Šeštos pratybos

1 užduotis.
Įrodyti samprotavimo pagrįstumą formaliosios dedukcijos metodu.

1) Nužudyta siekiant apiplėšti arba iš keršto. Jei pas auką rasta pinigų, tai nusikaltimo motyvas buvo ne apiplėšimas. Iš tiesų, jos rankinuke rasta keletas šimtų litų. Matyt, nusikaltimas padarytas iš keršto.
2) $(\neg p \vee q) \rightarrow r$, $s \vee \neg q$, $\neg u$, $p \rightarrow u$, $(\neg p \wedge r) \rightarrow \neg s \therefore \neg q$

Sprendimas.
1) Pažymėkime teiginius:
A – “nužudyta siekiant apiplėšti”
K – “nužudyta iš keršto”
P – “pas auką rasta pinigų”
Tada samprotavimas bus toks:
$A \vee K$, $P \rightarrow \neg A$, $P \therefore K$
Įrodykime samprotavimo pagrįstumą:

1. $A \vee K$
2. $P \rightarrow \neg A$
3. P
4. $\neg A$ (modus ponens 2,3)
5. K (disjunktyvus silogizmas 1,4)

2)

1. $(\neg p \vee q) \rightarrow r$
2. $s \vee \neg q$
3. $\neg u$
4. $p \rightarrow u$
5. $(\neg p \wedge r) \rightarrow \neg s$
6. $\neg p$ (modus tollens 3,4)
7. $\neg p \vee q$ (prijungimas 6)
8. r (modus ponens 1,7)
9. $\neg p \wedge r$ (konjunktyvus sujungimas 6,8)
10. $\neg s$ (modus ponens 5,9)
11. $\neg q$ (disjunktyvus silogizmas 2,10)

2 užduotis.

Įrodyti samprotavimo pagrįstumą sąlyginio įrodymo metodu.

Įmonėje yra trys cechai A, B, C, susitarę dėl projektų tvirtinimo tvarkos. Jei cechas B nedalyvauja tvirtinant projektą, tai nedalyvauja ir cechas A. Jei cechas B dalyvauja tvirtinant projektą, tai kartu dalyvauja ir cechai A bei C. Todėl cechas C privalo dalyvauti, kai projektą tvirtina cechas A.

Sprendimas.

Pažymėkime teiginius:

A – “cechas A dalyvauja tvirtinant projektą”

B – “cechas B dalyvauja tvirtinant projektą”

C – “cechas C dalyvauja tvirtinant projektą”

Tada samprotavimas bus toks:

$\neg B \to \neg A,\ B \to (A \wedge C)\ \therefore A \to C$.

Įrodykime samprotavimo pagrįstumą:

1. $\neg B \to \neg A$
2. $B \to (A \wedge C)$
3. A (laikina prielaida)
4. B (modus tollens 1,3)
5. $A \wedge C$ (modus ponens 2,4)
6. C (atskyrimas 5)
7. $A \to C$ (sąlyginis įrodymas 3–6)

3 užduotis.

Įrodyti samprotavimo pagrįstumą prieštaros metodu.

$(A \vee B) \to (C \wedge D),\ \neg(\neg A \vee \neg C),\ \neg(A \to \neg D) \to E\ \therefore\ E$

Sprendimas.

1. $(A \vee B) \to (C \wedge D)$
2. $\neg(\neg A \vee \neg C)$
3. $\neg(A \to \neg D) \to E$
4. $\neg E$ (laikina prielaida)
5. $A \to \neg D$ (modus tollens 3,4)
6. $A \wedge C$ (De Morgano dėsnis 2)
7. A (atskyrimas 6)
8. $A \vee B$ (prijungimas 7)
9. $C \wedge D$ (modus ponens 1,8)
10. D (atskyrimas 9)
11. $\neg D$ (modus ponens 5,7)
12. $D \wedge \neg D$ (konjunktyvus sujungimas 10,11)
13. E (prieštaros metodas 4—12)

4 užduotis.

Tegu D yra visų žmonių aibė, o predikatas L(x, y) yra “x myli y”. Užrašyti matematiškai teiginį “Meilė tarp dviejų žmonių yra abipusė” ir rasti jo neiginį.

Sprendimas.

Teiginį galima užrašyti taip:

$\forall x\in D\ \forall y\in D\ (L(x,y) \to L(y,x))$

Jo neiginys:

$\neg(\forall x\in D\ \forall y\in D\ (L(x,y) \to L(y,x)))\ \sim$

$\sim\ \exists\, x\in D\ \exists y\in D\ \neg(L(x,y) \to L(y,x))\ \sim$

$\sim\ \exists\, x\in D\ \exists y\in D\ \neg(\neg L(x,y) \vee L(y,x))\ \sim$

$\sim\ \exists\, x\in D\ \exists y\in D\ (L(x,y) \wedge \neg L(y,x))$.

Žodžiais: “Yra du žmonės, kurių pirmas myli antrą, bet antras pirmo nemyli”.

5 užduotis.

Įrodyti samprotavimo pagrįstumą.

$\forall x\ (M(x) \to S(x)),\ \forall x\ (\neg B(x) \vee M(x))\ \therefore\ \forall x\ (\neg S(x) \to \neg B(x))$.

Sprendimas.

1.	$\forall x\ (M(x) \to S(x))$	
2.	$\forall x\ (\neg B(x) \vee M(x))$	
3.	$M(a) \to S(a)$	(universali instanciacija 1)
4.	$\neg B(a)\ \vee M(a)$	(universali instanciacija 2)
5.	$\neg S(a)$	(laikina prielaida)
6.	$\neg M(a)$	(modus tollens 3,5)
7.	$\neg B(a)$	(disjunktyvus silogizmas 4,6)
8.	$\neg S(a) \to \neg B(a)$	(sąlyginis įrodymas 5–7)
9.	$\forall x\ (\neg S(x) \to \neg B(x))$	(universali generalizacija 8)

6 užduotis.

Įrodyti samprotavimo nepagrįstumą.

Visos katės yra žinduoliai. Kai kurios katės – keturkojės. Vadinasi, visi keturkojai – žinduoliai.

Sprendimas.

Pažymėkime predikatus:

K(x) – “x yra katė”,

Ž(x) – “x yra žinduolis”,

Q(x) – “x yra keturkojis”,

čia x priklauso visų gyvūnų aibei D.

Tuomet samprotavimą galima užrašyti taip:

$\forall x\in D\ (K(x) \to \check{Z}(x)),\ \exists x\in D\ \ (K(x) \wedge Q(x))\ \therefore\ \forall x\in D\ \ (Q(x) \to \check{Z}(x))$

Imkime visų gyvūnų aibės D poaibį D’, sudarytą iš dviejų gyvūnų, D’ = {a, b}, ir bandykime parodyt, kad poaibiui D’ samprotavimas nepagrįstas. Tada

$\forall x\in D'\ (K(x) \to \check{Z}(x))\ \sim\ (K(a) \to \check{Z}(a)) \wedge (K(b) \to \check{Z}(b))$,

$\exists x\in D'\ \ (K(x) \wedge Q(x))\ \sim\ (K(a) \wedge Q(a)) \vee (K(b) \wedge Q(b))$,

$\forall x\in D'\ \ (Q(x) \to \check{Z}(x))\ \sim\ (Q(a) \to \check{Z}(a)) \wedge (Q(b) \to \check{Z}(b))$.

Pažymėkime

$p_1 = K(a)$, $\quad p_2 = K(b)$,

$q_1 = Ž(a)$, $q_2 = Ž(b)$,
$r_1 = Q(a)$, $r_2 = Q(b)$.

Turime parodyti, kad samprotavimas

$$(p_1 \to q_1) \wedge (p_2 \to q_2), (p_1 \wedge r_1) \vee (p_2 \wedge r_2) \therefore (r_1 \to q_1) \wedge (r_2 \to q_2)$$

yra nepagrįstas. Tam bandysime rasti loginės lygties

$$(p_1 \to q_1) \wedge (p_2 \to q_2) \wedge ((p_1 \wedge r_1) \vee (p_2 \wedge r_2)) \to ((r_1 \to q_1) \wedge (r_2 \to q_2)) = k$$

bent vieną sprendinį. Gauname sistemą iš 4 lygčių:

$p_1 \to q_1 = t$,
$p_2 \to q_2 = t$,
$(p_1 \wedge r_1) \vee (p_2 \wedge r_2) = t$,
$(r_1 \to q_1) \wedge (r_2 \to q_2) = k$.

Iš ketvirtos lygties matome, kad

$r_1 \to q_1 = k$ arba $r_2 \to q_2 = k$.

Pradžiai tarkime, kad

$r_1 \to q_1 = k$,

t.y. $r_1 = t$, $q_1 = k$.

Įstatę į pirmą gauname

$p_1 \to k = t$,

t.y. $p_1 = k$.

Įstatę visa tai į trečią, gauname

$(k \wedge t) \vee (p_2 \wedge r_2) = t$,

t.y. $p_2 \wedge r_2 = t$,

t.y. $p_2 = t$ ir $r_2 = t$.

Tada iš antros gauname

$t \to q_2 = t$,

t.y. $q_2 = t$.

Taigi, radome lygties sprendinį

$p_1 = k$, $p_2 = t$, $q_1 = k$, $q_2 = t$, $r_1 = t$, $r_2 = t$.

Tai reiškia, kad lygties kairėje pusėje esanti formulė nėra tapačiai teisinga, taigi, samprotavimas nėra pagrįstas aibėje D’, o tuo pačiu nėra pagrįstas ir visų gyvūnų aibėje.

Namų darbai.

1.
   1) $G \vee (H \to I)$, $\neg G \wedge \neg I \therefore \neg H$
   2) $\neg A \to (B \wedge C)$, $\neg C \therefore A$
2.
   1) $\neg E \to \neg B$, $\neg(E \wedge F)$, $(\neg A \vee \neg B) \to (B \wedge \neg D) \therefore \neg A \to (\neg D \wedge \neg F)$
   2) $(G \vee \neg S) \wedge (R \vee S)$, $R \to (\neg H \wedge T) \therefore H \to G$
3. $\neg C \to D$, $C \to \neg(\neg D \vee A)$, $B \vee \neg D \therefore B$
4. Teiginys “Visi ką nors myli” **Ats.:** $\forall x \in D\ \exists y \in D\ L(x, y)$
5.
   1) Visi studentai mėgsta alų, vadinasi, kai kurie alaus mėgėjai nėra šiaip dykaduoniai, nes studentų tikrai būna darbščių.
   2) $\forall x\ (F(x) \to G(x))$, $\forall x\ (A(x) \to F(x))$, $\exists x\ \neg G(x) \therefore \exists x\ \neg A(x)$.

6. Visi žmonės yra mirtingi, kai kurie žmonės yra poetai. Vadinasi, visi poetai yra mirtingi. (Pastaba: šis samprotavimas nėra pagrįstas, nes tarp jo prielaidų nėra tokios: “Visi poetai yra žmonės”)