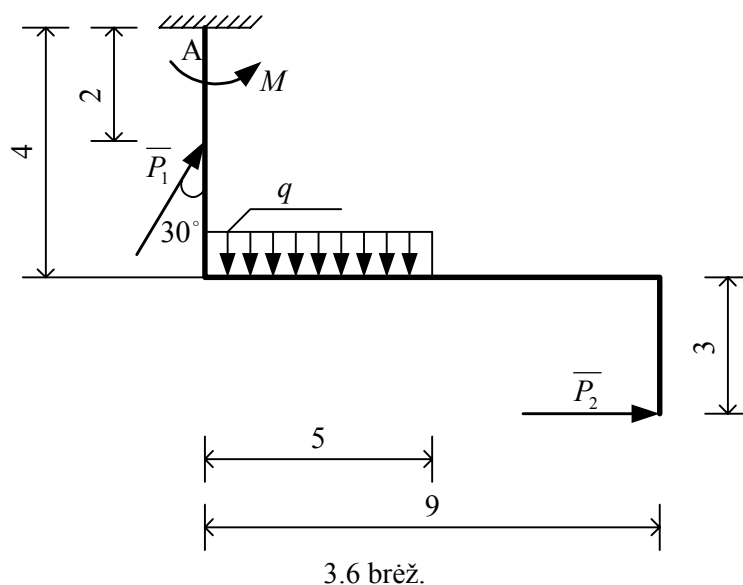
Šis rezultatas vertinamas kaip apytikslio skaičiavimo paklaida, o sprendinius galime laikyti teisingais.

3.3. Gembinio rėmo, veikiamo plokščiosios jėgų sistemos, reakcijos

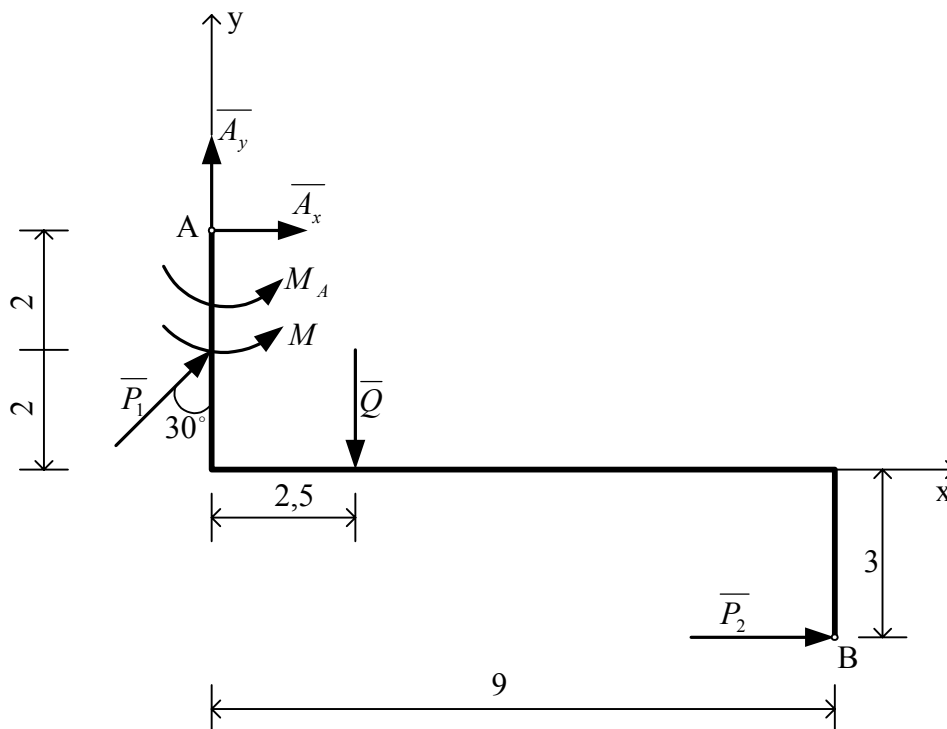
Gembiniu vadinamas standžiai viename taške įtvirtintas rėmas. Standžiojo įtvirtinimo reakcijas sudaro jėga ir jėgų pora. Kadangi reakcijos jėgos kryptis paprastai nežinoma, ši reakcijos jėga išskaidoma į dvi komponentes.

3.3 uždavinys

Rėmas standžiai įtvirtintas taške A parodytas 3.6 brėžinyje. Šį rėmą veikia jėgos P_1 , P_2 ir jėgų pora, kurios momento dydis M , ir paskirstytoji apkrova, kurios intensyvumas q . Skaičiuojame standžiojo įtvirtinimo reakcijas.



Skaiciuojamoji rėmo schema pateikiama 3.7 brėžinyje. Šioje schemoje paskirstytoji apkrova pakeista sutelktąja $Q = 5q = 5 \cdot 2 = 10 \text{ kN}$ bei atraminiai ryšiai pakeisti atitinkamomis reakcijos jėgomis.



3.7 brėž.

Užrašome rėmo pusiausvyros lygtis:

$$\sum P_{kx} = 0,$$

$$A_x + P_1 \cos 60^\circ + P_2 = 0,$$

$$\sum P_{ky} = 0,$$

$$A_y + P_1 \cos 30^\circ - Q = 0,$$

$$\sum M_A = 0,$$

$$M_A + 2P_1 \cos 60^\circ + M - 2,5Q + 7P_2 = 0.$$

Sprendami šias lygtis apskaičiuojame reakcijos jėgų dydžius:

$$A_x = -P_1 \cos 60^\circ - P_2 = -2 \cdot 0,5 - 9 = -10 \text{ kN},$$

$$A_y = Q - P_1 \cos 30^\circ = 10 - 2 \cdot 0,866 = 8,27 \text{ kN},$$

$$M_A = -2P_1 \cos 60^\circ - M + 2,5Q - 7P_2,$$

$$M_A = -2 \cdot 2 \cdot 0,5 - 9 + 2,5 \cdot 10 - 7 \cdot 9 = -49 \text{ kNm}.$$

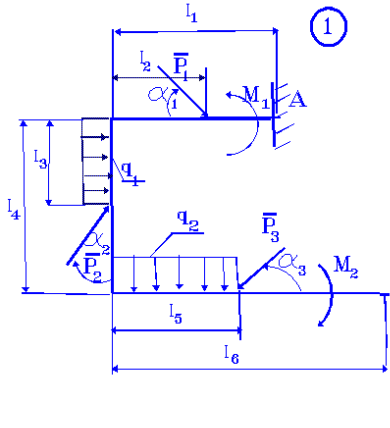
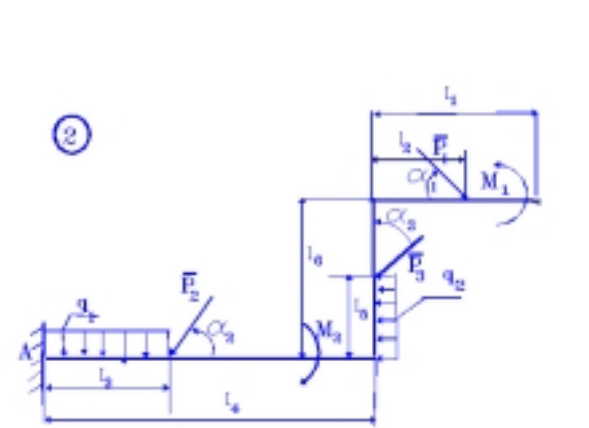
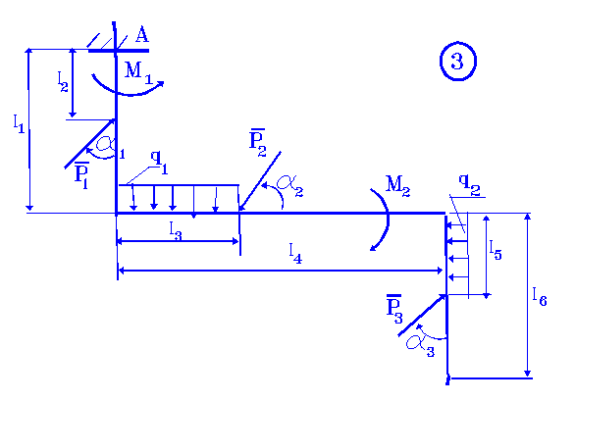
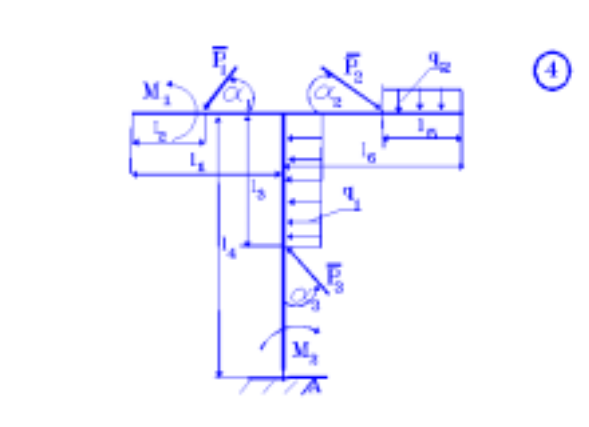
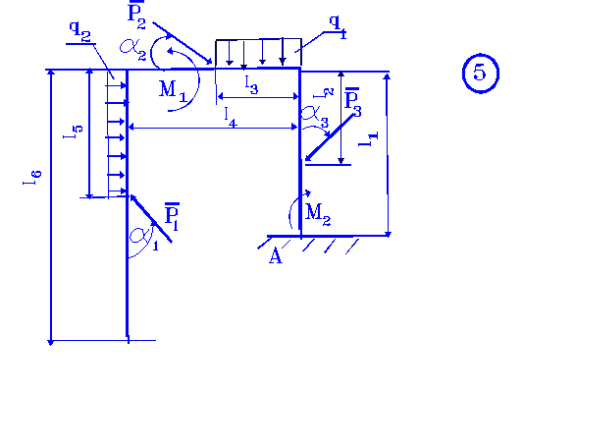
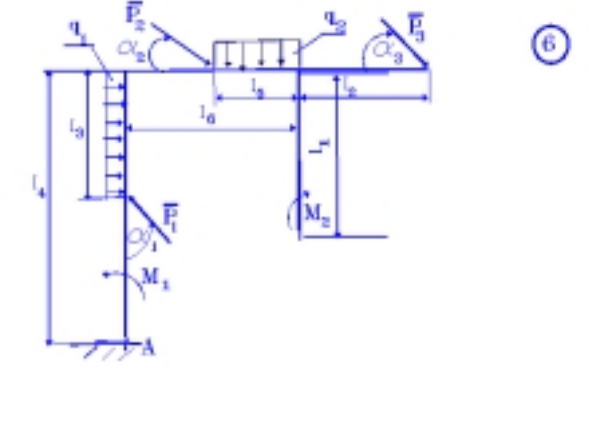
Sprendimą patikriname užrašydami momentų pusiausvyros lygtį

$$\begin{aligned} \sum M_B &= -9A_y - 7A_x - 5P_1 \cos 60^\circ - 9P_1 \cos 30^\circ + M_A + M + 6,5Q = \\ &= -9 \cdot 8,27 - 7 \cdot (-10) - 5 \cdot 2 \cdot 0,5 - 9 \cdot 2 \cdot 0,866 - 49 + 9 + 6,5 \cdot 10 \approx 0. \end{aligned}$$

Tai leidžia tikėti sprendimo rezultatais.

Savarankiškam sprendimui pateikiamas gembinių sijų schemų rinkinys parodytas 3.4 lentelėje, o duomenys 3.5 lentelėje. Šių užduočių atsakymai išspausdinti 3.6 lentelėje.

3.4 lentelė. Gembinių sijų schemos

 <p>Diagram 1: A frame structure with a horizontal beam of length l_6 and a vertical column of height l_4. The beam has a uniformly distributed load q_2 and a point load \bar{P}_3 at its right end. The column has a point load \bar{P}_1 at its top and a uniformly distributed load q_1. The beam is fixed at the right end (A) and has a hinge at the left end. The column is fixed at the bottom (A) and has a hinge at the top. The angle of rotation at the top hinge is α_1. The angle of rotation at the bottom hinge is α_3. The moment at the top hinge is M_1 and the moment at the bottom hinge is M_2.</p>	 <p>Diagram 2: A frame structure with a horizontal beam of length l_6 and a vertical column of height l_4. The beam has a uniformly distributed load q_2 and a point load \bar{P}_2 at its left end. The column has a point load \bar{P}_1 at its top and a uniformly distributed load q_1. The beam is fixed at the left end (A) and has a hinge at the right end. The column is fixed at the bottom (A) and has a hinge at the top. The angle of rotation at the top hinge is α_1. The angle of rotation at the bottom hinge is α_3. The moment at the top hinge is M_1 and the moment at the bottom hinge is M_2.</p>
 <p>Diagram 3: A frame structure with a horizontal beam of length l_4 and a vertical column of height l_1. The beam has a uniformly distributed load q_1 and a point load \bar{P}_2 at its right end. The column has a point load \bar{P}_1 at its top and a uniformly distributed load q_2. The beam is fixed at the right end (A) and has a hinge at the left end. The column is fixed at the bottom (A) and has a hinge at the top. The angle of rotation at the top hinge is α_1. The angle of rotation at the bottom hinge is α_3. The moment at the top hinge is M_1 and the moment at the bottom hinge is M_2.</p>	 <p>Diagram 4: A frame structure with a horizontal beam of length l_6 and a vertical column of height l_4. The beam has a uniformly distributed load q_2 and a point load \bar{P}_2 at its left end. The column has a point load \bar{P}_1 at its top and a uniformly distributed load q_1. The beam is fixed at the left end (A) and has a hinge at the right end. The column is fixed at the bottom (A) and has a hinge at the top. The angle of rotation at the top hinge is α_1. The angle of rotation at the bottom hinge is α_3. The moment at the top hinge is M_1 and the moment at the bottom hinge is M_2.</p>
 <p>Diagram 5: A frame structure with a horizontal beam of length l_6 and a vertical column of height l_4. The beam has a uniformly distributed load q_2 and a point load \bar{P}_2 at its left end. The column has a point load \bar{P}_1 at its top and a uniformly distributed load q_1. The beam is fixed at the left end (A) and has a hinge at the right end. The column is fixed at the bottom (A) and has a hinge at the top. The angle of rotation at the top hinge is α_1. The angle of rotation at the bottom hinge is α_3. The moment at the top hinge is M_1 and the moment at the bottom hinge is M_2.</p>	 <p>Diagram 6: A frame structure with a horizontal beam of length l_6 and a vertical column of height l_4. The beam has a uniformly distributed load q_2 and a point load \bar{P}_2 at its left end. The column has a point load \bar{P}_1 at its top and a uniformly distributed load q_1. The beam is fixed at the left end (A) and has a hinge at the right end. The column is fixed at the bottom (A) and has a hinge at the top. The angle of rotation at the top hinge is α_1. The angle of rotation at the bottom hinge is α_3. The moment at the top hinge is M_1 and the moment at the bottom hinge is M_2.</p>

3.5 lentelė. Gembinių sijų pradiniai duomenys

122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
1	3	6.	4.	5.	9.	5.	8.	0.	0.	10.	90.	10.	45.	2.	.0	8.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
2	5	4.	2.	3.	7.	3.	6.	0.	0.	6.	90.	7.	45.	1.	.0	5.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2T
3	5	5.	3.	4.	8.	4.	7.	7.	30.	0.	0.	7.	90.	0.	.5	2.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
4	4	5.	3.	3.	7.	4.	7.	7.	90.	4.	30.	0.	0.	2.	.0	.0	7.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
5	2	6.	4.	5.	9.	5.	8.	7.	45.	0.	0.	6.	90.	0.	.5	.0	5.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
6	4	5.	3.	4.	8.	4.	7.	9.	90.	8.	45.	0.	0.	0.	1.5	.0	5.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
7	3	5.	3.	4.	8.	4.	7.	0.	0.	6.	90.	2.	30.	0.	2.0	.0	9.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
8	3	6.	4.	4.	8.	5.	8.	0.	0.	9.	90.	9.	45.	1.	.0	.0	9.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
9	3	6.	4.	3.	7.	5.	8.	0.	0.	8.	90.	6.	60.	0.	2.0	5.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
10	4	4.	2.	4.	8.	3.	6.	2.	45.	0.	0.	6.	90.	2.	.0	.0	4.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
11	6	5.	3.	3.	7.	4.	7.	8.	60.	0.	0.	8.	90.	1.	.0	4.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
12	4	5.	3.	4.	8.	4.	7.	4.	30.	0.	0.	5.	90.	1.	.0	10.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
13	4	5.	3.	5.	9.	4.	7.	0.	0.	4.	90.	5.	45.	0.	2.0	7.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
14	5	4.	2.	5.	9.	3.	6.	0.	0.	10.	90.	7.	60.	2.	.0	7.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
15	4	4.	2.	4.	8.	3.	6.	6.	90.	9.	45.	0.	0.	0.	1.5	2.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
16	5	4.	2.	4.	8.	3.	6.	0.	0.	9.	90.	6.	30.	0.	1.0	8.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
17	2	6.	4.	5.	9.	5.	8.	4.	30.	0.	0.	2.	90.	0.	1.5	3.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
18	6	6.	4.	4.	8.	5.	8.	0.	0.	5.	90.	3.	60.	1.	.0	.0	10.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
19	6	6.	4.	3.	7.	5.	8.	0.	0.	4.	90.	2.	30.	1.	.0	.0	8.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
20	6	5.	3.	4.	8.	4.	7.	8.	60.	0.	0.	2.	90.	0.	1.0	.0	10.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
21	4	6.	4.	3.	7.	5.	8.	0.	0.	7.	90.	2.	60.	1.	.0	.0	5.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
22	3	4.	2.	5.	9.	3.	6.	10.	90.	2.	30.	0.	0.	1.	.0	9.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
23	5	5.	3.	5.	9.	4.	7.	2.	30.	0.	0.	8.	90.	1.	.0	.0	4.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
24	1	5.	3.	5.	9.	4.	7.	6.	60.	0.	0.	7.	90.	0.	2.0	.0	8.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
25	4	5.	3.	4.	8.	4.	7.	0.	0.	5.	90.	3.	45.	2.	.0	2.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
26	1	6.	4.	3.	7.	5.	8.	3.	45.	0.	0.	2.	90.	0.	1.0	10.0	0.
122	SCH	L1	L2	L3	L4	L5	L6	P1	AL1	P2	AL2	P3	AL3	q1	q2	M1	M2
27	3	6.	4.	5.	9.	5.	8.	0.	0.	2.	90.	2.	30.	2.	.0	7.0	0.

3.6 lentelė. Gembinių sijų skaičiavimo rezultatai

N	SCH	MA	RAx	RAy	Qp1	Qp2
1	3	-74.421	-7.071	12.929	10.000	.000
2	5	-35.149	4.950	12.450	1.500	.000
3	5	34.997	8.500	-6.062	.000	2.000
4	4	-9.751	2.536	9.000	6.000	.000
5	2	72.695	3.550	4.950	.000	2.500
6	4	79.225	-5.657	20.657	.000	6.000
7	3	66.144	7.000	4.268	.000	8.000
8	3	-71.915	-6.364	4.636	2.000	.000
9	3	25.842	4.804	5.000	.000	10.000
10	4	-82.142	15.414	1.414	8.000	.000
11	6	64.787	3.928	4.000	3.000	.000
12	4	-73.713	10.464	2.000	2.000	.000
13	4	30.858	3.536	8.464	.000	8.000
14	5	-94.124	6.062	23.500	10.000	.000
15	4	76.254	-6.364	16.864	.000	4.500
16	5	-42.500	.000	14.196	.000	3.000
17	2	21.963	6.036	2.000	.000	7.500
18	6	80.177	-3.500	7.598	2.000	.000
19	6	52.374	-3.232	5.000	1.500	.000
20	6	22.287	6.928	2.000	.000	4.000
21	4	2.572	4.732	6.000	3.000	.000
22	3	-10.822	-8.268	3.500	2.500	.000
23	5	-3.662	9.000	.768	2.500	.000
24	1	-33.392	-3.000	20.196	.000	8.000
25	4	-31.485	8.121	2.879	6.000	.000
26	1	-33.743	-2.121	9.121	.000	5.000
27	3	-4.838	-1.000	7.768	7.500	.000

4. KŪNŲ SISTEMOS PUSIAUSVYRA

Ryšiai kūnų sistemoje skirstomi į vidinius ir išorinius. Vidiniais vadinami ryšiai, jungiantys kūnus į sistemą. Išoriniai – tai ryšiai, jungiantys tiriamos sistemos kūnus prie kitų kūnų.

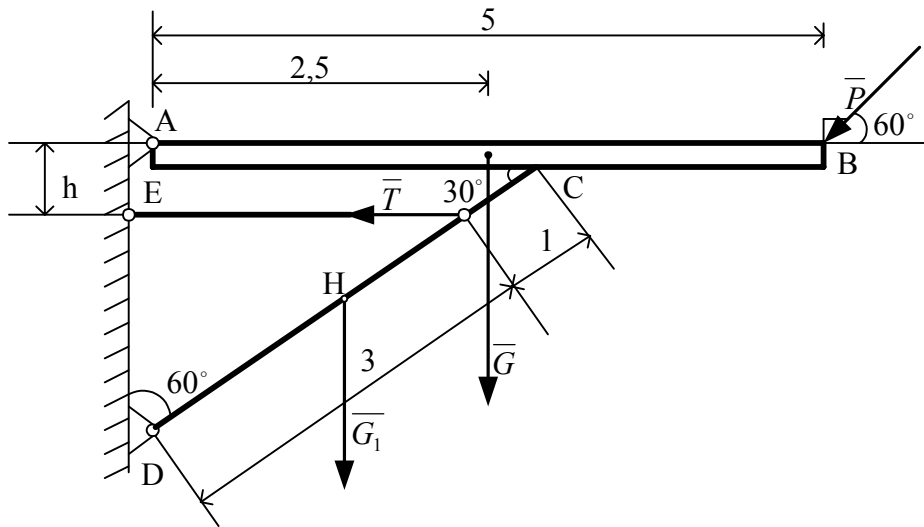
Vidinių ryšių reakcijos, būdamos kūnų tarpusavio sąveikos jėgomis, yra vienodo didumo ir priešingų kryptų. Čia nagrinėjamos kūnų sistemos, veikiamos plokščiosios jėgų sistemos, todėl sprendžiant uždavinius šiai jėgų sistemai taikomos įprastos statinės pusiausvyros lygtys. Visai kūnų sistemai gali būti užrašomos 3 statinės pusiausvyros lygtys, į kurias neįeina vidinių ryšių reakcijos, nes būdamos vienodo didumo ir priešingų kryptų jos viena kitą eliminuoja.

Paprastai lygčių, užrašytų visai sistemai, nepakanka išorinių ryšių reakcijoms nustatyti. Kiekvienos sistemos kūnas gali būti nagrinėjamas atskirai. Šiuo atveju kiekvienam kūnui užrašome po 3 statines pusiausvyros lygtis, kurios leidžia skaičiuoti išorinių ir vidinių ryšių reakcijas. Kūnų sistema yra statiškai sprendžiama, kai nežinomųjų jėgų skaičius neviršija $3n$ (n – kūnų skaičius).

4.1 uždavinys

Vienalytė horizontalioji sija AB , kurios svoris $G = 4 \text{ kN}$, įtvirtinta šarnyru A ir remiasi į atraminę siją DC . Šios sijos svoris $G_1 = 5 \text{ kN}$. Ji įtvirtinta šarnyru D ir palaikoma lynu EL .

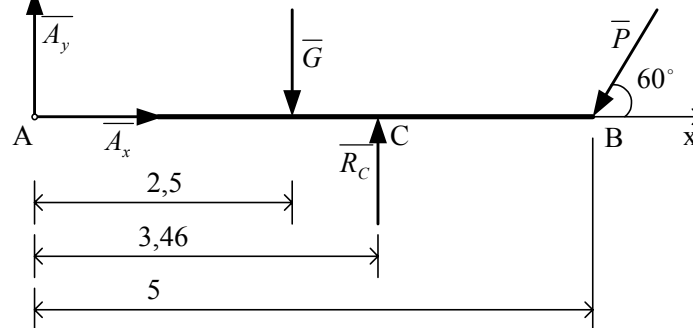
Konstrukcijos matmenys pateikiami 4.1 brėžinyje. Taške B veikianti jėga $P = 8 \text{ kN}$. Skaičiuojamos šarnyrų reakcijos, lyno įtempimo jėga ir sijų tarpusavio sąveikos taške C jėga.



4.1 brėž.

Konstrukciją sudaro du standieji kūnai AB ir DC . Kiekvieną iš šių sijų galima nagrinėti atskirai. 4.2 ir 4.3 brėžiniuose pateikiamos šių kūnų skaičiuojamosios schemas, gautos pašalinus išorinius ir vidinius ryšius.

Šarnyrų reakcijos vertinamos dviem komponentėmis. Sąveikos jėga taške C privalo būti statmena sijos AB plokštumai, o lyno įtempimo jėga sutampa su lyno kryptimi.



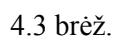
4.2 brėž.

Atlikę 4.3 brėžinio geometrinę analizę, apskaičiuojame $AC = DC \cos 30^\circ = 4 \cdot 0,866 = 3,46 \text{ m}$, $h = CL \sin 30^\circ = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ m}$.

Kadangi siją AB veikia tik trys nežinomos jėgos A_x, A_y, R_C , spręsti pradedame nuo šios sijos. Pradžioje sudarome taško A atžvilgiu momentų pusiausvyros lygtį:

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0,$$

$$-2,5G + 3,46R_C - 5P \cos 30^\circ = 0.$$


$$R_C = \frac{5P \cos 30^\circ + 2,5G}{3,46},$$
$$R_C = \frac{5 \cdot 8 \cdot 0,866 + 2,5 \cdot 4}{3,46} = 12,89 \text{ kN}.$$
$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, \\ A_x - P \cos 60^\circ &= 0, \\ A_x &= P \cos 60^\circ = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ kN}, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ A_y - G + R_C - P \cos 30^\circ &= 0, \\ A_v &= G - R_C + P \cos 30^\circ = 4 - 12,89 + 8 \cdot 0,866 = -1,97 \text{ kN}.\end{aligned}$$
$$\begin{array}{ll} \sum M_D(\overline{F_k}) = 0, & -2G_1 \cos 30^\circ + 3T \cos 60^\circ - 4R_C' \cos 30^\circ = 0, \\ \sum F_{kx} = 0, & D_x - T = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & D_y - G_1 - R_C' = 0. \end{array}$$
$$T = \frac{(2G_1 + 4R_c') \cos 30^\circ}{3 \cos 60^\circ} = \frac{(2 \cdot 5 + 4 \cdot 12,89) 0,866}{3 \cdot 0,5} = 35,54 \text{ kN},$$

$$D_x = T = 35,54 \text{ kN},$$

$$D_y = G_1 + R_c' = 5 + 12,89 = 17,89 \text{ kN}.$$

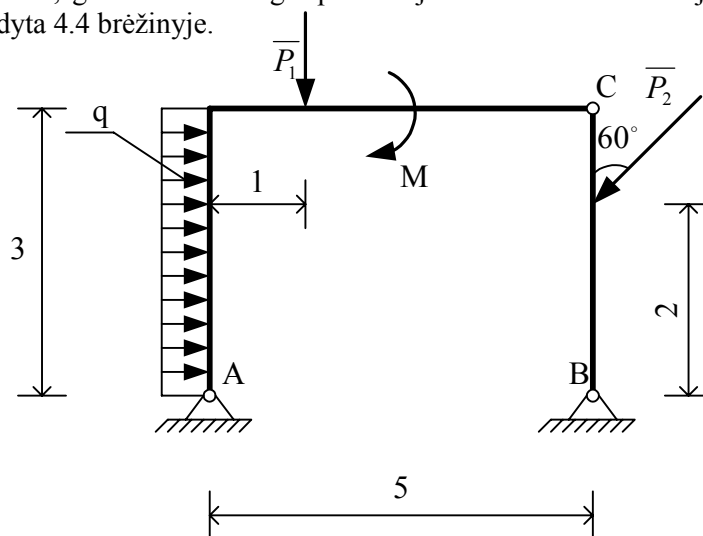
22

$$\begin{aligned}\sum M_H(\overline{P_k}) &= -A_x - 1,73A_y - 0,77G + P \cos 60^\circ - 3,27P \cos 30^\circ + 0,5T + P_x - 1,73D_y = \\ &= -1 \cdot 4 - 1,73 \cdot (-1,97) - 0,77 \cdot 4 + 8 \cdot 0,5 - 3,27 \cdot 8 \cdot 0,866 + 0,5 \cdot 35,54 + 35,54 - 1,73 \cdot 17,89 = 0,033.\end{aligned}$$

Šioje lygtyje geometriniai parametrai atskirai neparodyti, tačiau jie nustatomi remiantis elementariais skaičiavimais.

4.2 uždavinys

Šiame uždavinyje nagrinėjama dviejų kūnų sistema, parodant, kad kai kuriais atvejais pusiausvyros lygtys, užrašytos visai sistemai, gali būti sėkmingai panaudojamos atskiroms reakcijos jėgoms skaičiuoti. Konstrukcijos schema parodyta 4.4 brėžinyje.



4.4 brėž.

Čia $P_1 = 7 \text{ kN}$, $P_2 = 9 \text{ kN}$, $M = 20 \text{ kNm}$, $q = 1,2 \text{ kN/m}$.

Pašalinus ryšius, sudaryta konstrukcijos skaičiuojamoji schema, parodyta 4.5 brėžinyje. Skaičiuojamojoje schemoje išskirstytas krūvis pakeičiamas koncentruota jėga $Q = 3q = 3 \cdot 1,2 = 3,6 \text{ kN}$.

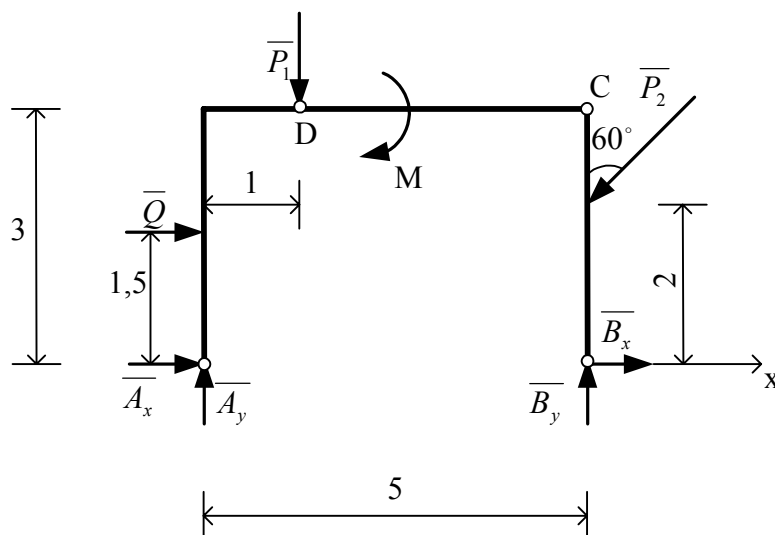
Vertindami tik išorines jėgas, užrašome momentų pusiausvyros lygtis kūnų sistemai;

$$\begin{aligned}\sum M_A(\overline{F_k}) &= 0, & -1,5Q - P_1 - M - 5P_2 \cos 60^\circ + 2P_2 \cos 30^\circ + 5B_y &= 0. \\ \sum M_B(\overline{F_k}) &= 0, & -5A_y - 1,5Q + 4P_1 - M + 2P_2 \cos 30^\circ &= 0.\end{aligned}$$

Taikydami šias lygtis apskaičiuojame reakcijos jėgų B_y ir A_y reikšmes

$$B_y = \frac{1,5Q + P_1 + M + 5P_2 \cos 60^\circ - 2P_2 \cos 30^\circ}{5} = \frac{1,5 \cdot 3,6 + 7 + 20 + 5 \cdot 9 \cdot 0,5 - 2 \cdot 9 \cdot 0,866}{5} = 7,86 \text{ kN},$$

$$A_y = \frac{-1,5Q + 4P_1 - M + 2P_2 \cos 30^\circ}{5} = \frac{-1,5 \cdot 3,6 + 4 \cdot 7 - 20 + 2 \cdot 9 \cdot 0,866}{5} = 3,64 \text{ kN}.$$



4.5 brėž.

Tada sudarome jėgų projekcijų pusiausvyros lygtį:

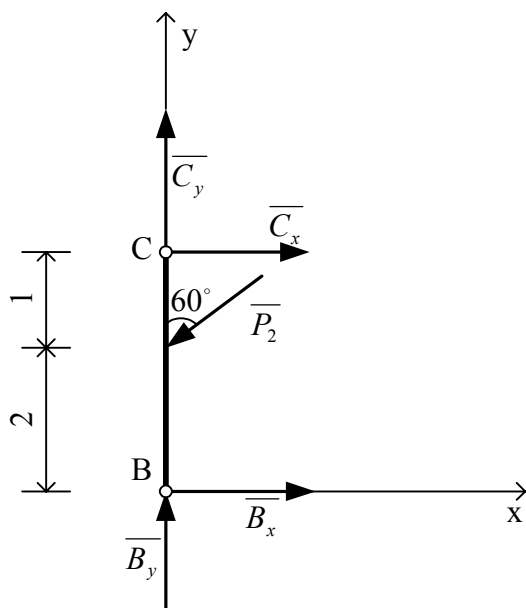
$$\sum F_{kx} = 0, \text{ (ašis } x \text{ nstatmena atkarpai } AB)$$

$$A_x + Q - P_2 \cos 30^\circ + B_x = 0.$$

Ši lygtis negali būti išspręsta, tačiau išreiškiame A_x :

$$A_x = -Q + P_2 \cos 30^\circ - B_x.$$

Analizuojame atskirai sijos BC pusiausvyrą (šios sijos schema parodyta 4.6 brėžinyje):



4.6 brėž.

Užrašome statinės pusiausvyros lygtis sijai BC ir apskaičiuojame nežinomųjų reakcijos jėgų reikšmes:

$$\begin{aligned}\sum M_C(\overline{F_k}) &= 0, & 3B_x - P_2 \cos 30^\circ &= 0, \\ B_x &= \frac{P_2 \cos 30^\circ}{3} = \frac{9 \cdot 0,866}{3} = 2,6 \text{ kN}, \\ \sum F_{kx} &= 0, & B_x - P_2 \cos 30^\circ + C_x &= 0, \\ C_x &= P_2 \cos 30^\circ - B_x = 9 \cdot 0,866 - 2,6 = 5,2 \text{ kN}, \\ \sum F_{ky} &= 0, & B_y - P_2 \cos 60^\circ + C_y &= 0, \\ C_y &= P_2 \cos 60^\circ - B_y = 9 \cdot 0,5 - 7,86 = -3,36 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Skaičiuojame A_x panaudodami sudarytos lygties išraišką

$$A_x = -3,6 + 9 \cdot 0,866 - 2,6 = 1,59 \text{ kN}.$$

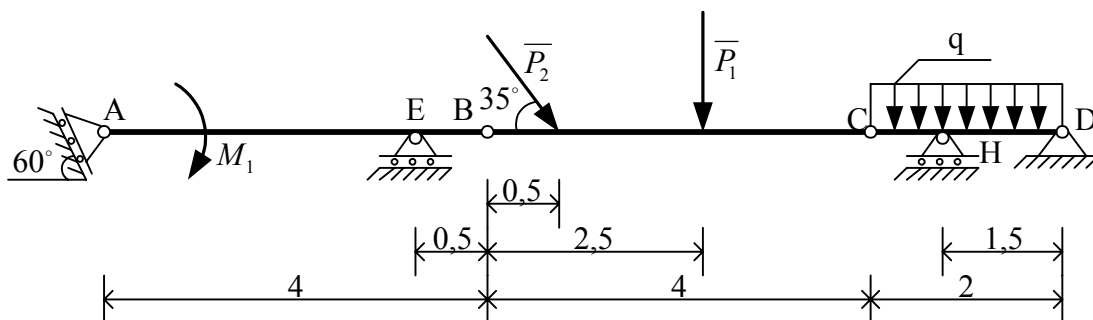
Patikrinimui sudarome momentų pusiausvyros lygtį visai kūnų sistemai, centru pasirinkę jėgos $\overline{P_1}$ veikimo tašką D .

$$\begin{aligned}\sum M_D(\overline{F_k}) &= -A_y + 3A_x + 1,5Q - M - 4P_2 \cos 60^\circ - P_2 \cos 30^\circ + 4B_y + 3B_x = \\ &= -3,64 + 3 \cdot 1,59 + 1,5 \cdot 3,6 - 30 - 4 \cdot 9 \cdot 0,5 - 9 \cdot 0,866 + 4 \cdot 7,86 + 3 \cdot 2,6 = 0,012.\end{aligned}$$

Reakcijų reikšmės laikytinos teisingomis.

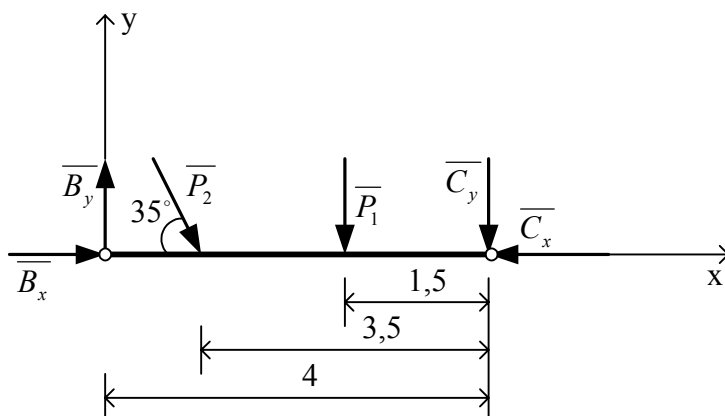
4.3 uždavinys

Nagrinėjama trijų dalių horizontalioji sija. Sijos dalys jungiamos šarnyrais B ir C . Siją veikia aktyviosios jėgos $P_1 = 5 \text{ kN}$, $P_2 = 7,5 \text{ kN}$, išskirstyta apkrova, kurios intensyvumas $q = 1,25 \text{ kN/m}$ ir $M_2 = 25 \text{ kNm}$. Būtina skaičiuoti išorinių ir vidinių ryšių reakcijas. Sijos schema parodyta 4.7 brėžinyje.



4.7 brėž.

Šarnyre D tenka skaičiuoti dvi išorinių ryšių reakcijų komponentes, šarnyruose B ir C po dvi vidinių ryšių reakcijų dedamąsias, atramas A , E ir H pakeičiame reakcijos jėgomis, turinčiomis po vieną komponentę. Bendras skaičiuojamų reakcijų skaičius lygus 9. Kadangi sija sudaro 3 kūnai, bendras lygčių skaičius prilygsta nežinomųjų skaičiui. Uždavinys yra statiškai sprendžiamas.



4.8 brėž.

Pradėti skaičiavimą rekomenduojame nuo kūno, kurį veikia mažiausias nežinomų jėgų skaičius, arba šios jėgos išdėstytos mažiausiame taškų skaičiuje. Pagal paskutinį kriterijų toks kūnas yra BC (vidinių ryšių reakcijos veikia dviejuose taškuose B ir C). Nagrinėjame šį kūną. Šios sijos dalies schema parodyta 4.8 brėžinyje.

Reakcijų $\overline{B_x}, \overline{B_y}, \overline{C_x}, \overline{C_y}$ kryptys parenkamos laisvai.

Sudarome šio kūno statinės pusiausvyros lygtis ir sprendžiame:

$$\begin{aligned}\sum M_B(\overline{F_k}) &= 0, \\ -0,5P_2 \cos 55^\circ - 2,5P_1 - 4C_y &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ B_y - P_2 \cos 55^\circ - P_1 - C_y &= 0, \\ \sum F_{kx} &= 0, \\ B_x + P_2 \cos 35^\circ - C_x &= 0.\end{aligned}$$

Sprendami pirmąją ir antrąją lygtis, apskaičiuojame C_y ir B_y reikšmes

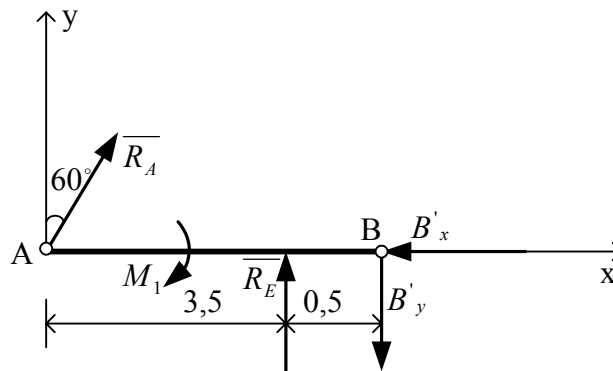
$$\begin{aligned}C_y &= \frac{-0,5P_2 \cos 55^\circ - 2,5P_1}{4} = \frac{-0,5 \cdot 7,5 \cdot 0,574 - 2,5 \cdot 5}{4} = -3,66 \text{ kN}, \\ B_y &= P_2 \cos 55^\circ + P_1 + C_y = 7,5 \cdot 0,574 + 5 - 3,66 = 5,65 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Trečioji lygtis paliekama tolesniam sprendimui.

Tada nagrinėtume sijos dalį AB , kur likusių nežinomų jėgų būtų tik 3. Šios dalies schema parodyta 4.9 brėžinyje.

Čia $B'_x = B_x$, $B'_y = B_y$. Užrašome šios dalies pusiausvyros lygtis ir skaičiuojame R_A, R_E, B'_x :

$$\begin{aligned}\sum M_A(\overline{F_k}) &= 0, \\ -M_1 + 3,5R_E - 4B'_y &= 0, \\ R_E &= \frac{M_1 + 4B'_y}{3,5} = \frac{20 + 4 \cdot 5,65}{3,5}, \\ R_E &= 12,17 \text{ kN}.\end{aligned}$$



4.9 brėž.

$$\sum F_{ky} = 0,$$

$$R_A \cos 60^\circ + R_E - B'_y = 0,$$

$$R_A = 2B'_y - 2R_E = 2 \cdot 6,65 - 2 \cdot 12,17,$$

$$R_A = -13,03 \text{ kN},$$

$$\sum F_{kx} = 0,$$

$$R_A \cos 30^\circ - B'_x = 0,$$

$$B'_x = R_A \cos 30^\circ = -13,03 \cdot 0,866,$$

$$B'_x = -11,28 \text{ kN}.$$

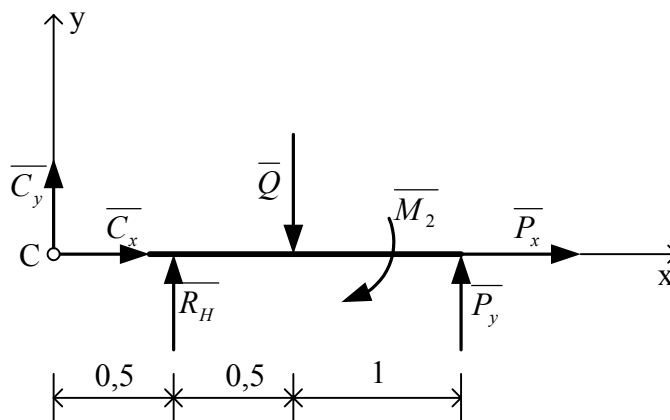
Taikydami kūno BC anksčiau nespęstą lygtį, apskaičiuojame C_x :

$$C_x = B_x + P_2 \cos 35^\circ,$$

$$C_x = -11,28 + 7,5 \cdot 0,819,$$

$$C_x = -5,14 \text{ kN}.$$

Tada skaičiuojame sijos dalį CD , kurioje likę trys nežinomos jėgos. Šios sijos dalies schema pateikiama 4.10 brėžinyje.



4.10 brėž.

Pirmąją užrašome momentų pusiausvyros lygtį, centru pasirinkę tašką D :

$$\sum M_D(\overline{F_k}) = 0,$$

$$-2C_y - 1,5R_H + Q - M_2 = 0.$$

Vadinasi,

$$R_H = \frac{Q - 2C_y - M_2}{1,5}, \quad Q = 2q = 2 \cdot 1,25 = 2,5 \text{ kN},$$

$$R_H \frac{2,5 + 2 \cdot 3,66 - 25}{1,5} = -10,12 \text{ kN}.$$

Projektuojame jėgas į koordinačių ašis ir sudarę atitinkamas pusiausvyros lygtis, apskaičiuojame reakcijos jėgų D_x ir D_y reikšmes:

$$\sum F_{kx} = 0,$$

$$C_x + D_x = 0,$$

$$D_x = -C_x = 5,14 \text{ kN},$$

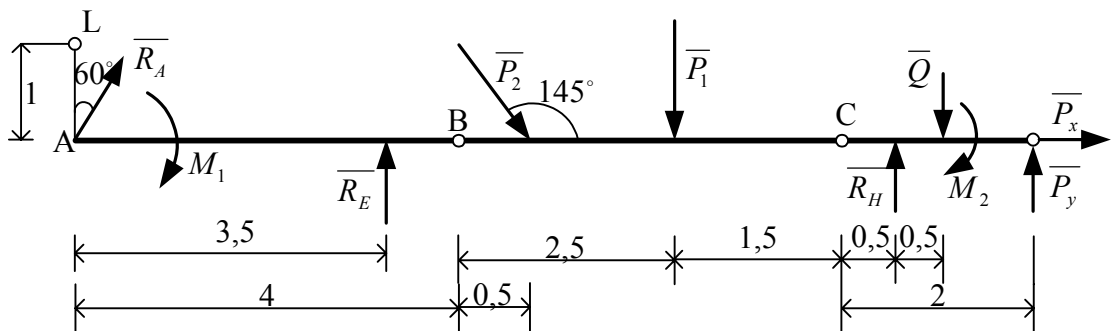
$$\sum F_{ky} = 0,$$

$$C_y - Q + R_H + D_y = 0,$$

$$D_y = Q - C_y - R_H = 2,5 + 3,66 + 10,12,$$

$$D_y = 16,28 \text{ kN}.$$

Skaičiavimą patikriname nagrinėdami visos sistos pusiausvyrą. Veikiančių išorinių jėgų schema parodyta 4.11 brėžinyje.



4.11 brėž.

Taškas L parinktas centru, kadangi per jį nepraeina išorinių jėgų veikimo tiesės.

$$\sum M_L(\overline{F_k}) = R_A \cos 30^\circ - M_1 + 3,5R_E - 4,5P_2 \cos 55^\circ + P_2 \cos 35^\circ - 6,5P_1 + 8,5R_H - 9Q + D_x + 10D_y - M_2 =$$

$$= -13,03 \cdot 0,866 - 20 + 3,5 \cdot 12,17 - 4,5 \cdot 7,5 \cdot 0,574 + 7,5 \cdot 0,819 - 6,5 \cdot 5 + 8,5 \cdot (-10,12) - 9 \cdot 2,5 + 5,14 +$$

$$+ 10 \cdot 16,28 - 25 = 0,001.$$

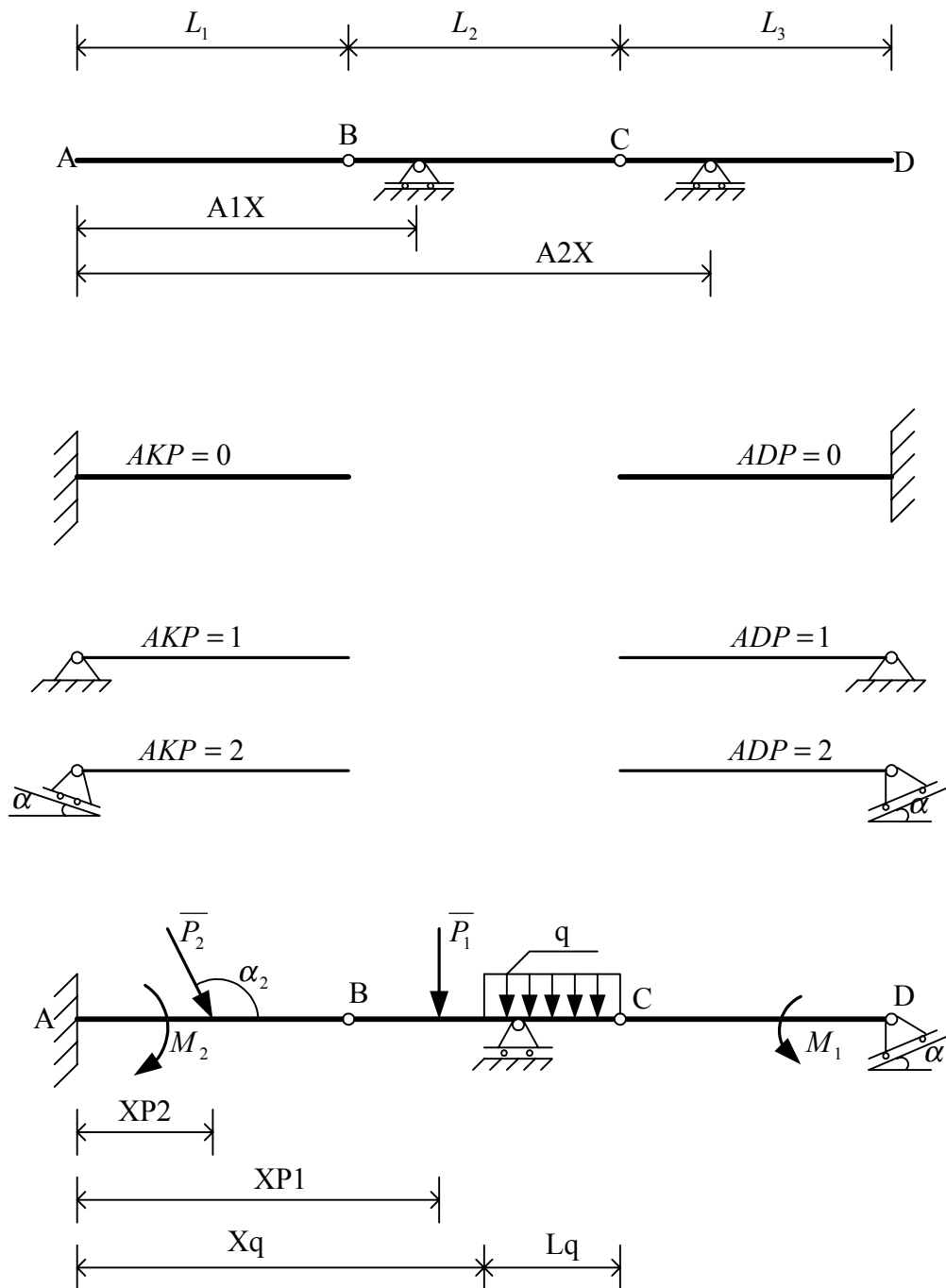
Šis rezultatas leidžia skaičiavimo rezultatus laikyti patikimais.

4.1 lentelėje pateikiami duomenys trijų dalių sijoms sudaryti ir savarankiškai tobulinti sprendimo įgūdžius.

4.1 lentelė. Trijų dalių sijos užduočių variantų pradiniai duomenys

	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/3	
522	1	3.50	4.00	2.50	1.00	2.00	40.00	4.00	6.50	7.50	2.00	1.25	5.50	5.00	2.50	65.00	20.00	-50.00	-15.00
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/2	
2	2.00	4.00	4.00	.00	2.00	50.00	3.50	.00	2.00	3.50	.50	8.00	5.00	7.00	35.00	12.50	35.00	10.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/3	
3	2.50	4.00	3.50	1.00	2.00	45.00	3.00	5.50	3.00	3.00	1.25	9.50	10.00	1.00	110.00	12.50	35.00	25.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/1	
4	2.00	3.00	5.00	1.00	2.00	15.00	1.50	4.50	2.00	2.50	1.50	6.00	17.50	9.50	130.00	15.00	-35.00	50.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/2	
5	3.00	2.50	4.50	.00	2.00	25.00	3.50	.00	3.00	2.00	.75	9.50	15.00	2.00	115.00	15.00	10.00	20.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/2	
6	4.00	3.50	2.50	.00	2.00	35.00	6.50	.00	4.00	3.00	1.25	9.00	5.00	2.50	45.00	7.50	-50.00	-20.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/2	M2/1	
7	4.00	3.00	3.00	1.00	2.00	20.00	3.00	6.50	7.00	2.50	.75	.50	5.00	8.50	35.00	5.00	-30.00	15.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/3	
8	4.00	3.00	3.00	1.00	2.00	20.00	3.50	6.00	4.00	2.50	.50	8.00	15.00	3.00	70.00	5.00	20.00	-25.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/2	
9	2.50	3.00	4.50	2.00	1.00	40.00	1.50	4.50	5.50	4.00	.50	3.00	7.50	8.00	65.00	5.00	10.00	45.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/3	M2/1	
10	3.50	2.50	4.00	1.00	2.00	15.00	4.50	5.50	1.00	2.00	.75	4.00	12.50	6.50	70.00	7.50	-45.00	20.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/3	M2/1	
11	2.00	2.50	5.50	1.00	2.00	40.00	1.50	5.50	.00	2.00	1.25	2.50	5.00	4.00	60.00	17.50	20.00	25.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/1	
12	2.00	3.50	4.50	1.00	2.00	60.00	2.50	4.50	5.50	2.00	1.50	3.00	12.50	8.00	40.00	7.50	40.00	-50.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/2	M2/2	
13	2.50	3.00	4.50	2.00	.00	30.00	3.00	.00	5.50	3.50	.25	1.50	20.00	1.00	125.00	5.00	-45.00	50.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/1	
14	2.00	3.50	4.50	2.00	.00	15.00	4.50	.00	2.00	3.00	.25	8.00	15.00	4.00	65.00	7.50	-40.00	15.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/3	M2/1	
15	2.00	3.50	4.50	1.00	2.00	40.00	1.00	6.50	2.00	3.00	.75	.50	17.50	8.50	110.00	12.50	-25.00	-35.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/3	M2/1	
16	3.00	4.00	3.00	1.00	2.00	40.00	4.00	8.00	3.00	3.50	1.25	2.50	15.00	8.00	50.00	20.00	10.00	-20.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/2	M2/1	
17	2.00	4.00	4.00	1.00	2.00	60.00	3.00	5.00	.00	2.00	.50	7.00	15.00	5.50	110.00	5.00	-20.00	25.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/3	M2/3	
18	4.00	4.00	2.00	2.00	1.00	50.00	3.50	7.00	4.50	3.00	1.50	2.00	7.50	2.50	125.00	20.00	-50.00	-10.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/3	
19	4.00	4.00	2.00	2.00	1.00	50.00	5.00	8.50	8.00	2.00	1.25	4.50	12.50	7.00	50.00	7.50	-15.00	50.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/3	M2/1	
20	4.00	3.50	2.50	2.00	1.00	40.00	3.00	8.00	4.00	2.00	1.25	2.00	20.00	8.00	65.00	12.50	-40.00	-15.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/2	M2/2	
21	3.00	2.50	4.50	2.00	1.00	35.00	3.50	6.00	6.50	2.00	1.50	.50	12.50	2.50	50.00	10.00	25.00	10.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/1	
22	2.00	2.00	6.00	1.00	2.00	40.00	1.00	4.50	4.50	5.00	.25	2.50	15.00	9.00	35.00	15.00	-10.00	25.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/2	M2/3	
23	3.50	2.00	4.50	2.00	.00	50.00	5.00	.00	6.00	2.00	1.00	3.00	7.50	4.50	50.00	20.00	-20.00	-10.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/2	
24	3.50	2.00	4.50	1.00	2.00	60.00	4.50	6.00	3.50	2.00	1.50	6.00	10.00	2.50	120.00	12.50	30.00	40.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/2	M2/2	
25	2.00	4.00	4.00	1.00	2.00	55.00	1.50	5.00	7.00	2.50	.75	.50	10.00	1.50	30.00	10.00	10.00	-30.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/3	M2/3	
26	3.00	4.00	3.00	1.00	2.00	45.00	2.00	8.00	3.50	3.00	.50	.50	15.00	2.50	35.00	17.50	-40.00	-35.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/3	M2/2	
27	3.50	3.00	3.50	2.00	1.00	15.00	3.00	6.00	.50	2.00	1.00	4.50	7.50	1.50	30.00	17.50	20.00	-10.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/1	M2/2	
28	2.00	3.00	5.00	.00	2.00	50.00	4.50	.00	5.00	4.00	.75	2.50	20.00	5.50	130.00	17.50	50.00	15.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/3	M2/3	
29	3.00	3.50	3.50	.00	2.00	15.00	4.00	.00	3.50	2.00	1.50	1.00	7.50	5.00	30.00	7.50	-45.00	25.00	
522	L1	L2	L3	AKP	ADP	ALFA	A1X	A2X	Xq	Lq	q	XP1	P1	XP2	ALF2	P2	M1/3	M2/2	
30	2.00	2.50	5.50	2.00	1.00	40.00	1.00	5.50	.00	2.00	1.50	4.00	5.00	6.50	145.00	17.50	15.00	-30.00	

Lentelėje pateikti duomenys L_1, L_2, L_3 nusako atskirų sijos dalių ilgius metrais, AKP ir ADP – sijos kairiojo ir dešiniojo dalių įtvirtinimo variantus, $P_1, P_2, q, xq, lq, M_1/k, M_2/j$ – aktyviosios apkrovos veikiančios siją. Čia k ir j nurodo, kurią sijos dalį veikia atitinkamas monetas. $XP1, XP2, Xq, lq$ nurodo atitinkamų jėgų pridėties koordinates ir apkrautos dalies ilgį (lq). Koordinačių pradžia laikomas kairysis sijos galas (taškas A). Schemai sudaryti reikalinga informacija pateikta 4.12 brėžinyje.



4.12 brėž.

Jeigu $A2X = 0$, antros judriosios šarnyrinės atramos nėra. Momento algebrinis ženklas parodo jo kryptį sudarant schemą.

Jėga P_1 visais atvejais nukreipta vertikalia kryptimi (žemyn).

Šių užduočių sprendimo rezultatai pateikiami 4.2 lentelėje.

4.2 lentelė. Trijų dalių sijos užduočių variantų skaičiavimo rezultatai

1	AX 14.3;AY -9.1; D 9.1;A1 36.5;A2 -8.7;BX 5.9;BY-27.2;CX 5.9;CY -4.5;
2	AM-48.5;AX 15.4;AY -6.8; D 6.7;A1 16.4;BX 15.4;BY -6.8;CX 15.4;CY 7.9;
3	AX -2.8;AY 21.0; D 2.0;A1-13.1;A2 16.1;BX 1.4;BY 9.3;CX 1.4;CY 8.6;
4	AX -5.9;AY 10.4; D 14.3;A1-11.5;A2 20.1;BX -5.9;BY -1.2;CX -5.9;CY 15.1;
5	AM112.7;AX -.1;AY 45.4; D 14.7;A1-28.7;BX 6.2;BY 31.8;CX 6.2;CY 1.7;
6	AM 34.1;AX 7.4;AY -2.0; D 3.7;A1 13.1;BX 2.1;BY -7.3;CX 2.1;CY 2.0;
7	AX 4.9;AY 13.3; D 2.4;A1-20.8;A2 15.0;BX 4.9;BY-12.5;CX 4.9;CY 2.5;
8	AX 6.6;AY 6.4; D 14.2;A1 -2.1;A2 3.3;BX 4.9;BY -.4;CX 4.9;CY 1.7;
9	A-14.4;DX 11.4;DY 3.4;A1 37.6;A2-15.9;BX -9.3;BY 26.6;CX -9.3;CY 3.1;
10	AX 5.8;AY 6.4; D 12.6;A1 11.6;A2 -9.0;BX 5.8;BY 4.9;CX 5.8;CY -5.1;
11	AX 2.6;AY 15.2; D -9.6;A1 -5.6;A2 20.5;BX 2.6;BY 7.0;CX -6.2;CY-13.1;
12	AX 11.5;AY -5.0; D 6.7;A1 13.4;A2 8.6;BX 11.5;BY -5.0;CX 11.5;CY 4.5;
13	A 12.1;DX -8.9;DY -3.9;DM 18.9;A1 18.4;BX 8.9;BY-13.6;CX 8.9;CY 4.7;
14	A-12.9;DX 6.5;DY-20.4;DM129.3;A1 55.4;BX -3.3;BY-12.5;CX -6.5;CY 35.4;
15	AX 7.1;AY-27.5; D 17.7;A1 46.3;A2 -.9;BX 7.1;BY 1.3;CX 7.1;CY -1.0;
16	AX 10.9;AY -4.2; D -3.1;A1 28.8;A2 12.4;BX 10.9;BY-19.2;CX 10.9;CY 5.3;
17	AX 4.8;AY 13.0; D 7.5;A1-34.8;A2 38.7;BX 4.8;BY 12.0;CX 6.5;CY 11.3;
18	A 9.7;DX-18.9;DY 30.0;A1 29.1;A2-37.0;BX 18.9;BY 11.5;CX 18.9;CY-30.0;
19	A -5.8;DX 9.3;DY-32.7;A1 21.5;A2 35.7;BX -4.5;BY -3.8;CX -9.3;CY -.5;
20	A 1.4;DX 4.4;DY 19.8;A1 20.7;A2 -7.8;BX .9;BY 1.8;CX .9;CY -.7;
21	A 14.3;DX -1.8;DY 3.6;A1 28.1;A2-20.2;BX 1.8;BY -8.5;CX 1.8;CY 19.6;
22	AX 18.4;AY 3.8; D 9.5;A1 7.5;A2 6.3;BX 18.4;BY 11.3;CX 18.4;CY -3.8;
23	A 1.7;DX 11.6;DY 7.4;DM-20.3;A1 16.4;BX 1.3;BY -6.4;CX-11.6;CY -5.4;
24	AX 2.2;AY 11.7; D 9.8;A1 41.3;A2-34.1;BX 8.5;BY .8;CX 8.5;CY 39.2;
25	AX 10.2;AY 9.0; D 1.8;A1 -.9;A2 7.8;BX 1.5;BY -6.9;CX 1.5;CY .8;
26	AX 51.5;AY 8.4; D 52.5;A1 17.4;A2-36.4;BX 37.1;BY .8;CX 37.1;CY -.8;
27	A 5.7;DX 13.7;DY -5.7;A1 4.6;A2 13.9;BX-13.7;BY -.6;CX-13.7;CY 5.7;
28	AM-11.5;AX -8.2;AY 19.2; D 4.0;A1 14.6;BX -8.2;BY 19.2;CX -8.2;CY 13.9;
29	AM 34.6;AX 8.0;AY 16.5; D 5.9;A1 -8.0;BX 8.0;BY 9.0;CX 1.5;CY -5.7;
30	A 14.4;DX-23.6;DY -4.7;A1-19.0;A2 30.7;BX 9.2;BY-11.0;CX 9.2;CY-16.0;

5. SLYDIMO TRINTIS

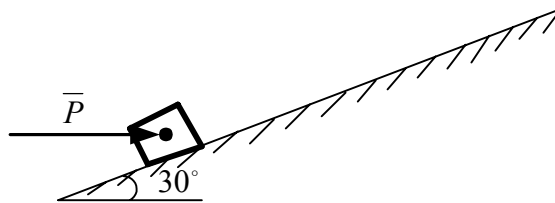
Slydimo trintimi vadinamas pasipriešinimas, atsirandantis liečiantis dviem kūnams ir esant reliatyviojo slydimo galimybei. Trinties jėga veikia priešinga kryptimi galimai kūno slydimo kryptiai. Maksimali galima trinties jėga yra

$$F = f_s N. \quad (5.1)$$

Čia f_s – trinties koeficientas, priklausantis nuo besiliečiančių kūnų medžiagų, jų besiliečiančių paviršių glotnumo ir N – kontakto jėgos. Trinties koeficientas, atitinkantis didžiausią trinties jėgą, kūnui nejudant, vadinamas statinės trinties koeficientu. Trinties koeficientas, atitinkantis slystantį kūną veikiančią jėgą, vadinamas kinetinės trinties koeficientu. Jis apytiksliai 25% mažesnis už statinės trinties koeficientą.

Sprendžiant statikos uždavinius, taikomos kūnų pusiausvyros lygtys. Be kitų aktyviųjų ir reakcijos jėgų, vertinamos ir trinties jėgos, apskaičiuotos pagal (5.1) formulę.

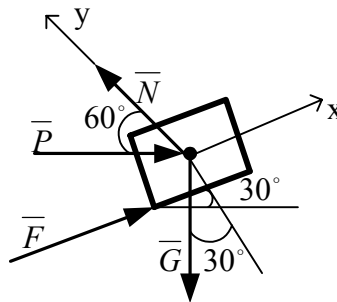
5.1 uždavinys



5.1 brėž.

Kūnas, kurio svoris $G = 5 \text{ kN}$, esantis ant šiurkščios nuožulnios plokštumos, veikiamas horizontaliosios jėgos \bar{P} . Jo statinės trinties koeficientas $f = 0,4$. Skaičiuoti minimalią ir maksimalią jėgos P reikšmes, užtikrinančias kūno rimties būseną.

Jėgų schema, atitinkanti atvejį, kai kūnas jėgos \bar{P} sulaikomas nuo slydimo žemyn plokštuma, parodytas 5.1 brėžinyje.



5.2 brėž.

Užrašome susikertančių jėgų sistemos pusiausvyros lygtis:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad P \cos 30^\circ + F - G \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad N - P \cos 60^\circ - G \cos 30^\circ = 0.$$

Nustatome maksimalią galimą trinties jėgos $F = fN$ reikšmę. Taikydami antrąją pusiausvyros lygtį, randame kontakto ir trinties jėgų išraiškas

$$N = P \cos 60^\circ + G \cos 30^\circ, \text{ o}$$

$$F = fN = fP \cos 60^\circ + fG \cos 30^\circ.$$

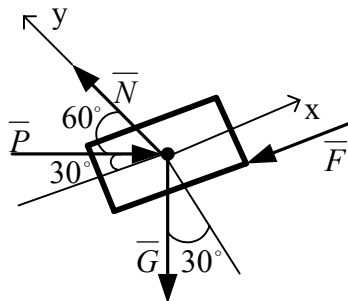
Šią išraišką statome į pirmą lygtį:

$$P \cos 30^\circ + fP \cos 60^\circ + fG \cos 30^\circ - G \cos 60^\circ = 0.$$

Vadinasi,

$$P = \frac{G(\cos 60^\circ - f \cos 30^\circ)}{\cos 30^\circ + f \cos 60^\circ} = \frac{5(0,5 - 0,4 \cdot 0,866)}{0,866 + 0,4 \cdot 0,5} = 0,72 \text{ kN}.$$

Ši jėgos P reikšmė užtikrina, kad kūnas neslys žemyn plokštuma. Ji akivaizdžiai minimali. Jėgų schema, nustatant jėgos P maksimalią reikšmę, parodyta 5.3 brėžinyje.



5.3 brėž.

Šiuo atveju pusiausvyros lygtys sudaromos taip:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad P \cos 30^\circ - G \cos 60^\circ - F = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad N - P \cos 60^\circ - G \cos 30^\circ = 0.$$

Trinties jėgos dydis skaičiuojamas taikant išraišką:

$$F = fN = Pf \cos 60^\circ + Gf \cos 30^\circ.$$

Ištačius šią trinties jėgos išraišką į pirmąją pusiausvyros lygtį, apskaičiuojamas jėgos P dydis

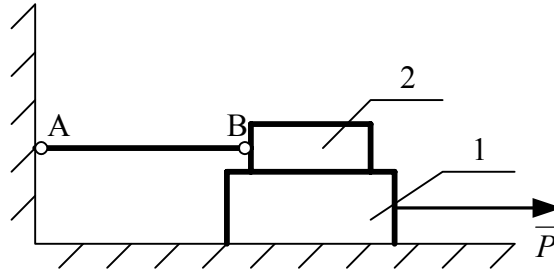
$$P \cos 30^\circ - G \cos 60^\circ - Pf \cos 60^\circ - Gf \cos 30^\circ = 0,$$

$$P = \frac{G(\cos 60^\circ + f \cos 30^\circ)}{\cos 30^\circ - f \cos 60^\circ} = \frac{5(0,5 + 0,4 \cdot 0,866)}{0,866 - 0,4 \cdot 0,5} = 6,35 \text{ kN}.$$

Pusiausvyra išliks, kai jėga P kils nuo $P_{\min} = 0,72 \text{ kN}$ iki $P_{\max} = 6,35 \text{ kN}$, kartu keisis trinties jėgos didumas ir kryptis.

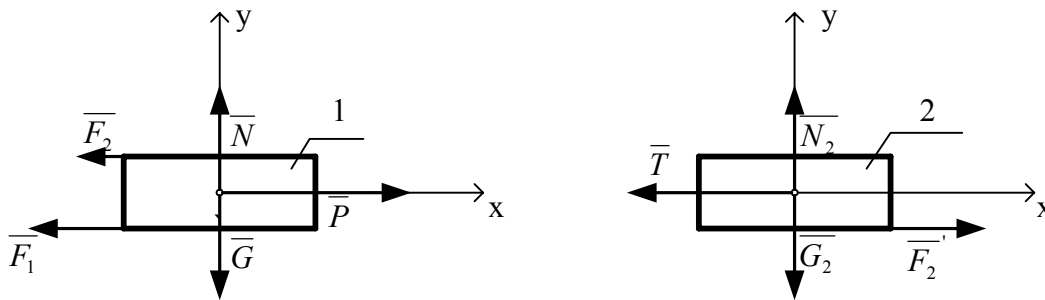
5.2 uždavinys

Slydimo trinties koeficientas tarp visų paviršių yra vienodas $f = 0,3$. Būtina nustatyti maksimalią jėgos P reikšmę, užtikrinančią kūnų sistemos pusiausvyrą. (5.4 brėžinys) $G_1 = 1,5 \text{ kN}$, $G_2 = 1 \text{ kN}$. Taip pat skaičiuosime lyno įtempimo jėgą, esant maksimaliai P jėgos reikšmei.



5.4 brėž.

Nagrinėjame pirmojo ir antrojo kūnų pusiausvyros sąlygas. Šiam tikslui sudarome atskiriems kūnams skaičiuojamąsias schemas, pavaizduotas 5.5 brėžinyje.



5.5 brėž.

Šiose skaičiuojamosiose schemose $G = G_1 + G_2 = 1,5 + 1,1 = 2,6 \text{ kN}$ ir $F_2' = F_2$.

Tyrinėjant antrojo kūno pusiausvyros sąlygas, sudaromos šios lygtys:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad F_2' - T = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad N_2 - G_2 = 0.$$

Spręsdami šias pusiausvyros lygtis, apskaičiuojame F_2' ir T reikšmes

$$F_2' = fN_2 = 0,3 \cdot 1 = 0,3 \text{ kN},$$

$$T = F_2' = 0,3 \text{ kN}.$$

Tyrinėjant pirmojo kūno pusiausvyros sąlygas, sudaromos šios lygtys:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad P - F_1 - F_2 = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad N - G = 0.$$

Apskaičiuojame jėgų F_1 ir P reikšmes

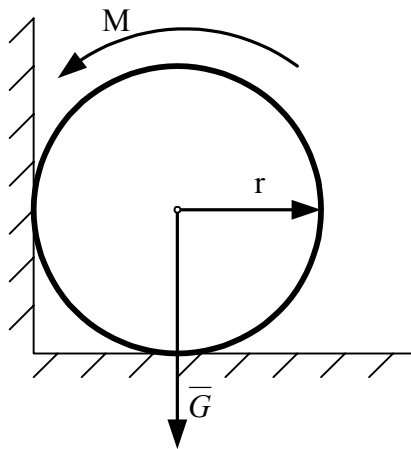
$$F_1 = Nf = 2,5 \cdot 0,3 = 0,75 \text{ kN},$$

$$P = F_1 + F_2 = 0,75 + 0,35 = 1,05 \text{ kN}.$$

Akivaizdu, kad pusiausvyra galima, kai $P \leq 1,05 \text{ kN}$.

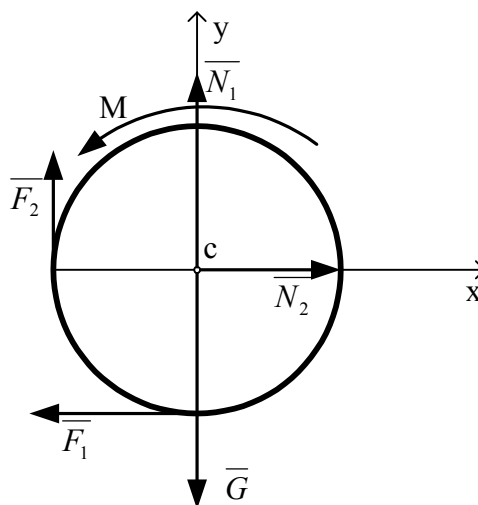
5.3 uždavinys

Cilindras, kurio svoris $G = 4 \text{ kN}$, o spindulys $r = 0,2 \text{ m}$, remiasi į horizontalią ir vertikalią plokštumą, esant vienodiems abiejų plokštumų slydimo trinties koeficientams $f = 0,4$. Nustatysime maksimalų galimą jėgų poros momentą, užtikrinantį cilindro pusiausvyros būseną (5.6 brėžinys).



5.6 brėž.

Esant maksimaliam jėgų poros momentui, slydimo trintis vertinama maksimaliomis galimomis jėgomis. Laisvą cilindą veikiančios jėgos parodytos 5.7 brėžinyje.



5.7 brėž.

Cilindrą veikianti jėgų sistema yra plokščioji. Todėl sprendami uždavinį taikysime šias jėgų sistemai būdingas pusiausvyros sąlygas:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad -F_1 + N_2 = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad N - G = 0,$$

$$\sum M_c(F_k) = 0, \quad M - F_2 r - F_1 r = 0.$$

Analizuodami pirmąją lygtį, gauname, kad $F_1 = N_2$, $F_2 = N_2 f$.

Iš antrosios lygties randame, kad

$$N_1 = G - F_2 \text{ ir } F_1 = N_1 f, \quad F_2 = N_1 f^2,$$

arba $N_1 = G - N_1 f^2$.

Apskaičiuojame veikiančių jėgų reikšmes

$$N_1 = \frac{G}{1 + f^2}, \text{ o } F_2 = \frac{Gf^2}{1 + f^2} \text{ bei } F_1 = \frac{Gf}{1 + f^2}.$$

Išstatome šias jėgų išraiškas į trečiąją pusiausvyros lygtį:

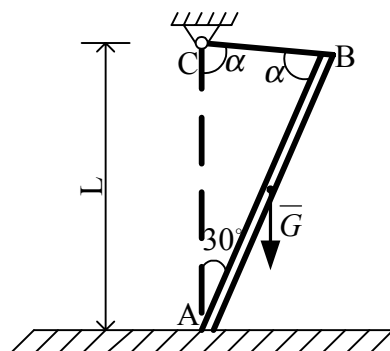
$$M - \frac{Gf^2 r}{1 + f^2} - \frac{Gfr}{1 + f^2} = 0,$$

$$M = \frac{Gfr}{1 + f^2} (f + 1) = \frac{4 \cdot 0,4 \cdot 0,2}{1 + 0,4^2} (0,4 + 1) = 0,39 \text{ kN}.$$

Tai maksimali poros momento reikšmė.

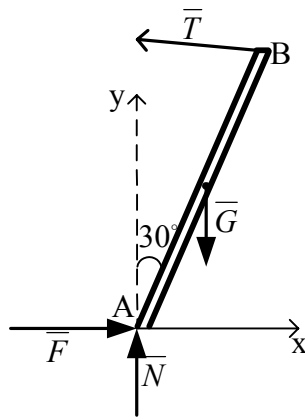
5.4 uždavinys

Vienalytė sija AB , kurios svoris $G = 4 \text{ kN}$, o ilgis $L = 1,2 \text{ m}$ remiasi į šiurkščią horizontaliąją plokštumą, o parodytoje padėtyje laikoma lino BC . Žinant trinties koeficientą sijos į plokštumą $f = 0,35$, nustatyti, ar sija liks pusiausvyroje, taip pat rasti lino įtempimo jėgą ir trinties jėgos didumą (5.8 brėžinys).



5.8 brėž.

Šios sijos skaičiuojamoji schema parodyta 5.9 brėžinyje.



5.9 brėž.

Kampai ABC ir ACB lygūs $\alpha = 75^\circ$. Turime plokščiąją jėgų sistemą, kuriai užrašome šias pusiausvyros lygtis:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, & F - T \cos 15^\circ &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & N - G + T \cos 75^\circ &= 0, \\ \sum M_A(F_k) &= 0, & -0,5G \cos 60^\circ + T \cos 15^\circ &= 0.\end{aligned}$$

Taikydami trečiąją lygtį, apskaičiuojame lyno tempimo jėgą T :

$$T = \frac{0,5G \cos 60^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{0,5 \cdot 4 \cdot 0,5}{0,966} = 1,04 \text{ kN}.$$

Taikydami antrąją lygtį, apskaičiuojame kontakto jėgą N :

$$\begin{aligned}N &= G - T \cos 75^\circ = 4 - 1,04 \cdot 0,26, \\ N &= 3,73 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Taikydami pirmąją lygtį, nustatome būtinąją trinties jėgos reikšmę pusiausvyrai užtikrinti

$$F = T \cos 15^\circ = 1,04 \cdot 0,966 = 1 \text{ kN}.$$

Galima maksimali trinties jėgos reikšmė $F_m = fN = 0,35 \cdot 3,73 = 1,31 \text{ kN}$.

Kadangi tikroji trinties jėgos reikšmė neviršija maksimalios galimos, sija gali būti pusiausvyroje, esant tyrinėtai padėčiai.

6. PLOKŠČIŲJŲ SANTVARŲ SKAIČIAVIMAS

Santvara laikoma plokščiąja, kai visi strypai ir mazgai bei veikiančios juose jėgos išdėstytos vienoje plokštumoje. Santvaros strypai gali būti tempiami arba gniuždomi. Skaičiuojant visi strypai laikomi tempiamais. Jų įrašos nukreiptos išilgai strypo nuo mazgo. Skaičiavimui gali būti taikomi du metodai:

1. Mazgų išpjovimo,
2. Pjūvių (Riterio).

Taikant mazgų išpjovimą, pirmiausia nustatomos išorinių ryšių reakcijos. Santvara šiame etape laikoma standžiuoju kūnu. Užrašomos statinės pusiausvyros lygtys visai santvarai.

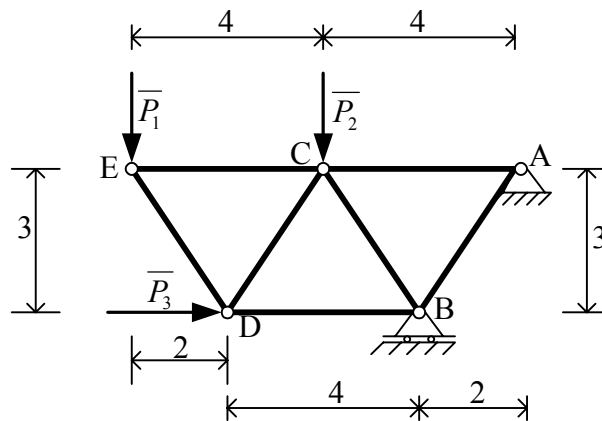
Taikant mazgų išpjovimą, pradedama nuo mazgo, į kurį sueina ne daugiau kaip du strypai, o kiekvienas kitas mazgas gali turėti ne daugiau kaip 2 strypus su nežinomomis įrašomis. Kiekviename mazge turima plokščioji susikertančių jėgų sistema. Taikant šios sistemos pusiausvyros lygtis, skaičiuojamos dvi strypų įrašos.

Taikant pjūvių metodą, santvara dalijama į dvi dalis. Pjūviu kertama ne daugiau kaip tris strypus. Nagrinėjant vienos atpjautos santvaros dalies pusiausvyrą, gaunama plokščioji jėgų sistema. Ją sudaro išorinės jėgos mazguose ir į pjūvį patekusių strypų įrašos.

Sprendžiant šios jėgų sistemos pusiausvyrą, galima skaičiuoti iki 3 strypų įrašų kiekvienam atliktam pjūviui.

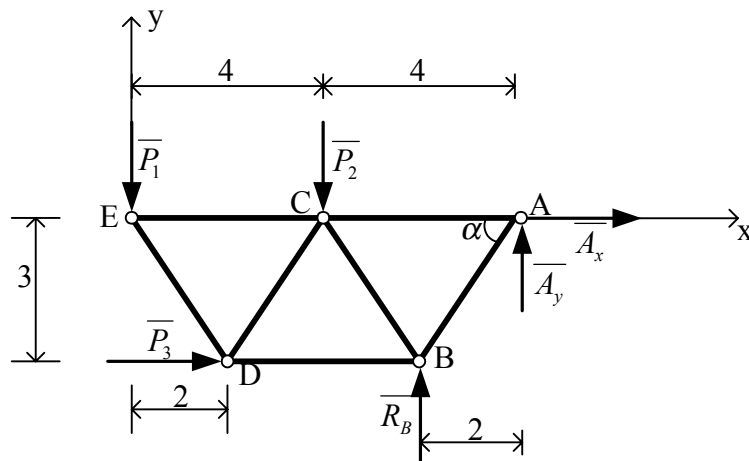
6.1 uždavinys

Skaičiuojame santvaros, parodytos 6.1 brėžinyje, strypų įrašas. Čia $P_1 = 4 \text{ kN}$, $P_2 = 2 \text{ kN}$, $P_3 = 1 \text{ kN}$.



6.1 brėž.

Nustatant išorinių ryšių reakcijas, santvara laikoma standžiuoju kūnu ir šio etapo skaičiuojamoji schema pavaizduota 6.2 brėžinyje.



6.2 brėž.

Užrašome visos santvaros pusiausvyros lygtis:

$$\sum M_A(F_k) = 0, \quad 8P_1 + 4P_2 + 3P_3 - 2R_B = 0,$$

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, & A_x + P_3 &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & A_y - P_1 + P_2 + R_B &= 0.\end{aligned}$$

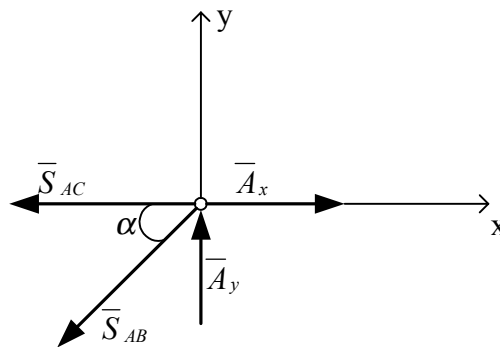
Sprendami šią lygčių sistemą, apskaičiuojame ryšių reakcijų jėgų dydžius:

$$R_B = \frac{8P_1 + 4P_2 + 3P_3}{2} = \frac{8 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{2} = 21,5 \text{ kN},$$

$$A_x = -P_3 = -1 \text{ kN},$$

$$A_y = P_1 + P_2 - R_B = 4 + 2 - 21,5 = -15,54 \text{ kN}.$$

Įrašų skaičiavimą pradedame mazgu A , kurį veikia dvi nežinomos jėgos (6.3 brėž.). Tai strypų AB ir AC įrašos. Strypų įrašas paprastai žymime raide S . Čia $\tan \alpha = \frac{3}{2}$, $\alpha = 56,3^\circ$.

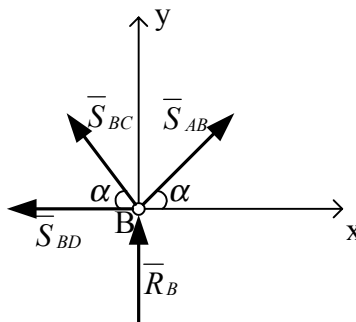


6.3 brėž.

Užrašome ir sprendžiame šios viename taške susikertančių jėgų sistemos pusiausvyros lygtis:

$$\begin{aligned}\sum F_{ky} &= 0, & A_y - S_{AB} \sin \alpha &= 0, \\ & & S_{AB} &= \frac{A_y}{\sin \alpha} = -\frac{15,5}{0,832} = -18,63 \text{ kN}, \\ \sum F_{kx} &= 0, & A_x - S_{AC} - S_{AB} \cos \alpha &= 0, \\ & & S_{AC} &= A_x - S_{AB} \cos \alpha = -1 + 18,63 \cdot 0,554 = 9,32 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Po to tyrinėjame mazgo B pusiausvyrą. Mazgo B išpjovimo skaičiuojamoji schema pateikta 6.4 brėžinyje.

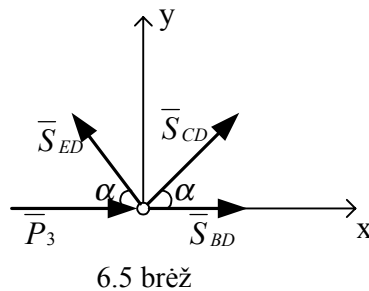


6.4 brėž.

Užrašome ir sprendžiame mazgo B susikertančių jėgų sistemos pusiausvyros lygtis:

$$\begin{aligned}\sum F_{ky} &= 0, & R_B + S_{AB} \sin \alpha + S_{BC} \sin \alpha &= 0, \\ S_{BC} &= -\frac{R_B}{\sin \alpha} - S_{AB} = -\frac{21,5}{0,832} + 18,63 = -7,21 \text{ kN}, \\ \sum F_{kx} &= 0, & -S_{BD} - S_{BC} \cos \alpha + S_{AB} \cos \alpha &= 0, \\ S_{BD} &= (S_{AB} - S_{BC}) \cos \alpha = (-18,63 + 7,21) \cdot 0,554 = -6,32 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Likusieji santvaros mazgai gali būti nagrinėjami bet kuria tvarka, nes juos veikia po dvi nežinomas strypų įrašas. Kai jau nustatytos išorinių ryšių reakcijos, paskutinių santvaros mazgų išpjovimas leidžia patikrinti skaičiavimo teisingumą. Šiuo atveju nustatytos strypų įrašos turi tenkinti mazgų pusiausvyros sąlygas. Tyrinėjame kitą D mazgą, kurio skaičiuojamoji schemą, taikant mazgų išpjovimo metodą, pateikta 6.5 brėžinyje.



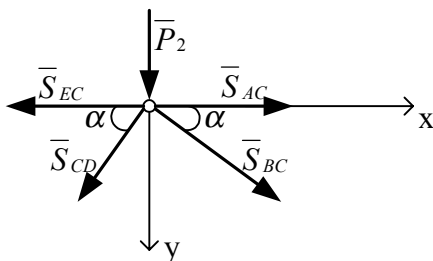
Sudarome mazgo D pusiausvyros lygtis:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, & P_3 - S_{ED} \cos \alpha + S_{CD} \cos \alpha + S_{BD} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & S_{ED} \sin \alpha + S_{CD} \sin \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Išsprendę šią pusiausvyros lygčių sistemą, apskaičiuojame strypų S_{ED} ir S_{CD} įrašas:

$$\begin{aligned}S_{ED} &= -S_{CD} \text{ arba } P_3 + 2S_{CD} \cos \alpha + S_{BD} = 0, \\ S_{CD} &= -\frac{P_3 + S_{BD}}{2 \cos \alpha} = \frac{-1 + 6,32}{2 \cdot 0,554} = 4,80 \text{ kN}, \\ S_{ED} &= -4,80 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Tada tyrinėjame mazgą C . Taikant mazgų išpjovimo metodą, sudarome šio mazgo skaičiuojamąją schemą (6.6 brėžinys).



Sudarome C mazgo vieną pusiausvyros lygtį ir apskaičiuojame S_{EC} įrašą

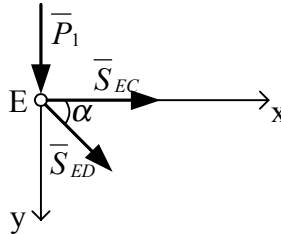
$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, \\ -S_{EC} - S_{CD} \cos \alpha + S_{AC} + S_{BC} \cos \alpha &= 0,\end{aligned}$$

$$S_{EC} = -S_{CD} \cos \alpha + S_{AC} + S_{BC} \cos \alpha = -4,8 \cdot 0,554 + 9,32 - 7,21 \cdot 0,554 = 2,62 \text{ kN}.$$

Tiriame šio mazgo pusiausvyrą:

$$\sum P_{ky} = (S_{CD} + S_{BC}) \sin \alpha + P_2 = (4,80 - 7,21) \cdot 0,832 + 2 = -0,005.$$

Analizuodami mazgą E , sudarome skaičiuojamąją schemą (6.7 brėžinys).



6.7 brėž.

Užrašomos šios pusiausvyros lygtys:

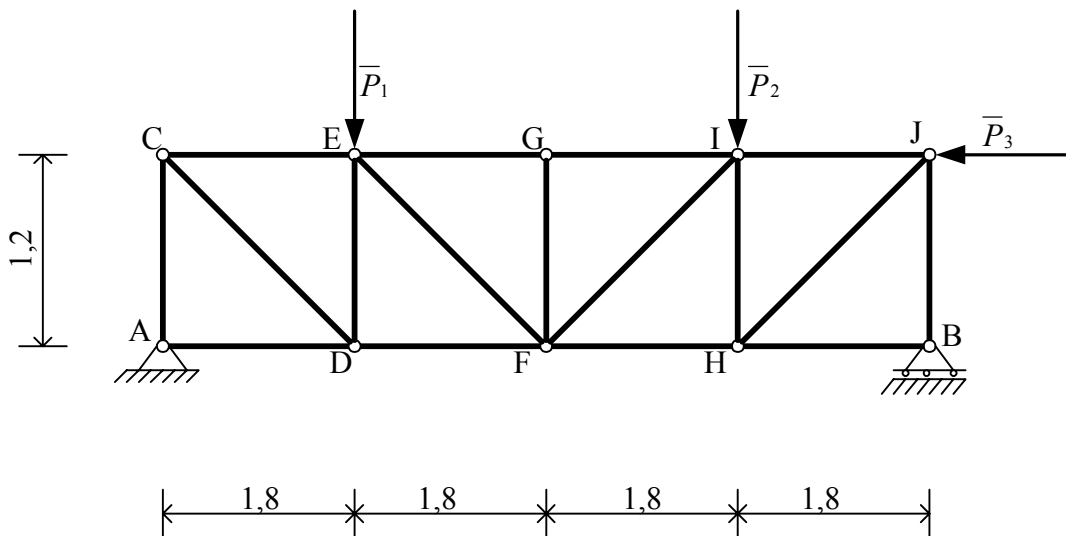
$$\sum P_{kx} = S_{EC} + S_{ED} \cos \alpha = 2,62 - 4,80 \cdot 0,554 = 0,04,$$

$$\sum P_{ky} = P_1 + S_{ED} \sin \alpha = 4 - 4,80 \cdot 0,832 = 0,006.$$

Pusiausvyra tenkinama su nedidelėmis paklaidomis.

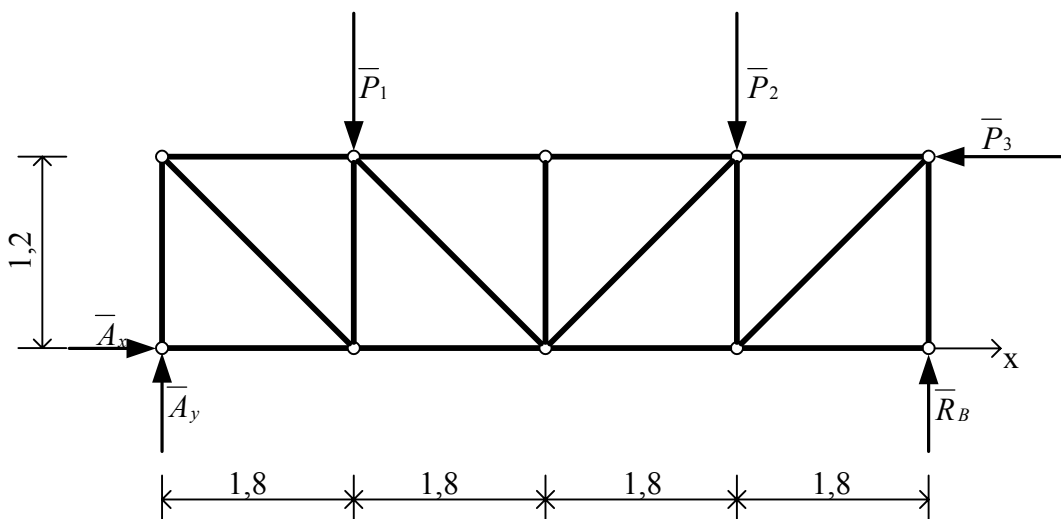
6.2 uždavinys

Skaičiuoti santvaros, parodytos 6.8 brėžinyje, strypų EG , EF ir DF įrašas. Čia $P_1 = P_2 = 1,5 \text{ kN}$, $P_3 = 5 \text{ kN}$.



6.8 brėž.

Skaičiuodami šarnyro A reakcijas, nagrinėjame santvarą, taikydami standžiojo kūno prielaidą. Skaičiuojamoji schema pateikta 6.9 brėžinyje.



6.9 brėž.

Užrašome visos santvaros pusiausvyros lygtis ir apskaičiuojame reakcijų jėgas

$$\sum M_B(F_k) = 0,$$

$$7,2A_y + 5,4P_1 + 1,8P_2 + 1,2P_3 = 0,$$

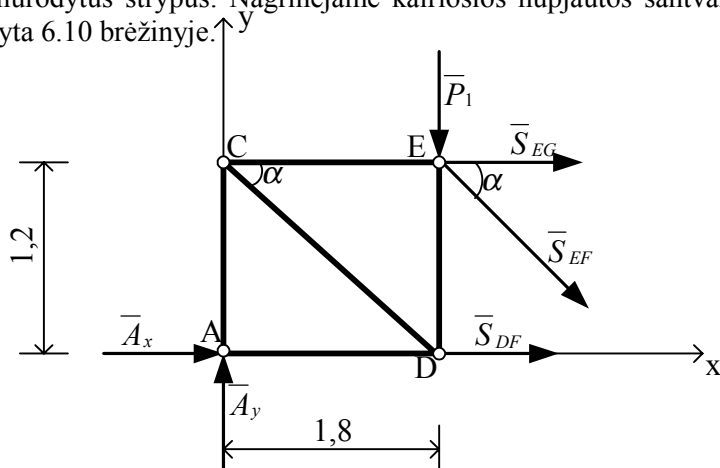
$$A_y = \frac{5,4P_1 + 1,8P_2 + 1,2P_3}{7,2} = \frac{5,4 \cdot 15 + 1,8 \cdot 15 + 1,2 \cdot 5}{7,2} = 15,83 \text{ kN},$$

$$\sum P_{kx} = 0,$$

$$A_x - P_3 = 0,$$

$$A_x = P_3 = 5 \text{ kN}.$$

Šarnyro B reakcijos, sprendžiant šį uždavinį, nėra reikalingos. Daromas santvaros pjūvis per užduotyje nurodytus strypus. Nagrinėjame kairiosios nupjautos santvaros dalies pusiausvyrą. Ši santvaros dalis parodyta 6.10 brėžinyje.



6.10 brėž.

Šiuo atveju turime bendrojo tipo plokščiąją jėgų sistemą, kuriai užrašomos vienos santvaros dalies pusiausvyros lygtys, ir apskaičiuojamos strypų įrašos S_{DF} , S_{EF} ir S_{ED} :

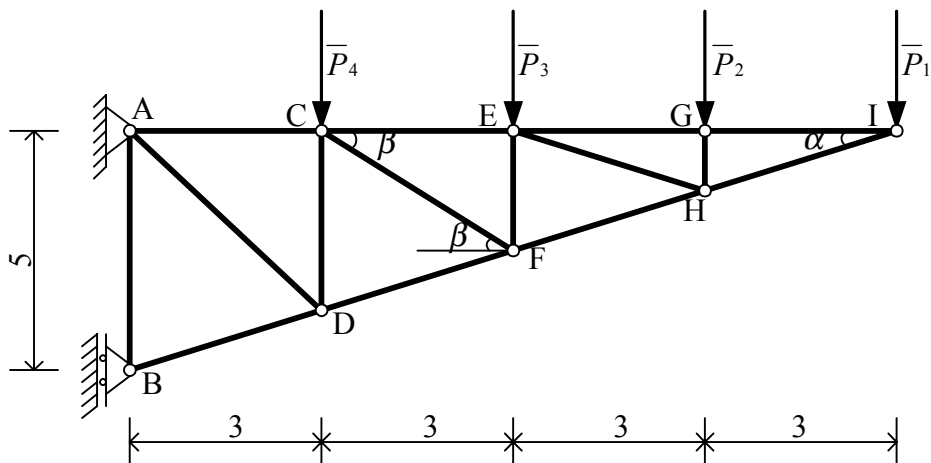
$$\begin{aligned}\sum M_E(F_k) &= 0, \\ -1,8A_y + 1,2A_x + 1,2S_{DF} &= 0, \\ S_{DF} &= \frac{1,8A_y - 1,2A_x}{1,2} = \frac{1,8 \cdot 15,83 - 1,2 \cdot 5}{1,2} = 18,75 \text{ kN}, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ A_y - P_1 - S_{EF} \sin \alpha &= 0, \\ CD &= \sqrt{1,2^2 + 1,8^2} = 2,16 \text{ m}, \\ \sin \alpha &= \frac{1,2}{2,16} = 0,555, \\ \cos \alpha &= \frac{1,8}{2,16} = 0,833, \\ S_{EF} &= \frac{A_y - P_1}{\sin \alpha} = \frac{15,83 - 15}{0,555} = 1,50 \text{ kN}, \\ \sum F_{kx} &= 0, \\ A_x + S_{DF} + S_{EF} \cos \alpha + S_{EG} &= 0, \\ S_{ED} &= -A_x - S_{DF} - S_{EF} \cos \alpha, \\ S_{ED} &= -5 - 18,75 - 1,5 \cdot 0,833 = -25 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Strypas ED yra gniuždomas, o du kiti – tempiami.

6.3 uždavinys

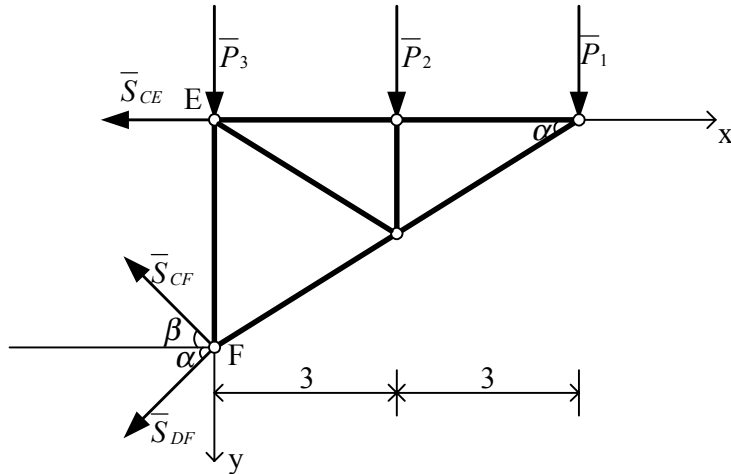
Skaičiuosime santvaros, pateikiamos 6.11 brėžinyje, strypų CE , CF ir PF įrašas. $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 20 \text{ kN}$.

Sprendžiant šį uždavinį parodoma, kad išorinių ryšių išankstinis skaičiavimas gali būti nereikalingas.



6.11 brėž.

Pjūvis atliekamas per strypus, kuriuose reikia rasti įrašas, ir nagrinėjama pjūvio dešinėje likusios santvaros dalies pusiausvyra (6.12 brėžinys).



6.12 brėž.

Tyrinėjamai santvaros daliai užrašomos pusiausvyros lygtys ir apskaičiuojamos reikiamų strypų įrašos:

$$\begin{aligned}\sum M_F(F_k) &= 0, \\ -3P_2 - 6P_1 + EF \cdot S_{CE} &= 0, \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{AB}{AT} = \frac{5}{12} = 0,417, \\ BI &= \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ m}, \\ \sin \alpha &= \frac{AB}{BI} = \frac{5}{13} = 0,385, \\ \cos \alpha &= \frac{AI}{BI} = \frac{12}{13} = 0,923, \\ EF &= EI \cdot \operatorname{tg} \alpha = 6 \cdot 0,417 = 2,5 \text{ m}, \\ S_{CE} &= \frac{3P_2 + 6P_1}{2,5} = \frac{3 \cdot 20 + 6 \cdot 20}{2,5} = 72 \text{ kN},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, \\ -S_{CE} - S_{CF} \cos \beta - S_{DF} \cos \alpha &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ P_1 + P_2 + P_3 + S_{DF} \sin \alpha - S_{CF} \sin \beta &= 0.\end{aligned}$$

Sprendžiant $\sum F_{kx} = 0$ lygtį, apskaičiuojame įrašos S_{CF} išraišką:

$$S_{CF} = -\frac{S_{CE}}{\cos \beta} - \frac{S_{DF} \cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Šią išraišką įstatome į $\sum F_{ky} = 0$ lygtį:

$$\begin{aligned}P_1 + P_2 + P_3 + S_{DF} \sin \alpha + S_{CE} \operatorname{tg} \beta + S_{DF} \cos \alpha \operatorname{tg} \beta &= 0, \\ S_{DF} &= -\frac{P_1 + P_2 + P_3 + S_{CE} \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta}, \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{EF}{CE} = \frac{2,5}{3} = 0,833,\end{aligned}$$

$$S_{DF} = -\frac{20 + 20 + 20 + 72 \cdot 0,833}{0,385 + 0,923 \cdot 0,833} = -103,34 \text{ kN},$$

$$\cos \beta = \frac{CE}{CF},$$

$$CF = \sqrt{3^2 + 2,5^2} = 3,91 \text{ m},$$

$$\cos \beta = \frac{3}{3,91} = 0,768,$$

$$S_{CF} = -\frac{72}{0,768} + \frac{103,34 \cdot 0,923}{0,768} = 30,45 \text{ kN}.$$

Strypai CE ir CF tempiami, o strypas DF gniuždomas.

7. ERDVINĖ JĖGŲ SISTEMA

Bet kuri erdvinė jėgų sistema gali būti redukuota į suminę jėgą, lygią visų jėgų vektorių sumai, ir jėgų porą, kurios momentas vadinamas suminiu momentu.

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k, \quad \bar{M}_0 = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_k). \quad (7.1)$$

Suminė jėga nepriklauso nuo centro padėties, o suminis momentas paprastai priklauso nuo centro pasirinkimo.

Jėgų sistema pusiausvyroje, kai $\bar{R} = 0$ ir $\bar{M}_0 = 0$ bet kuriam pasirinktam centrui O . Šios pusiausvyros sąlygos nusakomos šešiomis analizinėmis lygtimis:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum F_{kz} &= 0, \\ \sum M_{Ox}(F_k) &= 0, \\ \sum M_{Oy}(F_k) &= 0, \\ \sum M_{Oz}(F_k) &= 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Kai kūną veikia erdvinė lygiagrečių jėgų sistema, ašį z parinkus lygiagrečia jėgoms, pusiausvyra nustatoma trimis lygtimis:

$$\begin{aligned} \sum F_{kz} &= 0, \\ \sum M_{Ox}(F_k) &= 0, \\ \sum M_{Oy}(F_k) &= 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Sprendžiant erdvinės jėgų sistemos uždavinius, jėgos paprastai skaidomos į komponentes pasirinktų koordinačių ašių kryptimis.

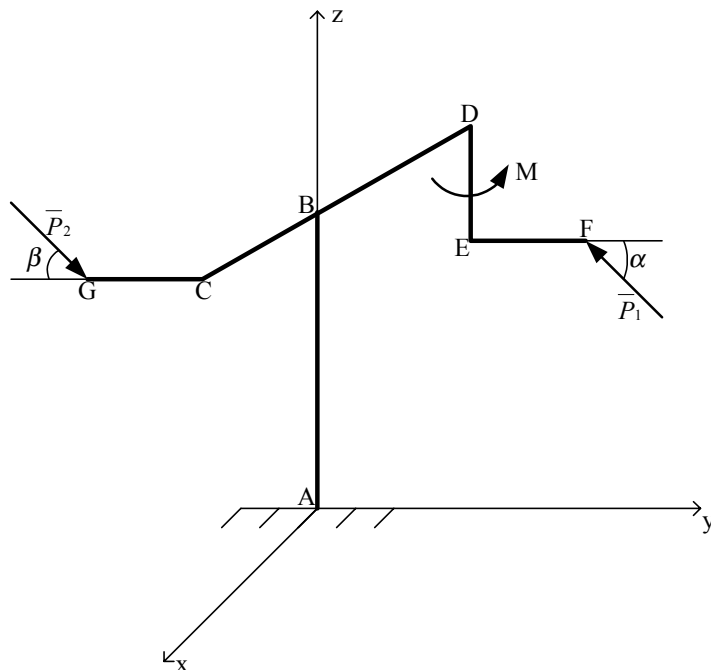
Jėgos momentas ašies atžvilgiu lygus nuliui, kai ji kerta ašį arba yra lygiagreti ašiai. Dažnai patogiau naudoti analizes formules jėgų momentams skaičiuoti:

$$\begin{aligned} M_{Ox}(F_k) &= yF_z - zF_y, \\ M_{Oy}(F_k) &= zF_x - xF_z, \\ M_{Oz}(F_k) &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Čia x, y, z yra jėgos pridėties taško koordinatės.

7.1 uždavinys

Standžiai taške A įtvirtinta erdvinė gaminė sija, veikiamą jėgų $P_1 = 2 \text{ kN}$, $P_2 = 5 \text{ kN}$ ir poros, kurios momentas $M = 7 \text{ kNm}$. $a = 4,5 \text{ m}$, $b = 4 \text{ m}$, $c = 2,5 \text{ m}$, $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 25^\circ$ (7.1 brėžinys). Skaičiuosime sijos reakcijas standžiojo įtvirtinimo taške A .



7.1 brėž.

Sudarant uždavinio skaičiuojamąją schemą, standžiojo įtvirtinimo ryšį galima pakeisti reakcijos jėga ir pora. Reakcijos jėga ir poros momentas erdvėje gali turėti bet kurią kryptį. Todėl šią jėgą ir poros momentą pakeičiame trimis vektorinėmis dedamosiomis koordinatinių ašių kryptimis (7.2 brėžinys).

Sudarant skaičiuojamąją schemą, jėgos \vec{P}_1 ir \vec{P}_2 išskaidytos į dedamąsias:

$$P_{1x} = P_1 \sin \alpha = 2 \sin 65^\circ = 1,81 \text{ kN},$$

$$P_{1y} = P_1 \cos \alpha = 2 \cos 65^\circ = 0,85 \text{ kN},$$

$$P_{2z} = P_2 \sin \beta = 5 \sin 25^\circ = 2,12 \text{ kN},$$

$$P_{2y} = P_2 \cos \beta = 5 \cos 25^\circ = 4,53 \text{ kN}.$$

Sudarome šios erdvinės jėgų sistemos statinės pusiausvyros lygtis ir apskaičiuojame reakcijos jėgų komponentes:

$$\sum F_{kx} = 0,$$

$$A_x - P_{1x} = 0,$$

$$A_x = P_{1x} = 1,81 \text{ kN},$$

$$\sum F_{ky} = 0,$$

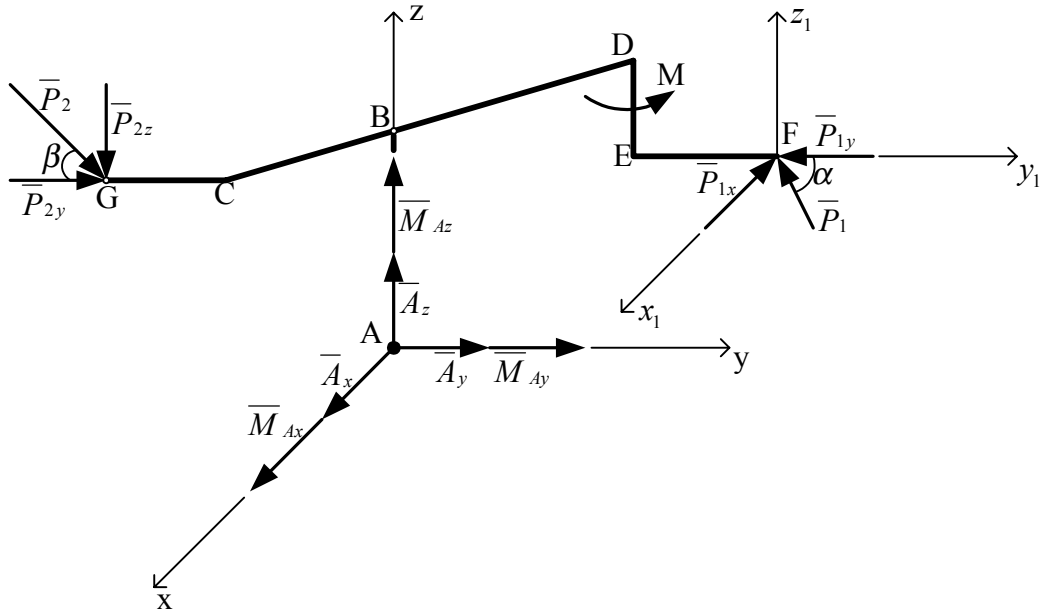
$$A_y + P_{2y} - P_{1y} = 0,$$

$$A_y = P_{1y} - P_{2y} = 0,85 - 4,53 = -3,68 \text{ kN},$$

$$\sum F_{kz} = 0,$$

$$A_z - P_{2z} = 0,$$

$$A_z = P_{2z} = 2,12 \text{ kN}.$$



7.2 brėž.

$$\sum M_{Ax}(F_k) = 0,$$

$$M_{Ax} + Gc \cdot P_{2z} - AB \cdot P_{2y} + (AB - ED)P_{1y} = 0,$$

$$M_{Ax} = -Gc \cdot P_{2z} + AB \cdot P_{2y} - (AB - ED)P_{1y},$$

$$M_{Ax} = -2,5 \cdot 2,12 + 4,5 \cdot 4,53 - (4,5 - 2,5) \cdot 0,85 = 13,39 \text{ kNm},$$

$$\sum M_{Ay}(F_k) = 0,$$

$$M_{Ay} - (AB - ED)P_{1x} + BC \cdot P_{2z} = 0,$$

$$M_{Ay} = (AB - ED)P_{1x} - BC \cdot P_{2z},$$

$$M_{Ay} = (4,5 - 2,5) \cdot 1,81 - 2,5 \cdot 2,12 = -1,68 \text{ kNm},$$

$$\sum M_{Az}(F_k) = 0,$$

$$M_{Az} + EF \cdot P_{1z} + BD \cdot P_{1y} + BC \cdot P_{2y} + M = 0,$$

$$M_{Az} = -EF \cdot P_{1z} - BD \cdot P_{1y} - BC \cdot P_{2y} - M,$$

$$M_{Az} = -2,5 \cdot 1,81 - 4 \cdot 0,85 - 2,5 \cdot 4,53 - 7 = -26,25 \text{ kNm}.$$

Atliekant skaičiavimo patikrinimą, parenkama kita koordinačių sistema. Užrašomos momentų pusiausvyros lygtys. Šiame uždavinyje parinkta koordinačių sistema x_1, y_1, z_1 :

$$\sum M_{Fx1}(F_k) = M_{Ax} - EF \cdot A_2 + (AB - ED) \cdot A_y - ED \cdot P_{2y} + (GC + EF) \cdot P_{2z} =$$

$$= 13,39 - 2,5 \cdot 2,12 + (4,5 - 2,5) \cdot (-3,68) - 2,5 \cdot 4,53 + (2,5 + 2,5) \cdot 2,12 = 0,005,$$

$$\sum M_{Fy1}(F_k) = M_{Ay} - (AB - ED) \cdot A_x - BD \cdot A_2 + (BC - BD) \cdot P_{2z} =$$

$$= -1,68 - (4,5 - 2,5) \cdot 1,81 - 4 \cdot 2,12 + (2,5 + 4) \cdot 2,12 = 0,$$

$$\sum M_{Fz1}(F_k) = M_{Az} + M + EF \cdot A_x + BD \cdot A_y + (BC + BD) \cdot P_{2y} =$$

$$= -26,25 + 7 + 2,5 \cdot 1,81 - 4 \cdot 3,68 + (2,5 + 4) \cdot 4,53 = 0.$$

Patikrinimo rezultatai leidžia teigti, kad reakcijų komponentės nustatytos teisingai. Šį uždavinį galima spręsti naudojant vektorinių algebros lygčių sistemą (7.1). Sprendžiant šiuo būdu skaičiavimus rekomenduojame atlikti sudarius 7.1 lentelę.

7.1 lentelė. Vektorinių pusiausvyros lygčių komponentės

Duomenys ir tarpiniai rezultatai	Jėgos				
	A_x	A_y	A_z	P_1	P_2
x	0	0	0	-4	2,5
y	0	0	0	2,5	-2,5
z	0	0	0	2	4,5
F_x	A_x	0	0	-1,81	4,00
F_y	0	A_y	0	-0,85	4,53
F_z	0	0	A_z	0	-2,12
yF_z	0	0	0	0	5,3
zF_y	0	0	0	-1,7	20,385
zF_x	0	0	0	-3,32	0
xF_z	0	0	0	0	-5,3
xF_y	0	0	0	3,4	11,325
yF_x	0	0	0	-4,525	0

Analizuojant atitinkamas lentelės eilutes, sudaromos ir sprendžiamos pusiausvyros lygtys:

$$\sum F_{kx} = 0,$$

$$A_x - 1,81 = 0, \quad A_x = 1,81 \text{ kN},$$

$$\sum F_{ky} = 0,$$

$$A_y - 0,85 + 4,53 = 0,$$

$$A_y = 0,85 - 4,53 = -3,68 \text{ kN},$$

$$\sum F_{kz} = 0,$$

$$A_z - 2,12 = 0, \quad A_z = 2,12 \text{ kN},$$

$$\sum M_{Ax}(F_k) = 0,$$

$$M_{Ax} + 5,3 + 1,7 - 20,385 = 0,$$

$$M_{Ax} = 20,385 - 5,8 - 1,7 = 13,39 \text{ kNm},$$

$$\sum M_{Ay}(F_k) = 0,$$

$$M_{Ay} - 3,62 + 5,3 = 0,$$

$$M_{Ay} = 3,62 - 5,3 = -1,68 \text{ kNm},$$

$$\sum M_{Az}(F_k) = 0,$$

$$M_{Az} + M + 3,4 + 11,325 + 4,525 = 0,$$

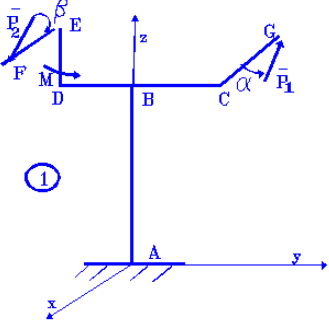
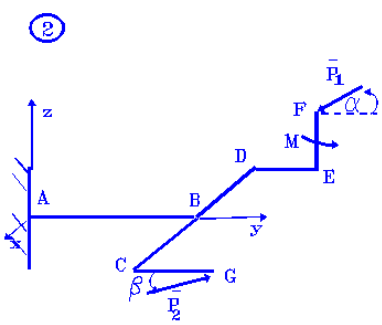
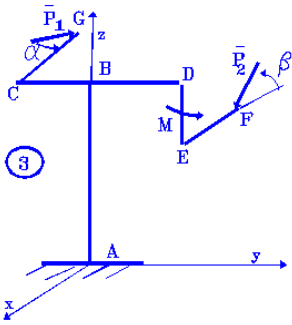
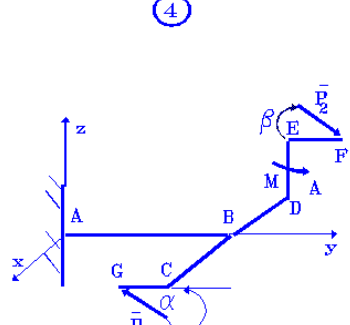
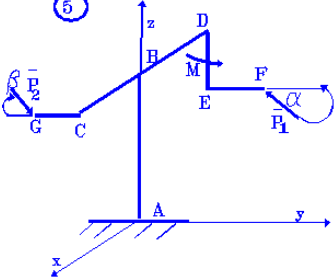
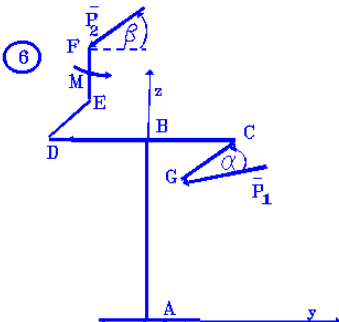
$$M_{Az} = -M - 3,4 - 11,325 - 4,525,$$

$$M_{Az} = -7 - 3,4 - 11,325 - 4,525 = -26,25 \text{ kNm}.$$

Užrašant kiekvieną momentų pusiausvyros lygtį, naudojamos dvi gretimos 7.1 lentelės eilutės.

Savarankiškam sprendimui erdvinių gembinių sijų schemos pateikiamos 7.2 lentelėje. Šių schemų duomenys pateikti 7.3 lentelėje. Šioje lentelėje nurodoma, kuriai iš šešių sijos variantų skiriami atitinkami duomenys. Gembinių sijų skaičiavimo rezultatai atspausdinti 7.4 lentelėje. Tai leidžia tobulinti erdvinių sistemų analizės įgūdžius.

7.2 lentelė. Erdvinių gembinių sijų schemas

<p>①</p>  <p> $a=AB \quad b=BD \quad \bar{P}_1 \parallel \text{pl. } xAy$ $c=BC=ED=EF=CG \quad \bar{P}_2 \parallel \text{pl. } xAz$ </p>	<p>②</p>  <p> $a=AB \quad b=BD \quad \bar{P}_1 \parallel \text{pl. } yAz$ $c=BC=ED=EF=CG \quad \bar{P}_2 \parallel \text{pl. } xAy$ </p>
<p>③</p>  <p> $a=AB \quad b=BD \quad \bar{P}_1 \parallel \text{pl. } xAy$ $c=BC=ED=EF=CG \quad \bar{P}_2 \parallel \text{pl. } xAz$ </p>	<p>④</p>  <p> $a=AB \quad b=BD \quad \bar{P}_2 \parallel \text{pl. } xAy$ $c=BC=ED=EF=CG \quad \bar{P}_1 \parallel \text{pl. } yAz$ </p>
<p>⑤</p>  <p> $a=AB \quad b=BD \quad \bar{P}_1 \parallel \text{pl. } xAy$ $c=BC=ED=EF=CG \quad \bar{P}_2 \parallel \text{pl. } yAz$ </p>	<p>⑥</p>  <p> $a=AB \quad b=BD \quad \bar{P}_1 \parallel \text{pl. } xAz$ $c=BC=ED=EF=CG \quad \bar{P}_2 \parallel \text{pl. } yAz$ </p>

7.3 lentelė. Gembinių sijų pradiniai duomenys

1	5	5.0	4.0	2.5	3.	35.	4.	85.	3.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
2	3	4.0	3.0	2.5	4.	45.	3.	85.	6.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
3	1	5.0	4.0	2.0	4.	85.	6.	60.	6.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
4	4	4.5	4.0	3.0	3.	30.	4.	35.	5.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
5	5	6.0	3.0	2.5	5.	75.	2.	45.	6.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
6	6	4.0	3.0	2.0	2.	10.	5.	55.	3.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
7	6	4.0	3.0	2.5	2.	85.	3.	80.	3.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
8	3	5.0	4.0	2.5	2.	70.	5.	45.	7.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
9	6	4.5	3.0	2.5	1.	85.	3.	20.	4.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
10	5	5.5	4.0	2.0	4.	80.	6.	20.	6.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
11	1	4.5	4.0	2.0	3.	70.	2.	75.	3.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
12	2	5.5	3.5	3.0	5.	75.	4.	85.	3.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
13	3	4.5	3.5	3.0	1.	45.	5.	15.	8.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
14	5	4.0	3.0	2.0	1.	70.	6.	85.	5.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
15	3	4.5	4.0	2.5	2.	10.	3.	30.	3.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
16	1	5.0	3.0	2.0	5.	30.	6.	20.	4.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
17	1	5.5	3.0	2.5	1.	40.	6.	60.	6.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
18	3	5.0	4.0	2.5	2.	30.	6.	50.	7.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
19	2	5.5	3.0	2.5	1.	55.	2.	85.	6.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
20	4	6.0	4.0	3.0	5.	20.	6.	50.	6.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
21	4	6.0	3.0	2.5	3.	55.	2.	15.	8.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
22	6	5.5	3.5	3.0	1.	85.	5.	35.	3.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
23	5	4.5	4.0	3.0	5.	10.	2.	30.	3.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
24	1	4.0	3.5	2.0	1.	45.	2.	15.	7.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
25	5	5.5	3.0	2.0	5.	40.	4.	15.	5.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
26	3	5.0	3.5	3.0	3.	45.	4.	15.	7.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
27	4	4.5	3.0	2.5	3.	35.	6.	15.	8.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
28	4	4.5	3.5	2.0	5.	60.	4.	85.	5.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
29	4	4.5	3.5	2.0	2.	35.	5.	80.	7.
503	SCH	a	b	c	P1	ALF	P2	BET	M
30	3	4.5	3.0	2.5	3.	50.	6.	80.	3.

7.4 lentelė. Gembinių sijų skaičiavimo rezultatai

N	SCH	RAY	RAY	RAZ	MX	MY	MZ
1	5	1.721	2.109	3.985	-14.362	-5.660	-18.003
2	3	2.567	-2.828	2.989	20.279	18.393	8.927
3	1	-2.651	3.985	5.196	-40.709	-29.649	-26.667
4	4	-2.294	-.679	-1.500	7.580	-2.383	33.108
5	5	4.830	-.120	1.414	.420	13.368	-25.492
6	6	-1.970	2.868	3.748	-30.189	1.008	-4.797
7	6	-.174	.521	.962	-17.230	11.670	-3.867
8	3	-2.851	-1.879	3.536	23.539	3.420	13.551
9	6	-.087	2.819	.030	-25.302	4.663	-10.830
10	5	3.939	-4.944	2.052	24.475	9.683	-27.933
11	1	.508	2.819	1.932	-20.413	-2.611	-12.761
12	2	3.985	.945	4.830	37.170	16.904	-42.446
13	3	-4.123	-.707	1.294	7.711	-.180	13.146
14	5	.940	-.181	5.977	-10.547	-10.075	-8.951
15	3	-.628	-.347	1.500	7.563	7.417	13.185
16	1	-1.308	2.500	2.052	-18.656	-21.921	-34.575
17	1	-2.234	.643	5.196	-19.124	-32.777	-18.522
18	3	-2.125	-1.000	4.596	23.385	10.509	15.257
19	2	1.992	.399	.819	5.119	2.457	-24.096
20	4	-4.596	.842	-1.710	6.440	-8.658	64.889
21	4	-.518	-.211	-2.457	-3.771	4.850	6.497
22	6	-.087	4.096	1.872	-47.840	11.113	-15.026
23	5	.868	3.192	1.000	-2.592	-1.698	-30.497
24	1	-1.225	.707	.518	-4.640	-9.798	-16.590
25	5	3.214	-.033	1.035	5.774	9.178	-30.646
26	3	-1.742	-2.121	1.035	14.230	5.985	19.251
27	4	-1.553	-3.338	-1.721	11.047	.420	26.401
28	4	-3.985	2.151	-4.330	-10.128	.691	27.121
29	4	-4.924	.770	-1.147	-1.131	-7.554	31.322
30	3	.886	-2.298	5.909	28.068	21.366	10.692

7.2 uždavinys

Alkūninis velenas gali sukurti įtvirtintas guoliuose A ir B . Veleno gale esantį krumpliaratį veikia jėga F_1 . Krumpliarčio spindulys $R = 0,2$ m. Alkūnę veikianti jėga \bar{F} yra plokštumoje, statmenoje veleno ašiai. $F = 20$ kN. Alkūnės spindulys $r = 0,15$ m. Veleno schema pateikiama 7.3 brėžinyje.

Šiame uždavinyje skaičiuojamas jėgos F_1 didumas ir guolių reakcijos. Atramų reakcijos, kai atramos statmenos veleno ašiai parodytos 7.4 brėžinyje.

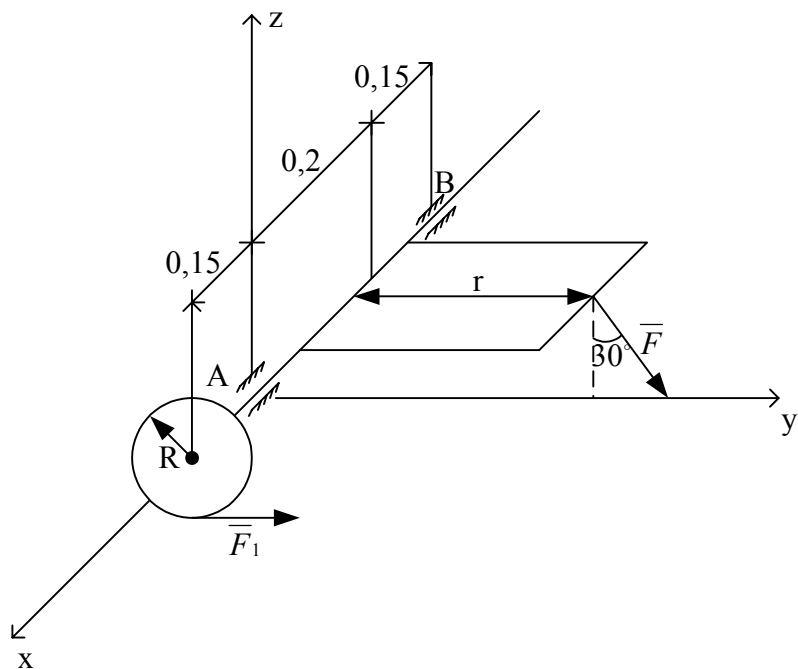
Šios lygtys visai sutampa su šiam uždaviniui užrašytomis ir spęstomis pusiausvyros lygtimis.

Skaičiuojant veleno atramų reakcijas, rekomenduojama pirmąją užrašyti momentų pusiausvyros lygtį atžvilgiu ašies, sutampančios su sukimosi ašimi:

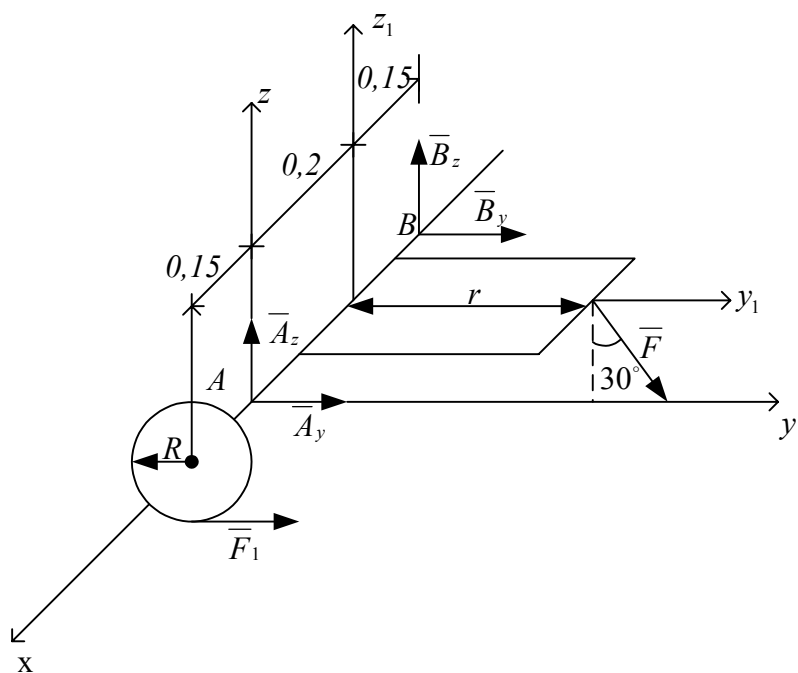
$$\sum M_x(F_k) = 0,$$

$$F_1 R - R r \cos 30^\circ = 0,$$

$$F_1 = \frac{F r \cos 30^\circ}{R} = \frac{20 \cdot 0,15 \cdot 0,866}{0,2} = 12,99 \text{ kN}.$$



7.3. brėž.



7.4. brėž.

Užrašomos momentų pusiausvyros lygtys kitų dviejų konkrečių koordinatinių ašių atžvilgiu:

$$\sum M_y(F_k) = 0,$$

$$-0,2F \cos 30^\circ + 0,35B_z = 0,$$

$$B_z = \frac{0,2F \cos 30^\circ}{0,35} = \frac{0,2 \cdot 20 \cdot 0,866}{0,35} = 9,9 \text{ kN},$$

$$\sum M_z(F_k) = 0,$$

$$0,15F_1 - 0,2F \cos 60^\circ - 0,35B_y = 0,$$

$$B_y = \frac{0,15F_1 - 0,2F \cos 60^\circ}{0,35} = \frac{0,15 \cdot 12,99 - 0,2 \cdot 20 \cdot 0,5}{0,35} = -0,15 \text{ kN}.$$

Kai koordinatinių ašys z ir y parenkamos taip, kad eitų per vieną iš veleno atramų, momentų pusiausvyros lygtys turi po vieną nežinomą jėgą ir yra lengvai sprendžiamos. Sudarome jėgų projekcijų į koordinatinių ašis pusiausvyros lygtis ir jas sprendžiame:

$$\sum F_{ky} = 0,$$

$$A_y + F_1 + F \cos 60^\circ + B_y = 0,$$

$$A_y = -F_1 - F \cos 60^\circ - B_y = -12,99 - 20 \cdot 0,5 + 0,15 = -22,84 \text{ kN},$$

$$\sum F_{kz} = 0,$$

$$A_z - F \cos 30^\circ + B_z = 0,$$

$$A_z = F \cos 30^\circ - B_z = 20 \cdot 0,866 - 9,9 = 7,42 \text{ kN}.$$

Skaiciavimo patikrinimui užrašome momentų pusiausvyros lygtis atžvilgiu ašių y_1 ir z_1 .

$$\sum M_{y_1}(F_k) = -0,2A_z + 0,15B_z = -0,2 \cdot 7,42 + 0,15 \cdot 9,9 = 0,001,$$

$$\sum M_{z_1}(F_k) = 0,35F_1 + 0,2A_y - 0,15B_y = -0,35 \cdot 12,99 + 0,2 \cdot (-22,84) - 0,15 \cdot (-0,15) = 0,001.$$

Tai leidžia tikėti skaičiavimo rezultatais.

Šį uždavinį galima spręsti vektorinės algebros metodu. Šiuo atveju tarpinius skaičiavimus surašome į 7.5 lentelę.

7.5 lentelė. Vektorinių pusiausvyros lygčių komponentės

Duomenys ir tarpiniai rezultatai	JĖGOS					
	A_y	A_z	B_y	B_z	F	F_1
x	0	0	-0,35	-0,35	-0,2	0,15
y	0	0	0	0	-0,15	0
z	0	0	0	0	0	-0,2
F_x	0	0	0	0	0	0
F_y	A_y	0	B_y	0	$F \cos 60^\circ$	F_1
F_z	0	A_z	0	B_z	$-F \cos 30^\circ$	0
yF_z	0	0	0	0	$-0,15F \cos 30^\circ$	0
zF_y	0	0	0	0	0	$-0,2F_1$
zF_x	0	0	0	0	0	0
xF_z	0	0	0	$-0,35B_z$	$0,2F \cos 30^\circ$	0
xF_y	0	0	$0,35B_y$	0	$-0,2F \cos 60^\circ$	$0,15F_1$
yF_x	0	0	0	0	0	0

Pagal lentelės duomenis užrašome vektorinės momentų pusiausvyros lygties komponentes:

$$\sum M_x(F_k) = 0,$$

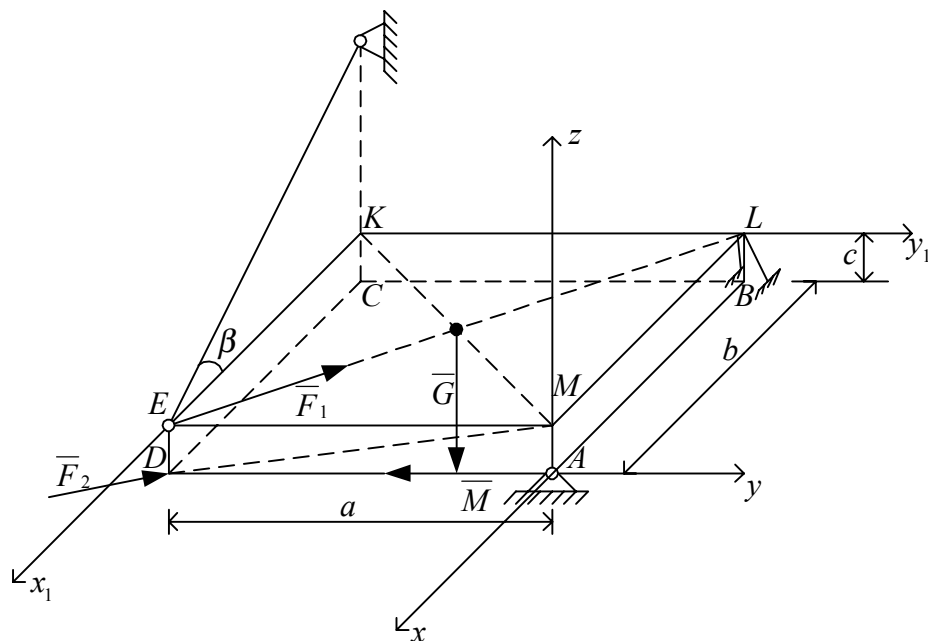
$$-0,15F \cos 30^\circ + 0,2F_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}\sum M_y(F_k) &= 0, \\ 0,35B_z - 0,2F \cos 30^\circ &= 0, \\ \sum M_z(F_k) &= 0, \\ -0,35B_y - 0,2F \cos 60^\circ + 0,15F_1 &= 0.\end{aligned}$$

Gauti rezultatai rodo, kad reakcijos jėgų komponentių reikšmės yra teisingos.

6.3 uždavinys

4 kN svorio vienalytį stačiakampio gretasienio formos kūną, pritvirtintą rutuliniu šarnyru A , cilindrinio šarnyru B ir strypu EO , veikia jėga $F_1 = 6$ kN, jėga $F_2 = 8$ kN ir pora, kurios momentas $M = 12$ kNm. Jėga \vec{F}_1 nukreipta išilgai atkarpos EL , \vec{F}_2 – tiese DM , o momento vektorius – AD . $a = 1,6$ m, $b = 0,8$ m, $c = 0,4$ m, $\beta = 30^\circ$. Strypo svoris atliekant skaičiavimus nevertinamas. Skaičiuosime kūno atramų reakcijas.



7.5 brėž.

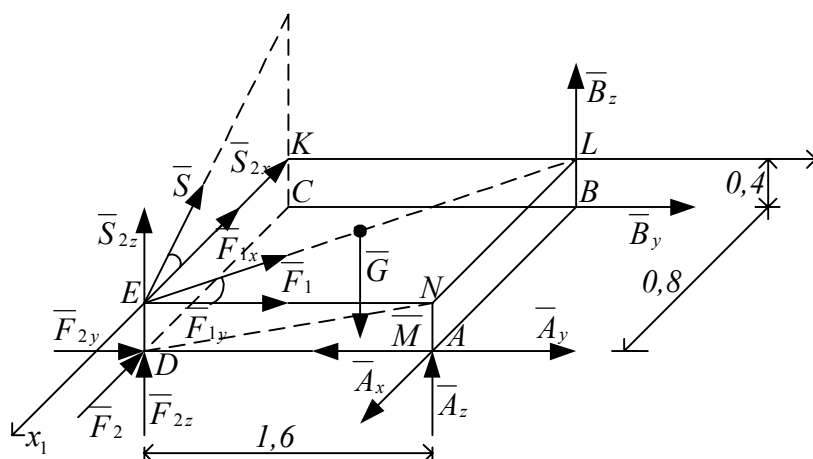
Šarnyro A reakcija gali būti bet kurios krypties erdvėje. Šią reakciją skaidome į tris dedamąsias. Cilindrinio šarnyro B reakcijos jėga turi dvi dedamąsias, statmenas cilindro ašiai. Strypo reakcija sutampa su jo geometrine ašimi. Iš viso turime 6 nežinomas reakcijos jėgas, kurios nustatomos analizuojant erdvinės jėgų sistemos pusiausvyros sąlygas. Kūną veikiančios jėgos parodytos 7.6 brėžinyje.

Jėgos \vec{F}_1, \vec{F}_2 ir \vec{S} išskaidomos į dedamąsias:

$$F_{1y} = F_1 \cos \alpha, \quad F_{1x} = F_1 \sin \alpha,$$

$$F_{2y} = F_2 \cos \gamma, \quad F_{2x} = F_2 \sin \gamma,$$

$$S_{2x} = S_2 \cos \beta, \quad S_{2z} = S_2 \sin \beta.$$



7.6 brėž.

Čia $EL = \sqrt{1,6^2 + 0,8^2} = 1,79 \text{ m},$
 $\sin \alpha = \frac{0,8}{1,79} = 0,447, \quad \cos \alpha = \frac{1,6}{1,79} = 0,894,$
 $DN = \sqrt{1,6^2 + 0,4^2} = 1,65 \text{ m},$
 $\sin \gamma = \frac{0,4}{1,65} = 0,242, \quad \cos \gamma = \frac{1,6}{1,65} = 0,970.$

Šį uždavinį sprendžiame vektorinės algebros metodu. Tarpinius skaičiavimo rezultatus pateikiame 7.6 lentelėje.

7.6 lentelė. Vektorinių pusiausvyros lygčių komponentės

Duomenys ir tarpiniai rezultatai	JĖGOS								
	A_x	A_y	A_z	B_y	B_z	G	F_1	F_2	S
x	0	0	0	-0,8	-0,8	-0,4	0	0	0
x	0	0	0	0	0	-0,8	-1,6	-1,6	-1,6
x	0	0	0	0	0	0,2	0,4	0	0,4
F_x	A_x	0	0	0	0	0	$-F_1 \sin \alpha$	0	$-S \cos \beta$
F_y	0	A_y	0	B_y	0	0	$F_1 \cos \alpha$	$F_2 \cos \gamma$	0
F_z	0	0	A_z	0	B_z	$-G$	0	$F_2 \sin \gamma$	$S \sin \beta$
yF_z	0	0	0	0	0	0,8G	0	$-1,6F_1 \sin \gamma$	$-1,6S \sin \beta$
zF_y	0	0	0	0	0	0	$0,4F_1 \cos \alpha$		0
zF_x	0	0	0	0	0	0	$-0,4F_1 \sin \alpha$		$-0,4S \cos \beta$
xF_z	0	0	0	0	$-0,8B_z$	$0,4G$	0		0
xF_y	0	0	0	$-0,8B_y$		0	0		0
yF_x	0	0	0	0		0	$1,6F_1 \sin \alpha$		$1,6S \cos \beta$

Remdamiesi 7.6 lentelės duomenimis sudarome erdvinio kūno pusiausvyros lygtis ir apskaičiuojame reakcijos jėgas bei strypo įrašą:

$$\sum M_x(F_k) = 0,$$

$$0,8G - 1,6F_2 \sin\gamma - 1,6S \sin\beta - 0,4F_1 \cos\alpha = 0,$$

$$S = \frac{0,8G - 1,6F_2 \sin\gamma - 0,4F_1 \cos\alpha}{1,6 \sin\beta} = \frac{0,8 \cdot 4 - 1,6 \cdot 8 \cdot 0,242 - 0,4 \cdot 6 \cdot 0,894}{1,6 \cdot 0,5} = -2,55 \text{ kN},$$

$$\sum M_y(F_k) = 0,$$

$$0,8B_z - 0,4F_1 \sin\alpha - 0,4S \cos\beta - 0,4G - M = 0,$$

$$B_z = \frac{0,4F_1 \sin\alpha + 0,4S \cos\beta + 0,4G + M}{0,8} = \frac{0,4 \cdot 6 \cdot 0,447 + 0,4 \cdot (-2,55) \cdot 0,866 + 0,4 \cdot 4 + 12}{0,8} = 17,24 \text{ kN},$$

$$\sum M_z(F_k) = 0,$$

$$-0,8B_y - 1,6F_1 \sin\alpha - 1,6S \cos\beta = 0,$$

$$B_y = \frac{-1,6F_1 \sin\alpha - 1,6S \cos\beta}{0,8} = \frac{-1,6 \cdot 6 \cdot 0,447 - 1,6 \cdot (-2,55) \cdot 0,866}{0,8} = -0,95 \text{ kN},$$

$$\sum F_{kx} = 0,$$

$$A_x - F_1 \sin\alpha - S \cos\beta = 0,$$

$$A_x = F_1 \sin\alpha + S \cos\beta = 6 \cdot 0,447 - 2,55 \cdot 0,866 = 0,47 \text{ kN},$$

$$\sum F_{ky} = 0,$$

$$B_y + A_y + F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\gamma = 0,$$

$$A_y = -B_y - F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\gamma = 0,95 - 6 \cdot 0,894 - 8 \cdot 0,97 = -12,17 \text{ kN},$$

$$\sum F_{kz} = 0,$$

$$A_z + B_z - G + F_2 \sin\gamma + S \sin\beta = 0,$$

$$A_z = -B_z + G - F_2 \sin\gamma - S \sin\beta = -17,24 + 4 - 8 \cdot 0,242 + 2,55 \cdot 0,5 = -13,9 \text{ kN}.$$

Patikrinimui užrašome momentų pusiausvyros lygtis atžvilgiu ašių x_1 ir y_1

$$\sum M_{x_1}(F_k) = 0,4F_2 \cos\gamma - 0,8G + 1,6A_z + 1,6B_z + 0,4A_y + 0,4B_y =$$

$$= 0,4 \cdot 8 \cdot 0,97 - 0,8 \cdot 4 + 1,6 \cdot (-13,9) + 1,6 \cdot 17,24 + 0,4 \cdot (-12,17) + 0,4 \cdot (-0,95) = 0,$$

$$\sum M_{y_1}(F_k) = -0,8F_2 \sin\gamma - 0,8S \sin\beta + 0,4G - M - 0,8A_z - 0,4A_x =$$

$$= -0,8 \cdot 8 \cdot 0,242 - 0,8 \cdot (-2,55) \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 4 - 12 - 0,8 \cdot (-13,9) - 0,4 \cdot 0,47 = 0,003.$$

Patikrinimas parodo, kad skaičiavimo rezultatai yra patikimi.

LITERATŪRA

1. R. C. Hibbeler. Engineering Mechanics. Statics and Dynamics. Macmillan Publishing Company, INC, New York, 1989. 552 p.
2. F. P. Beer, E. R. Johnston. Vector Mechanics for Engineers. Statics, McGraw-Hill Book Co, 1998. 600 p.
3. V. Paliūnas. Teorinė mechanika. Vilnius: Žuvėdra, 1997. 462 p.