Ketvirtos pratybos

1 užduotis

Ar sąryšis refleksyvus, antirefleksyvus, simetrinis, antisimetrinis, tranzityvus, ekvivalentumo, negriežtos tvarkos, griežtos tvarkos ? Jei tvarkos, ar aibė visiškai sutvarkyta ? Jei ekvivalentumo, rasti ekvivalentumo klases.

1) Sąryšis žmonių aibėje: a R b $\Leftrightarrow$ “a ir b yra vienmečiai”.
2) Sąryšis žmonių aibėje: “a ir b turi tą patį senelį arba tą pačią senelę”.
3) Sveikųjų skaičių aibėje **Z**: “a = |b|”.
4) Aibėje **N**\{0}: “a | b” (t.y. “a dalina b (be liekanos)”, pavyzdžiui, 3 dalina 6, o 4 nedalina 6).
5) Aibės D poaibių aibėje P(D), kur D – bet kokia aibė, $|D| \geq 2$: “$A \subset B$” (t.y. $A \subseteq B$ ir $A \neq B$).

Trumpas sprendimas

1) Refleksyvus: ar kiekvienas žmogus a yra vienmetis su pačiu savimi? Taip.
   Antirefleksyvus: ar neegzistuoja žmogaus, kuris yra vienmetis su pačiu savimi? Egzistuoja. Nėra antirefleksyvus.
   Simetrinis: ar visiems žmonėms a ir b iš to, kad a su b yra vienmečiai, išplaukia, kad ir b su a yra vienmečiai? Taip.
   Antisimetrinis: ar visiems žmonėms a ir b iš to, kad a ir b yra vienmečiai bei b ir a yra vienmečiai, išplaukia, kad a ir b yra tas pats asmuo? Ne.
   Tranzityvus: ar visiems žmonėms a, b ir c iš to, kad a ir b yra vienmečiai bei b ir c yra vienmečiai, išplaukia, kad a ir c yra vienmečiai? Taip.
   Yra ekvivalentumo, nėra tvarkos.
   Ekvivalentumo klasės yra tokios: aibė žmonių, kuriems po 0 metų, aibė žmonių, kuriems po 1 metus, …, aibė žmonių, kuriems po *i* metų, …
2) Refleksyvus: ar kiekvienas žmogus a turi tą patį senelį arba tą pačią senelę kaip ir jis pats? Taip.
   Antirefleksyvus: ar neegzistuoja žmogaus, kuris turi tą patį senelį arba tą pačią senelę kaip ir jis pats? Egzistuoja. Nėra antirefleksyvus.
   Simetrinis: ar visiems žmonėms a ir b iš to, kad a ir b turi tą patį senelį arba tą pačią senelę, išplaukia, kad ir b ir a turi tą patį senelį arba tą pačią senelę? Taip.
   Antisimetrinis: ar visiems žmonėms a ir b iš to, kad a ir b turi tą patį senelį arba tą pačią senelę bei b ir a turi tą patį senelį arba tą pačią senelę, išplaukia, kad a ir b yra tas pats asmuo? Ne.
   Tranzityvus: ar visiems žmonėms a, b ir c iš to, kad a ir b turi tą patį senelį arba tą pačią senelę bei b ir c turi tą patį senelį arba tą pačią senelę, išplaukia, kad a ir c turi tą patį senelį arba tą pačią senelę? Ne, nes, pavyzdžiui, jei a ir b turi tą patį senelį, ir b ir c turi tą patį senelį, tai tie seneliai gali būti skirtingi (iš tėvo ir iš motinos pusės), todėl a ir c neturės to pačio senelio.
   Nėra ekvivalentumo, nėra tvarkos.
3) Refleksyvus: ar a = |a| kiekvienam a$\in$ **Z**? Ne, pavyzdžiui, $-1 \neq |-1|$.
   Antirefleksyvus: ar neegzistuoja a$\in$ **Z** tokio, kad a = |a|? Egzistuoja, pavyzdžiui, 1=|1|. Nėra antirefleksyvus.
   Simetrinis: ar visiems a,b$\in$ **Z** iš to, kad a = |b|, išplaukia, kad ir b = |a|? Ne, pavyzdžiui, jei a=1, b=-1.
   Antisimetrinis: ar visiems a,b$\in$ **Z** iš to, kad a = |b| bei b = |a|, išplaukia, kad a=b? Taip, nes iš to, kad a = |b|, išplaukia, kad $a \geq 0$, todėl b = |a| = a.
   Tranzityvus: ar visiems a,b,c$\in$ **Z** iš to, kad a = |b| bei b = |c|, išplaukia, kad a = |c|? Taip, nes iš to, kad b = |c|, išplaukia, kad $b \geq 0$, todėl a = |b| = b = |c|.
   Nėra ekvivalentumo, nėra tvarkos.

4) Refleksyvus: ar a | a kiekvienam a$\in$ **N**? Taip.
   Antirefleksyvus: ar neegzistuoja a$\in$ **N** tokio, kad a | a? Egzistuoja. Nėra antirefleksyvus.
   Simetrinis: ar visiems a,b$\in$ **N** iš to, kad a | b, išplaukia, kad ir b | a? Ne, pavyzdžiui, jei a=3, b=6.
   Antisimetrinis: ar visiems a,b$\in$ **N** iš to, kad a | b bei b | a, išplaukia, kad a=b? Taip. Beje, sveikųjų skaičių aibėje šis sąryšis nėra antisimetrinis, nes, pavyzdžiui, iš to, kad 5 | -5 ir –5 | 5, neišplaukia, kad 5 = -5. Matome, kad sąryšio savybės priklauso ne tik nuo jo apibrėžimo, bet ir nuo aibės, kurioje jis apibrėžtas.
   Tranzityvus: ar visiems a,b,c$\in$ **N** iš to, kad a | b bei b | c, išplaukia, kad
   a | c? Taip.
   Nėra ekvivalentumo, yra negriežtos tvarkos, nėra griežtos tvarkos.
   Aibė **N** su šiuo tvarkos sąryšiu nėra visiškai sutvarkyta, nes, pavyzdžiui, nei 3 dalina 5, nei 5 dalina 3.
5) Jei D = {a, b, …}, tai P(D) = {$\varnothing$, {a}, {b}, …, {a, b}, …, D}.
   Refleksyvus: ar A $\subset$ A kiekvienam A$\in$ P(D)? Ne, nes A $\subset$ A reiškia, kad A $\neq$ A.
   Antirefleksyvus: ar neegzistuoja A$\in$ P(D) tokio, kad A $\subset$ A? Neegzistuoja. Yra antirefleksyvus.
   Simetrinis: ar visiems A,B$\in$ P(D) iš to, kad A $\subset$ B, išplaukia, kad ir B $\subset$ A? Ne. Pavyzdžiui, {a} $\subset$ {a, b}, bet ne {a, b} $\subset$ {a}.
   Antisimetrinis: ar visiems A,B$\in$ P(D) iš to, kad A $\subset$ B bei B $\subset$ A, išplaukia, kad A = B? Taip. Kodėl? Kad ir kokie būtų A,B$\in$ P(D), jei A $\subset$ B, tai tikrai nebus B $\subset$ A, ir atvirkščiai, todėl prielaidos A $\subset$ B ir B $\subset$ A yra prieštaringos (t.y. jų konjunkcija yra klaidinga), o iš klaidingo teiginio gali išplaukti bet kas, įskaitant ir lygybę A = B. Taigi, šis sąryšis yra antisimetrinis. Galima samprotauti ir kitaip. Pasinaudoję kontrapozicijos dėsniu $p \to q \sim \neg q \to \neg p$ ir De Morgano dėsniu, gauname, kad antisimetriškumo savybė $(aRb \wedge bRa \to a=b)\ \forall a,b\in A$ gali būti užrašyta taip: $(a\neq b \to \neg(aRb) \vee \neg(bRa))\forall a,b\in A$, t.y. visi skirtingi aibės A elementai a ir b gali būti susieti sąryšiu tik vienu būdu: aRb arba bRa, bet ne abiem iš karto. Mūsų atveju taip ir yra: imdami dvi skirtingas aibes A ir B iš aibės D poaibių aibės P(D), gauname, kad A $\subset$ B arba B $\subset$ A, bet ne abu iš karto. Todėl sąryšis antisimetrinis.
   Tranzityvus: ar visiems A,B,C$\in$ P(D) iš to, kad A $\subset$ B bei B $\subset$ C, išplaukia, kad
   A $\subset$ C? Taip.
   Nėra ekvivalentumo, nėra negriežtos tvarkos, yra griežtos tvarkos.
   Aibė **N** su šiuo tvarkos sąryšiu nėra visiškai sutvarkyta. Kodėl? Aibėje D yra bent du elementai. Imkime bet kuriuos du jos elementus ir pažymėkime a ir b. Tada poaibiai {a} ir {b} nėra palyginami.

Namų darbai

1) Sąryšis žmonių aibėje: “a sveria daugiau už b”,
2) Sveikųjų skaičių aibėje **Z**: “a = b + 1”.

Atsakymai

1) Ne, taip, ne, taip, taip, ne, ne, taip, taip.
2) Ne, taip, ne, taip, ne, ne, ne, ne.

2 užduotis

Nustatyti, kurie loginiai kintamieji esminiai, kurie fiktyvūs duotoje formulėje, užrašyti ekvivalenčią formulę, kurioje būtų tik esminiai kintamieji.

1) Formulė duota teisingumo reikšmių lentele (žr. dešinėje).

p	*q*	*r*	*Q(p,q,r)*
t	*t*	*t*	*k*
t	*t*	*k*	*t*
t	*k*	*t*	*k*
t	*k*	*k*	*t*
k	*t*	*t*	*t*
k	*t*	*k*	*t*
k	*k*	*t*	*t*
k	*k*	*k*	*t*

2) $Q(p,q,r) := (p \to (p \vee q)) \to \neg r$

Sprendimas

1) p – esminis. Matome tai iš 1 ir 5 eilučių, nes jose skiriasi tik p reikšmė, kitų kintamųjų nesiskiria, o formulės reikšmė irgi keičiasi.

q – fiktyvus. Tai gauname, patikrinę visas eilučių poras (1 ir 3, 2 ir 4, 5 ir 7, 6 ir 8), kur skiriasi tik q reikšmės – formulės reikšmė jokioje iš tų porų nesikeičia.

r – esminis (1 ir 2 eil.).

Kad užrašytume ekvivalenčią formulę, kurioje būtų tik esminiai kintamieji, nutriname nereikalingus stulpelius su fiktyviais kintamaisiais (t.y. kintamojo q stulpelį), iš besikartojančių eilučių paliekame tik po vieną, ir gauname tokią teisingumo reikšmių lentelę

p	*r*	*Q(p,r)*
t	*t*	*k*
t	*k*	*t*
k	*t*	*t*
k	*k*	*t*

pagal kurią galima užrašyti formulės NDF, NKF, arba šiaip atspėti formulę. Šiuo atveju lengva pastebėti, kad tai Šeferio funkcijos teisingumo reikmių lentelė, taigi, formulė bus $p \mid r$. Jos NDF (iš lentelės) būtų $(p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg r)$, o NKF $\neg p \vee \neg r$ (atsakymui užtenka nurodyti bet kurią iš šių trijų formulių).

2) Sudarome teisingumo reikšmių lentelę:

p	*q*	*r*	*Q(p,q,r)*
t	*t*	*t*	*k*
t	*t*	*k*	*t*
t	*k*	*t*	*k*
t	*k*	*k*	*t*
k	*t*	*t*	*k*
k	*t*	*k*	*t*
k	*k*	*t*	*k*
k	*k*	*k*	*t*

p – fiktyvus (iš 1 ir 5, 2 ir 6, 3 ir 7 bei 4 ir 8 eilučių porų).

q – fiktyvus (iš 1 ir 3, 2 ir 4, 5 ir 7 bei 6 ir 8 eilučių porų).

r – esminis (1 ir 2 eilutės).

Išbraukę gauname

r	*Q(r)*
t	*k*
k	*t*

Formulė bus $\neg r$.

Namų darbai

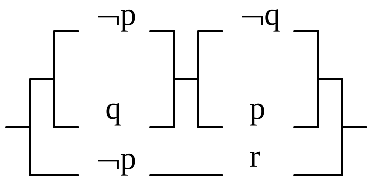
1) $(q \wedge p) \vee (\neg q \wedge r)$
2) $(p \wedge q) \vee p$

Atsakymai

1) Visi esminiai.
2) Tik p esminis.

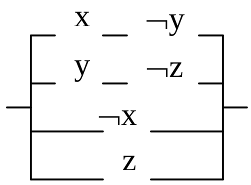
3 užduotis
Nubrėžti formulės $(p \oplus q) \to (\neg p \wedge r)$ kontaktinę schemą.

Sprendimas
Mokame nubrėžti kontaktinę schemą tik formulei, kurioje yra tik konjunkcija, disjunkcija, ir neiginiai prie kintamųjų, todėl iš pradžių reikia pertvarkyti formulę: pašalinti kitas operacijas ir įkelti neiginius į skliaustus.
$(p \oplus q) \to (\neg p \wedge r) \sim$
$\sim ((p \to q) \wedge (q \to p)) \vee (\neg p \wedge r) \sim$
$\sim ((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \vee (\neg p \wedge r)$
O dabar galime nubrėžti kontaktinę schemą:

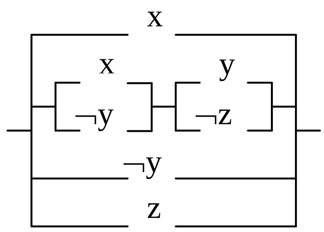


N. d. 1) $((x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z)$
2) $(x \to (y \to z)) \to (y \to \neg x)$
3) $(r \oplus \neg q) / (q \to p)$

Sprendimas
1) $(x \to y) \wedge (y \to z)) \to (x \to z) \sim$
$\sim \neg ((\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z)) \vee (\neg x \vee z) \sim$
$\sim (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg z) \vee \neg x \vee z$
Kontaktinė schema:



4 užduotis
Suprastinti kontaktinę schemą (paprastesnė yra schema, turinti mažiau kontaktinių elementų).



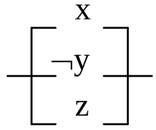
Sprendimas
Kad galėtume suprastinti, užrašome formulę, atitinkančią duotą schemą, ją suprastiname, ir nubrėžiame suprastintos formulės schemą.

$x \vee ((x \vee \neg y) \wedge (y \vee \neg z)) \vee \neg y \vee z \sim$ (pergrupuojame)
$\sim \quad (x \vee \neg y) \vee ((x \vee \neg y) \wedge (y \vee \neg z)) \vee z \sim$ (prirašome t)
$\sim \quad ((x \vee \neg y) \wedge t) \vee ((x \vee \neg y) \wedge (y \vee \neg z)) \vee z \sim$ (iškeliame)
$\sim \quad ((x \vee \neg y) \wedge (t \vee (y \vee \neg z))) \vee z \sim$
$\sim \quad ((x \vee \neg y) \wedge t) \vee z \sim$
$\sim \quad x \vee \neg y \vee z$

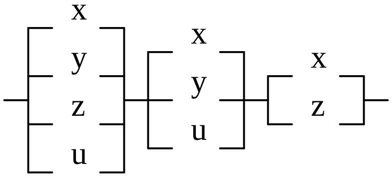
Beje, tą patį galėjome gauti ir greičiau, pasinaudoję absorbavimo dėsniu $p \vee (p \wedge q) \sim p$:

$(x \vee ((x \vee \neg y) \wedge (y \vee \neg z)) \vee \neg y \vee z \sim$ (pergrupuojame)
$\sim \quad (x \vee \neg y) \vee ((x \vee \neg y) \wedge (y \vee \neg z)) \vee z \sim$ (absorbuojame)
$\sim \quad (x \vee \neg y) \vee z \sim$
$\sim \quad x \vee \neg y \vee z$

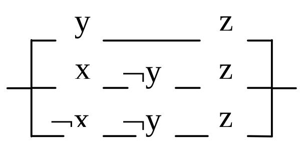
Taigi, suprastinta kontaktinė schema bus tokia:



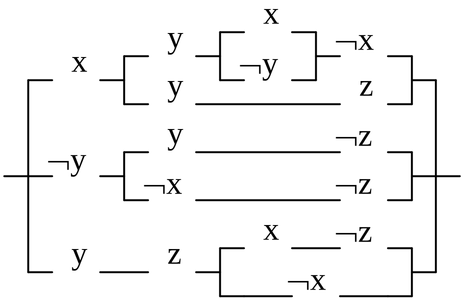
N. d. 1)



2)



3)



Sprendimas

1) $(x \vee y \vee z \vee u) \wedge (x \vee y \vee u) \wedge (x \vee z) \sim$

$\sim x \vee ((y \vee z \vee u) \wedge (y \vee u) \wedge z) \sim$

$\sim x \vee ((y \vee u \vee z) \wedge (y \vee u \vee k) \wedge z) \sim$ (iškeliame $y \vee u$)

$\sim x \vee (((y \vee u) \vee (z \wedge k)) \wedge z) \sim$

$\sim x \vee (((y \vee u) \vee k) \wedge z) \sim$

$\sim x \vee ((y \vee u) \wedge z)$

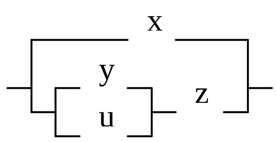
Vėlgi, jei pastebėtume, kad čia galima pritaikyti absorbavimo dėsnį $p \wedge (p \vee q) \sim p$, tai atsakymą gautume žymiai greičiau. Iš tikro, šiuo atveju $x \vee y \vee u$ būtų p, taigi, ($x \vee y \vee z \vee u$) $\wedge$ ($x \vee y \vee u$) būtų ($p \vee z$) $\wedge$ p, o tai ekvivalentu tiesiog p, t.y. $x \vee y \vee u$. Dėl to gautume:

$(x \vee y \vee z \vee u) \wedge (x \vee y \vee u) \wedge (x \vee z) \sim$

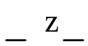
$\sim (x \vee y \vee u) \wedge (x \vee z) \sim$

$\sim x \vee ((y \vee u) \wedge z)$

Suprastinta kontaktinė schema bus:



Atsakymai

2)  3)