Analizinė geometrija [1]

Severinas Zubė

[1] Galima rasti: http://www.mif.vu.lt/~zube/paskaitos

[1]Dokumentas pateiktas Microsoft Word, PDF, PostScript, formatais. Taip pat paruošti LaTeX, DVI variantai.

Turinys

1

Pirmoji paskaita

Analizinė geometrija atsirado XVI amžiuje. Jos esmę sudaro tai, kad geometriniai objektai užrašomi formulėmis, lygtimis. Pradininkas Dekartas, kuris įvedė koordinačių sistemą erdvėje.

1.1 Vektorinė erdvė ir operacijos su vektoriais

Kurse dažniausiai susidursime su nedidelio matavimo vektorine erdve $\mathbb{V} = k^n$ virš kūno, $k = \mathbb{R}, \mathbb{C},$ arba $\mathbb{Q}$, dim $\mathbb{V} = 1, 2, 3$.
Kai dim $\mathbb{V} = 1$, $\mathbb{V}$ galima sutapatinti su pačiu kūnu, k.
Jei dim $\mathbb{V} = 2$, tai vektorinė erdvė $\mathbb{V}$ bus dar kitaip vadinama plokštuma.
Jei dim $\mathbb{V} = 3$, tai $\mathbb{V}$ vadinsime paprasčiausiai erdve.

Priminsime keletą reikalingų apibrėžimų, kurie buvo duoti algebros kurse.

Skaliarinė sandauga. Tarkime, duoti du vektoriai $v = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ir $w = (y_1, y_2, ..., y_n)$, tada standartinę skaliarinę sandaugą žymėsime

$$v \cdot w = \sum_i x_i y_i.$$

Jeigu naudosime nestandartinę skaliarinę sandaugą, tai ją žymėsime $< v_1, v_2 >$.
Vektoriaus ilgis. Laikysime, kad vektoriaus $v = (x_1, ..., x_n)$ ilgis $|v|$ yra kvadratine šaknis iš skaliarinės sandaugos $v \cdot v$, t.y.

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Kampas tarp vektorių. Kampo kosinusas tarp vektorių v, w yra pagal apibrėžimą lygus skaliarinei vektorių sandaugai padalintai iš jų ilgių:

$$\cos(v, w) = \frac{v \cdot w}{|v||w|}.$$

Jeigu $v \cdot w = 0$, tai sakysime, kad vektoriai v ir w yra *statmeni*. Jeigu $\cos(v, w) = \pm 1$, tai sakysime, kad vektoriai v ir w yra *kolinearieji (lygiagretieji)* .

Vektoriaus v projekcija į vektorių w žymėsime $pr_w v$. Ji lygi:

$$pr_w v = |v| \cos(v, w) = \frac{v \cdot w}{|w|}.$$

Vektorinė sandauga (trimatėje erdvėje). Tarkime duoti du vektoriai v_1 ir v_2, tada vektorinę sandaugą žymėsime

$$v_1 \times v_2$$

Pagal apibrėžimą $v = v_1 \times v_2$ yra vektorius su sekančiomis savybėmis:

1. Vektoriaus v ilgis yra lygiagretainio, kurį sudaro vektoriai v_1 ir v_2 plotas.
2. v yra statmenas v_1 ir v_2 vektoriams.
3. Vektoriai v, v_1, v_2 turi tokią pačią orentaciją kaip ir ašys x, y, z.

Tai reiškia, kad determinantas, kurį sudaro trijų vektorių v, v_1, v_2 koordinatės yra teigiamas.

Vektorių v galima apskaičiuoti pagal formulę:

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

čia i, j, k yra vienetinai vektoriai atidėti ašyse $x, y, z,\ v_i = (a_i, b_i, c_i), i = 1, 2$.

Mišri sandauga (trimatėje erdvėje). Trijų vektorių v_1, v_2, v_3 mišri sandauga yra skaičius, kurį žymėsime taip (v_1, v_2, v_3). Pagal apibrėžimą:

$$(v_1, v_2, v_3) = (v_1 \times v_2) \cdot v_3 = v_1 \cdot (v_2 \times v_3)$$

Šio reiškinio rezultatas yra skaičius.

$$(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

čia $v_i = (a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, 3$.

Priminsime, kad geometrinė determinanto prasmė yra **orentuotas tūris** (arba mišri vektorių sandauga), kurį žymesime taip $(v_1, v_2, ..., v_n)$. Jis lygus:

$$(v_1, v_2, ..., v_n) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & ... & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & ... & e_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_3 & b_3 & c_3 & ... & e_n \end{vmatrix}, \tag{1.3}$$

čia $v_i = (a_i, b_i, c_i, ..., e_i), i = 1, 2, ..., n$.

Tarkime, kad plokštumoje duoti trys taškai

$$A_1 = (a_1, b_1),\ A_2 = (a_2, b_2),\ A_3 = (a_3, b_3).$$

Pastebėsime, kad lygiagretainio su dviem susikertančiomis kraštinėmis A_2A_1 ir A_3A_1 plotas yra dvigubai didesnis negu trikampio $A_1A_2A_3$. Todėl pagal apibrėžimą trikampio, sudaryto iš dviejų vektorių $A_2 - A_1 = (a_2 - a_1, b_2 - b_1)$, $A_3 - A_1 = (a_3 - a_1, b_3 - b_1)$ (toks vektorių žymėjimo būdas bus pakomentuotas kitame skyrelyje) arba trijų taškų $A_1A_2A_3$, orentuotu plotu $S(A_1, A_2, A_3)$ laikysime sekantį determinatą

$$S(A_1, A_2, A_3) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & 0 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 & 0 \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 \\ a_3 - a_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(A_2 - A_1, A_3 - A_1), \tag{1.5}$$

čia $(A_2 - A_1, A_3 - A_1)$ yra mišri vektorių $A_2 - A_1$ ir $A_3 - A_1$ sandauga, t.y. orientuotas lygiagretainio plotas sudarytas iš vektorių $A_2 - A_1$ ir $A_3 - A_1$.

Jeigu taškai $A_1A_2A_3$ yra sutinkami plokštumoje einant prieš laikrodžio rodyklę, tai orentuotas plotas yra teigiamas. Jeigu taškai $A_1A_2A_3$ yra sutinkami plokštumoje einant pagal laikrodžio rodyklę, tai orentuotas plotas yra neigiamas.

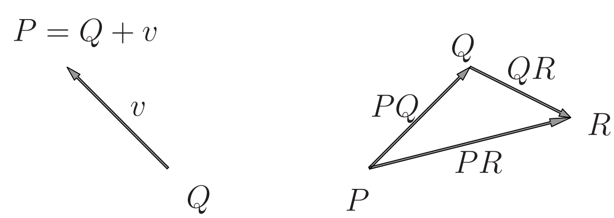
1.2 Afinioji erdvė

Vektorinėje erdvėje nėra taškų, tiesių, yra tik vektoriai. Taigi, kas yra taškas, tiesė? Norint atsakyti į šį klausimą reikalinga afiniosios erdvės sąvoka. Intuityviai tokia sąvoka jau buvo naudojama mokykloje, kai taškas (x, y) buvo sutapatinamas su vektoriaus galu $xe_1 + ye_2$. Tam erdvėje reikia įvesti koordinačių sistemą.

Apibrėžimas 1.2.1 *Afinioji erdvė susideda iš tokių objektų:*
1. Taškų aibės: T;
2. Vektorinės erdvės $\mathbb{V}$ *;*
3. Operacijos +, kuri sudeda taškus ir vektorius (rezultatas yra kitas taškas) ;
Taškai žymimi P, Q*. Vektoriai:* v_1, v_2*. Bet kokius vektorius galima sudėti, padauginti iš skaičiaus taip kaip tai daroma vektorinėje erdvėje* $\mathbb{V}$ *. Minėti objektai tenkina tokias aksiomas:*

1. Bet kokiems taškams $P, Q \in T$*, egzistuoja vienintelis vektorius* $v \in \mathbb{V}$ *toks, kad teisinga lygybė* $P = Q + v$*. Kitaip tariant tarp dviejų taškų yra vienintelis vektorius. Vektorių* $v = P - Q$ *toliau žymėsime taip* PQ*.*

2. Šalio lygybė (taisyklė). $PQ + QR = PR$*.*



Pav. 1.1: Kairėje - taško ir vektoriaus suma; dešinėje - Šarlio lygybė.

Pavyzdys 1.2.2 *Laikas ir datos. Datos yra taškai. Vienos datos nesudedame su kita, bet galima paimti jų skirtumą (gausime laiką), kuris ir yra mūsų erdvėje vektorius.*

Pavyzdys 1.2.3 *Turint vektorinę erdvę* $\mathbb{V}$ *jai galime priskirti afiniąją erdvę* $A(\mathbb{V}) = (\mathbb{V}, \mathbb{V}, +)$*, kurioje vektoriai ir bus vadinami taškais, t.y.* $T = \mathbb{V}$*. Jeigu* v, w *yra iš taškų aibės, tai apibrėšime* $wv = w - v$*.*

Nesunkiai patikriname abi afiniosios erdvės aksiomas.

Toliau kurse mes dažnai sutapatinsime vektorinę erdvę $\mathbb{V}$ su ją atitinkančia afiniąja erdve $A(\mathbb{V})$ ir kartais todėl vektorių vadinsime tašku.

Apibrėžimas 1.2.4 *Tarkim, duota afinioji erdvė $(T,\mathbb{V}\ ,+)$, taškai $P_1, P_2, ..., P_n \in T$ ir skaičiai $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tokie, kad $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$. Išraišką*

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + ... + \alpha_n P_n := P + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (P_i - P) \tag{1.6}$$

vadinsime **afiniuoju taškų dariniu** .

Atkreipsime dėmesį, kad kairė lygybės pusė yra neturintis prasmės formalus užrašas, nes taškų aibėje neapibrėžta taško daugyba iš skaičiaus ir suma. Dešinėje lygybės pusėje yra taško p ir vektoriaus suma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (P_i - P)$, kuri yra apibrėžta. Taigi dešinėje pusėje yra taškas, o kairėje pusėje yra to taško formali išraiška. Kairėje pusėje nėra taško P, taigi lygybė įgautų prasmę, jeigu dešinė pusė irgi nepriklausytų nuo taško P.

Teorema 1.2.5 *Lygybės (1.6) dešinės pusė nepriklauso nuo taško P pasirinkimo.*

Įrodymas: Paimkime, bet kokį tašką Q. Tada

$$\begin{aligned} Q + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (P_i - Q) &= Q + (P - Q) - (P - Q) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (P_i - Q) \\ &= P + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (P_i - Q - (P - Q)) = P + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (P_i - P), \end{aligned} \tag{1.7}$$

nes $P = Q + (P - Q)$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Taigi, lygybės dešinė pusė nepriklauso nuo taško pasirinkimo. $\odot$

Kas yra tiesė erdvėje $A(\mathbb{V})$? Tiese vadinsime vienmatę afiniąją erdvę, susidedančią iš taškų, gulinčių tarp dviejų taškų v, w. Kitaip tariant, tai yra aibė taškų

$$\{tv + (1 - t)w = t(v - w) + w | t \in k\}.$$

Apibrėžimas 1.2.6 *Tiesės vektorine lygtimi vadinsime aibę taškų (vektorių)*

$$\{w + (v - w)t, t \in k\},$$

vektorių $(v - w)$ vadinsime tiesės krypties vektoriumi, t - parametru.

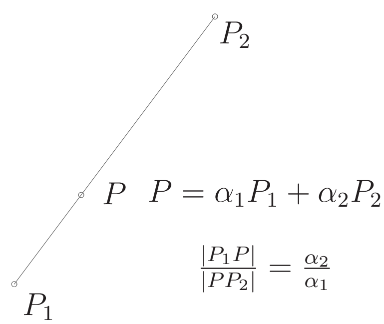
Atkreipsime dėmesį, kad vektorinės erdvės poaibiui priklauso nulinis vektorius. Tačiau tiesei nulinis vektorius nebūtinai priklauso.

Kitas tiesės apibrėžimas.

Apibrėžimas 1.2.7 *Tiesė , einanti per du taškus P_1, P_2 yra visi taškai, kurie sudaro afinųjį darinį $p = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$, kai $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.*

Teiginys 1.2.8 *Taškas $p = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$, kai $\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \alpha_1 \alpha_2 > 0$ yra tarp taškų P_1, P_2 ir dalija atkarpą P_1, P_2 santykiu $\alpha_2 : \alpha_1$, tai yra*

$$\frac{|P_1 P|}{|P P_2|} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad \textit{arba} \quad \alpha_1 |P_1 P| = \alpha_2 |P P_2| \tag{1.8}$$



Pav. 1.2: Atkarpos dalinimas duotu santykiu.

Įrodymas:

$$\begin{aligned} P_1 P &= P_1 - P = (\alpha_1 + \alpha_2) P_1 - (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \alpha_2 (P_1 - P_2) \\ P P_2 &= P - P_2 = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) P_2 = \alpha_1 (P_1 - P_2) \end{aligned}$$

Taigi

$$\frac{|P_1 P|}{|P P_2|} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad \text{arba} \quad \alpha_1 |P_1 P| = \alpha_2 |P P_2|.$$

$\odot$

Pastaba 1.2.9 *Jeigu $\alpha_1\alpha_2 \leq 0$, tai lygties (1.8) analogas yra*

$$-\alpha_1|P_1P| = \alpha_2|PP_2|.$$

Jeigu $\alpha_2 < 0$, tai taškai tiesėje išsidėsto tokia tvarka P, P_1, P_2. Pavyzdžiui taškas $P = 2P_1 - P_2$ yra simetrinis taškui P_2 taško P_1 atžvilgiu, t.y. atkarpos P, P_2 vidurio taškas yra P_1.

Iš teiginio seka, kad atkarpos P_1, P_2 vidurio taškas yra

$$\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2,$$

tai yra kartu ir atkarpos masių centras.

Teiginys 1.2.10 *Trikampio, kurio viršūnės P_1, P_2, P_3, pusiaukraštinių susikirtimo taškas yra*

$$P = \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3.$$

Įrodymas: Pradžioje įrodysime, kad pusiakraštinės susikerta taške P. Iš lygybės

$$\frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{3}P_3 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2\right) + \frac{1}{3}P_3, \tag{1.9}$$

galima matyti, kad taškas P yra tiesėje tarp taškų $Q_{12} = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2$ ir P_3. Kadangi taškas Q_{12} yra kraštinės P_1P_2 vidurio taškas, tai taškas P priklauso pusiaukampinei, išvestai iš taško P_3, ir be to dalina ją santykiu 1:2. Analogiškai, lygybę (1.9) galima perrašyti kitu būdu ir tada matysime, kad taškas P priklauso pusiaukampinei, išvestai iš taško P_2 (arba P_1). $\odot$

Pagal apibėžimą laikysime, kad trikampio masių centras yra pusiaukraštinių susikirtimo taškas.

Teiginys 1.2.11 *Afinusis darinys taškų $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ turi sekančią geometrinę prasmę:*

$$\alpha = \frac{[PBC]}{[ABC]}, \beta = \frac{[APC]}{[ABC]}, \gamma = \frac{[ABP]}{[ABC]},$$

čia $[ABC] = S(A, B, C)$ yra orientuotas trikampio plotas (žr. (1.5))

Įrodymas: Naudojantis formule (1.5) orientuotas trikampio plotas gali būti suskaičiuotas naudojant mišrią vektorių sandaugą pavyzdžiui dviem skirtingais būdais $[ABC] = \frac{1}{2}(AC, BC) = \frac{1}{2}(BA, CA)$. Tarkime, kad $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$. Tada

$$PA = P - A = \beta BA + \gamma CA,$$
$$PB = P - B = \alpha AB + \gamma CB,$$
$$PC = P - C = \alpha AC + \beta BC.$$

Dabar nesunkiai suskaičiuojame orientuotus plotus

$$\begin{aligned}
[PBC] &= \frac{1}{2}(PC, BC) = \frac{1}{2}(\alpha AC + \beta BC, BC) = \frac{1}{2}\alpha(AC, BC) = \alpha[ABC], \\
[APC] &= \frac{1}{2}(AC, PC) = \frac{1}{2}(AC, \alpha AC + \beta BC) = \frac{1}{2}\beta(AC, BC) = \beta[ABC], \\
[ABP] &= \frac{1}{2}(BA, PA) = \frac{1}{2}(BA, \beta BA + \gamma CA) = \frac{1}{2}\gamma(BA, CA) = \alpha[ABC].
\end{aligned}$$

Iš čia ir gauname reikalingas formules. $\odot$

Dar vienas afiniosios erdvės pavyzdys yra plokštuma, pagal apibrėžimą, tai yra aibė susidedanti iš visų afiniųjų 3 taškų darinių $\{t_1P_1 + t_2P_2 + t_3P_3 \mid t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$.

Suformoluosime du teiginius be įrodymo, kurie bus naudojami uždavinių sprendimui.

Teiginys 1.2.12 *Duoti taškai $P_1, P_2, ..., P_n$ ir kiekviename iš jų yra svoris $m_1, m_2..m_n$, tada šių taškų masių centras yra taškas P*

$$P = \frac{m_1P_1 + m_2P_2 + ... + m_nP_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}.$$

Teiginys 1.2.13 *(superpozicijos principas): Tarkime taškas Q_1 yra taškų $P_1, ..., P_k$ su masėmis $m_1, ..., m_k$ masių centras. Taškas Q_2 yra taškų $P_{k+1}, ..., P_n$ su masėmis $m_{k+1}, ..., m_n$ masių centras, tai visos sistemos masių centras yra taškas P, kuris lygus:*

$$P = \frac{(m_1 + ... + m_k)Q_1 + (m_{k+1} + ... + m_n)Q_2}{m_1 + ... + m_n}.$$

Uždavinys. Plokštumoje duoti taškai $P_1, ..., P_k$ su svoriais $m_1, ..., m_k$, kurie yra sveiki skaičiai. Naudojantis tik skriestuvu ir liniuote nubrėžti sistemos masių centrą.

1.3 Pratimai

1. Duoti trys trikampio kraštinių vidurio taškai $Q_1 = (1, -1, 0), Q_2 = (0, 2, 3), Q_3 = (-1, 1, 2)$. Rasti trikampio viršūnes.

2. Duotos trys trikampio viršūnes $Q_1 = (1, -1, 0), Q_2 = (0, 2, 3), Q_3 = (-1, 1, 2)$. Rasti trikampio plotą.

3. Duotas iškilus keturkampis plokštumoje, kurio viršūnės yra P_1, P_2, P_3, P_4. Ar sekantis teiginys visada teisingas? Keturkampio įstrižainės susikerta taške

$$\frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4}P_3 + \frac{1}{4}P_4.$$

   Jeigu ne, tai kokiems keturkampiams teisingas.

4. Duoti keturi taškai erdvėje P_1, P_2, P_3, P_4 (tetraedro virūnės). Atkarpos tarp P_i ir P_j vidurio tašką žymėsime P_{ij}, atkarpą tarp jungiančią taškus P_{ij} ir P_{kl} žymėsime $|ij|kl|$. Įrodyti, kad atkarpos $|12|34|, |13|24|, |14|23|$ kertasi viename taške. Raskite jį.

2

Antroji paskaita

2.1 Įvairios tiesės lygčių formos plokštumoje

2.1.1 Parametrinė tiesės lygtis

Apibrėžimas 2.1.1 **Parametrine tiesės lygtimi** *vadinsime sekančią lygčių sistemą*

$$\begin{cases} x = x_0 + dt, \\ y = y_0 + et, \end{cases} \quad t \in k. \tag{2.1}$$

Čia t yra vadinama tiesės parametru. Kai t prabėga visus kūno k elementus (x, y) prabėga visą tiesę. Jeigu lygtyse (2.1) $t = 0$, gauname tašką $P = (x_0, y_0)$, kuris priklauso tiesei. Šios tiesės krypties vektorius yra $v = (d, e)$. Jeigu eliminuotume t iš lygčių (2.1) , tai gautume kanonines tiesės lygtis.

2.1.2 Kanoninė tiesės lygtis

Apibrėžimas 2.1.2 **Kanonine tiesės lygtimi** *vadinsime tiesės lygtį:*

$$\frac{x - x_0}{d} = \frac{y - y_0}{e} \tag{2.2}$$

Tiesė eina per tašką $P = (x_0, y_0)$, jos krypties vektorius yra $v = (d, e)$.

Panaikinę trupmeną ir perkėlę visus narius į vieną pusę, gauname bendrąją tiesės lygtį.

2.1.3 Bendroji tiesės lygtis

Apibrėžimas 2.1.3 Bendrąja tiesės lygtimi *vadinsime lygtį:*

$$ax + by + c = 0. \tag{2.3}$$

Vektorius $n = (a, b)$ yra statmenas tiesei ir vadinamas tiesės normaliniu vektoriumi. Jis yra statmenas tiesės krypties vektoriui $v = (b, -a)$. c - laisvasis koeficientas, kai $c = 0$, tiesė eina per koordinačių pradžią. Keisdami konstantą c, gausime lygiagrečias tieses.

2.1.4 Normalinė tiesės lygtis

Apibrėžimas 2.1.4 Normaline tiesės lygtimi *vadinsime tokią formos lygtį:*

$$x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha) - p = 0, \text{ čia } p > 0. \tag{2.4}$$

Šios lygties forma charakterizuojama dvejomis savybėmis:
1. Normalinis vektorius $n = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ yra vienetinio ilgio vektorius.
2. Laisvasis lygties narys yra neigiamas.

Jei duota bendroji tiesės lygtis $ax+by+c = 0$, tai nesunku užrašyti ją normalinėje formoje

$$\frac{\pm(ax + by + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0, \tag{2.5}$$

ženklas parenkamas taip, kad laisvas koefcientas būtų neigiamas.

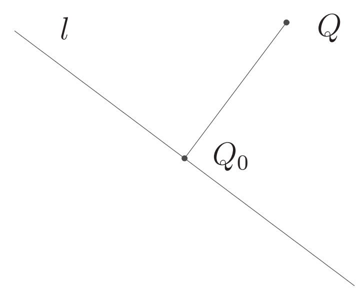
Normalinė forma yra naudinga skaičiuojant atstuma nuo duoto taško iki tiesės. Pagal apibrėžimą laikysime, kad atstumas tarp tiesės ir taško yra trumpiausias atstumas tarp tiesės taškų ir duoto taško.

Teiginys 2.1.5 *Atstumas d tarp taško su koordinatėmis $Q = (x_1, y_1)$ ir tiesės l (užduotos normaline lygtimi) (2.4) yra:*

$$d = |x_1\cos(\alpha) + y_1\sin(\alpha) - p| \tag{2.6}$$

Jei duota bendroji tiesės lygtis $ax + by + c = 0$ tai:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2.7}$$



Pav. 2.1: Trumpiausias atstumas tarp tiesės l ir taško Q.

Įrodymas: Tarkime duota normalinė tiesės lygtis. Nuleiskime statmenį iš taško Q į tiesę l ir pažymėkime jį $Q_0 = (x_0, y_0)$. Tada vektorius QQ_0 yra lygiagretus tos tiesės normalės vektoriui. Todėl skaliarinės sandaugos modulis $|QQ_0 \cdot n|$ yra lygus d.

$$\begin{aligned}
\pm d &= QQ_0 \cdot n = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)n = (x_1 - x_0)\cos(\alpha) + (y_1 - y_0)\sin(\alpha) \\
&= x_1 \cos(\alpha) + y_1 \sin(\alpha) - (x_0 \cos(\alpha) + y_0 \sin(\alpha)) \\
&= x_1 \cos(\alpha) + y_1 \sin(\alpha) - p,
\end{aligned}$$

nes taškas Q_0 priklauso tiesei l ir todėl tenkina lygtį (2.4) . Lygybė (2.7) seka iš jau įrodytos lygybės, kadangi normalinė tiesės lygtis atitinkanti bendraja yra (2.5) .⊙

Lygtyje (2.4) geometrinė laisvo nario prasmė yra sekanti.

Išvada 2.1.6 *Lygtyje (2.4) p yra lygus atstumai nuo tiesės iki koordinačių pradžios.*

Įrodymas: Iš tiesų, atstumas nuo tiesės iki koordinačių pradžios taško $(0, 0)$ yra

$$d = |0\cos(\alpha) + 0\sin(\alpha) - p| = p. \tag{2.8}$$

⊙

2.2 Kampas tarp tiesių

Apibrėžimas 2.2.1 *Jei turime dvi tieses l_1 ir l_2 tai kampas tarp jų yra* **smailus arba status** *kampas tarp atitinkamų tiesių krypties vektorių k_1 ir k_2 arba normalinių* *vektorių n_1 ir n_2, t.y.*

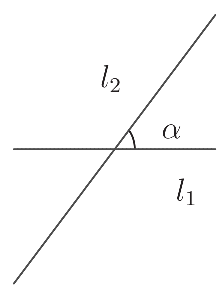
$$\text{Kampas tarp tiesių } l_1 \text{ ir } l_2 = \arccos(|\cos(k_1, k_2)|) = \arccos(|\cos(n_1, n_2)|) \tag{2.9}$$

Pavyzdžiui, jeigu

$$l_1 := a_1x + b_1y + c_1, \quad l_2 := a_2x + b_2y + c_2,$$

tai

$$\text{Kampas tarp tiesių } l_1 \text{ ir } l_2 = \arccos\left(\frac{|\ a_1a_2 + b_1b_2\ |}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right) \tag{2.10}$$



Pav. 2.2: Kampas tarp tiesių.

Atkreipsiu dėmesį, jog formulėje (2.10) būtinas modulis, nes taip apibrėžtas kampas tarp tiesių nepriklauso nuo pasirinktų tiesių krypties ar normalinių vektorių.

2.3 Tiesių pluoštas plokštumoje

Apibrėžimas 2.3.1 *Tiesių pluoštas, tai visos tiesės, kurios eina per vieną tašką. Tas taškas vadinamas tiesių pluošto centru.*

Jeigu žinomas pluošto centras $P = (x_0, y_0)$, tai visas tiesių pluošto lygtis galima užrašyti taip:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0, \text{ čia } \alpha, \beta \text{ bet kokie skaičiai.} \tag{2.11}$$

Tos tiesės normalinis vektorius yra $n = (\alpha, \beta)$.

Teiginys 2.3.2 *Jeigu duotos dviejų tiesių lygtys*

$$l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ ir } l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

tai visos tiesės einančios per dviejų duotų tiesių sankirtos tašką sudaro tiesių pluoštą. Visas tokio pluošto tieses galima užrašyti taip:

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2) = 0, \tag{2.12}$$

čia α, β yra bet kokie skaičiai.

Įrodymas: Visų pirma pastebėsime, kad lygtis (2.12) yra bendroji tiesės lygtis, kuri eina per tiesių l_1 ir l_2 bendrą tašką B. Paaiškinsime, kodėl kiekviena tiesė l einanti per tašką B yra pavidalo (2.12). Tiesei l nusakyti pakanka be taško B žinoti dar vieną tašką $P = (x_1, y_1)$. Tarkime, kad α, β yra sprendiniai lygties:

$$\alpha(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1) + \beta(a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) = 0. \tag{2.13}$$

Tada aišku, kad tiesė (2.12) su tokiais α, β eina per tašką P, taigi tiesė sutampa su tiese l. Dar atkreipsiu dėmesį, kad lygtis (2.13) visada turi sprendinių (α, β nežinomieji). $\odot$

Šitas teiginys yra dažnai pagreitina uždavinio sprendima, kadangi juo naudojantis užrašomos visos pluošto tiesės neieškant pluošto centro taško.

2.4 Pratimai

1. Duoti du tiesių pluoštai

$$\alpha_1(5x + 3y - 2) + \beta_1(3x - y - 4) = 0,$$
$$\alpha_2(x - y + 1) + \beta_2(2x - y - 2) = 0.$$

   Neskaičiuojant jų centrų rasti tiesę priklausančią abiems pluoštams.

2. Viena trikampio viršūnė yra tiesių pluošto $\alpha(2x + 3y + 5) + \beta(3x - y + 2) = 0$ centras. To trikampio aukštinės yra $x - 4y + 1 = 0$ ir $2x + y + 1 = 0$. Rasti trikampio viršūnes.

3. Rasti kampo tarp tiesių $x+2y-11=0$ ir $3x-6y-5=0$ pusiaukampinės lygtį, jeigu tam kampui priklauso taškas (1,-3).

4. Nustatyti smailus ar bukas yra kampas tarp dviejų tiesių $3x-5y-4=0$ ir $x+2y+3=0$, kuriam priklauso taškas (2,-5).

3

Trečia paskaita

3.1 Plokštuma erdvėje

3.1.1 Tetraedro orientuotas tūris

Apibrėžimas 3.1.1 *Duoti keturi taškai*
$A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), C = (x_3, y_3, z_3),\ D = (x_4, y_4, z_4).$
Orientuotu tetraedro $ABCD$ tūriu vadinsimeši determinantą:

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.1}$$

Teiginys 3.1.2 *Šio determinanto modulis lygus tetraedro tūriui.*

Įrodymas: Paimkime tris vektorius $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$. Jie turi tokias koordinates:
$\overrightarrow{BA}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),\ \overrightarrow{BC}(x_3 - x_2, y_3 - y_2, z_3 - z_2),\ \overrightarrow{BD}(x_4 - x_2, y_4 - y_2, z_4 - z_2).$
Kaip žinome, stačiakampio gretasienio orientuotas tūris yra vektorių $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$ mišri sandauga:

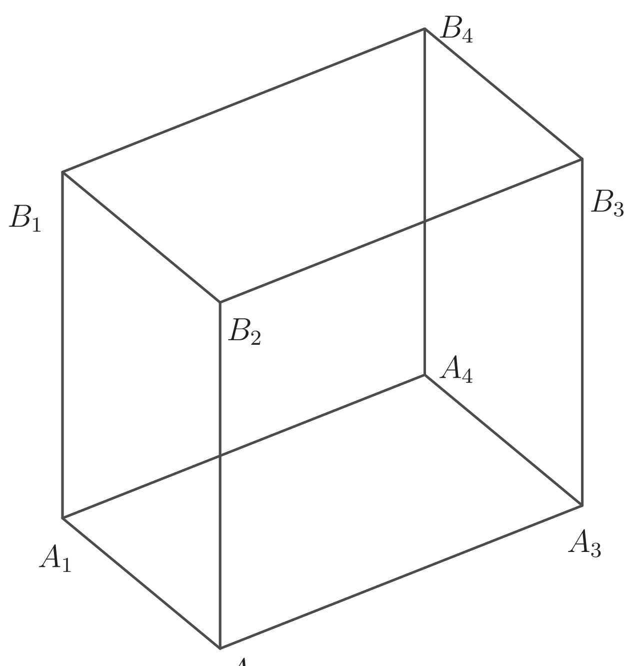
$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 & z_4 - z_2 \end{vmatrix} \tag{3.2}$$

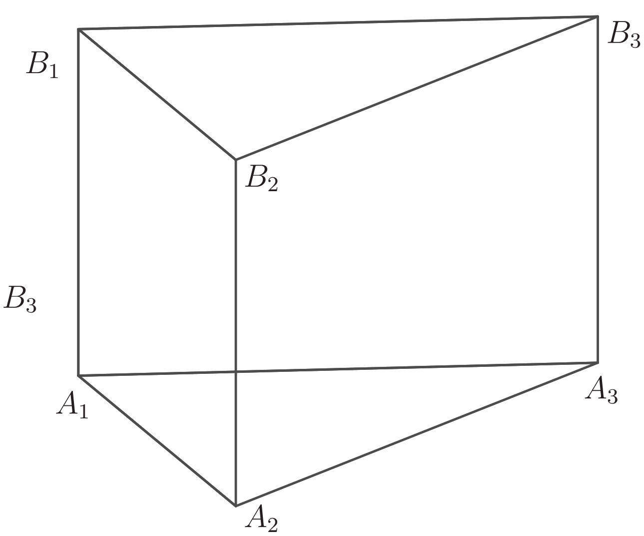
Atkreipkime dėmesį, kad šitas determinantas yra lygus determinantui:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{3.3}$$

Įrodymo pabaiga seka iš lemos.$\odot$

Lema 3.1.3 *Kiekvieną stačiakampį gretasienį galime padalinti į šešis vienodo tūrio tetraedrus.*





Pav. 3.1: Gretasienis ir prizmė.

Įrodymas: Kiekvieną stačiakampį gretasienį, kurio viršūnės $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$, galime padalinti į dvi vienodo tūrio prizmes. Stačiakampis gretasienis ir viena

iš prizmių su viršūnėmis $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ pavaizduoti Pav. 3.1. Išvardinsime tris tetraedrus, kurie turi vienodą tūrį ir padalina prizmę:
$\{A_1, A_2, A_3, B_1\}, \{B_1, B_2, B_3, A_3\}, \{A_2, A_3, B_1, B_2\}.\odot$

3.1.2 Plokštumos bendroji lygtis

Per bet kokius tris taškus erdvėje $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^3$ galima išvesti plokštumą. Ta plokštuma p susidės iš taškų $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Kitaip tariant plokštuma sudaryta iš trijų taškų afiniųjų derinių.
Jeigu tie keturi taškai $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ tai jų orientuotas tūris lygus nuliui. Taigi gauname sąlyga, kad keturi taškai guli vienoje plokštumoje:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

Jeigu vietoje P_1 paimtume (x, y, z) tai išskleidę užrašytą determinantą gautume plokštumos einančios per tris taškus (P_2, P_3, P_4) lygtį:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$(A, B, C) = \overrightarrow{n}$ - plokštumos normalinis vektorius. $\overrightarrow{n}$ bus statmenas bet kokiam vektoriui gulinčiam plokštumoje t.y. $\overrightarrow{v} \in p$ (p - plokštuma) tada $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = 0$, kitaip tariant $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v}$

Paimkime bet kokį tašką plokštumoje $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ir bet kokį kitą tašką plokštumoje $P = (x, y, z)$, tarkime, kad plokštumos normalinis vektorius yra $n = (A, B, C)$. Kadangi $PP_0 \perp \overrightarrow{n}$ gauname, kad $PP_0 \cdot \overrightarrow{n} = 0$, t.y. $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)(A, B, C) = 0$ išskleidę gaunam plokštumos lygtį, kuri eina per tašką $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ir kurios normalinis vektorius yra $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)) = 0, \text{ arba}$$
$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0.$$

3.1.3 Plokštumos normalinė lygtis

Apibrėžimas 3.1.4 *Plokštumos normaline lygtimi vadinsime lygtį:*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$
$$\textit{čia}\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *- vienetinis normalinis vektorius, t.y. jo ilgis yra vienas* $|n| = 1$.

Teiginys 3.1.5 *Plokštumos normalinėje lygtyje p yra atstumas iki koordinačių pradžios.*

Įrodymas: Tarkime atstumas iki koordinačių pradžios yra d. Tada artimiausią koordinčių pradžiai tašką D priklausanti plokštumai įstatę į plokštumos normalinę lygtį gauname: $OD \cdot n - p = d - p = 0$, nes vektoriaus OD koordinatės yra lygios taško D koordinatms. Taigi $d = p$, ką ir reikėjo įrodyti.⊙

Tarkime, kad plokštuma užrašyta bendrąją lygtimi: $Ax + By + Cz + D = 0$. Tada jos normalinė lygtis bus:

$$\pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(Ax + By + Cz + D) = 0 \tag{3.5}$$

3.1.4 Atstumas iki plokštumos

Teiginys 3.1.6 *Atstumas tarp taško* $A(x_0, y_0, z_0)$*ir plokštumos užrašytos bendraja lygtimi yra :*

$$\left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| \tag{3.6}$$

Įrodymas: Toks pat kaip ir tiesės atveju (žr. teiginį puslapyje 12).

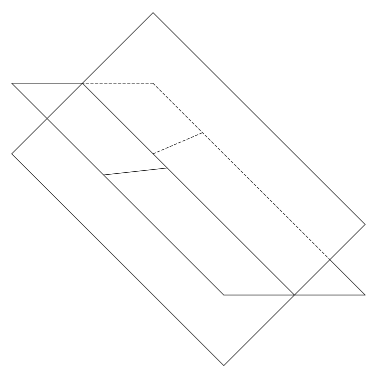
3.1.5 Kampas tarp plokštumų

Apibrėžimas 3.1.7 *Kampas tarp plokštumų yra smailus kampas tarp jų normalinių vektorių.*

Tarkime, kad plokštuma p_1 turi normalinį vektorių n_1, o $p_2 - n_2$, tada kampas tarp jų bus:

$$\arccos \left| \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|} \right| \tag{3.7}$$

3.1.6 Plokštumų pluoštai



Pav. 3.2: Plokštumų pluoštas.

Apibrėžimas 3.1.8 **Plokštumų pluoštu** *vadinsime visas plokštumas einančias per vieną tiesę.*

Tarkime, kad tiesė užduota dviem plokštumomis

$$\begin{cases} L_1 &= 0, \\ L_2 &= 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

tada plokštumų pluoštas gali būti užrašytas tokia forma: $\alpha L_1 + \beta L_2 = 0$

3.1.7 Plokštumų grįžtės

Apibrėžimas 3.1.9 **Plokštumos grįžte** *vadinsime visas plokštumas kurios eina per vieną tašką .*

Imkim tašką P, tada:

$$L_1(P) = L_2(P) = L_3(P) = 0,$$

visas plokštumas galime užrašyti tokiu būdu:

$$\alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3 = 0.$$

4

Ketvirtoji paskaita

4.1 Įvairios tiesės lygčių formos erdvėje

Apibrėžimas 4.1.1 *Tiesė einanti per du taškus p_1, p_2 yra aibė taškų:*

$$\{tp_1 + (1-t)p_2 = t(p_1 - p_2) + p_2 \in \mathbb{R}\}$$

Vektorius $(p_1 - p_2)$ yra vadinamas tiesės krypties vektoriumi.

4.1.1 Parametrinė tiesės lygtis

Apibrėžimas 4.1.2 **Parametrine tiesės lygtimi erdvėje** *vadinsime sekančią lygčių sistemą*

$$\begin{cases} x &= x_1 + at, \\ y &= y_1 + bt, \\ z &= z_1 + ct. \end{cases} \tag{4.1}$$

(a, b, c) - tiesės krypties vektorius, (x_1, y_1, z_1) - taškas per kurį eina tiesė, t - vadinamas tiesės parametru.

4.1.2 Kanoninė tiesės lygtis

Apibrėžimas 4.1.3 **Kanonine tiesės lygtimi erdvėje** *vadinsime tiesės lygtį:*

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \tag{4.2}$$

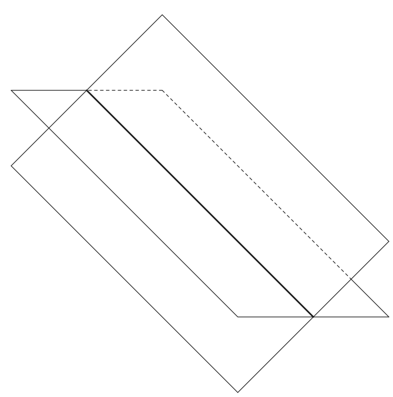
(a, b, c) - tiesės krypties vektorius, (x_1, y_1, z_1) - taškas per kurį eina tiesė.

4.1.3 Bendroji tiesės lygtis

Apibrėžimas 4.1.4 Bendroji tiesės lygtis *yra apibrėžta dviejų plokštumų* p_1, p_2 *sankirta:*

$$\begin{cases} p_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ p_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Plokštumos susikera ir jų susikirtimo taškai sudaro tiesę:



Pav. 4.1: Dviejų plokštumų susikirtimas

Dažnai sprendžiant uždavinius tiesės lygtis yra apibrėžta kaip dviejų plokštumų sankirta ir reikia užrašyti tiesės kanoninę lygtį. Tai galime padaryti vienu iš dviejų būdų:

I būdas:

Tarkime, kad tiesė apibrėžta dvejomis plokštumomis p_1, p_2, tada galime paimti tokią plokštumų kombinaciją $q_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$, kad išnyktų kintamasis z plokštumoje q_1, analogiškai paimkime konbinaciją $q_2 = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2$, kad išnyktu kintamasis x plokštumoje q_2, tada tos pačios tiesės taškai yra bendri plokštumų q_1,q_2 taškai ir tiesę L galime užrašyti lygtimis:

$$\begin{cases} q_1 : b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0, \\ q_2 : c(y - y_1) - b(z - z_1) = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$L = p_1 \cap p_2 = q_1 \cap q_2$$

L- priklauso plokštumų pluoštui

$$q_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2,$$
$$q_2 = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2.$$

Tada pirmą ir antrą lygtį užrašome kanonine forma:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \tag{4.5}$$

.

Pastaba 4.1.5 *Kai plokštumos lygtyje $Ax+By+Cz+D = 0$ ir $C = 0$ tai geometriškai reiškia, kad plokštuma lygiagreti z ašiai.*

II būdas:

Tarkime, kad tiesė apibrėžta dvejomis plokštumomis p_1, p_2, kurių normaliniai vektoriai yra $n_i = (A_i, B_i, C_i),\ i = 1, 2$. Tada tiesės krypties vektoriu galime rasti vektoriškai sudauginę vektorius n_1, n_2: $k = n_1 \times n_2$.
Pagal vektorinės sandaugos apibrėžimą $k \perp n_1$, $k \perp n_1$ (k statmenas n_1 ir n_2). Kai žinome tiesės krypties vektorių, dar reikia paimti vieną tašką, priklausantį tiesei, ir tada galėsime užrašyti kanonines tiesės lygtis:
Kanoninės tiesės lygtys:

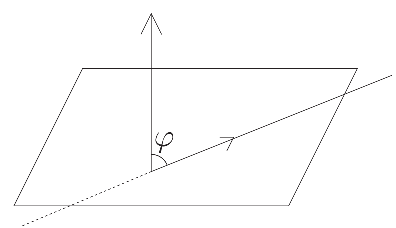
$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \tag{4.6}$$

(x_0, y_0, z_0) - bet koks taškas priklausantis tiesei.

4.1.4 Kampas tarp plokštumos ir tiesės

Apibrėžimas 4.1.6 *Kampas tarp plokštumos ir tiesės yra smailus kampas φ tarp tiesės ir jos projekcijos toje plokštumoje.*

Jį galima apskaičiuoti radus kampą tarp tiesės krypties vektoriaus k ir plokštumos normalinio vektoriaus n pagal formulę $\cos(k, n) = \sin\varphi$
.



Pav. 4.2: Kampas tarp tiesės ir plokštumos

Tarkime $Ax + By + Cz + D = 0$ yra plokštumos lygtis, $k = (a, b, c)$ tiesės krypties vektorius.

$$\sin(\varphi) = \left| \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| \tag{4.7}$$

$$\varphi = \arcsin \tfrac{|n \cdot k|}{|n||k|}$$

Kampas tarp tiesės ir plokštumos smailus arba 90°, todėl užrašom modulį.

4.1.5 Kampas tarp tiesių

Apibrėžimas 4.1.7 *Kampas tarp tiesių - tai kampas tarp jų krypties vektorių*

$$\varphi = \arccos \left| \frac{k_1 \cdot k_2}{|k_1||k_2|} \right| \tag{4.8}$$

Tiesės L_1 krypties vektorius k_1, tiesės L_2 krypties vektorius k_2.

4.1.6 Atstumas tarp dviejų tiesių

Teiginys 4.1.8 *Atstumą tarp dviejų tiesių*

$$L_1 : \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c},$$

$$L_2 : \frac{x - x_2}{n} = \frac{y - y_2}{k} = \frac{z - z_2}{l},$$

galime apskaičiuoti pagal formulę:

$$d(L_1, L_2) = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \\ n & k & l \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b & c \\ k & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ n & k \end{vmatrix}^2}} \tag{4.9}$$

Įrodymas: Turime dvi tieses L_1 ir L_2. Tiesės L_1 krypties vektorius $k_1 = (a, b, c)$, tiesės L_2 krypties vektorius $k_2 = (n, k, l)$. Taškas $A = (x_1, y_1, z_1)$ yra tiesėje L_1, $B = (x_2, y_2, z_2)$ yra tiesėje L_2. Per tašką B galime išvesti tiesę L' lygiagriačią tiesei L_1:

$$L' : \frac{x - x_2}{a} = \frac{y - y_2}{b} = \frac{z - z_2}{c}$$

Per tieses L_1 L' galime išvesti plokštumą p, kurios normalinis vektorius yra vektorinė sandauga vektorių $(a, b, c) \times (n, k, l)$, todėl plokštumos lygtis yra :

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ a & b & c \\ n & k & l \end{vmatrix} = 0$$

Atkreipkime dėmesį, kad plokštuma p lygiagreti tiesei L_1, todėl atstumą tarp plokštumos p ir tiesės L_1 galime rasti kaip atstumą tarp tos plokštumos ir bet kokio taško toje tiesėje. Pagal žinomą formulę:

$$d(p, L) = \left| \frac{x_1 A + y_1 B + z_1 C + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \right| \tag{4.10}$$

čia plokštumos lygtis apibrėžta pagal formulę: $p : Ax + by + Cz + D = 0$, o taškas $T = (x_1, y_1, z_1)$.
Gauname, kad atstumas lygus:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \\ n & k & l \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} b & c \\ k & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & b \\ n & k \end{vmatrix}^2}} \tag{4.11}$$

Šis atstumas ir yra trumpiausias atstumas tarp tiesių L_1 ir L_2. Teorema įrodyta.$\odot$

Išvada 4.1.9 *dvi tiesės susikerta tada ir tik tada kai atstumas tarp jų lygus nuliui ($d = 0$), t.y. kai:*

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \\ n & k & l \end{vmatrix} = 0$$

5

Penktoji paskaita

5.1 Antros eilės kreivės

Tarkime duotas dviejų kintamųjų polinomas:

$$F(x, y) = \sum_{i,j \in D} a_{i,j} x^i y^i. \tag{5.1}$$

Jo laipsniu (žymėsime $degF$) vadinsime skaičių $degF = max\{(i+j)|i, j \in D, a_{i,j} \neq 0\}$.

5.1.1 n-tosios eilės kreivės

Apibrėžimas 5.1.1 *Taškų aibė $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | F(x, y) = 0\}$, plokštumoje vadinama n-tosios eilės (arba n-ojo laipsnio) kreive (čia $n = degF$).*

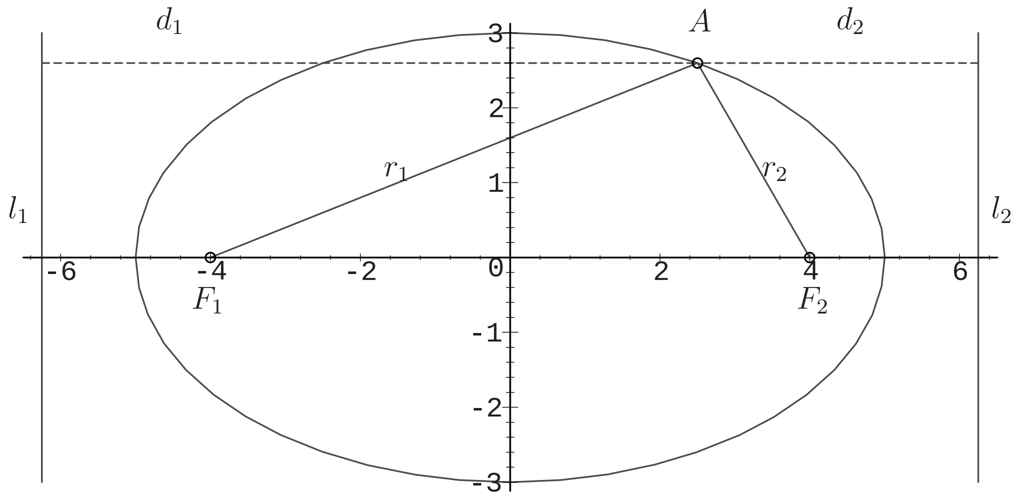
Pavyzdžiui, bendras 2-osios eilės kreivės lygties pavidalas yra:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{5.2}$$

Gali būti, kad kreivė neturi realių taškų: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 1 = 0\} \neq \oslash$. Tokia kreivė yra vadinama menama elipse (arba dar tiksliau menamu apskritimu).

Pavyzdžiai su kuriais jau susidūrėte mokykloje :
Lygties $x^2 + y^2 - 1 = 0$ sprendiniai yra apskritimas,
$y^2 = x$ parabolė,
$yx = 1$ hiperbolė.

5.1.2 Elipsė



Pav. 5.1: Elipsė ir jos direktrisės

Apibrėžimas 5.1.2 *Elipsė - tai geometrinė taškų vieta, kurių kiekvieno atstumų nuo dviejų pastovių taškų suma yra pastovi.*

Pastovius taškus žymėsime F_1 ir F_2 ir vadinsime elipsės židiniais. Bet kurio kreivės taško A atstumą nuo F_1 žymėsime r_1, nuo F_2 - r_2, r_1 ir r_2 laikysime teigiamais ir juos vadinsime spinduliais. Be to į elipsės apibrėžimą įeinančią pastovią sumą iki židinių žymėsime $2a$, todėl iš apibrėžimo gauname, kad elipė yra aibė taškų:

$$\{A \mid |AF_1| + |AF_2| = 2a \text{ } arba \text{ } r_1 + r_2 = 2a\} \tag{5.3}$$

Pastaba 5.1.3 *Atskiras elipsės atvejis yra apskritimas tada ir tik tada, kai jos židiniai sutampa.*

5.1.3 Elipsės kanoninė lygtis

Tarkime, kad F_1 ir F_2 yra ant x ašies ir vienodai nutolę nuo koordinačių pradžios. Taigi šių taškų koordinatės yra tokios: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$. Pažymėję bet kurio kreivės taško A koordinates raidėmis (x, y) randame:

$$r_1 = |F_1A| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, r_2 = |F_2A| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Taigi pagal 5.3 kreivės lygtis yra:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \tag{5.4}$$

$c < a$ pagal trikampio kraštinių savybę, kadangi dviejų kraštinių suma (lygi $2a$) yra didesnė už trečią (lygia $2c$).
Perkėlę antrąjį narį į dešinę lygybės pusę ir pakėlę visą lygtį kvadratu gauname:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

dabar šaknį perkėlę į kairę pusę, o visus kitus narius i dešinę ir suprastinę gauname:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

Pakėlę šią lygtį dar kartą kvadratu ir atitinkamai pertvarkę, gauname:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Pažymime $a^2 - c^2 = b^2$ ir šią lygtį padalinę iš a^2b^2 gauname:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5.5}$$

Gautąją lygtį vadiname **elipsės kanonine lygtimi**.

5.1.4 Elipsės parametrinė lygtis

Taško A koordinates galima išreikšti taip: $x = a\cos\varphi, y = b\sin\varphi$. Tai nesunkiai galima patikrinti įstačius užrašytas išraiškas į lygtį (5.5), kadangi $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, jeigu $\varphi \in [0; 2\pi]$.

Pagal šias koordinates sudarome sistemą:

$$\begin{cases} x &= a\cos\varphi, \\ y &= b\sin\varphi, \end{cases} \tag{5.6}$$

Gavome elipsės **parametrinę lygtį**. Ją galime išreikšti ir kitaip:

$$\begin{cases} x &= a\frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y &= b\frac{2t}{1+t^2}, \text{čia} \quad t = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{cases} \tag{5.7}$$

Taigi gavome kitokią parametrinės lygties išraišką. Norint įsitikint, kad ši parametrizacija yra elipsė reikia įsitikint , kad įstatę į lygtį (5.5) šią parametrizaciją gauname tapatybę:

$$\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = 1$$

5.1.5 Elipsės ekscentricitetas

Apibrėžimas 5.1.4 *Raide e žymėsim teigiamą skaičių $\frac{c}{a}$ ir vadinsimę jį elipės ekscentricitetu. Jis tenkina nelygybes $0 \leq e < 1$.*

Pastaba 5.1.5 *Jeigu elipsė yra apskritimas, tai jos ekscentricitetas lygus 0, nes atstumas tarp židinių lygus 0.*

5.1.6 Elipsės direktrisės

Apibrėžimas 5.1.6 *tiesės $l_1 : a + ex = 0$ ir $l_2 : a - ex = 0$ yra vadinamos elipsės direktrisėmis.*

Pažymėkime raide d_i atstumą nuo elipsės taško $A(x, y)$ iki direktrisės l_i , $i = 1, 2$. Jis yra lygus:

$$d_1 = d(A, l_1) = \left|\frac{a + ex}{e}\right| = |a/e + x| = a/e + x, \tag{5.8}$$

$$d_2 = d(A, l_2) = \left|\frac{a - ex}{e}\right| = |a/e - x| = a/e - x, \tag{5.9}$$

čia moduli galima nuimti, kadangi $-a \leq x \leq a$. Atstumą nuo A iki židinio F_1 pažymėję r_1 ir atitinkamai iki F_2 - r_2 gauname:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e \tag{5.10}$$

Šią lygybę galima patikrinti patikrinus štai tokią lygybę:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{c}{a}$$

arba

$$\frac{\sqrt{(x + c)^2 + y^2}}{\left|a + x\frac{c}{a}\right|} = 1.$$

Pakėlę kvadratu ir suprastinę šia lygybę gausime elipsės kanoninę lygtį (kiekvienas patikrina savarankiškai).

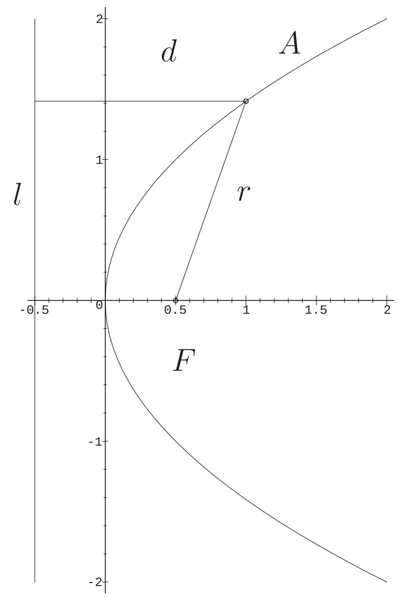
Išvada 5.1.7 *Taškai, kurių atstumų santykiai nuo taško ir nuo tiesės yra lygūs ekscentricitetui* $1 > e \geq 0$ *sudaro elipsę. Šitą elipsę (aibę taškų) galime užrašyti taip:*

$$\left\{A \mid \frac{d(F_1, A)}{d(l_1, A)} = e < 1\right\} \tag{5.11}$$

Išvada galima naudoti kaip kitą ekvivalentų elipsės apibėžią.

5.1.7 Parabolė

Apibrėžimas 5.1.8 Parabolė *yra geometrinė aibė taškų, kurių kiekvieno atstumai nuo pastovaus taško ir pastovios tiesės yra lygūs.*



Pav. 5.2: Parabolė ir jos direktrisė

Pastovų taška vadinsime parabolės židiniu ir žymėsime F, pastovią tiesę vadinsime parobolės direktrise. Kitaip formuluojant parabolė yra antros eilės kreivė, kurios ekscentricitetas lygus vienetui.

Taigi parabolė yra aibė taškų: $\{A \mid d(l,A) = d(F,A)\}$. Pažymėkime, $d = d(l,A), r = d(F,A)$. Tarkime židinio koordinatės $F(c,0)$, direktrisės lygtis: $l : x + c = 0$, bet kurio taško $A(x,y)$ atstumas nuo židinio F, kurį žymime r, lygus $r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Taigi iš parabolės apibrėžimo gauname, kad $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |x + c|$. Pakėlę lygtį kvadratu ir suprastinę, gauname: $y^2 = 4cx$. Pažymėkime $p = 2c$. Tada lygtis

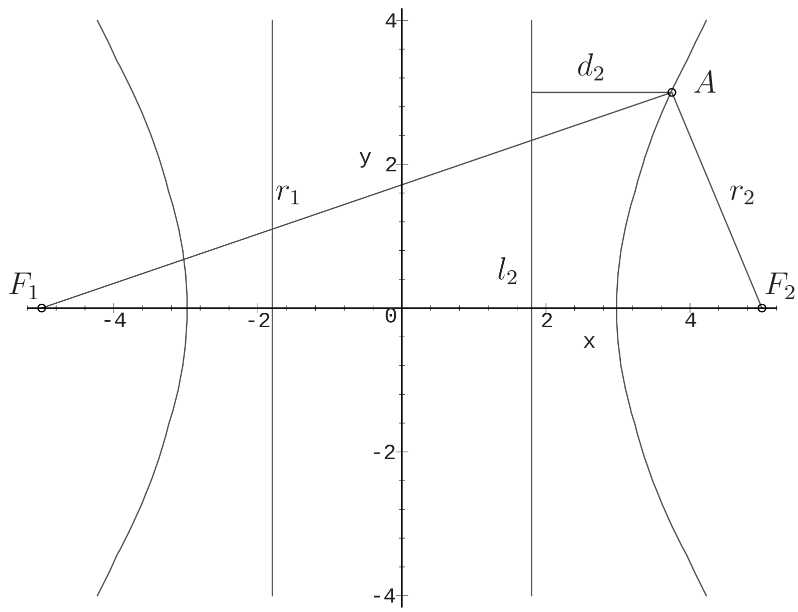
$$y^2 = 2p \tag{5.12}$$

yra vadinama parabolės kanonine lygtimi, p vadinamas parabolės parametru. Parametro geometrinė prasmė yra: atstumas tarp parabolės viršūnės ir židinio lygus $p/2$.

5.1.8 Hiperbolė

Apibrėžimas 5.1.9 Hiperbole *vadiname geometrinę vietą taškų, kurių kiekvieno atstumo nuo pastovaus taško ir atstumo nuo fiksuotos tiesės santykis lygus konstantai* *(kuri vadinama hiperbolės ekscentricitetu) didesnei už vienetą.*

Taigi hiperbolę galime užrašyti sekančiu būdu:



Pav. 5.3: Hiperbolė ir jos direktrisės

$$\left\{A \mid \frac{d(F_2, A)}{d(l_2, A)} = e > 1\right\} \tag{5.13}$$

Analogiškai kaip ir elipsės atveju gauname kanoninę hiperbolės lygtį. Tarkime židinio koordinatės $F_2(c, 0)$, o direktrisės lygtis: $l_2 : ex - a = 0$, čia nežinomieji a, e, c tenkina sąryšį $ae = c$. Bet kurio taško $A(x, y)$ atstumas iki židinio F_2, kurį žymime r_2, lygus $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Taigi iš hiperbolės apibrėžimo gauname, kad $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |ex - a|$. Pakėlę lygtį kvadratu, pasinaudoje sąryšiu $ae = c$ ir suprastinę, gauname hiperbolės kanoninę lygtį :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5.14}$$

čia $a^2+b^2=c^2$ (atkreipsiu dėmesį, kad elipsės atveju buvo kitaip $a^2=b^2+c^2$). Skaičiai a, b vadianami realiuju ir menamu hiperbolės pusašiais. Jeigu lygtyje (5.14) $y=0$, tai $x=\pm a$.

Apibrėžimas 5.1.10 *Sujungtine hiperbole vadinsime aibę taškų tenkinančių lygtį:*

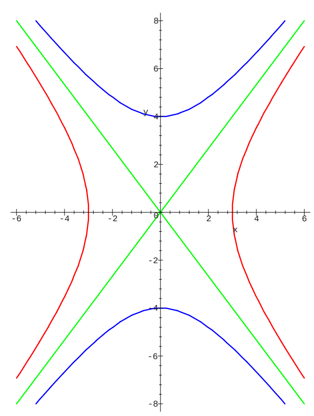
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1. \tag{5.15}$$

Jeigu lygtyje (5.15) $x=0$, tai $y=\pm b$.

Apibrėžimas 5.1.11 *Hiperbolės asimtotėmis vadinsime tieses:*

$$\begin{aligned} t_1 &: \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0, \\ t_2 &: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Asimptote yra tokia tiesę, kuri liečia antros eilės kreivę (hiperbolę) be galo nutolusiame taške (tikslesnis žodžių "liečia", "be galo nutolusiame taške" vartojimas bus paaiškintas vėliau). Atstumas tarp asimtotės ir hiperbolės vis mažėja, kai hiperbolės šakos artėja į begalybę.



Pav. 5.4: Hiperbolė (y ašies nekerta, nupiešta raudonai), jos asimptoės ir sujungtinė hiperbolė (x ašies nekerta, nupiešta mėlynai)

6

Šeštoji paskaita

6.1 Hiperbolė

Teorema 6.1.1 *Tarkime, kad taškas* $A(x, y)$ *priklauso hiperbolei (5.14). Pažymėkime atstumus tarp taško* A *ir hiperbolės asimptočių* t_1, t_2 *(apibrėžtų lygtimis (5.16))* $d(A, t_1)$ *ir* $d(A, t_2)$*. Tada*

$$d(A, t_i) = |t_i(A)| / \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}, \ i = 1, 2; \quad d(A, t_1) d(A, t_2) = 1 / \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right),$$

čia $t_i(A), \ i = 1, 2$ *yra skaičius gautas įstačius taško* A *koordinates į asimptočių* $t_i, \ i = 1, 2$ *lygtis. Taip pat*

$$\lim_{xy \to \infty} d(A, t_2) = 0, \ \lim_{xy \to -\infty} d(A, t_1) = 0,$$

t.y. atstumas tarp asimtotės ir hiperbolės vis mažėja, kai hiperbolės šakos artėja į begalybę.

Įrodymas: Atstumas tarp tiesės t_1 (t_2) ir taško A yra skačiuojamas pagal formulę (2.7)

$$d(A, t_1) = \left| \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right| / \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = t_1(A) / \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \tag{6.1}$$

$$d(A, t_2) = \left| \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right| / \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = t_2(A) / \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \tag{6.2}$$

Sudauginę tas lygybes mes gausime

$$d(A,t_1)d(A,t_2) = \left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|\left|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right| / \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right) = \tag{6.3}$$

$$1/\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right), \tag{6.4}$$

nes taškas $A(x,y)$ priklauso hiperbolei (5.14), t.y. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Lygybės (6.1.1) seka iš lygybių (6.1), (6.2). Atkreipsiu dėmesį, kad užrašas $xy \to \infty$ reiškia, kad $x, y > 0$ arba $x, y < 0$, t.y. hiperbolės taškas $A(x,y)$ yra pirmame arba trečiame ketvirtyje. $\odot$

6.1.1 Kitoks hiperbolės apibrėžimas

Apskaičiuokime atstumą r_1 nuo taško $A(x;y)$ priklausančio hiperbolei

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

iki taško $F_1(-c;0)$ (kuris, kaip vėliau paaiškės, turi pilną teisę vadintis kitu hiperbolės židiniu):

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{x^2+2cx+c^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2} = \left|a+\frac{c}{a}x\right| = |a+ex|.$$

Panašiai rastume ir atstumą r_2 nuo tos hiperbolės židinio $F_2(c;0)$ iki taško $A(x;y)$ ant hiperbolės (kas jau buvo panauduota išvedant kanoninę hiperbolės lygtį):

$$r_2 = \left|a-\frac{c}{a}x\right| = |a-ex|.$$

Iš hiperbolės lygties išplaukia, kad $x^2 \geq a^2$, todėl galimi du atvejai:

1) $x \leq -a$. Tada

$$\frac{c}{a}x \leq -c, \quad a+\frac{c}{a}x \leq a-c < 0,$$

todėl

$$r_1 = -\left(a + \frac{c}{a}x\right).$$

Taip pat šiuo atveju gauname, kad

$$-\frac{c}{a}x \geq c, \Rightarrow \quad a - \frac{c}{a}x \geq a + c > 0,$$

todėl

$$r_2 = a - \frac{c}{a}x,$$

t.y. $r_2 - r_1 = 2a$.

2) $x \geq a$. Tada

$$\frac{c}{a}x \geq c, \quad a + \frac{c}{a}x \geq a + c > 0,$$

todėl

$$r_1 = a + \frac{c}{a}x.$$

Šiuo atveju matome, kad

$$-\frac{c}{a}x \leq -c, \quad \Rightarrow \quad a - \frac{c}{a}x \leq a - c < 0,$$

tai

$$r_2 = -\left(a - \frac{c}{a}x\right),$$

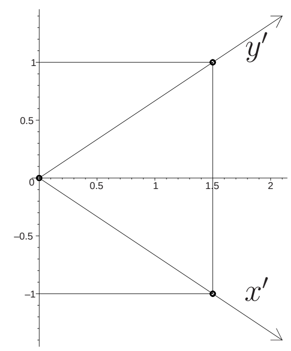
t.y. $r_1 - r_2 = 2a$.

Šiuos atvejus galime sujungti į vieną: kad ir kuris hiperbolės taškas būtų, $|r_1 - r_2| = 2a$. Taigi, įrodėme šitokią hiperbolės savybę: **hiperbolės kiekvieno taško atstumų nuo dviejų pastovių taškų, vadinamų hiperbolės židiniais, skirtumo modulis pastovus.** Kartais pasinaudojus šia savybe yra apibrėžiama hiperbolė. Tai yra ekvivalentus jos apibrėžimas. Tada jos kanoninę lygtį gautume panašiai kaip elipsės atveju.

6.1.2 Asimptotinė hiperbolės lygtis

Apibrėžimas 6.1.2 Asimptotine hiperbolės lygtimi *vadinama hiperbolės lygtis koordinačių sistemoje, kurios ašys yra tos hiperbolės asimptotės (jos nevisada yra statmenos).*

Naująsias koordinačių ašis parinkę taip, kaip parodyta paveiksle, randame tų ašių vienetinius vekrorius (jie nėra vienas kitam statmeni):



Pav. 6.1: Koordinačių ašys,vienetiniai vektoriai

Ašies Ox' vienetinis vektorius yra:

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a;-b) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}e_1 + \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}e_2.$$

Ašies Oy' vienetinis vektorius yra:

$$e_2' = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a;b) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}e_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}e_2.$$

Tarkime, kad taškas $A = (x,y)_e = xe_1 + ye_2 = x'e_1' + y'e_2' = (x',y')_{e'}$. Dabar jau nesunku matyti, kad koordinačių trasformacijos formulės yra:

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x' + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y',$$

$$y = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x' + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y',$$

t.y.

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}(x' + y'),$$

$$y = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(-x' + y').$$

Šias x ir y išraiškas įrašę į kanoninę hiperbolės lygtį ir ją pertvarkę gaunamę asimptotinę hiperbolės lygtį:

$$x'y' = \frac{a^2+b^2}{4}$$

Dažnai asimtotinė hiperbolės lygtis užrašoma šitaip: $xy = k$ Iš jos turime: $x = \frac{k}{y}$, o iš čia aiškėja, kad mokykliniame kurse minėta hiperbolė (atvirkščiojo proporcingumo grafikas) yra čia nagrinėjamų hiperbolių atskiras atvejis (lygiaašė hiperbolė t.y. hiperbolė kurios asimptotės viena kitai statmenos).

7

Septintoji paskaita

7.1 Antros eilės kreivės

7.1.1 Bendroji antros eilės kreivės lygtis

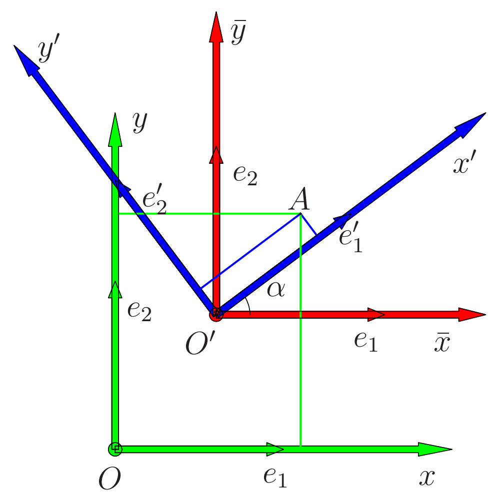
Kaip jau žinome **antros eilės kreivės bendroji lygtis** atrodo taip:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \tag{7.1}$$

Mūsų tikslas yra išsiaiškinti, kokia geometrinę aibę apibrėžia antros eilės kreivė $C = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$. Tai bus nesunku padaryti suradus paprastesnę kreivės C lygtį. Lygtis (7.1) keisis, jeigu mes pereisime prie kitos koordinačių sistemos.

7.1.2 Stačiakampės Dekarto koordinačių transformacijos

Dabar užrašysime dekarto koordinačių transformacijas, t.y. formules, kaip skaičiuoti to paties taško koordinates skirtingose koordinačių sistemose. Koordinačių sistema yra būdas vienareikšmiškai nusakantis kiekvieno taško koordinates. Stačiakampę Dekarto koordinačių sistema s plokštumoje apibrėžia trejetas $s = (O, e_1, e_2)$, čia O yra koordinačių pradžios taškas; $e = \{e_1, e_2\}$ yra statmeni vienetiniai vektoriai sudarantys dešininės orientacijos bazę. Tada kiekvienas taškas A turi koordinates $(x, y)_s$ tokias pat kaip ir vektorius AO, t.y. skaičiai x, y apibrėžti pagal formulę $AO = A - O = xe_1 + ye_2$. Jeigu aišku kokia koordinačių sistema $s = (O, e_1, e_2)$ naudojama, tai pažymejime $(x, y)_s$ indeksas s gali būti praleistas.



Pav. 7.1: Stačiakampės Dekarto koordinačių sistemos transformacijos

Nesunkiai matosi, kad kiekviena stačiakampę Dekarto koordinačių sistemos transformacija iš senos koordinačių sistemos $s = (O, e_1, e_2)$ į naują koordinačių sistemą $s' = (O', e_1', e_2')$ susideda iš postūmio į tašką $O' = (x_0, y_0)$ ir posūkio kampu α (žr. Pav. 7.1). Tarkime taškas A turi koordinates $(x, y)_s$ pradinėje koordinačių sistemoje $s = (O, e_1, e_2)$, t.y. $AO = xe_1 + ye_2$, čia e_1 (*atitin.* e_2) yra vienetinis vektorius ašyje x (*atitin.* y). Tas pats taškas turi kitas koordinates $A = (\bar{x}, \bar{y})_{\bar{s}}$ pastumtoje koordinačiu sistemoje $\bar{s} = (O', e_1, e_2)$, t.y. $AO' = (\bar{x}, \bar{y})_{\bar{s}} = \bar{x}e_1 + \bar{y}\bar{e}_2$. Kadangi $AO = AO' + O'O = \bar{x}e_1 + \bar{y}e_2 + x_0e_1 + y_0e_2$ nesunkiai gauname, kad

$$x = \bar{x} + x_0 \quad y = \bar{y} + y_0. \tag{7.2}$$

Dabar rasime taško $A = (x', y')_{s'}$ koordinates pasuktoje koordinačių sistemoje. Nesunkiai matosi, kad

$$e_1' = \quad \cos\alpha \; e_1 + \sin\alpha \; e_2, \tag{7.3}$$

$$e_2' = -\sin\alpha \; e_1 + \cos\alpha \; e_2. \tag{7.4}$$

Taigi

$$\begin{aligned} AO' &= (x', y')_{s'} = x'e_1' + y'e_2' \\ &= x'(\ \ \cos\alpha\ e_1 + \sin\alpha\ e_2) + y'(-\sin\alpha\ e_1 + \cos\alpha\ e_2) \\ &= (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)e_1 + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)e_2 \\ &= \bar{x}e_1 + \bar{y}e_2 = (\bar{x}, \bar{y})_{\bar{s}} = AO'. \end{aligned}$$

Gauname transformaciju formules

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + x_0 = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y &= \bar{y} + y_0 = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Atkreipsiu dėmesį, kad transformaciju formulės nepriklauso nuo to ką pirmiau atliksime postūmį į tašką O' ar posūkį kampu α.

Formules (7.5) patogu užrašyti matricinėje formoje $\mathbb{X} = C\mathbb{X}'$ čia

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

Matrica C galima užrašyti kaip dviejų kitų sandaugą LP, pirma atitinka lygiagretų postūmį, antra atitinka posūkį.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

7.1.3 Kreivės lygties prastinimas

Mūsų tikslas šiame skyrelyje bus kreivės lygties $F(x, y) = 0$ (žr. 7.1) prastinimas. Atlikdami koordinačių sistemos pakeitimus mes sieksime, kad lygtyje išnyktų koeficientai prie narių xy, x, y. Pradžioje patogu panaikinti koeficienta prie xy. Tai galima padaryti pasukus koordinačių sistema.

Posūkis Padarykime koordinačių sistemos posūkį:

$$x = x'\cos\alpha\ - y'\sin\alpha \tag{7.8}$$

$$y = x'\sin\alpha\ + y'\cos\alpha \tag{7.9}$$

Tada pasikeis kreivės $C = \{(x,y) \mid F(x,y) = 0\}$ lygtis ji bus $F'(x',y') = 0$ (pati kreivė nesikeičia). Ją nesunkiai rasime

$$\begin{aligned} & F(x,y) = F(\cos\alpha\ x' - \sin\alpha\ y', \sin\alpha\ x' + \cos\alpha\ y') \\ = F'(x',y') = & \ a_{11}(\cos\alpha\ x' - \sin\alpha\ y')^2 + 2a_{12}(\cos\alpha\ x' - \sin\alpha\ y')(\sin\alpha\ x' + \cos\alpha\ y') \\ + a_{22}(\sin\alpha\ x' + \cos\alpha\ y')^2 & + 2a_{13}(\cos\alpha\ x' - \sin\alpha\ y') + 2a_{23}(\sin\alpha\ x' + \cos\alpha\ y') + a_{33} \\ & = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} \end{aligned}$$

Čia nesunkiai randame

$$a'_{12} = -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha \tag{7.10}$$

Koeficientas $a'_{12} = 0$ tada ir tik tada kai

$$-a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha = 0. \tag{7.11}$$

Šioje lygtyje $\cos\alpha \neq 0$, nes priešingu atveju gautume, kad $\sin\alpha = 0$ (priminsiu $a_{12} \neq 0$). Taigi lygtį galima padalinti iš $\cos\alpha$. Gauname

$$a_{12}\tan^2\alpha + (a_{11} - a_{22})\tan\alpha - a_{12} = 0 \tag{7.12}$$

išsprendę randame

$$\tan\alpha = \frac{a_{11} - a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{-2a_{12}^2} \tag{7.13}$$

Kadangi diskriminantas teigiamas tai visada yra du sprendinai $(\tan\alpha)_1$ ir $(\tan\alpha)_2$. Kiekvienas sprendinys atitinka tiesę, kuri sudaro $(\tan\alpha)_1$ (arba $(\tan\alpha)_2$) kampą su Ox ašimi. Beje, pagal Vieto teoremą, $(\tan\alpha)_1(\tan\alpha)_2 = -1$, t.y. atitinkančios tiesės yra statmenos. Norint, kad $a'_{12} = 0$ galima imti bet kokį sprendinį.

Postūmis Dabar laikysime, kad po posūkio lygtis yra paprastesnė

$$F'(x',y') = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \tag{7.14}$$

Galimi du atvejai:

1. $a'_{11}a'_{22} \neq 0$ arba
2. vienas iš koeficientu a'_{11}, a'_{22} lygus nuliui.

Pirmu atveju išskiriame pilnus kvadratus, t.y.

$$F'(x',y') = a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 + a'_{22}\left(y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)^2 + a'_{33} - \frac{a'^2_{13}}{a'_{11}} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{22}} \tag{7.15}$$

$$= a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a''_{33}, \tag{7.16}$$

čia x'', y'' yra pastumtos naujos koordinatės

$$x'' = x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}, \qquad y'' = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}. \tag{7.17}$$

Nesunku matyti, kad lygties $a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 + a''_{33} = 0$ sprendiniai apibrėžia

- Elipsę, jeigu $\frac{a'_{11}}{a''_{33}} < 0, \frac{a'_{22}}{a''_{33}} < 0$ ir $a''_{33} \neq 0$.
- Tuščią aibę (menamą elipę), jeigu $\frac{a'_{11}}{a''_{33}} > 0, \frac{a'_{22}}{a''_{33}} > 0$ ir $a''_{33} \neq 0$.
- Vieną tašką, jeigu $a'_{11}a'_{22} > 0$ ir $a''_{33} = 0$.
- Hiperbolę, jeigu $a'_{11}a'_{22} < 0$ ir $a''_{33} \neq 0$.
- Dvi susikertančias tieses, jeigu $a'_{11}a'_{22} < 0$ ir $a''_{33} = 0$.

Antru atveju vienas iš koeficientų a'_{11}, a'_{22} lygus nuliui. Dėl konkretumo laikysyme, kad $a'_{11} = 0$. Tada sutraukiame pilną kvadratą prie y', t.y.

$$F'(x',y') = a'_{22}\left(y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)^2 + 2a'_{13}x' + a'_{33} - \frac{a'^2_{23}}{a'_{22}} \tag{7.18}$$

$$= a'_{22}y''^2 + 2a'_{13}x' + a''_{33} = \begin{cases} a'_{22}y''^2 + 2a'_{13}(x' + \frac{a''_{33}}{2a'_{13}}), \text{ kai } a'_{13} \neq 0 \\ a'_{22}y''^2 + a''_{33}, \text{ kai } a'_{13} = 0 \end{cases} \tag{7.19}$$

čia x'', y'' yra pastumtos naujos koordinatės

$$x'' = x' + \frac{a''_{33}}{2a'_{13}}, \qquad y'' = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}} \quad (\text{arba } x'' = x' \text{ kai } a'_{13} = 0). \tag{7.20}$$

Nesunku matyti, kad lygties $a'_{22}y''^2 + 2a'_{13}x' + a''_{33} = 0$ sprendiniai apibrėžia

- Parabolę, jeigu $a'_{13} \neq 0$.

- Tuščią aibę (dvi menamas lygiagrečias tieses), jeigu $a'_{13} = 0$ ir $a'_{22}a''_{33} > 0$.
- Dvi lygiagrečias tieses, jeigu $a'_{13} = 0$ ir $a'_{22}a''_{33} < 0$.
- Vieną dvigubą tiesę (t.y. kreivės lygtis yra tiesės lygtis pakelta kvadratu), jeigu $a'_{13} = 0$ ir $a''_{33} = 0$.

8

Aštuntoji paskaita

8.1 Antros eilės kreivės

8.1.1 Invariantai

Apibrėžimas 8.1.1 *Antros eilės kreivės kooficientų funkcija vadinama* **invariantu**, *jeigu ji nesikeičia atlikus dekartinę koordinačių transformaciją (atlikus koordinačių sistemos posūkį ir postūmį)*

Pasirodo (įrodysime vėliau), antros eilės kreivė turi tris pagrindinius invariantus:
1)

$$I_1 = a_{11} + a_{22}$$

2)

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}$$

3)

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{12}a_{22}a_{23} \\ a_{13}a_{23}a_{33} \end{vmatrix}$$

Galima įrodyti, kad visi kiti (algebriniai) invariantai gali būti gauti taip $f(I_1, I_2, I_3)$, čia f yra bet kokia (algebrinė) funkcija.

8.1.2 Kreivės nustatymo lentelė

Invariantai yra svarbūs dėl sekančios priežasties: pagal juos galima nustatyti kokia geometrinę aibę apibrėžia duota kreivė. Tai matyti sekančioje lentelėje:

	I_1	I_2	I_3	kiti požymiai
Menamoji elipsė, pvz. $x^2+y^2+1=0$	$\neq 0$	>0	$\neq 0$	$I_1I_3>0$
Realioji elipsė, pvz. $x^2+y^2-1=0$	$\neq 0$	>0	$\neq 0$	$I_1I_3<0$
Hiperbolė		<0	$\neq 0$	
Parabolė		$=0$	$\neq 0$	
Dvi susikertančios tiesės		<0	$=0$	
Dviguba tiesė, lygtis $(ax+by+c)^2$	$\neq 0$	$=0$	$=0$	
Dvi lygiagrečios tiesės	$\neq 0$	$=0$	$=0$	
Vienas taškas, pvz. $x^2+y^2=0$		>0	$=0$	

Toliau pradžioje įrodysime, kad I_3, I_2, I_1 yra invariantai. Po to paaiškinsime, kodėl yra teisingi lentelėje surašyti faktai.

Antros eilės kreivės lygtį galima užrašyti tokiu būdu:

$$F(x,y) \quad = \quad \mathbf{X}A\mathbf{X}^T, \tag{8.1}$$

čia $\mathbf{X}=(x,y,1), \mathbf{X}^T$ reiškia transponuotą matricą (t.y. stulpelį), A yra simetrinė matrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{12}a_{22}a_{23} \\ a_{13}a_{23}a_{33} \end{pmatrix} \; t.y. \; A = A^T.$$

Lygybę (8.1) nesunkiai galite patikrinti patys įstatę ir sudauginę nurodytas matricas. Priminsiu (paskaita 7), kad kiekvieną dekartinės stačiakampės koordinačių sistemos transformaciją galima užrašyti tokiu būdu:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

Jeigu $\mathbf{X}=(x,y,1)$ atitinka senas koordinates, $\mathbf{X}'=(x',y',1)$ - naujas koordinates, tada $\mathbf{X}=\mathbf{X}'M$, čia

$$M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jeigu lyginti su formulėmis (7.6) iš paskaitos 7, tai $\mathbb{X} = \mathbf{X}^T, M = C^T$.

$$F(x,y) = \mathbf{X}A\mathbf{X}^T = \mathbf{X}'MA(\mathbf{X}'M)^T = \mathbf{X}'MAM^T\mathbf{X}'^T = \mathbf{X}'A'\mathbf{X}'^T.$$

Kadangi $det\, M = 1$, gauname

$$det\, A' = det\, M \cdot det\, A \cdot det\, M^T = det\, A. \tag{8.2}$$

Išvada 8.1.2 *I_3 yra invariantas.*

Įrodymas: Remiantis lygybe (8.2) ir apibrėžimu

$$I_3 = det\, A = det\, A'.$$

Taigi I_3 nepriklauso nuo dekarto koordinačių transformacijų. ⊙

Pažymėkime A_2 (atitinkamai A_2', M_2) matricą, kuri gauta iš matricos A (atitinkamai A', M) išbraukus paskutinę eilutę ir paskutinį stulpelį.

Tada nesunku patikrinti, kad

$$A_2' = M_2 A_2 M_2^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

Kitaip tariant atliekant dekarto transformacijas kreivės kvadratinė dalis (koeficientai a_{11}, a_{12}, a_{22}) priklauso tik nuo posūkio ir visiškai nepriklauso nuo postūmio.

Išvada 8.1.3 *I_2 yra invariantas.*

Įrodymas: Remiantis lygybe (8.3) ir apibrėžimu

$$I_2 = det\, A_2 = det\, A_2', \text{ nes } det\, M_2 = 1$$

Taigi I_2 nepriklauso nuo dekarto koordinačių transformacijų. ⊙

Išvada 8.1.4 *I_1 yra invariantas.*

Įrodymas: Naudojantis lygtimi (8.3) galime rasti

$$\begin{aligned} a'_{11} &= \cos\alpha(\ \ a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha) + \sin\alpha(\ \ a_{12}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha) \\ a'_{22} &= -\sin\alpha(-a_{11}\sin\alpha + a_{12}\cos\alpha) + \cos\alpha(-a_{12}\sin\alpha + a_{22}\cos\alpha) \end{aligned}$$

Taigi $a'_{11} + a'_{22} = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(a_{11} + a_{22}) = a_{11} + a_{22}$. ⊙

Dabar jau nesunku paaiškinti lentelės atsiradimą. Prastindami lygtį mes keitėme koordinačių sistemą ir suvedėme lygtį į vieną iš formų:

$$1)\ F(x,y) = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33},\ \text{elipsė reali (menama) arba hiperbolė} \tag{8.4}$$
$$2)\ F(x,y) = a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x',\ \text{parabolė} \tag{8.5}$$
$$3)\ F(x,y) = a'_{22}y'^2 + a'_{33},\ \text{dvi lygiagrečios tiesės galbūt sutampančios} \tag{8.6}$$
$$4)\ F(x,y) = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2,\ \text{dvi susikertančios tiesės arba vienas taškas} \tag{8.7}$$

Kadangi dabar jau žinome, kad invariantai nesikeičia jeigu atliekame dekarto koordinačių transformacijas tai jie bus tokie patys kaip ir suskačiuoti formoms esančioms dešinėje. Juos lengvai suskaičiuti

$$1)\ I_1 = a'_{11} + a'_{22},\ I_2 = a'_{11}a'_{22},\ I_3 = a'_{11}a'_{22}a'_{33} \tag{8.8}$$
$$2)\ I_1 = a'_{22},\ I_2 = 0,\ I_3 = -a'^2_{13}a'_{22} \tag{8.9}$$
$$3)\ I_1 = a'_{22},\ I_2 = 0,\ I_3 = 0 \tag{8.10}$$
$$4)\ I_1 = a'_{11} + a'_{22},\ I_2 = a'_{11}a'_{22},\ I_3 = 0 \tag{8.11}$$

Išvada 8.1.5 *Koeficientai a'_{11}, a'_{22} yra šaknys* **charakteringosios lygties**, *kuri pagal apibrėžimą lygi:*

$$\lambda^2 - \lambda I_1 + I_2 = 0 \tag{8.12}$$

Taip pat $a'_{33} = I_3/I_2$, jeigu $I_2 \neq 0$.

Įrodymas: Kadangi $I_1 = a'_{11} + a'_{22}$, $I_2 = a'_{11}a'_{22}$, tai išvada seka iš Vieto teoremos. ⊙

Dabar jau galutinai aišku, kad lentelė yra sudaryta pagal invariantus apskaičiuotus formoms 1),2),3) ir 4). Tarkime reali elipsė atitnka 1) formą, kai $a'_{11}/a'_{33}, a'_{22}/a'_{33} < 0$, t.y. $I_2 > 0$ ir $I_1 I_3 < 0$. Analogiškai matosi ir kiti atvejai, kuriuos skaitytojas išsinagrinėti gali savarankiškai.

8.1.3 Vektorių skaliarinė sandauga ir antros eilės kreivės

Jeigu duota simetrinė matrica A, tai plokštumoje galima apibrėžti skaliarinę sandaugą tarp vektorių $V = (V_1, V_2)$ ir $W = (W_1, W_2)$

$$< V, W >= (V_1, V_2, 1)A \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Savybės
1)$< V, W >=< W, V >$
2)$< V, W_1 + W_2 >=< V, W_1 > + < V, W_2 >$
Atkreipsime dėmesį, kad ji gali būti išsigimusi, t.y. $< V, V >= 0$ bet $V \neq (0, 0)$.

Išvada 8.1.6 *Kiekviena antros eilės kreivė užduoda tam tikrą skaliarinę sandaugą plokštumoje.*

Priminsiu, kad algebros kurse kaip tik ir nagrinėjamos skaliarinės sandaugos, bei jų klasifikacija.

9

Devintoji paskaita

9.1 Antros eilės kreivės (antra dalis)

9.1.1 Antros eilės kreivės ir tiesės sankirta

Tarkime antros eilės kreivė užduota lygtimi:

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0$$

ir duota parametrinė tiesės lygtis:

$$\begin{cases} x &= x_0 + pt \\ y &= y_0 + qt \end{cases} \tag{9.1}$$

(p,q)- tiesės krypties vektorius
(x_0,y_0)- taškas per kurį eina tiesė
Tada įstatę tiesės lygtis į kreivės lygtį gauname:

$$F(x(t),y(t)) = Nt^2 + 2Pt + Q,$$

čia

$$\begin{aligned} Q &= F(x_0,y_0), \\ N &= a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2, \\ P &= (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})p + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})q. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Lygtis $Nt^2+2Pt+Q$ gali turėti iki dviejų skirtingų šaknų. Kai jos diskriminantas $D = 4(P^2 - NQ) > 0$, yra du bendri kreivės ir tiesės taškai. Kai $D = 0$, tie taškai sutampa, t.y., egzistuoja tik vienas bendras kartotinis taškas, kuris vadinamas kreivės lietimosi tašku, o pati tiesė vadinama liestine.

Apibrėžimas 9.1.1 *Tiese (9.1) vadinsime liečiamaja kreivei* $C = \{(x, y)|F(x, y) = 0\}$, *jeigu* $D = 4(P^2 - NQ) = 0$. *Čia* Q, N, P *apibrėžti formulėmis (9.2).*

Atkreipsiu dėmesį, jeigu tiesė ir 2-os eilės kreivė turi vieną bendrą tašką, tai dar negarantuoja, kad šita tiesė yra liestinė. Pavyzdžiui, parabolės simetrijos ašis ir parabolė kertasi viename taške; tiesė lygiagreti hiperbolės asimptotei irgi kerta hiperbole viename taške. Tačiau abi įvardintos tiesės nėra liestinės, nes susikirtimo taškas nėra kartotinis, t.y. tašką atitinkanti šaknis nėra kartotinė.

Kai $D < 0$, tiesė ir kreivė nesikerta.

9.1.2 Kreivės liestinės lygtis

Duota : $C = \{(x, y)|F(x, y) = 0\}$ (kreivė), taškas $(x_0, y_0) \in C$ priklausantis kreivei. Rasime lestinės taške lygtį. Kadangi $(x_0, y_0) \in C$, tai $Q = 0$, todėl $Nt^2 + Pt = 0$. Todėl $t = 0$ (t.y. $D = 0$) bus vienintelė lygties šaknis tada ir tik tada, kai $P = 0$. Kitaip tariant:

$$\frac{p}{q} = -\frac{a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}}{a_{12}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}}.$$

Taigi liestinės kanoninė lygtis bus:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}$$

$$\frac{x - x_0}{a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}} = \frac{y - y_0}{-(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})}$$

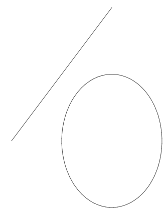
Gauname:

$$\begin{aligned}(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y - y_0)\\ = P(x_0, y_0, x - x_0, y - y_0) = 0\end{aligned}$$

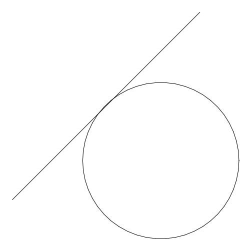
- bendroji tiesės lygtis

9.1.3 Antros eilės kreivės liestinės (kitas ekvivalentus apibrėžimas)

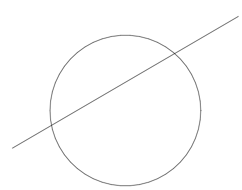
Tiesės ir kreivės padėtis plokštumoje gali atrodyti taip:



Pav. 9.1: Nekerta tada ir tik tada kai $P^2 - NQ < 0$



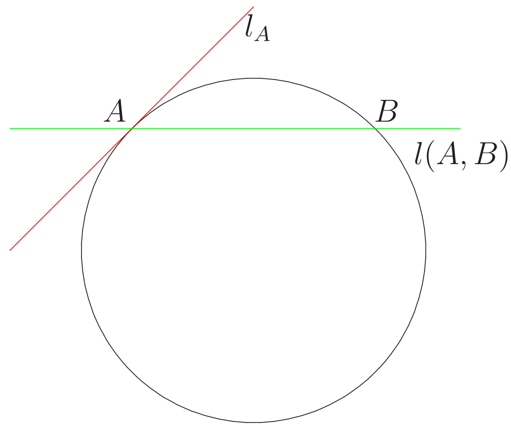
Pav. 9.2: Liečia tada ir tik tada kai $P^2 - NQ = 0$



Pav. 9.3: Kerta tada ir tik tada kai $P^2 - NQ > 0$

Apibrėžimas 9.1.2 *Tarkime, turime kreivę* $\{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} \ni (x_0, y_0) = A$. *Imkime kitą tašką* $B = (x_1, y_1) \in \{F = 0\}$. $l(A, B)$ *žymėsime tiesę, einančią per taškus* A *ir* B. *Ji vadinama kreivės kirstine. Kreivės liestinę taške* A *gausime tašką* B *artindami prie* A, *ją žymėsime* l_A, *t.y.*

$$l_A = \lim_{B \to A} l(A, B)$$



Pav. 9.4: Kirstinės (žalia) ir liestinė (raudona)

Teorema 9.1.3 *Tarkime, turime kreivę $\{F = 0\}$ ir jai priklausantį tašką $A(x_0, y_0)$. Tuomet liestinės l_A lygtį galime užrašyti taip:*

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_3(x_0, y_0) = 0. \tag{9.3}$$

Primename, kad F_1, F_2 ir F_3 gauname iš lygties

$$\begin{aligned} F(x,y) &= (x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{12}a_{22}a_{23} \\ a_{13}a_{23}a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \\ F_1 &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \\ F_2 &= a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \\ F_3 &= a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}, \end{aligned}$$

Įrodymas: Tegu $l(A,B) : \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$ - kreivės $\{F = 0\}$ kirstinė per taškus $A(x_0, y_0)$ ir $B(x_1, y_1)$. Šią tiesę užrašius $y - y_0 = \left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)(x - x_0)$, matome, kad jos krypties koeficientas lygus $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$. Artiname tašką B prie taško A, t.y., ieškome ribos

$$\lim_{(x_1,y_1)\to(x_0,y_0)} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Ji lygi $y'(x_0)$. Iš matematinės analizės kurso žinome, kad dviejų kintamųjų funkcijai $F(x,y) = 0$ egzistuoja tokia $y = \varphi(x)$, kad

1) $F(x, \varphi(x)) = 0$ x_0 taško aplinkoje,
2) $\varphi'(x_0) = -\left(\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$.
Nesunkiai matome, kad

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2F_1(x,y), \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2F_2(x,y). \end{cases}$$

Taigi l_A lygtį gauname tokią:

$$y - y_0 = -\frac{F_1(x_0,y_0)}{F_2(x_0,y_0)}(x - x_0) \text{ arba}$$
$$F_1(x_0,y_0)(x - x_0) + F_2(x_0,y_0)(y - y_0) = 0$$

Paskutinėje lygtyje atskliaudę gauname:
$F_1(x_0,y_0)x + F_2(x_0,y_0)y - F_1(x_0,y_0)x_0 - F_2(x_0,y_0)y_0 = 0$. Kadangi $-F_1x_0 - F_2y_0 = F_3(x_0,y_0)$, tai gauname reikiamą teoremos formlę. $\odot$

Remiantis teorema nesunkiai ganame:

Parabolės liestinės lygtis: Jei turime parabolę $y^2 = 2px$, $A(x_0,y_0)$ - jai priklausantis taškas, tai $l_A : yy_0 = p(x + x_0)$.

Hiperbolės liestinės lygtis: Hiperbolės $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ liestinė taške $A(x_0,y_0)$, kuris priklauso hiperbolei yra: $l_A : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Elipsės liestinės lygtis: Elipsės $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ liestinė taške $A(x_0,y_0)$, kuris priklauso elipsei yra: $l_A : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

9.1.4 Asimptotinės kryptys

Apibrėžimas 9.1.4 *Krypties vektorių (p,q) vadinsime asimptotinės krypties vektoriumi kreivei {F=0}, jei $N = 0 (N = a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2 = 0)$.*

Atkreipsime dėmesį, kad hiperbolė $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ turi dvi asimptotes, taigi ir du asimptotinės krypties vektorius. $p/a \pm q/b = 0$
Parabolė $y^2 = 2px$ turi vieną asimptotinės krypties vektorių, jo kryptis sutampa su simetrijos ašimi, t.y., parabolės asimptotinės krypties vektoriaus koordinatės $(p, 0)$. Elipsė neturi realių asimptinių krypčių.

9.1.5 Antros eilės kreivės centras

Apibrėžimas 9.1.5 *Antros eilės kreivės centru vadinsime tašką* (x_0, y_0)*, kuris tenkina abi lygtis:*

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} & = F_1(x_0, y_0) = & 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} & = F_2(x_0, y_0) = & 0. \end{cases} \tag{9.4}$$

Jeigu šita lygčių sistema neturi sprendinio, sakysime, kad kreivė neturi centro. Pavyzdžiui, centro neturi parabolė. Jei sistema turi be galo daug sprendinių, tai sakysime, kad kreivė turi be galo daug centrų, pvz., jeigu kreivė yra dvi lygiagrečios tiesės.

Nustatyti, kiek centrų turi kreivė, galime iš invarianto I_2. Vienintelį centrą kreivė turi, kai $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{12}a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. Tada centro koordinatės pagal Kramerio formules yra:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}a_{12} \\ -a_{23}a_{22} \end{vmatrix}}{I_2}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} - a_{13} \\ a_{12} - a_{23} \end{vmatrix}}{I_2}$$

Jei $I_2 = 0$, galimi du variantai:
a) $F_1 = cF_2$, t.y., lygčių koeficientai proporcingi. Tada lygčių sistema turi be galo daug sprendinių, o kreivė - be galo daug centrų.
b) $F_1 \neq cF_2, \forall c$. Tada kreivė centrų neturi.

Teorema 9.1.6 *Jei atliksime postūmį į tašką* (x_0, y_0)*, kuris yra kreivės* $\{F = 0\}$ *centras, tai išnyks koeficientai prie* x' *ir* y'*, t.y. tiesiniai kreivės nariai.*

Įrodymas: Įrodoma tiesiog įstačius reikšmes

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

į lygtį

$$\begin{aligned} F(x,y) &= xF_1(x,y) + yF_2(x,y) + F_3(x,y) \\ &= x_0F_1(x',y') + y_0F_2(x',y') + x'(a_{11}x_0 + a_{12}y_0) \\ &\quad +y'(a_{12}x_0 + a_{22}y_0) + F_3(x' + x_0, y' + y_0) \\ &= x_0F_1(x',y') + y_0F_2(x',y') + x'F_1(x_0,y_0) \\ &\quad +y'F_2(x_0,y_0) + F_3(x_0,y_0) \end{aligned}$$

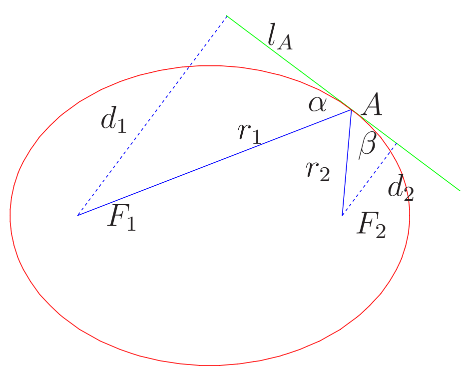
Pasinaudojus lygčių sistemą (9.4) ir gauname reikiamą rezultatą. $\odot$

10

Dešimtoji paskaita

10.1 Antros eilės kreivės(tęsinys)

10.1.1 Optinės antros eilės kreivių savybės

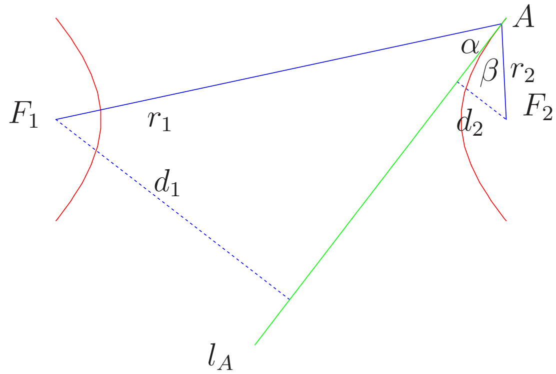


Pav. 10.1: Elipsės optinė savybė

Teorema 10.1.1 *Tarkime, turime elipsės (arba hiperbolės) kanoninę lygtį:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\textit{arba}\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1)$$

Kaip žinome, šios kreivės turi po du židinius F_1, F_2. Tegu taškas $A = (x_0, y_0)$ - taškas, priklausantis elipsei (arba hiperbolei). Tada atkarpos F_1A ir F_2A sudaro vienodus kampus su liestine.



Pav. 10.2: Hiperbolės optinė savybė

Įrodymas: Žinodami taško A koordinates, galime užrašyti liestinės lygtį:

$$l_A : \frac{xx_0}{a^2} \pm \frac{yy_0}{b^2} = 1 \text{ (+ kai elipsė; - kai hiperbolė)}$$

Kampai α ir β bus lygūs tada ir tik tada, kai lygūs santykiai $\frac{r_2}{d_2}$ ir $\frac{r_1}{d_1}$, čia $r_1 = |F_1A|, r_2 = |F_2, A|$, $d_1 = d(F_1, l_A)$, $d_2 = d(F_2, l_A)$ (atstumas tarp židinio ir liestinės). Atstumas tarp tiesės ir taško randamas pagal žinomas formules:

$$d_2 = d(F_2, l_A) = \frac{\left|-\frac{cx_0}{a^2} - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} = \frac{\left|\frac{-ex_0 - a}{a}\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}$$

Primename, kad $e = \frac{c}{a}$ - kreivės ekscentricitetas.

$$r_2 = |F_2A| = |ex_0 + a|$$

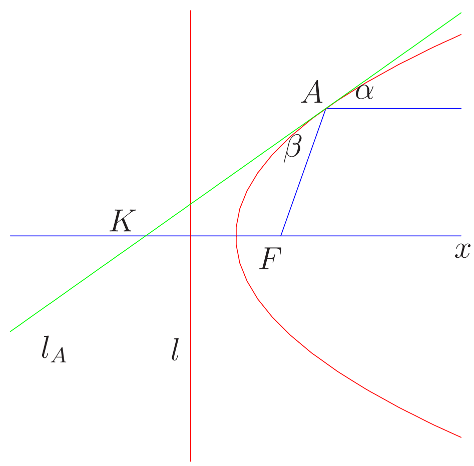
$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}$$

Analogiškai $r_1 = |ex_0 - a|$ ir

$$d_1 = \frac{\left|\frac{ex_0 - a}{a}\right|}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}$$

Matome, kad $\frac{r_2}{d_2} = \frac{r_1}{d_1}$, todėl kampai tarp liestinės ir atkarpų F_1A bei F_2A yra lygūs. $\odot$

Teorema 10.1.2 *Tarkime, turime parabolės kanoninę lygtį: $y^2 = 2px$. Tegul parabolės židinys yra F. Tarkime taškas $A = (x_0, y_0)$ priklauso parabolei. Tada kampas tarp FA ir liestinės l_A lygus kampui tarp l_A ir parabolės simetrijos ašies.*



Pav. 10.3: Parabolės optinė savybė

Įrodymas: Žinodami taško A koordinates, užrašome liestinės lygtį:

$$l_A : yy_0 = p(x + x_0)$$

Pažymėkime K tašką, kuris yra liestinės l_A ir Ox ašies susikirtimo taškas. Kampas tarp FA ir liestinės l_A lygus kampui tarp l_A ir parabolės simetrijos ašies tada ir tik tada, kai $|KF| = |FA|$. Ox ašies lygtis yra $y = 0$. Sukertę šias dvi tieses l_A ir Ox. Randame, kad $K = (-x_0, 0)$. Kadangi $|FA| = d(A, l) = \frac{p}{2} + x_0$, čia l - parabolės direktrisė, ir $|KF| = \frac{p}{2} + x_0$, gauname $|KF| = |FA|$. $\odot$

Parabolės optinės savybė yra plačiai naudojama pramonėje. Pavyzdžiui ant stogų daug parabolinių antenų. Jos priima lygiagrečiai ateinančius signalus iš kosmoso ir jie visi sueina į židinį. Taigi židinyje gaunamas pakankamai stiprus signalas.

10.2 Antros eilės paviršiai

10.2.1 Bendroji antros eilės paviršiaus lygtis

Apibrėžimas 10.2.1 *Antros eilės paviršiumi vadinsime taškų aibę* $\{(x,y,z) \mid F(x,y,z)=0\}$, *čia*

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz \\ +2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} \end{aligned}$$

Šią lygtį taip pat patogu užrašyti kaip matricų sandaugą:

$$F = (x,y,z,1)\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{12}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{13}a_{23}a_{33}a_{34} \\ a_{14}a_{24}a_{34}a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

10.2.2 Sfera

Apibrėžimas 10.2.2 *Paviršius, gaunamas sukant apskritimą aplink sukimosi ašį, vadinamas sfera. Jei sferą kirsime plokštuma, visada gausime apskritimą.*

Sferos kanoninė lygtis yra

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

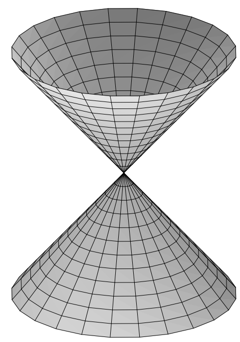
Čia $(a,b,c) = C$ - sferos centras, r - spindulys. Šią lygtį taip pat galima pertvarkyti taip:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz - r^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

Taigi, jei turime antros eilės paviršiaus lygtį, užrašytą bendruoju pavidalu, sferą atpažinsime iš to, kad joje nėra dvigubų sandaugų xy, xz, xy.

10.2.3 Kūgis

Apibrėžimas 10.2.3 *Kūgiu vadinamas paviršius, sudarytas iš tiesių, einančių per vieną tašką. Šis taškas vadinamas kūgio viršūne.*



Pav. 10.4: Kūgis

Tarkime kūgio viršūnės Dekarto koordinatės yra x_1, y_1, z_1. Vadinasi bet kurios tiesės, išvestos per tašką (x_1, y_1, z_1) lygtis yra

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \text{ arba}$$
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{m}{l} = p, \; \frac{z - z_1}{x - x_1} = \frac{n}{l} = q.$$

Tiesei judant, l, m ir n, o kartu p ir q, kinta, bet kadangi tiesė brėžia paviršių, tai p ir q turi būti susieti tam tikra funkcine priklausomybe, kuri priklauso nuo to, kokį kūgį tiesė brėžia. Jeigu ši funkcinė priklausomybė yra duota lygtimi $f(p, q) = 0$, tuomet įrašę vietoj p ir q jų reikšmes, gauname ieškomąją kūgio lygtį, išreikštą tokiu pavidalu:

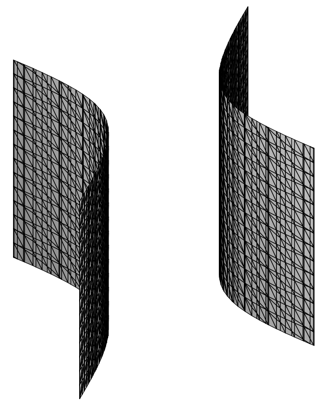
$$f\left(\frac{y - y_1}{x - x_1}, \frac{z - z_1}{x - x_1}\right) = 0$$

Jeigu kūgio viršūnė yra koordinačių pradžios taške, tai kūgio lygtis yra $f(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$.

10.2.4 Cilindras

Apibrėžimas 10.2.4 *Tiesė, judėdama erdvėje, taip kad visą laiką lieka sau lygiagreti, brėžia paviršių, kurį vadiname cilindru.*

Paimkime lygtį $f(x, y) = 0$ bei plokštumoje esančią kreivę k, kurios taškai $(x, y, 0)$ tenkina šią lygtį. Lygtį $f(x, y) = 0$ taip pat tenkina visi tie erdvės taškai, kurių pirmos



Pav. 10.5: Cilindras

dvi koordinatės x ir y sutampa su kurio nors kreivės k taško koordinatėmis. Kadangi koordinatė z į lygtį neįeina, tai jos skaitinė reikšmė įtakos neturi. Todėl taškas (x, y, z), tenkinantis $f(x, y) = 0$, yra tiesėje, lygiagrečioje ašiai z ir kertančia kreivę k. Taigi visi taškai (x, y, z), tenkinantys lygtį $f(x, y) = 0$ yra paviršiuje (jis vadinamas cilindru), kurį sudaro tiesės, lygiagrečios z ašiai ir kertančios kreivę k.

Cilindrinį paviršių nubrėžia judanti tiesė, kai ši visa laiką lieka lygiagreti kuriai nors duotai tiesei ir kerta duotą kreivę. Ši tiesė vadinama *vedamąja*, o judančios tiesės atskiros padėtys - *sudaromosiomis*.

Cilindrą dar galima apibrėžti taip:

$$\begin{cases} x = my + a, \\ z = ny + b, \end{cases}$$

Čia (m,n) - konstanta.

Atitinkama parametrinė cilindro užrašymo forma:

$$\begin{cases} x = mt + a, \\ y = t, \\ z = nt + b. \end{cases}$$

Iš čia matome, kad vedamosios tiesės krypties vektoriaus koordinatės yra $(m, 1, n)$. Jei $F(a, b) = 0$, tai cilindro lygtis $F(x - my, z - ny) = 0$.

Cilindrą galima nesunkiai supainioti su kreive, kadangi jo lygtyje nėra vieno kintamojo. Pavyzdžiui, lygtis $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ gali būti elipsės, bet taip pat ir cilindro lygtis. Šiuo atveju z gali būti bet koks. Jeigu z fiksuotas, paviršiui priklauso visa kreivė, t.y., pastumtas cilindro "dugnas" -elipsė.

10.2.5 Sukimosi paviršiai

Apibrėžimas 10.2.5 *Sukimosi paviršiumi vadiname paviršių, kurį gauname, sukdami kreivę aplinkt tiesę - sukimosi ašį.*

Kiekvienas sukamos kreivės taškas brėžia apskritimą, kurio plokštuma yra statmena sukimosi ašiai ir kurio spindulys yra lygus taško atstumui iki sukimosi ašies. Tarkime, kreivė k duota xy plokštumoje lygtimi $f(x,y) = 0$, sukama apie y ašį. Norėdami išvesti šio sukimosi paviršiaus lygtį, imkime bet kurį jo tašką $M(x,y,z)$. Šis taškas yra apskritime, kurį brėžia atitinkamas kreivės taškas $N(X,Y,0)$, besisukdamas apie y ašį. Kadangi $C(0,Y,0)$ yra to apskritimo centras, tai:

$$|CM| = |CN| \quad \text{taigi} \sqrt{x^2+z^2} = X$$

Be to, pastarasis apskritimas yra plokštumoje, statmenoje y ašiai, todėl $Y = y$. Gautas X ir Y išraiškas panaudojame lygtyje $f(X,Y) = 0$. Gauname

$$f(\sqrt{x^2+z^2}, y)$$

Šią lygtį tenkina visi sukimosi paviršiaus taškai $M(x,y,z)$. Vadinasi ji ir yra minėto paviršiaus lygtis.

Pavyzdys 10.2.6 *Sukime tiesę* $2z + 3y - 1 = 0$ *apie* z *ašį. Gausime paviršių, kurio lygtis*

$$2z + 3\sqrt{y^2+x^2} - 1 = 0,$$

t.y., kūgį, kurio lygtis $(2z-1)^2 = 9(y^2+x^2)$

Sukimosi elipsoidas. Šis paviršius gaunamas sukant elipsę aplink vieną iš jos ašių. Sukdami elipsę $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0, a^2 > b^2$ aplink elipsės didžiąją ašį (t.y. x ašį), gauname paviršių

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1, \tag{10.1}$$

kurį vadiname ištęstu sukimosi elipsoidu. Sukdami tą pačią elipsę aplink y ašį (elipsės mažąją ašį), gauname paviršių

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kurį vadiname suplotu sukimosi elipsoidu.

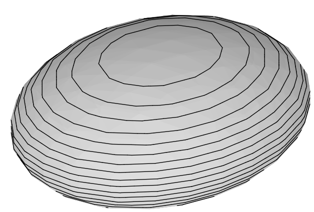
Apibrėžimas 10.2.7 *Elipsoido kanonine lygtimi yra vadinama sekanti lygtis*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{10.2}$$

Kuo skiriasi sukimosi elipsoidas, kurio lygtis (10.1), ir bendresnis kanoninis elipsoidas? Geometriškai (topologiškai) jų forma yra ta pati. Iš sukimosi elipsoido galime gauti bedrą kanoninį elipsoidą atlikus sekančią erdvės transformaciją:

$$x = X, \quad y = Y \quad z = \frac{bZ}{c},$$

t.y. erdvės tempimą z ašies atžvilgiu.



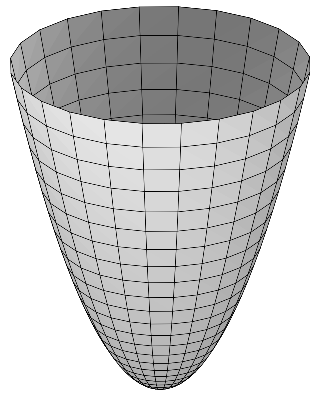
Pav. 10.6: Elipsoidas

Sukimosi paraboloidas. Ši paviršių gauname, sukdami parabolę aplink jos simetrijos ašį. Apibrėžę parabolę lygtimis $y^2 = 2a^2z, x = 0$ ir apsukę aplink z ašį, gauname sukimosi paraboloido lygtį:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 2z \quad \text{arba} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 2z$$

Apibrėžimas 10.2.8 *Kanonine elipsinio paraboloido lygtimi vadinsime*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \tag{10.3}$$



Pav. 10.7: Elipsinis paraboloidas

Jis vadinamas elipsiniu todėl, kad kertant jį plokštuma $z = const$ pjūvyje gausime elipsę. Nuo sukimosi paraboloido jo forma nedaug skiriasi. Reikia tik atlikti erdvės tempimą y ašyje, t.y.

$$x = X \quad y = \frac{aY}{b} \quad z = Z.$$

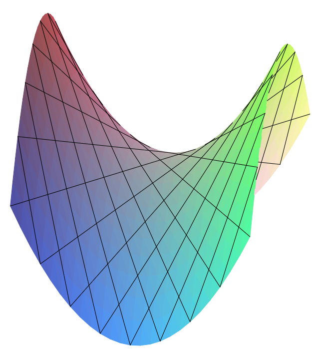
11

Vienuoliktoji paskaita

11.1 Antros eilės paviršiai(tęsinys)

Mes nagrinėjome antros eilės paviršius kurie panašūs į cilindrus, kūgius arba sukimosi paviršius. Tačiau yra paviršių, kurie nepatenka į tokią klasę.

Hiperbolinis paraboloidas.



Pav. 11.1: Hiperbolinis paraboloidas (balnas).

Jei parabolei $x = 0, y^2 = -2b^2 z$ leisime judėti taip, kad jos plokštuma būtų lygiagreti su pradine plokštuma, o viršūnė slinktų parabole $y = 0, x^2 = 2a^2 z$, tai gausime paviršių, kurio lygtis

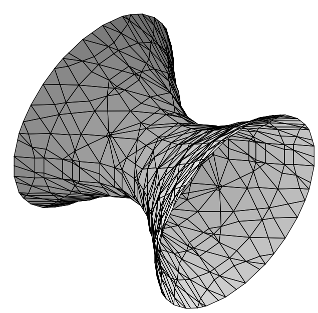
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

Šis paviršius vadinamas hiperboliniu paraboloidu (arba balnu - dėl formos). Kirtus hiperbolinį paraboloidą plokštuma $z = const$, gaunama parabolė. Jo lygtį užrašius

$$z = \frac{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)}{2},$$

matome, kad, kai $z = 0$, gauname dvi tieses $\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$. Kertant hiperbolinį paraboloidą plokštuma $y = const$, gaunama parabolė.

Vienšakis hiperboloidas.



Pav. 11.2: Vienšakis hiperboloidas.

Šį paviršių gauname, sukdami hiperbolę aplink jos menamą ašį. Nustatę hiperbolę lygtimis $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ ir apsukę aplink y ašį, gauname sukimosi hiperboloido lygtį:

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Atlikus transformaciją $x = X, y = Y, z = Z \cdot \frac{a}{c}$, gauname vienšakio hiperboloido lygtį:

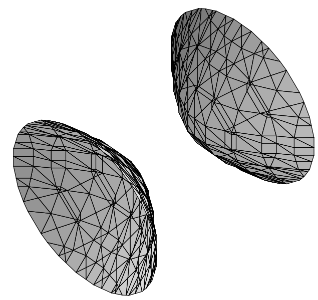
$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

Kertant jį plokštuma $Y = const$, gaunama elipsė, o kertant $Z = const$ - hiperbolė.

Dvišakis hiperboloidas.

Šis paviršius gaunamas sukant hiperbolę aplink jos tikrąją ašį. Paėmę tą pačią hiperbolę ir apsukę ją aplink x ašį, gautume dvišakio sukimosi hiperboloido lygtį:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$



Pav. 11.3: Dvišakis hiperboloidas.

arba (transformavus):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Kaip matome, nuo vienšakio hiperboloido lygties dvišakio hiperboloido lygtis skiriasi tuo, jog pirmojoje yra vienas minusas, o antrojoje - du.

Pastaba 11.1.1 *Iš nagrinėtų paviršių be galo daug tiesių turi kūgis, cilindras, hiperboloidinis paraboloidas bei vienšakis hiperboloidas, o elipsoidas, elipsinis paraboloidas ir dvišakis hiperboloidas neturi nė vienos.*

11.1.1 Tiesės ir paviršiaus sankirta

Tarkime, turime paviršių

$$\begin{aligned} S = \{F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz \\ +2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} \ = 0\} \end{aligned}$$

ir tiesę

$$l : \begin{cases} x = pt + x_0 \\ y = qt + y_0 \\ z = rt + z_0 \end{cases}$$

Čia t - parametras, (p, q, r) - krypties vektorius, $(x_0, y_0, z_0) \in l$.
Imkime to paviršiaus ir tos tiesės sankirtą:

$$F(pt + x_0, qt + y_0, rt + z_0) = Pt^2 + 2Qt + R = 0 \tag{11.1}$$

Čia

$$\begin{aligned}
P &= a_{11}p^2 + a_{22}q^2 + a_{34}r^2 + 2a_{13}pr + 2a_{23}qr + 2a_{12}pq & (11.2)\\
Q &= pF_1(x_0, y_0, z_0) + qF_2(x_0, y_0, z_0) + rF_3(x_0, y_0, z_0), & (11.3)\\
R &= F(x_0, y_0, z_0), & (11.4)\\
F_1 &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}, & (11.5)\\
F_2 &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}, & (11.6)\\
F_3 &= a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}. & (11.7)
\end{aligned}$$

Sukirtus tiesę ir paviršių, galimi keturi variantai:

1) Yra du sankirtos taškai. Tada ir tik tada kai lygtis (11.1) turi du sprendinius, t.y. $D = 4(Q - PR) > 0$;

2) Yra vienas susikirtimo taškas. Tada ir tik tada kai lygtis turi vieną kartotinę šaknį, t.y. $D = 4(Q - PR) = 0$;

3) Visa tiesė guli paviršiuje. Tada ir tik tada kai lygtis turi be galo daug sprendinių, t.y. $P = Q = R = 0$.

4) Tiesė nekerta paviršiaus. Tada ir tik tada kai lygtis sprendinių neturi, t.y. $D = 4(Q - PR) < 0$.

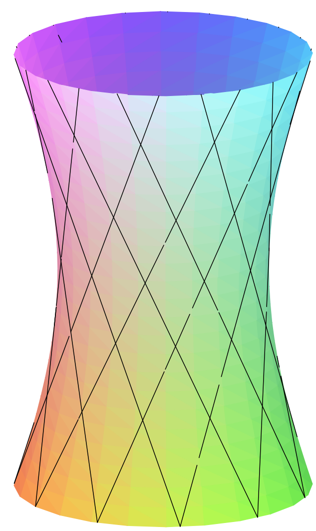
Išvada 11.1.2 *Jei trys tiesės taškai priklauso tiesės ir paviršiaus sankirtai, tai visa tiesė guli paviršiuje.*

11.1.2 Antros eilės paviršių tiesinės sudaromosios

Apibrėžimas 11.1.3 *Žinome, kad tam tikri antrosios eilės paviršiai, pavyzdžiui, kūgiai ir cilindrai, yra sudaryti iš tiesių. Jos vadinamos tų antrosios eilės paviršių tiesinėmis sudaromosiomis.*

Vienašakio hiperboloido tiesines sudaromąsias galima rasti taip: užrašome jo lygtį

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$



Pav. 11.4: Vienšakis hiperboloidas.

arba

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\left(1-\frac{z}{c}\right)\left(1+\frac{z}{c}\right)$$

Tarkime, kad

$$l_\lambda^1:\left\{\begin{array}{rcl}\frac{x}{a}-\frac{y}{b} & = & \lambda\left(1-\frac{z}{c}\right),\\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) & = & 1+\frac{z}{c},\end{array}\right. \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Kadangi pastarosios dvi lygtys yra pirmojo laipsnio lygtys, o kintamųjų x, y, z koeficientai neproporcingi, tai jos nusako tiesę. Kai x, y, z tenkina tas lygtis, jie tenkina ir vienšakio hiperboloido lygtį. Tai nesunkiai matosi sudauginus plokštumų lygtis. Vadinasi tos lygtys yra vienašakio hiperboloido tiesinių sudaromųjų lygtys. Panašiai

$$l_\mu^2:\left\{\begin{array}{rcl}\frac{x}{a}-\frac{y}{b} & = & \mu\left(1+\frac{c}{z}\right),\\ \mu\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) & = & 1-\frac{z}{c},\end{array}\right. \quad \mu\in\mathbb{R}$$

yra to vienašakio hiperboloido kitos šeimos tiesinių sudaromųjų lygtys.

Teorema 11.1.4 *Teisingi tokie faktai apie šias dvi tiesių šeimas:*
1) $l^1_{\lambda_1} \bigcap l^1_{\lambda_2} = \emptyset$ *, jeigu* $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *.*
2) $l^2_{\mu_1} \bigcap l^2_{\mu_2} = \emptyset$ *, jeigu* $\mu_1 \neq \mu_2$ *.*
3) $l^1_{\lambda} \bigcap l^2_{\mu} = P$*,* P *- taškas, priklausantis paviršiui* S*.*
4) Sakykime, $P \in S$*. Tada yra tokie* λ, μ*, kad* $P = l^1_{\lambda} \bigcap l^2_{\mu}$
5) $T_P S =< l^1_{\lambda}, l^2_{\mu} >$*. Čia* $T_P S$ *- paviršiaus liečiamoji plokštuma taške* P*,*
$< l^1_{\lambda}, l^2_{\mu} >$ *- plokštuma einanti per tieses* l^1_{λ} *ir* l^2_{μ}*.*

Juos įrodysime kitoje paskaitoje.

12

Dvyliktoji paskaita

12.1 Antros eilės paviršiai(tęsinys)

12.1.1 Antros eilės paviršių tiesinės sudaromosios (tęsinys)

Vienuoliktoje paskaitoje pateikėme penkis teiginius apie antros eilės paviršių tiesinių sudaromųjų šeimas (žr. (11.1.4) juos) dabar įrodysime.

Įrodymas:

1) Imkime vieną antros eilės paviršiaus tiesinę sudaromąją

$$l_\lambda^1 : \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda\left(1 - \frac{c}{z}\right), \\ \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1 + \frac{z}{c}, \end{cases}$$

ir kitą tos pačios šeimos tiesinę sudaromąją

$$l_{\lambda'}^1 : \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \lambda'\left(1 - \frac{c}{z}\right), \\ \lambda'\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 1 + \frac{z}{c}, \end{cases}$$

Jei šios tiesės susikerta, reiškia, egzistuoja keturių lygčių sprendinys (x, y, z), tenkinantis jas visas. Tačiau tai įmanoma tik tada, jei $\lambda = \lambda'$. Tai nesunkiai galima pastebėti palygine pirmasias lygčių sistemos lygtis.

2) Analogiškas pirmajam.

3) Apjunkime l_λ^1 ir l_μ^2 lygtis į vieną sistemą. Gausime keturias lygtis su trimis

nežinomaisiais:

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\mu\left(1-\frac{z}{c}\right), \\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1+\frac{z}{c}, \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda\left(1+\frac{z}{c}\right), \\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1-\frac{z}{c} \end{cases}$$

Jos turės vienintelį sprendinį, kai sistemos rangas bus mažesnis už keturis arba determinantas lygus 0:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{\mu}{c} & -\mu \\ \frac{\mu}{a} & -\frac{\mu}{b} & -\frac{1}{c} & -1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{\lambda}{c} & -\lambda \\ \frac{\lambda}{a} & -\frac{\lambda}{b} & \frac{1}{c} & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mu & -\mu \\ \mu & -\mu & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda & -\lambda \\ \lambda & -\lambda & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Apskaičiavę šį determinantą, matome, kad jis tikrai lygus nuliui, todėl egzistuoja šios lygčių sistemos sprendinys, vadinasi, vienos šeimos tiesė kerta kitos šeimos tiesę.

4) Imkime tašką $P=(x_0,y_0,z_0)$, priklausantį paviršiui $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Jo tiesinių sudaromųjų lygtys tokios:

$$l_\lambda^1 : \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda\left(1+\frac{z}{c}\right), \\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1-\frac{z}{c} \end{cases}$$

ir

$$l_\mu^2 : \begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\mu\left(1-\frac{z}{c}\right), \\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1+\frac{z}{c}, \end{cases}$$

Norėdami rasti konkrečius λ,μ įstatykime taško P koordinates į visas keturias lygtis. Gausime atitinkamas λ ir μ reikšmes:

$$\lambda=\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}}{1+\frac{z_0}{c}}=\frac{1-\frac{z_0}{c}}{\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}}$$

$$\mu=\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}}{1-\frac{z_0}{c}}=\frac{1+\frac{z_0}{c}}{\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}}.$$

5) Tegu $L=< l_\lambda^1, l_\mu^2 >$ plokštuma einanti per tieses l_λ^1, l_μ^2. Įrodysime, kad tai yra liečiamoji paviršiaus plokštuma taške $P=l_\lambda^1\cap l_\mu^2$.

Išveskime ploktumą per tris taškus P, B, C, priklausančius paviršiui ir ją pažymėkime $< P, B, C >$. Artinkime taškus B ir C prie taško P. Pagal apibrėžimą ribinė plokštumos padėtis ir bus liečiamoji plokštuma $T_P S$, t.y.

$$\lim_{B \to P, C \to P} < P, B, C >= T_P S$$

Norėdami patikrinti, kad L yra liečiamoji plokštuma galime taškus pasirinkti tokiu būdu $B \in l^1_\lambda, C \in l^2_\mu$. Tada visada $L =< P, B, C >$ ir todėl $L = T_P S$. $\odot$

Teiginys 12.1.1 *Imkime tris tieses erdvėje. Jas visas kertančių tiesių yra be galo daug. Šios tiesės sudaro antros eilės paviršių (vienšakį hiperboloidą arba hiperbolinį paraboloidą).*

Įrodymas: Pirmiausia įrodysime, kad tris tieses tikrai kerta be galo daug tiesių. Imkime tris tieses l_1, l_2, l_3, išsirinkime tašką $P \in l_2$ ir pažymėkime plokštumas $L_1 =< l_1, P >, L_3 =< l_3, P >$ (čia $< l, P >$ yra plokštuma einanti per tiesę l ir joje negulintį tašką P). Tegul šių plokštumų sankirtos tiesė yra $L_1 \bigcap L_3 = l_P$. Nesunku suprasti, kad l_P - tiesė, kertanti l_1, l_2 ir l_3.

Dabar įrodysime, kad aibė tiesių $S = \bigcup_{P \in l_2} l_P$ sudaro antros eilės paviršių. Imkime, bet kokius tris taškus $A, B, C \in l_2$ bei plokštumas $L_1^A =< A, l_1 >, L_3^A =< A, l_3 >$. Tada pasidomėkime paviršiumi, kurio lygtį galima užrašyti kaip determinantą:

$$F(x, y, z) = \begin{vmatrix} L_1^B(C) L_1^A & L_3^B(C) L_3^A \\ L_1^A(C) L_1^B & L_3^A(C) L_3^B \end{vmatrix} = 0$$

Čia, $L_1^B(C)$ reiškia skaičių, kurį gauname į lygtį L_1^B įstatę tašką C. Kadangi visi determinanto nariai yra tiesinės formos, tai jį skaičiuodami, gausime antros eilės lygtį. Tegul $S' = (x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0$ yra paviršius apibrėžtas šia lygtimi. Įrodysime, kad $l_1, l_2, l_3 \in S'$. Išties $l_1 = L_1^A \bigcap L_1^B$.Taigi, jeigu taškas P priklauso l_1, tai $L_1^A(P) = 0$ ir $L_1^B(P) = 0$. Todėl $F(P) = 0$. Vadinasi ir tiesė l_1 priklauso paviršiui S', nes visi jos taškai priklauso paviršiui. Analogiškai įsitikiname, kad tiesė $l_3 = L_3^A \bigcap L_3^B$ taip pat priklauso paviršiui. Įstačius taškus A, B ir C taip pat gauname determinantą lygų 0 (kitaip tariant $F(A) = F(B) = F(C) = 0$), todėl šie taškai paviršiui taip pat priklauso. O kadangi jie visi guli vienoje tiesėje l_2, tai ir visa tiesė turi priklausyti S'. Taigi $l_1, l_2, l_3 \in S'$. Kadangi tiesė l_P, kerta paviršių trijuose skirtinguose taškuose (tai tie taškai, kuriuose tiesė kerta tieses l_1, l_2, l_3), o paviršius S' yra antros eilės, visa tiesė l_P privalo priklausyti paviršiui. Išvada: $S = S'$, nes S' priklauso visos judančios tiesės l_P. $\odot$

Išvada 12.1.2 *Sakykime, erdvėje duotos keturios tiesės l_1, l_2, l_3, l_4, kurios tarpusavyje nesikerta. Tada tiesių, kurios kerta visas keturias tieses, gali būti: tuščia aibė, viena , dvi arba be galo daug.*

Įrodymas: Iš pradžių imkime tris tieses l_1, l_2, l_3. Jos priklauso paviršiui S (vienšakiui hiperboloidui arba hiperboliniui paraboloidui). Ketvirtoji tiesė l_4 šį paviršių gali:

a) nekirsti,

b) kirsti viename taške A,

c) dviejuose taškuose P ir Q

d) gulėti paviršiuje.

Atveju a) nėra tiesių kertančių visas keturias. Iš tikrųjų, jeigu būtų tokia tiesė l, tai ji, kadangi kerta ir pirmas tris, turi priklausyti paviršiui S. Bet $l \cap l_4 = A$, taigi $A \in S \cap l_4$. Gauta prieštara ir parodo, kad tokios tiesės l nėra.

Atveju c) imkime tiesę l_P, einančią per tašką P ir priklausančią kitai paviršiaus tiesinių sudaromųjų šeimai nei l_1, l_2 ir l_3. Tada l_P kirs visas keturias tieses. Analogiškai jas kirs tiesė l_Q, einanti per tašką Q. Daugiau tokių tiesių, kurios kirstų tieses l_1, l_2, l_3, l_4 nėra, nes tokia tiesė privalo gulėti paviršiuje, kadangi kerta tieses l_1, l_2, l_3, t.y. tokios yra tik l_P arba l_Q .

Atveju b) yra vienintelė tiesė l_A kertanti visas duotas tieses. Samprotavimai analogiški kaip ir atveju c).

Atveju d) yra begalo daug tiesių, kurios kerta visas duotas tieses. Kadangi šiuo atveju tiesės $l_1, l_2, l_3, l_4 \in S$ yra vienos paviršiaus šeimos ir kiekviena kitos šeimos tiesė kirs visas duotas tieses. $\odot$

12.2 Paviršiaus liečiančiamoji plokštuma.

Imkime paviršių $S = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$ ir jam priklausantį tašką $A(x_0, y_0, z_0)$. Ieškosime tiesių l_A, kurios eina per tašką A ir kerta paviršių S su kartotinumu du, t.y tiesė liečia paviršių tame taške. Tegul

$$l_A : \begin{cases} x = pt + x_0, \\ y = qt + y_0, \\ z = rt + z_0, \end{cases}$$

čia t - parametras, $k = (p, q, r)$ - krypties vektorius. Šias x, y ir z reikšmes įstatykime į paviršiaus lygtį gausime $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ (formules P, Q, R žr. (11.2) (11.3)(11.4)). Primename, kad $R = F(x_0, y_0, z_0)$, taigi $R = 0$, nes taškas A priklauso paviršiui. Tada lygtis yra trumpesnė $(Pt + 2Q)t = 0$. Ši lygtis turi kartotinę šaknį ($t = 0$) tada ir tik tada kai $Q = 0$. Priminsiu, kad

$$\begin{aligned} Q &= F_1(x_0, y_0, z_0)p + F_2(x_0, y_0, z_0)q + F_3(x_0, y_0, z_0)r \\ &= (F_1(x_0, y_0, z_0), F_2(x_0, y_0, z_0), F_3(x_0, y_0, z_0))(p, q, r). \end{aligned}$$

Taigi sąlyga $Q = 0$ galima interpretuoti taip: tiesė einanti per tašką esantį paviršiuje yra liečiamoji tada ir tik tada jeigu jos krypties vektorius $k = (p, q, r)$ yra statmenas vektoriui $(F_1(x_0, y_0, z_0), F_2(x_0, y_0, z_0), F_3(x_0, y_0, z_0))$. Pagal apibrėžimą liečiamoji paviršiaus plokštuma sudaryta iš liečiamųjų tiesių, taigi tokios plokštumos normalinis vektorius yra $(F_1(x_0, y_0, z_0), F_2(x_0, y_0, z_0), F_3(x_0, y_0, z_0))$. Vadinasi liečiamosios plokštumos lygtis tokia:

$$(x - x_0)F_1(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_2(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)F_3(x_0, y_0, z_0) = 0$$

čia

$$\begin{aligned} F_1(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}, \\ F_2(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}, \\ F_3(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}. \end{aligned}$$

Pavyzdys 12.2.1 *Imkime elipsoidą (hiperbolinį paraboloidą, vienšakį hiperboloidą)*

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ir jam priklausantį tašką (x_0, y_0, z_0). *Skaičiuojame šio paviršiaus liečiamąją plokštumą:*

$$(x - x_0)\frac{2x_0}{a^2} \pm (y - y_0)\frac{2y_0}{b^2} \pm (z - z_0)\frac{2z_0}{c^2} = 0$$

Padaline šią lygtį iš dviejų ir prisiminę, kad paviršiaus lygtį tenkina taškas (x_0, y_0, z_0) *gauname*

$$\frac{xx_0}{a^2} \pm \frac{yy_0}{b^2} \pm \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

13

Tryliktoji paskaita

13.1 Bezjė kreivės

Apibrėžimas 13.1.1 (Iškilo apvalkalo) *Taškų P_0, P_1, ..., P_d iškilusis apvalkas - tai visų jo iškilųjų darinių aibė*

$$\{t_0P_0 + t_1P_1 + ... + t_dP_d \mid t_0 + t_1 + ... + t_d = 1\}.$$

Intuityviai plokštumos taškų aibės iškiląjį apvalką galime rasti taip: įsivaizduokime siūlą, juosiantį sukaltus pasirinktuose taškuose vinis. Belieka tik užveržti siūlą - tada jis taps ieškomo iškilo apvalko kraštu.

Apibrėžimas 13.1.2 (Bezje kreivės) *Apibrėšime d-tojo laipsnio Bezje kreivę. Ji yra sudaryta iš taškų $P(t) = \sum_{i=0}^{d} B_i^d(t)P_i,\ 0 \leq t \leq 1$. Čia $B_i^d(t) = \begin{pmatrix} d \\ i \end{pmatrix} (1-t)^{d-i}t^i$ yra Bernšteino polinomai.*

Tokiu būdu Bezje kreivė yra kontrolinių taškų P_i afinusis darinys, nes

$$\sum_{i=0}^{d} B_i^d(t) = \sum_{i=0}^{d} \begin{pmatrix} d \\ i \end{pmatrix} (1-t)^{d-i}t^i = ((1-t)+t)^d = 1,$$

Be to $B_i(t) \geq 0$, jeigu $0 \leq t \leq 1$.

Išvada 13.1.3 *Visa Bezje kreivė $P(t)$ priklauso kontrolinių taškų iškilajam apvalkui.*

1-ojo laipsnio Bezjė kreivė atrodys taip:

$$P(t) = P_0 B_0^1 + P_1 B_1^1 = P_0(1-t) + P_1 t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Tai yra atkarpa P_0P_1, kurią taškas $P(t)$ dalija santykiu $\frac{t}{1-t}$. Tuo tarpu kvadratinė Bezje kreivė yra parabolės lankas (įrodysime vėliau). Pirmiausia išnagrinėsime atskirą atvejį, kai kontroliniai taškai turi koordinates $E_0 = (0,0)$, $E_1 = (\frac{1}{2}, 0)$, $E_2 = (1,1)$. Tada juos atitinka Bezje kreivė

$$\begin{aligned} P(t) &= (1-t)^2 E_0 + 2(1-t)tE_1 + t^2 E_2 = \\ &= ((1-t)^2 \cdot 0 + 2(1-t)t \cdot \frac{1}{2} + t^2 \cdot 1, (1-t)^2 \cdot 0 + 2(1-t)t \cdot 0 + t^2 \cdot 1) \\ &= (t, t^2) \end{aligned}$$

yra parabolė, nes jos grafikas sutampa su funkcijos $y = x^2$ grafiku. Pastebėsime, kad atkarpos E_0E_1 ir E_1E_2 yra liestinės taškuose E_0 ir E_2. Galima įrodyti, kad bet kokia kvadratinė Bezje kreivė

$$Q(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$$

yra afinusis kreivės $P(t)$ vaizdas.

Teiginys 13.1.4 *Tarkime, turime parabolei priklausančius taškus A, B ir C. Išveskime per juos liestines l_A, l_B ir l_C ir pažymėkime jų susikirtimo taškus: $l_A \bigcap l_B = K$, $l_A \bigcap l_C = M$, $l_B \bigcap l_C = N$. Tada teisingas toks teiginys:*

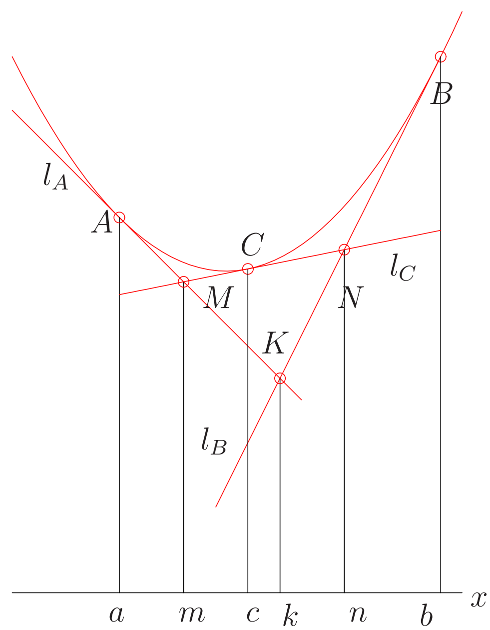
$$\frac{|AM|}{|MK|} = \frac{|MC|}{|CN|} = \frac{|KN|}{|NB|}$$

Įrodymas: Imkime parabolę $y = 2px^2$. Tegu jai priklausančių taškų koordinatės $A = (a, 2pa^2)$, $B = (b, 2pb^2)$, $C = (c, 2pb^2)$, o taškų K, M, N pirmąsias koordinates pažymėkime k, m, n. Raskime k koordinates:

$$\begin{cases} l_A : y + 2pa^2 = 4pxa \\ l_B : y + 2pb^2 = 4pxb \end{cases}$$

$$4px(a-b) = 2p(a^2 - b^2)$$

$$x = \frac{2p(a^2 - b^2)}{4p(a-b)} = \frac{a+b}{2} = k$$



Pav. 13.1: Parabolės liestinės

Analogiškai randame $m = \frac{a+c}{2}$ ir $n = \frac{b+c}{2}$.
Tuomet atitinkami santykiai bus:

$$\begin{aligned}
\frac{|AM|}{|MK|} &= \frac{|a-m|}{|m-k|} = \frac{\left|a - \frac{a+c}{2}\right|}{\left|\frac{a+c}{2} - \frac{a+b}{2}\right|} = \frac{\left|\frac{a-c}{2}\right|}{\left|\frac{c-b}{2}\right|} \\
\frac{|KN|}{|NB|} &= \frac{|k-n|}{|n-b|} = \frac{\left|\frac{a+b}{2} - \frac{c+b}{2}\right|}{\left|\frac{c+b}{2} - b\right|} = \frac{\left|\frac{a-c}{2}\right|}{\left|\frac{c-b}{2}\right|} \\
\frac{|MC|}{|CN|} &= \frac{|m-c|}{|c-n|} = \frac{\left|\frac{a+c}{2} - c\right|}{\left|c - \frac{c+b}{2}\right|} = \frac{\left|\frac{a-c}{2}\right|}{\left|\frac{c-b}{2}\right|}
\end{aligned}$$

$\odot$

Išvada 13.1.5 *Antros eilės Bezjė kreivė yra parabolė.*

13.1.1 de Casteljau algoritmas ir kreivės polinė forma

Pradėsime nuo paprasto pastebėjimo, kad pirmo laipsnio Bezje kreivės formulė $L(t) = (1-t)P_0 + tP_1$ apibrėžia afininį atvaizdį. Tikrai, apibrėžimo sritis čia yra realiųjų skaičių tiesė $\mathbb{R}$, kurioje fiksuoti du taškai 0 ir 1. Bet kuris taškas $t \in \mathbb{R}$ gali būti užrašytas naudojant koordinates $t = (1-t)0 + t1$ taškų 0 ir 1 atžvilgiu. Be to, $L(0) = P_0$ ir $L(1) = P_1$. Gauname formulę

$$L((1-t)0 + t1) = (1-t)L(0) + tL(1),$$

kuri įrodo atvaizdžio L afiniškumą.
Pirmas netrivialus atvejis - tai kvadratinė Bezje kreivė

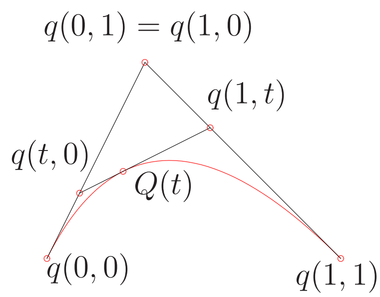
$$Q(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2$$

Apibrėžkime dviejų kintamųjų t_1 ir t_2 funkciją q:

$$q(t_1, t_2) = (1-t_1)(1-t_2)P_0 + ((1-t_1)t_2 + t_1(1-t_2))P_1 + t_1 t_2 P_2$$

Simetrinis bi-afininis (afininis pagal kiekvieną kintamąjį) atvaizdis q yra vadinamas kreivės Q poline forma. Dirbti su q yra patogiau, nes galime naudotis afiniškumu keisdami tik po vieną argumentą. Pavyzdžiui:

$$q(t, 0) = q((1-t)0 + t1, 0) = (1-t)q(0,0) + tq(1,0)$$



Pav. 13.2: de Casteljau algoritmas

Kaip matome $q(t,0)$ dalija atkarpą, kurios galai yra $q(0,0) = P_0$ ir $q(1,0) = P_1$ santykiu $t : (1-t)$. Analogiškai $q(t,1)$ dalija atkarpą tarp $q(0,1) = P_1$ ir $q(1,1) = P_2$

tuo pačiu santykiu. Dabar turėdami $q(t, 0)$ ir $q(t, 1)$ galime rasti

$$q(t,t) = q(t,(1-t)0 + t1) = (1-t)q(t,0) + tq(t,1)$$

Taigi po pakartotinio atkarpų dalijimo santykiu $t : (1-t)$ paskutiniame žingsnyje gauname Bezje kreivės tašką $Q(t)$. Tai ir yra garsusis de Kastelžo algoritmas.

Kubinės Bezje kreivės atveju polinė forma turės jau tris kintamuosius, bet visos minėtos konstrukcijos bus visiškai analogiškos.

13.1.2 Bezje paviršiai

Norint gauti ne kreivę, o paviršių, vietoj vieno kintamojo t reikia imti du - t ir s. Gausime vadinamąją bi-laipsnio (n, m) Bezjė paviršių:

$$P(t,s) = \sum_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m} P_{ij} B_i^n(t) B_j^m(s),$$
$$P_{ij} \in \mathbb{R}^3, 0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant s \leqslant 1$$

Sakykime, turime bi-laipsnio $(1, 1)$ Bezjė paviršių. Jam sudaryti reikės keturių kontrolinių taškų $P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$. Atkarpas $P_{00}P_{01}$ ir $P_{10}P_{11}$ dalijame santykiu $\frac{t}{1-t}$ ir gautus taškus sujungiame, o gautą atkarpą dalijame santykiu $\frac{s}{1-s}$. Gauname ieškomą tašką $P(t, s)$ bei dvi tiesių šeimas, kurios ir sudaro paviršių (galima įrodyti jog gauta paviršiaus skiautė yra dalis hiperbolinio paraboloido). Bi-laipsnio $(2, 2)$ Bezjė paviršiui sudaryti reikės jau 9 taškų.

Pavyzdys 13.1.6 *Praktikoje, pvz., kompiuterinėje grafikoje, naudojami* ***splainai*** *- kreivės, sudarytos iš gabalėlių, šiuo atveju Bezjė kreivių. Norėdami nupiešti tam tikrą figūrą, atsidedame kontrolinius taškus ir brėžiame per juos tieses, kurios bus mūsų figūros liestinės. Kuo daugiau šių taškų pažymėsime, tuo tikslesnis bus vaizdas. Norint gauti taisyklingesnį piešinį, tikslinga imti kas antrą kontrolinį tašką, o kitus atidėti per vidurį tarp greta esančių kontrolinių taškų. Kiekvienoje gautos laužtės dalyje bus nubrėžta parabolės dalis, ir šios dalys glodžiai susijungs, tad gautos kreivės kampuotumo žmogaus akis nepastebės. Praktiškai reikia ne C^1, o C^2 glodumo, kad net monochrominėje šviesoje nesimatytų, kur jungiasi atskiros figūros dalys. Tam reikėtų naudoti kubines Bezje kreives. Apie tai plačiau galite paskaityti* `http:`

//www.mif.vu.lt/~kkk/geom.pdf. Aukščiau aprašytu būdu dažniausiai kuriami kompiuteriniai šriftai.

Uždaviniai sprendžiami per pratybas. Apie juos informacija yra faile :

http://www.mif.vu.lt/~zube/paskaitos/pratybos.pdf

Literatūra

[1] P.Katilius, "Analizinė geometrija", 1940.

[2] R.Krasauskas, "Geometrija", 2000, Vilniaus Universiteto leidykla.

[3] P.Vaškas, "Analizinė geometrija", 1999, Vilniaus Universiteto leidykla.

Uždavinynas (yra bibliotekoje):

[4] D.B.Kletnik, "Sbornik zadach po anliticheskoj geometrii", 1964, Izdatelstvo "Nauka" Maskva. (rusiškai).

Dalykinė Rodyklė