Penktos pratybos

1 užduotis.

Rasti formulės

$(p / q) \leftrightarrow (\neg q / r)$

normaliąsias formas, naudojantis teisingumo reikšmių lentele:

1) rasti TNDF (tobulą normaliąją disjunkcinę formą),
2) rasti TNKF (tobulą normaliąją konjunkcinę formą).

Sprendimas.

1) Visų pirma sudarome formulės teisingumo reikšmių lentelę:

p	*q*	*r*	*p / q*	*¬q / r*	*Q(p,q,r)*
t	*t*	*t*	*k*	*t*	*k*
t	*t*	*k*	*k*	*t*	*k*
t	*k*	*t*	*t*	*k*	*k*
t	*k*	*k*	*t*	*t*	*t*
k	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*
k	*t*	*k*	*t*	*t*	*t*
k	*k*	*t*	*t*	*k*	*k*
k	*k*	*k*	*t*	*t*	*t*

Čia paryškintos eilutės, kuriose formulė įgyja reikšmę t. Iš kiekvienos tokios eilutės gauname po elementarią konjunkciją, ir jas sujungiame disjunkcijomis. Elementarią konjunkciją gauname, t keisdami atitinkamu kintamuoju, o k – atitinkamo kintamojo neiginiu. Pavyzdžiui, pirmoje nuspalvintoje eilutėje p=t, q=k, r=k. Todėl šią eilutę atitiks elementari konjunkcija $p \wedge \neg q \wedge \neg r$. Tokiu būdu gauname duotos formulės NDF, kuri yra tobula, nes į kiekvieną elementarią konjunkciją po vieną kartą įeina visi kintamieji:

$(p / q) \leftrightarrow (\neg q / r) \sim$

$\sim (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

2) Lentelė bus ta pati:

p	*q*	*r*	*p / q*	*¬q / r*	*Q(p,q,r)*
t	*t*	*t*	*k*	*t*	*k*
t	*t*	*k*	*k*	*t*	*k*
t	*k*	*t*	*t*	*k*	*k*
t	*k*	*k*	*t*	*t*	*t*
k	*t*	*t*	*t*	*t*	*t*
k	*t*	*k*	*t*	*t*	*t*
k	*k*	*t*	*t*	*k*	*k*
k	*k*	*k*	*t*	*t*	*t*

Tik dabar paryškintos eilutės, kuriose formulė įgyja reikšmę k. Darome atvirkščiai, negu darėme, skaičiuodami TNDF: iš kiekvienos tokios eilutės gauname po elementarią disjunkciją, ir jas sujungiame konjunkcijomis. Elementarią disjunkciją gauname, t keisdami atitinkamo kintamojo neiginiu, o k – atitinkamu kintamuoju. Pavyzdžiui, paskutinėje nuspalvintoje eilutėje p=k, q=k, r=t. Todėl šią eilutę atitiks elementari disjunkcija $p \vee q \vee \neg r$. Tokiu būdu gauname duotos formulės TNDF:

$(p / q) \leftrightarrow (\neg q / r) \sim$

$\sim (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$.

2 užduotis.

Rasti formulės

$$(p / q) \leftrightarrow (\neg q / r)$$

normaliąsias formas, naudojantis logikos dėsniais:

1) rasti TNDF (tobulą normaliąją disjunkcinę formą),
2) rasti TNKF (tobulą normaliąją konjunkcinę formą).

Sprendimas.

1) Visų pirma konstruojame NDF.

<u>1 žingsnis</u> (pašalinti visas operacijas, išskyrus $\neg$, $\wedge$, $\vee$).

$(p / q) \leftrightarrow (\neg q / r) \sim$

$\sim \neg (p \wedge q) \leftrightarrow \neg (\neg q \wedge r) \sim$

$\sim (\neg (p \wedge q) \rightarrow \neg (\neg q \wedge r)) \wedge (\neg (\neg q \wedge r) \rightarrow \neg (p \wedge q)) \sim$

$\sim ((p \wedge q) \vee \neg (\neg q \wedge r)) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee \neg (p \wedge q)) \sim$

<u>2 žingsnis</u> (įkelti neiginius į skliaustus)

$\sim ((p \wedge q) \vee q \vee \neg r) \wedge ((\neg q \wedge r) \vee \neg p \vee \neg q) \sim$ (suprastinkime, taikydami absorbavimo dėsnį)

$\sim (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \sim$

<u>3 žingsnis</u> (distributyvumo dėsnio taikymas)

$\sim (q \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (\neg r \wedge (\neg p \vee \neg q)) \sim$

$\sim (\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \sim$

$\sim (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \sim$

Gavę NDF, konstruojame TNDF, prijungdami fiktyvius kintamuosius prie elementarių konjunkcijų, naudodami logikos dėsnį $K \sim (K \wedge p) \vee (K \wedge \neg p)$, kur K – bet kokia formulė:

$\sim (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee$
$\quad \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$
$\quad \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \sim$ (sutraukime vienodus narius)

$\sim (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

2) Pirmi du žingsniai tokie patys, kaip 1 dalies sprendime, todėl gauname tą patį:

$(p / q) \leftrightarrow (\neg q / r) \sim$

$\sim (q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \sim$

– iš karto gauname NKF, distributyvumo dėsnio nebereikia taikyti. Dabar bus gauta TNKF, prijungiant fiktyvius kintamuosius prie elementarių disjunkcijų, naudojantis logikos dėsniu $D \sim (D \vee p) \wedge (D \vee \neg p)$, kur D – bet kokia formulė:

$\sim (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.

3 užduotis.

Rasti formulės

$$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((q \wedge r) \rightarrow (p \wedge r))$$

TNDF, naudojantis logikos dėsniais.

Sprendimas.

Visų pirma konstruojame NDF.

<u>1 žingsnis</u> (pašalinti visas operacijas, išskyrus $\neg$, $\wedge$, $\vee$).

$(\neg p \to \neg q) \to ((q \wedge r) \to (p \wedge r)) \sim$

$\sim \neg(p \vee \neg q) \vee (\neg(q \wedge r) \vee (p \wedge r)) \sim$

2 žingsnis (įkelti neiginius į skliaustus)

$\sim (\neg p \wedge q) \vee ((\neg q \vee \neg r) \vee (p \wedge r)) \sim$ (kur galima, nuimame skliaustus)

$\sim (\neg p \wedge q) \vee \neg q \vee \neg r \vee (p \wedge r) \sim$

Gauname NDF, sudarytą iš keturių elementarių konjunkcijų: $\neg p \wedge q$, $\neg q$, $\neg r$, $p \wedge r$, todėl trečio žingsnio ir nebereikia. Dabar galime bandyti prastinti, o galime ir iš karto bandyti gauti TNDF. Pasirinkę pastarąjį būdą, prijunkime trūkstamus kintamuosius. Ten, kur trūksta dviejų kintamųjų, iš pradžių prijungime vieną, paskui kitą.

$\sim (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee$

$\vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee$ (prijungėme p prie $\neg q$)

$\vee (p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee$ (prijungėme p prie $\neg r$)

$\vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \sim$

$\sim (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee$

$\vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$ (prijungėme r prie $p \wedge \neg q$)

$\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$ (prijungėme r prie $\neg p \wedge \neg q$)

$\vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$ (prijungėme q prie $p \wedge \neg r$)

$\vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$ (prijungėme q prie $\neg p \wedge \neg r$)

$\vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \sim$ (sutraukime vienodus narius)

$\sim (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$

$\vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$.

Gauname visas 8 galimas konjunkcijas iš 3 kintamųjų – tai reiškia, kad formulė yra tapačiai teisinga.

O formulės TNKF neegzistuoja.

4 užduotis.

Rasti formulės

$$\neg (p \wedge (q \vee r)) \to ((p \wedge q) \vee r)$$

TNKF, naudojantis logikos dėsniais.

Sprendimas.

Visų pirma konstruojame NKF.

1 žingsnis (pašalinti visas operacijas, išskyrus $\neg$, $\wedge$, $\vee$).

$\neg (p \wedge (q \vee r)) \to ((p \wedge q) \vee r) \sim$

$\sim (p \wedge (q \vee r)) \vee ((p \wedge q) \vee r) \sim$

Antro žingsnio (įkelti neiginius į skliaustus) nereikia.

3 žingsnis (distributyvumo dėsnio taikymas). Įkelkime r į skliaustus:

$\sim (p \wedge (q \vee r)) \vee ((p \vee r) \wedge (q \vee r)) \sim$ (prastiname: iškeliame $q \vee r$)

$\sim (q \vee r) \wedge (p \vee (p \vee r)) \sim$ (prastiname: atskliaudžiame)

$\sim (q \vee r) \wedge (p \vee p \vee r) \sim$ (prastiname: sutraukiame)

$\sim (q \vee r) \wedge (p \vee r) \sim$

Gavome NKF. Gaukime TNKF:

$\sim (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$ (sutraukime vienodus narius)

$\sim (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

Gavome formulės TNKF.

Ar galime pasakyti, kokia bus formulės TNDF? Į TNKF įeina trys elementarios disjunkcijos, todėl ši formulė su trimis interpretacijomis įgyja reikšmę k. Su likusiomis 5 interpretacijomis ji įgyja reikšmę t, todėl į jos TNDF įeina 5 elementarios konjunkcijos. Užrašykime jos TNDF. Į TNKF įeinančios elementarios disjunkcijos atitinka šias tris interpretacijas: p=k, q=k, r=k; p=t, q=k, r=k; p=k, q=t, r=k. Tai iš likusių penkių interpretacijų (p=t, q=t, r=t; p=t, q=t, r=k; p=t, q=k, r=t; p=k, q=t, r=t; p=k, q=k, r=t) reikia gauti po elementarią konjunkciją, todėl formulės TNDF yra

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r).$$