Turinys

Įvadas

Klasikinės mechanikos pagrindą sudaro trys Niutono dėsniai, o jos tyrimų objektą makroskopinių kūnų judėjimas, vykstantis greičiais mažais lyginant su Šviesos greičiu. Klasikinė mechanika yra skirstoma į **statiką** - mokslą apie kūnų pusiausvyrą veikiant jėgoms, **kinematiką -** mokslą apie geometrines kūnų judėjimo savybes ir **dinamiką** - mokslą apie kūnų judėjimą veikiant jėgoms. Visų šių mechanikos skyrių nagrinėjimas atliekamas naudojant matematikos metodus, dalis kurių atsirado ir išsivystė tam, kad patenkintų mechanikos poreikius.

Pagrindinių mechanikos dėsnių ir principų, o taip pat iš jų sekančių lygčių ir teoremų nagrinėjimas panaudojant matematinius metodus sudaro teorinės mechanikos pagrindą. Taigi, teorinė mechanika pasinaudojus matematika klasikinės mechanikos žinias perkelia Į aukštesnį apibendrinimo arba teorijos lygmenį, tame tarpe nurodydama ir bendrus konkrečių uždavinių sprendimo receptus. Teorinės mechanikos rezultatai, sąvokos ir metodai yra taikomi kvantinėje mechanikoje, elektrodinamikoje, reliatyvumo teorijoje, optikoje ir kitur. Taigi, tai yra pirmas teorinės fizikos kursas, kuris labai reikalingas tolimesnėse fizikos studijose supažindinant klausytoją su šiuolaikinės fizikos samprata apie mus supantį pasaulį.

I. Pagrindinės teorinės mechanikos sąvokos ir postulatai

Prieš suformuluodami Niutono dėsnius aptarsime svarbiausias teorinės mechanikos sąvokas ir apibrėšime teorijos veikimo ribas.

Žinome, kad sąveikaudami kūnai keičia savo padėtį kitų kūnų atžvilgiu, t.y. pasislenka erdvėje. Be to, santykinis padėties erdvėje pokytis pasižymi tam tikra trukme, t.y. kūnų poslinkis vyksta ne tik erdvėje, bet ir laike. Dėl šios priežasties svarbiu tampa atskaitos sistemų, kuriose galioja Niutono dėsniai klausimas. Laisvai pasirinktos atskaitos sistemos atžvilgiu erdvė nėra vienalytė ir izotropinė, todėl net nesąveikaujančio kūno skirtingos orientacijos ir padėtys erdvėje yra neekvivalenčios. Neekvivalentūs bendru atveju bus ir skirtingi laiko momentai. Savaime aišku, kad tokios erdvės ir laiko savybės labai apsunkina mechaninių reiškinių nagrinėjimą. Tačiau pasirodo, kad visada galima rasti tokią atskaitos sistemą, kurios atžvilgiu **erdvė** bus **izotropinė** ir **vienalytė**, o **laikas** - **vienalytis**. Tokia sistema yra vadinama **inercine sistema.** Tokioje atskaitos sistemoje jėgų neveikiamas ir tam tikru laiko momentu nejudantis kūnas tokioje pat būsenoje liks neribotą laiko tarpą.

Teiginys kad **egzistuoja begalinis skaičius inercinių atskaitos sistemų, judančiu viena kitos atžvilgiu tiesiaeigiai ir (tolygiai,** sudaro **Galilėjaus inercijos** arba **judėjimo reliatyvumo principo,** vieno iš svarbiausių teorinės mechanikos principų, turinį ir esmę.

Taigi, inercinės sistemos pasižymi tam tikru išskirtinumu, begalinio skaičiaus tokių sistemų mechaninis ekvivalentiškumas tuo pat metu rodo, kad neegzistuoja jokia "absoliuti" atskaitos sistema, kurią galima būtų laikyti geresne už kitas.

Panagrinėkime erdvės, kurioje vyksta mechaninis judėjimas savybes, šiuo tikslu pasirinkę du taškus, sistemos S atžvilgiu nusakomus radiusais vektoriais $\vec{r}_1$ ir $\vec{r}_2$,

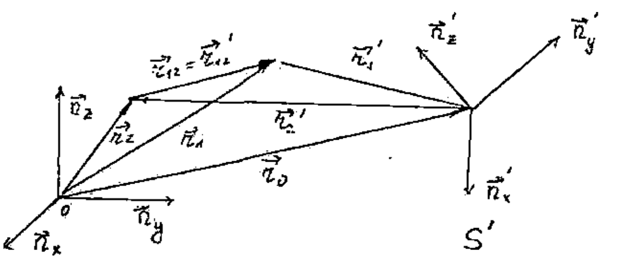
$$\vec{r}_1 = x_1\vec{n}_x + y_1\vec{n}_y + z_1\vec{n}_z$$

$$\vec{r}_2 = x_2\vec{n}_x + y_2\vec{n}_y + z_2\vec{n}_z$$

Tada sistemos S atžvilgiu atstumą tarp šių taškų galime užrašyti

$$r_{12} = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (1.1)$$

Eksperimentas rodo, kad makroskopinių kūnų judėjimo atveju, kai greičiai yra nedideli palyginus su šviesos greičiu. t.y. klasikinėje mechanikoje nagrinėjimu atveju, galime laikyti, kad **erdvės intervalas,** skirtingų **inercinių** sistemų **atžvilgiu yra tas pats.** Užrašykime matematine kalba šį svarbų teiginį, tuo tikslu pasirinkime kita sistemą S''. Joje (1.1) galime užrašyti



Pav. 1

$$r'_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|,$$

čia

$$\vec{r}'_2 = x'_2\,\vec{n}_x + y'_2\,\vec{n}_y + z'_2\,\vec{n}_z$$

$$\vec{r}'_1 = x'_1\,\vec{n}_x + y'_1\,\vec{n}_y + z'_1\,\vec{n}_z$$

Taigi. kaip bejudėtų atskaitos sistema S' sistemos S atžvilgiu atstumai r_{12} ir r_{12}' tuo pat laiko momentu yra lygūs t.y.

$$\left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left[(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (1.2)$$

čia $\Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ ir t.t.

arba $r_{12} = r'_{12}$

Matematikoje erdvės, kuriose atstumai tarp dviejų taškų yra nusakomi (1.2) sąryšiais yra vadinamos **Euklido** erdvėmis. Taigi (1.2) postulatas teigia, kad klasikinė mechanika nagrinėja judėjimą euklido erdvėse. Iš (1.2) seka labai svarbus sąryšis tarp dalelės radiusų vektorių skirtingų atskaitos sistemų atžvilgiu. Tegu $\vec{r}_0$, yra atskaitos sistemos S' radius vektorius sistemos S atžvilgiu, o $\vec{r}$ ir $\vec{r}'$ - taško radius vektoriai sistemų S ir S" atžvilgiu. Tada, laikydami, $\vec{r}_2 = \vec{r}, \vec{r}'_2 = \vec{r}', \vec{r}_1 = \vec{r}_0, \vec{r}_1 = 0$ iš (1.2) gauname $\vec{r} = \vec{r}'_0 + \vec{r}'$. Jeigu S' sistema juda sistemos S atžvilgiu greičiu $\vec{V}$ .tai $\vec{r}_0 = \vec{V}t$ ir

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \qquad (1.3)$$

Be to yra laikoma, kad laiko tėkmė yra ta pati abiems sistemoms

$$t = t' \qquad (1.4)$$

(1.3) ir (1.4) sąryšiai yra vadinami **Galilėjaus transformacijomis,** o jo reliatyvumo principą galime formuluoti, kaip reikalavimą, kad mechaninio judėjimo lygtys būtų invariantinės (nesikeistų) šių transformacijų atžvilgiu.

Viena iš labai svarbių teorinės mechanikos sąvokų yra **materialaus taško** arba dalelės sąvoka. Ši sąvoka reiškia objektą, kurio matmenų, aprašant jo judėjimą, galima nepaisyti. Materialus taškas (dalelė) yra charakterizuojamas mase m, radiusu vektoriumi $\vec{r}$, aprašančiu jo padėtį erdvėje, bei greičiu $\vec{v}$, kuris apibrėžiamas kaip pirmoji dalelės sindulio vektoriaus išvestinė pagal laiką

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Dabar suformuluosime **Niutono** dėsnius:

1-masis Niutono dėsnis teigia, kad jeigu daleles neveikia jokios jėgos, tai ji ir toliau judės tiesia linija ta pačia kryptimi ir pastoviu greičiu.

2-asis Jeigu dalelę veikia jėgos, tai jos impulso (kuris apibrėžiamas kaip dalelės masės ir greičio sandauga $p = mv$) kitimo greitis yra lygus jėgai veikiančiai dalelę.

3-asis Tuo atveju kai sąveikauja dvi dalelės, jėga, veikianti antrąją dalelę yra lygi savo dydžiui ir nukreipta priešinga kryptimi jėgai, veikiančiai pirmąją dalelę.

Matematikos kalba Niutono dėsnius galime užrašyti taip:

1) Jeigu $\vec{F} = 0,\ \vec{v} = const$ (1.5a)

2) $$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \quad (1.5b)$$

3) $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ arba $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ (1.5c)

čia $\vec{F}$ -jėga veikianti dalelę. $\vec{F}_{12}\left(\vec{F}_{21}\right)$jėgos veikiančios antrąją (pirmąją) dalelę.

Jeigu masė nekinta, tai (1.5b) galime perrašyti

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}$$

čia $\vec{a}$ - dalelės pagreitis.

Nesunku matyti, kad 1-masis Niutono dėsnis susiveda į jau minėtą Galilėjaus inercijos principą, iš kurio ir kilęs "inertinės sistemos" terminas.

Masė apibrėžiama (1.5b) lygtimi vadinama **inertine mase.** Inertinė masė yra proporcinga gravitacinei masei, kuri savo ruožtu yra proporcinga dalelės svoriui. Šių masių ekvivalentiškumas seka iš bendrosios reliatyvumo teorijos (ją patvirtina eksperimentas). Nesigilindami į konkretų jėgų pavidalą gausime keletą svarbių išvadų. Tegu turime dviejų dalelių sistemą, kurioje antrąją dalelę veikia jėga $\vec{F}_{12}$, *o* pirmąją - $\vec{F}_{21}$. Iš (1.5c) gauname

$$\int_{t'}^{t''}\left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}\right)dt = 0 \quad (1.6)$$

Iš (1.5b) seka, kad

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\left(m_1\vec{v}_1\right)}{dt}; \vec{F}_{21} = \frac{d\left(m_2\vec{v}_2\right)}{dt} \quad (1.7)$$

Įstatę $\vec{F}_{12}$ ir $\vec{F}_{21}$ išraiškas į (1.6) gauname

$$\left[m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right]_{t'}^{t''} = 0 \quad (1.8)$$

$$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}''_1 + \vec{p}''_2 \quad (1.9)$$

Čia "štrichai" nurodo laiko momentą.

(1.9) lygybė išreiškia **impulso tvermės dėsnį,** kuris kaip mes parodėme galioja izoliuotai dviejų sąveikaujančių dalelių sistemai.

2) Panagrinėkime dalelės, kurią veikia jėga $\vec{F}$ judėjimą ir raskime integralo reikšmę

$$I = \int_{t'}^{t''}\left(\vec{F}d\vec{r}\right) \quad (1.10)$$

Pasinaudoję (1.5b) ir greičio apibrėžimu, gausime

$$I = \int m\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}dt = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}\Big|_{t'}^{t''} = T'' - T' \quad (1.11)$$

čia

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}}\dot{\vec{r}}) \quad (1.12)$$

dalelės kinetinė energija.

Kadangi $\left(\vec{F}\vec{v}\right)$ tai darbas, kurį atlieka dalelė per laiko vienetą, veikiama jėgos $\vec{F}$ tai iš (1.11) seka, kad darbas, kurį atlieka jėga $\vec{F}$, veikdama dalelę laiko intervale nuo *t'* iki *t''* yra lygi dalelės kinetinės energijos pokyčiui.

Įvesime **konservatyvios jėgos** sąvoką.
Konservatyviąja vadinama **jėga,** kuri kiekviename taške gali būti gauta iš potencinės funkcijos ją diferencijuojant

$$\vec{F} = -\nabla U \qquad (1.13)$$

Šis sąryšis dar vadinamas Stokso konservatyvumo sąlyga. Čia

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{n}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{n}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{n}_z \qquad (1.14)$$

Konservatyvios jėgos atveju

$$\int_{t'}^{t''}\left(\vec{F}d\vec{r}\right) = -\int_{t'}^{t''}\left(\nabla U d\vec{r}\right) = -U'' + U' \qquad (1.15)$$

Turėdami omeny (1.10) ir (1.11), gauname

$$T''-T' = -U''+U'$$

$$T''+U''=T'+U' \qquad (1.16)$$

Iš (1.16) seka, kad tuo atveju kai potencinė energija nuo laiko tiesiogiai nepriklauso, pilna dalelės energija *E,* apibrėžiama kinetinės ir potencinės energijos suma

$$E = T + U \qquad (1.17)$$

yra pastovi (konstanta).
Dydžiai, kurie nekinta laike dalelei judant vadinami **judėjimo integralais** arba **tvariais dydžiais.**
Taigi, (1.16) išreiškia uždarų sistemų **energijos tvermės dėsnį** arba kitaip tariant pilna dalelės energija yra **judėjimointegralas.**
Iš (1.15) taip pat matyti, kad konservatyviųjų jėgų atveju, integralas kairėje pusėje nepriklauso nuo kelio, kuriuo juda dalelė, bet priklauso nuo jos padėties pradiniu ir galiniu nagrinėjamo laiko intervalo momentu. Aišku, kad jeigu taip nebūtų, tai negalėtume įvesti **potencinės energijos funkcijos** sąvokos.

II. Judėjimo lygtys ir jų integravinias.

Dalelės judėjimas yra laikomas pilnai apibrėžtu. Jeigu galime nusakyti jos padėtis erdvėje bet kuriuo laiko momentu. Taigi, vien žinoti koordinates tam tikru laiko momentu maža, jeigu jos greitis nėra apibrėžtas, kadangi nuo jo priklausys dalelės koordinatės sekančiu laiko momentu. Taigi, kad dalelės judėjimas būtų pilnai apibrėžtas reikia žinoti jos **greitį** ir **koordinates** tuo pat metu..Šių dydžių pakanka, kad galėtume vienareikšmiai nustatyti **pagreitį.** Sąryšiai tarp pagreičio, dalelės koordinačių ir greičio yra vadinami **judėjinio lygtimis.** Funkcijos $\vec{r}(t)$ atžvilgiu tai antros eilės diferencialinės lygtys, kurias integruodami nustatome funkciją $\vec{r}(t)$, arba dalelės judėjimo dėsnį.

II.1 Judėjimo lygčjų integravimas.

Egzistuoja atvejai, kai judėjimo lygčių sprendinį galima užrašyti bendru pavidalu nesigilinant į konkretų potencinės funkcijos pavidalą.

II.1.1 Vienmatis materialaus taško judėjimas veikiant konservatyviai jėgai.

Šiuo atveju galioja energijos tvermės dėsnis ir judėjimo lygties jau galime neberašyti. Pilnos energijos išraiška yra lygi

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) \qquad (1.18)$$

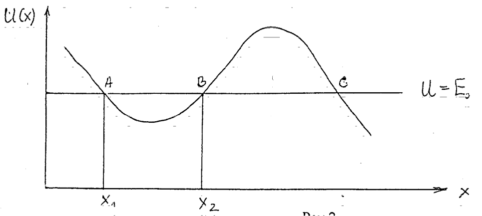
arba

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)} \qquad (1.19)$$

Tai pirmos eilės diferencialinė lygtis, kurią integruojame atskirdami kintamuosius ir gauname

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}} + const \qquad (1.20)$$

(1.20) išraiškoje dviejų laisvai pasirenkamų konstantų, kurios atsiranda sprendžiant judėjimo lygtį, rolę vaidina pilna energija *E* ir integravimo konstanta. Čia taip pat matome, kad judėjimo integralo buvimas leidžia sumažinti judėjimo lygties laipsnį. Kadangi kinetinė energija yra teigiamas dydis, tai judėjimo metu pilna energija visada bus didesnė negu potencinė energija, arba kitaip tariant, judėjimas vyks tik tose erdvės dalyse, kur *U(x)<E.*



Pav.2

Tegu
Šiuo ε . Taškais *A, B* ir C, kūnuose *U(x)=E,* apibrėžiamos judėjimo ribos.
Šiuos: :dvėje apribotoje dviem tokiais taškais (pvz. *A* ir *B* jis vadinamas **finitiniu judėjimu.** Jeigu judėjimas neribojamas arba ribojamas tik vienu tašku (pvz. C), tai **- infinitinis judėjimas,** t. yra dalele juda į begalybę.
Vienmatis finitinis judėjimas yra vadinamas **svyruojamuoju judėjimu.** Jo metu dalelė atlieka periodiškai pasikartojančius judesius tarp taškų x_1 ir x_2, taip vadinamoje **potencinėje duobėje** *AB,* praeidama kelią nuo x_1 iki x_2 per tą patį laiko tarpą kaip ir nuo JQ iki *Xi.* Dalelės svyravimo periodas, arba laikas, per kurį ji įveiks atstumą nuo x_1 iki x_2 ir atgal yra lygus dvigubam laikui per kurį ji įveiks atstumą nuo $x_1$iki x_2. Iš (1.20) seka, kad svyravimo periodas lygus

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \qquad (1.20a)$$

Čia x_1 ir x_2-lygties $U(x)=E$ šaknys.

II.1,2. Materialaus taško judėjimas centrinių jėgų lauke.

Centrinėmis jėgomis yra vadinamos jėgos, kurios-veikia išilgai tiesės jungiančios kūną, kurį veikia jėga, su kūnu, kuris tą jėgą sukelia. Kaip jau matėme, vienos dalelės atveju, tai jėga nukreipta tiese, jungiančia dalelę ir tam tikrą fiksuotą tašką vadinamą **jėgos lauko centru.** Pasirinkę koordinačių pradžią jėgos lauko centre, jėgą $\vec{F}$, veikiančią nagrinėjamąją dalelę galime užrašyti

$$\vec{F} = f(x, y, z) \cdot \vec{r} \qquad (1.21)$$

Bendru atveju; tai nebūtinai konservatyvi jėga. Tuo atveju, kai jėgą galime laikyti konservatyviąja, funkcija *f(x,y,z),* įeinanti i (1.21) išraišką, turi priklausyti tik nuo atstumo iki koordinačių sistemos pradžios, t.y. nuo $\vec{r}$

$$\vec{F} = f(r) \cdot \vec{r} \qquad (1.22)$$

Šito teiginio teisingumu galime įsitikinti sąryšio (1.13) pagalba, galiojančio konservatyviųjų jėgų atveju. Iš tikrųjų, panagrinėkime jėgos $\vec{F}$ komponentes

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (1.23)$$

Kad būtų tenkinama (1.21) sąlyga, dešiniąsias (1.33) puses sferinėse koordinatėse galime užrašyti

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = fr \sin\theta \sin\varphi; \qquad -\frac{\partial U}{\partial x} = fr \sin\theta \cos\varphi; \qquad -\frac{\partial U}{\partial z} = fr \cos\theta \qquad (1.24),$$

nes

$$\vec{F} \sim \vec{r}; \qquad x = r \sin\theta \cos\varphi; \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi; \qquad z = r \cos\theta$$

Iš čia seka

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -f \cdot r; \qquad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0; \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \qquad (1.25)$$

Taigi, funkcija U priklauso tik nuo radiuso vektoriaus $\vec{r}$ Iš (1.25) pirmos lygybės matome, kad (1.22) bus tenkinama tik tuo atveju, kai U apibrėšime taip:

$$U(\vec{r}) = U(r) = -\int_0^r r \cdot f(r) dr \qquad (1.26)$$

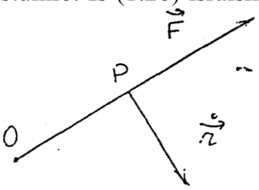
Centrinės jėgos pavyzdžiais gali būti izotropinis harmoninis osciliatorius, kurio potencinė energija užrašoma

$$U = \frac{1}{2} a \cdot r^2 \qquad (1.27)$$

a - konstanta, ir kuloninis arba gravitacinis laukai:

$$U = -kr \qquad (1.28)$$

Jeigu į (1.28) išraišką įeinanti konstanta k teigiama, tai turėsime traukos jėgą, jeigu neigiama - atostūmio. Iš (1.28) išraiškos seka, kad jėga bus atvirkščiai proporcinga atstumo nuo koordinačių pradžios kvadratui. Iš antrojo Niutono dėsnio seka, kad nagrinėjamu atveju dalelės pagreitis yra nukreiptas veikiančios jėgos kryptimi $rd\varphi$. Dalelės, kuri juda veikiama jėgos (1.22), pagreitis ir greitis pradiniu ir visais kitais laiko momentais bus plokštumoje, einančioje per koordinačių pradžią ir pradinio dalelės greičio vektorių (žiūr. Pav.3). Ši plokštuma vadinama **orbitos plokštuma,** o dalelės trajektorija - **orbita.** Šį teiginį galime Įrodyti ir pasinaudoję dalelės judesio kiekio momento, apibrėžiamo sąryšiu



Pav3 O -lauko centras,
P – dalelės buvimo taškas.

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] = [\vec{r}, m \cdot \vec{r}] \qquad (1.29)$$

pagalba**.** Iš tikrųjų, judesio kiekio momento išvestinė pagal laiką

$$\dot{\vec{L}} = \left[\dot{\vec{r}}, m \cdot \dot{\vec{r}}\right] + \left[\vec{r}, m \cdot \ddot{\vec{r}}\right] = \left[\vec{r}, f(x, y, z) \cdot \vec{r}\right] = 0 \qquad (1.30)$$

Taigi, **ccntrinių jėgų lauke judesio kiekio momento vektorins** $\vec{L}$ yra **judėjimo integralas.** Kadangi tai vektorius, tai visos trys jo komponentės irgi yra judėjimo integralai. Kadangi $\vec{L}$ nekinta laike, tai iš (1.29) seka, kad vektorius $\vec{r}$ visada bus plokštumoje, statmenoje $\vec{L}$, o tai savo ruožtu reiškia, kad dalelės orbita yra plokštumoje. Matome, kad dalelės judėjimo centrinių jėgų lauke uždavinys virsta **dvimačiu uždaviniu.** Pasirinksime dekarto koordinačių sistemą taip, kad Z ašis būtų nukreipta tvaraus vektoriaus $\vec{L}$, kryptimi, o plokštumoje xy įvesime polines koordinates r ir φ kurios su x ir y surištos sąryšiais

$$x = r \cos\varphi, \qquad y = r \sin\varphi \qquad (1.31)$$

Jėgos (1.31) veikiamai dalelei judėjimo lygtis $x.y$ koordinatėse galime užrašyti taip:

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{r}\frac{dU}{dr}; \qquad m\ddot{y} = -\frac{y}{r}\frac{dU}{dr} \qquad (1.32),$$

nes $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$; $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$, o $\frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{dU}{dr}\frac{x}{r}$ ir t.t. nes r nepriklauso nuo x ir y.

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{dx} = \frac{x}{r}$$

Jeigu L- absoliuti impulso momento reikšmė, o E jos pilna energija, tai iš (1.29) ir (1.17) seka, kad

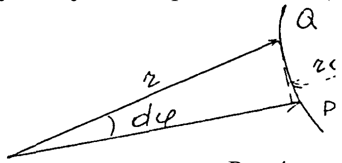
$$L_z = m\left(x\dot{y} - \dot{x}y\right), \quad E = \frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2 + \dot{x}^2\right) + U(r) \qquad (1.33)$$

Aišku, kad išraiškas (1.33) galime gauti ir tiesiogiai integruodami (1.32). Pasinaudoję polinėmis koordinatėmis, (1.33) galime perrašyti

$$L_z = mr^2\dot{\varphi} \qquad (1.34)$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi} + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \qquad (1.35)$$

(1.34) formulė išreiškia taip vadinamą **plotų dėsnį.** Kad taptų aiškesnė (1.34) išraiškos dešinės pusės fizikinė prasmė, panagrinėkime piešinėlį.



Pav.4

Tegu judėdama dalelė per laiko intervalą t, $t+dt$ pasislinko iš taško Q į tašką P. Iš piešinėlio matyti, kad dalelės radiusas vektorius per laiką dt nubrėžia plotą lygų - $\frac{1}{2}r^2 d\varphi$. Plotas, kurį nubrėžia radiusas vektorius per laiko vienetą yra vadinamas taško **sektoriniu greičiu.** Pažymėję nubrėžiamą plotą S ir įskaitę anksčiau pateiktus samprotavimus, (1.35) formulę bei faktą, kad judesio kiekio momentas tvarus, sektorinio greičio 2-tąją komponentę galime užrašyti

$$\sigma_z = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{L_z}{2m}$$

Kadangi judesio kiekio momentas yra tvarus, tai sektorinis greitis, aišku, irgi yra pastovus. Taigi, **daleles judančios centrinių jėgų lauke radiusas vektorius per lygius laiko tarpus nubrėžia vienodus plotus**. Nagrinėjant dalelių judėjimą gravitaciniame lauke (žiūr. 1.2.2.), šis rezultatas žinomas **antrojo Keplerio dėsnio vardu.**

Kaip ir vienmačio judėjimo atveju, uždavinį apie dalelės judėjimą centrinių jėgų lauke paprasčiau spręsti pasinaudojus tvermės dėsniais. Iš (1.35) gauname

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(r)\right) - \frac{L^2}{m^2 r^2}} \qquad (1.36)$$

toliau atskyrę kintamuosius ir integruodami, gauname

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} + const \qquad (1.37)$$

Užrašę (1.34) tokiu pavidalu

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2}dt$$

ir Įstatę dt išraišką iš (1.36), gausime trajektorijos lygtį:

$$\varphi = \int \frac{\frac{L}{r^2}dr}{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{L^2}{r^2}} + const \qquad (1.38)$$

(1.37) savo ruožtu netiesiogiai nusako kaip kinta radiusas vektorius nuo laiko. Čia taip pat reiktų pažymėti, kad (1.36) lygtis yra ekvivalentiška (1.19) lygčiai, aprašančiai taško tiesiaeigį judėjimą lauke,kurio potencinė energija (arba **efektyvinė energija)** yra lygi

$$U_{eff} = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \qquad (1.39)$$

Dydis $\frac{L^2}{2mr^2}$ vadinamas **išcentrine potencine energija**. Kaip ir taško tiesiaeigio judėjimo atveju, reikšmės, kurioms esant

$$U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E \qquad (1.40)$$

nusako dalelės judėjimo ribas centro atžvilgiu. Jeigu sąlyga (1.40) išpildyta, radialinis greitis $\dot{r} = 0$.

Kadangi kampinis greitis $\dot{\varphi} \neq 0$ tai reiškia, kad dalelė nesustoja ir toks taškas yra vadinamas **trajektorijos posūkio tašku**, kuriame funkcija *r(t)* iki tol didėjusi pradeda mažėti ir atvirkščiai. Iš čia, kaip ir vienmačio judėjimo atveju, seka, kad jeigu r reikšmės apribotos tik viena sąlyga $r \geq r_{\min}$, tai dalelės judėjimas **infinitinis**, t.y. jos trajektorija ateina iš begalybės ir vėl į ją nueina. Tuo atveju, kai r kitimas ribojamas $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ judėjimas yra **finitinis** ir dalelės trajektorija bus žiedo viduje, kurio vidinis radiusas yra lygus $r = r_{\min}$,o išorinis - $r = r_{\max}$. Tačiau tai dar nereiškia, kad dalelės trajektorija bus uždara kreivė. Per laiką, kurio metu r pakinta nuo r_{min} iki r_{max} ir po to vėl iki r_{min}, radiusas pasisuks kampu $\Delta\varphi$, lygiu

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E - U(r)\right] - \frac{L^2}{m^2 r^2}}} \qquad (1.41)$$

Todėl **trajektorijos uždarumo salyga** yra

$$\Delta\varphi = 2\pi m / n$$

čia m ir n sveikieji skaičiai. Tada po n laiko periodo pasikartojimų, taško radius vektorius, padaręs m pilnų apsisukimų, vėl sutaps su savo pradine reikšme. O tai reiškia, kad trajektorija bus uždara kreivė. Tačiau laisvai pasirinktam $U(r)$ esant $\Delta\varphi \neq 2\pi$ ir, todėl bendru atveju, taško, judančio centrinės jėgos lauke trajektorija nėra uždara kreivė. Egzistuoja du centrinių jėgų tipai, kai finitinio judėjimo trajektorijos yra uždaros. Tai jėgos, kurių potencinės funkcijos yra proporcingos 1/r ir r^2. Idomu, kad išcentrinės jėgos egzistavimas, būti $\vec{r} \to 0$ artėja į begalybę, kaip $\frac{1}{r^2}, (L \neq 0)$ veda prie to, kad dalelė negali prasiskverbti į lauko centrą netgi tada, kai jis pasižymi trauka. Dalelės "kritimo" į centrą atvejis galimas tik tada, kai potencinė energija pakankamai greit artėja į minus begalybę $\vec{r} \to 0$. Iš nelygybės T>0 arba

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - \frac{L_0^2}{2mr^2} - U(r) > 0$$

seka, kad r gali artėti į nulį tik tada, kai

$$r^2 U(r)\Big|_{r\to 0} < -\frac{L^2}{2m}$$

t. yra $U(r)$ turi $\to -\infty$ arba kaip $-\frac{\alpha}{r^2}$, kur $\alpha > L^2/2m$ arba kaip $1/r^n$ kaip $1/r^n$ kai $n>2$.

II.1,2.1. Keplerio uždavinys.

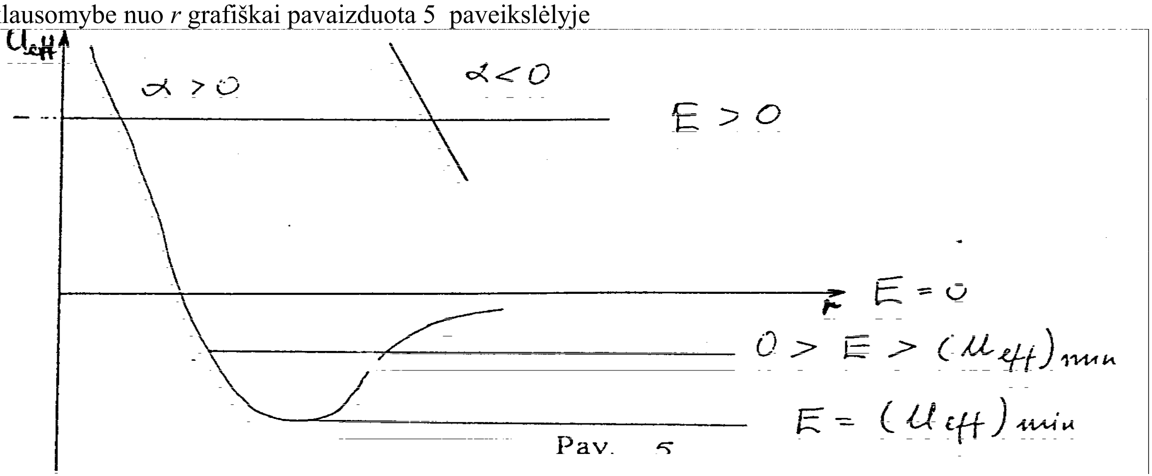
Kaip jau minėjome, fizikoje ypatingą reikšmę turi laukai, kurių potencinės funkcijos atvirkščiai proporcingos r (jėga proporcinga $\frac{1}{r^2}$). Tai gravitacinės traukos ir kuloninio elektrostatinio lauko atvejai. Pirmasis jų - traukos laukas, antrasis gali būti kaip traukos taip ir atostūmio laukas. Tegu potencinė funkcija yra lygi

$$U = -\frac{\alpha}{r} \qquad (1.42)$$

čia a - teigiama konstanta. Tada efektinės potencinės energijos

$$U_{eff} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \qquad (1.43)$$

priklausomybe nuo r grafiškai pavaizduota 5 paveikslėlyje



Pav. 5

Matome, kad kai $\vec{r} \to 0, U_{eff} \to \infty$ ir atvirkšč $\vec{r} \to \infty$ U_{eff} neigiamų reikšmių pusės artėja į nulį. Išdiferencijuokime U_{eff} pagal r ir prilyginkime gautą reiškinį nuliui ekstremumo taškas). Iš čia gausime r reikšmę

$$r = \frac{L^2}{\alpha m}$$

kuriai esant U_{eff}– minimali

$$\left(U_{eff}\right)_{min} = -\frac{\alpha^2 m}{2L^2}$$

Iš 5 pav. matyti, kad kai $E>0$ dalelės judėjimas infinitinis, o kai $E<0$ – finitinis.
Įstatę (1.42) į (1.38) ir suintegravę gausime trajektorijos lygtį

$$\varphi = \arccos\frac{\frac{L}{r} - \frac{ma}{L}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2a^2}{L^2}}} + const$$

Kampo φ atskaitos sistemą pasirinkime taip, kad konstanta būtų lygi nuliui ir įveskime pažymėjimus

$$p = \frac{L^2}{ma} \quad \text{ir} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{ma^2}} \qquad (1.46)$$

Tada dalelės trajektoriją galime užrašyti parametrine lygtimi

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon \cos\varphi \qquad (1.47)$$

Tuo atveju, kai $\varepsilon > 1$ lygtis (1.47) aprašo hiperbolę, kai $\varepsilon = 1$ - parabolę, kai $\varepsilon < 1$ - elipsę ir kai $\varepsilon = 0$- apskritimą. Tokiu būdu iš (1.47) seka, kad potenciniame lauke. $U = -\frac{a}{r}$ kal $a > 0$ (traukos laukas) dalelė judės:

hiperbole, jeigu jos pilna energija $E_0 > 0$,
parabole, jeigu $E_0 = 0$, (1.48)
elipse, jeigu $0 > E_0 > (U_{eff})_{min}$.
apskritimu jeigu $E_0 = (U_{eff})_{min}$.

Tuo atveju, kai a<0 (atostūmio jėgos) dalelė gali judėti tik hiperbole ($E_0 > 0$). Iš tikrųjų, jeigu $\alpha < 0$, tai $U_{eff} > 0$, $E_0 > 0$, $\varepsilon > 1$ ir dalelės trajektorija visada bus tik hiperbolė.

Detaliau panagrinėsime dalelės judėjimą elipse ($a > 0$, $0 > E_0 > (U_{eff})_{min}$, $\varepsilon < 1$). Iš lygties $U_{eff} = E_0$ įskaitę (1.46), galime rasti mažiausią ir didžiausią atstumus nuo lauko centro (elipsės fokuso)

$$r_{\min} = \frac{p}{1+\varepsilon} = a(1-\varepsilon), \qquad r_{\max} = \frac{p}{1-\varepsilon} = a(1+\varepsilon) \qquad (1.49)$$

ε - ekscentricitetas; a -elipsės didžioji pusašė.

Turėdami omeny žinomus iš analizinės geometrijos sąryšius tarp didžiosios ir mažosios elipsės pusašių a ir b ir trajektorijos parametrų ε ir p

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} \qquad \text{ir} \qquad b = \frac{p}{1+\varepsilon^2} \qquad (1.50)$$

galime juos susieti su dalelės judėjimą ir lauką charakterizuojančiais dydžiais. Tuo tikslu laikydami $E < 0$ įstatę (1.46) į (1.50) gauname

Taigi, dalelei judant elipse, $a = \frac{\alpha}{2|E_c|}$, $b = \frac{L_c}{\sqrt{2m|E_c|}}$ (1.51) didžioji jos pusašė priklauso tik nuo dalelės energijos, bet nepriklauso nuo jos judesio kiekio momento L.

Dalelės judėjimo elipse laiką nustatyti patogu pasinaudojus judesio kiekio momento tvermės dėsniu (1.35a) arba išvada apie sektorinio greičio pastovumą. Suintegravę (1.35a)

$$2m\int_0^{S_0} ds = L\int_0^T dt \qquad (1.52)$$

čia $S_0 = \pi ab$ - elipsės plotas, T – dalelės judėjimo periodas. Gauname

$$T = \pi a\sqrt{\frac{2m}{|E|}} \qquad (1.53)$$

Pakėlę abi lygybės puses kvadratu ir įrašę a reikšmę iš (1.51) gauname

$$T^2 = \frac{\pi^2 a^3}{4|E|^3 a} = 4\pi^2 \frac{ma^3}{\alpha} \qquad (1.54)$$

Iš (1.54) seka, kad dalelės judėjimo elipse periodas priklauso tik nuo dalelės pilnos energijos (arba nuo didžiosios pusašės ilgio) ir nepriklauso nuo dalelės judesio kiekio momento (arba mažosios elipsės pusašės ilgio).

Lygtys (1.47), (1.35a) ir (1.54) išreiškia tris Keplerio dėsnius, kuriuos jis nustatė empiriniu būdu, nagrinėdamas planetų judėjimo stebėjimo rezultatus:

- Kiekviena planeta juda elipse, kurios viename iš fokusų yra Saulė. $\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi$
- Sektorinis planetos greitis Saulės atžvilgiu yra pastovus. $\sigma = \frac{L}{2m}$
- Planetų sukimosi periodų kvadratų ir jų orbitų didžiųjų pusašių kubų santykiai yra pastovūs ir vienodi visoms planetoms.

III. Dalelių sistemos judėjimas.
Šiame skyriuje susipažinsime su didelio skaičiaus dalelių judėjimo ypatumais, panagrinėsime labai svarbius fizikos mokslo požiūriu dviejų dalelių judėjimo ir dalelių sklaidos uždavinius.
III.1. Daugiadalelinės sistemos.
Panagrinėsime sistemą, sudarytą iš dalelių *N* (materialių taškų), sąveikaujančių tarpusavyje tačiau nesąveikaujančių su kitais į sistemą neįeinančiais kūnais. Tokią sistemą vadiname **uždarąja sistema.** Skaitysime, kad jėga - $\vec{F}$ veikianti i-tąją dalelę gali būti gauta iš potencinės funkcijos $U(\vec{r}_i)$ lygybės

$$\vec{F}_i = -\nabla_i U(\vec{r}_i) \qquad (1.55)$$

pagalba, tada judėjimo lygtys turės pavidalą

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = -\nabla_i U(\vec{r}_i) \qquad (1.56)$$

čia m_i - dalelės masė, $\vec{r}_i$ -jos radiusas vektorius. $i = 1,2,...,N$ Iš prielaidos (1.55) seka išvada, kad nagrinėjamos sistemos energija

$$E = T + U = \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}^2{}_i + \sum_i U(\vec{r}_i) \qquad (1.57)$$

yra pastovi

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \sum_i m_i\left(\ddot{\vec{r}}_i \dot{\vec{r}}_i\right) + \sum_i \left(\dot{\vec{r}}_i \nabla_i U(\vec{r}_i)\right) = 0$$

Reikia pažymėti, kad energijos tvermės dėsnis galioja ne tik uždaroms sistemoms, bet ir sistemoms, kurios yra pastoviame išoriniame lauke. Mechaninės sistemos, kurių energija tvari yra vadinamos **konservatyviosiomis sistemomis.**
Susiaurinsime nagrinėjamų sistemų ratą laikydami, kad potencinę sistemos energiją galima išreikšti dalelių sąveikos potencinių energijų suma. Be to laikysime, kad tos potencinės funkcijos priklauso tik nuo atstumo tarp sąveikaujančių dalelių r_{ij}

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} U_{ij}(r_{ij}), U_{ij} = U_{ji}, U_{ii} = 0 \qquad (1.58)$$

Iš čia, galime daryti išvadą, kad jėga, veikianti kiekvieną iš dalelių, yra lygi visų centrinių jėgų veikiančių dalelę sumai, o tai reiškia, kad sistemoje veikiančios jėgos yra **adityvios.**
Kad įrodytume šį teiginį, pažymėsime, kad jcga $\vec{F}_{ij}$, veikianti i-jąją dalelę iš j-osios dalelės pusės yra gaunama taip

$$\vec{F}_{ij} = -\nabla_i U_{ij} = -\frac{dU_{ij}}{dr_{ij}}\nabla_i r_{ij} = -\frac{dU_{ij}}{dr_{ij}}\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \qquad (1.59)$$

čia $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$
Taigi jėga, veikianti I -jąją dalelę yra lygi

$$\vec{F}_i = -\nabla_i U(\vec{r}_i) = -\sum_j \nabla_i U_{ij} = \sum_j \vec{F}_{ij} \qquad (1.60)$$

iš kur ir seka teiginio teisingumas.
Uždaros sistemos atveju vienintelėmis jėgomis, veikiančiomis daleles yra dalelių sąveikos jėgos, todėl ne tik sistemos energija, bet ir sistemos impulsas *P* bei sistemos judesio kiekio momentas *L* bus judėjimo integralais. Iš tikrųjų, pasinaudoję (1.59), (1.60) ir (1.56) formulėmis sistemos impulsą P ir jo pokytį laike galime apibrėžti taip:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \qquad (1.61)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\sum_{ij} \frac{dU_{ij}}{dr_{ij}}\frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}} \qquad (1.62)$$

Sukeitus sumavimo indeksus vietomis dviguba suma (1.62) išraiškoje turi nepakisti. Iš kitos pusės, jeigu sukeisime indeksus i ir j vietomis, suma keis savo ženklą, nes $\vec{r}_{ij} = -\vec{r}_{ji}$;. Kadangi nagrinėjama suma yra lygi pačiai sau su priešingu ženklu, tai ji turi būti lygi nuliui. Iš čia seka, kad *P* nekinta laikui bėgant.
Pasinaudoję (1.59), (1.60) ir (1.56), užrašysime judesio kiekio momentą *L* ir jo išvestinę pagal laiką

$$\vec{L} = \sum_i m_i\left[\vec{r}_i \dot{\vec{r}}_i\right] \qquad (1.63)$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i m_i\left[\vec{r}_i \ddot{\vec{r}}_i\right] = -\sum_{i,j}\frac{dU_{ij}}{dr_{ij}}\left[\vec{r}_i, \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}\right] = \sum_{i,j}\frac{dU_{ij}}{dr_{ij}}\frac{\left[\vec{r}_i, \vec{r}_j\right]}{r_{ij}}$$

Iš panašių samprotavimų vėl plaukia, kad $\vec{L}$ nekinta laike.
III.2. Judėjimas masių centro atžvilgiu.
Uždaros mechaninės sistemos impulsas įgyja skirtingas reikšmes skirtingų inertinių atskaitos sistemų atžvilgiu. Jeigu sistema S' juda sistemos S atžvilgiu greičiu $\vec{V}$ (žiūr. Pav.1), tai dalelių greičiai $\dot{\vec{r}}_i'$ ir $\dot{\vec{r}}_i$, šių sistemų atžvilgiu yra surišti sąryšiu $\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}' + \vec{V}$. Iš čia sąryšiai tarp impulsų Šiose sistemose

$$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i + \vec{V}\sum_i m_i$$

$$\vec{P} = \vec{P}' + \vec{V}\sum_i m_i \qquad (1.64)$$

Visada galime rasti tokią atskaitos sistemą S', kurioje impulsas bus lygus nuliui. Laikydami $\vec{P}'=0$, gauname, kad sistemos S' greitis sistemos *S* atžvilgiu yra lygus

$$\vec{V}=\frac{\vec{P}}{\sum_i m_i}=\frac{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i}{\sum_i m_i} \qquad (1.65)$$

Jeigu mechaninės sistemos impulsas yra lygus nuliui, tai toji sistema nejuda tam tikros atskaitos sistemos atžvilgiu (šiuo atveju sistemos ‚S'). Tokiu būdu galime **apibendrinti nejudančio taško** sąvoka **mechaninei sistemai sudarytai iš daugelio dalelių.** Taigi, greitis $\vec{V}$ yra **daugelio dalelių sistemos,** kurios impulsas nelygus nuliui, **judėjinio greitis.**

Iš formulės (1.65) taip pat plaukia, kad ryšys tarp sistemos impulso $\vec{P}$ ir jos judėjimo greičio $\vec{V}$ toks pat, koks jis būtų judant vienai dalelei, kurios masė yra lygi visų dalelių masių sumai

$$M=\sum_i m_i \qquad (1.66)$$

Ši aplinkybė veda prie teiginio, kad mechaninės daugelio dalelių sistemos masė yra **adityvi.** Dešinė (1.65) pusė gali būti gauta paėmus reiškinio

$$\vec{r}_m=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad (1.67)$$

išvestinę pagal laiką. Taigi, galima teigti, kad daugelio **dalelių sistemos greitis yra materialaus taško, nusakomo radius vektoriumi** $\vec{r}_m$ **greitis**. Šis taškas yra vadinamas **inercijos** arba **masių ccntras.**

*Apibrėžimas.*Mechanines sistemos masių **centru** yra vadinamas įsivaizduojamas taškas, kuriame yra sukoncentruota visos sistemos masė. Masių centro padėtis nusakoma formule (1.67). Taigi, uždarai **daugiadalelinei sistemai impulso tvermės dėsnį galime formuluoti kaip teiginį, kad jos masių (inercijos) centras juda tiesiaeigiai ir tolydžiai.** Tai inercijos dėsnio apibendrinimas: daugelio dalelių sistemai. Nejudančios mechaninės sistemos energija vadiname **sistemos vidine energija.** Vidinę sistemos energiją sudaro dalelių santykinio judėjimo energija ir potencinė jų sąveikos energija. Pilna sistemos judančios greičiu $\vec{V}$ energija yra lygi

$$E=\frac{MV^2}{2}+E_{vid} \qquad (1.68)$$

Iš tikrųjų, dalelių sistemos energijos *E* ir *E'* atskaitos sistemų S ir *S'* atžvilgiu surištos sąryšiu

$$E=\frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2+U=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\vec{v}_i'+\vec{V}\right)^2+U=\frac{MV^2}{2}+\vec{V}\sum_i m_i\vec{v}_i'+\sum_i\frac{m_i\left(\vec{v}_i'\right)^2}{2}+U$$

arba

$$E=E'+\vec{V}\vec{P}'+\frac{MV^2}{2} \qquad (1.69)$$

Jeigu atskaitos sistemos ‚S' atžvilgiu masių centras nejuda, tai

$$\vec{P}'=0; \quad E'=E_{vid} \qquad (1.70)$$

III.3. Dviejų dalelių judėjimo uždavinys.

Paprasčiausias sąveikaujančių dalelių sistemos judėjimo atvejis – dvi dalelės sistemos judėjimo uždavinys fizikoje yra labai svarbus. Šio uždavinio sprendinys sudaro dangaus kūnų mechanikos pagrindą, juo naudojamasi statistikinėje mechanikoje ir kitur.

Nagrinėsime uždarą sistemą, sudarytą iš dviejų dalelių, kurių masės m_1 ir m_2, *o* jų sąveikos jėga nusakoma potencine funkcija *U{r),* kur $r=|\vec{r}|=|\vec{r}_2-\vec{r}_1|$- atstumas tarp dalelių. Jeigu jėga konservatyvi, tai dalelių judėjimo lygtys inertinės sistemos atžvilgiu turės tokį pavidalą

$$m_1\vec{r}_1=-\nabla_i U, \qquad m_2\vec{r}_2=-\nabla_2 U \qquad (1.71)$$

Atskaitos sistemos pradžią pasirinkę taip, kad ji sutaptų su masių centai, kuris dviejų dalelių atvejų aprašomas radiusu vektoriumi

$$\vec{r}_m=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} \qquad (1.72)$$

gauname sąryšį

$$m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2=0 \qquad (1.73)$$

Iš (1.71) gausime

$$(m_1+m_2)\ddot{\vec{r}}_m=0 \qquad (1.74)$$

$$\mu\ddot{\vec{r}}=-\nabla U(\vec{r}) \qquad (1.75)$$

Dydis

$$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

yra vadinamas **redukuotaja mase.**

Iš (1.74) ir (1.75) matome, kad dviejų dalelių sąveikos uždavinys gali būti suvestas į vienos dalelės, kurios masė yra lygi redukuotajai masei, judėjimą jėgų lauke aprašomame potencine funkcija $U(\vec{r})$. Lygtis (1.74) aprašo masių centro judėjimą, kuris, kaip matyti, yra tiesiaeigis tolydinis taško, kurio masė $M=m_1+m_2$ judėjimas. IŠsprendę uždavinį ir suradę $\vec{r}(t)$, dalelių judėjimo dėsnius **masių centro atžvilgiu** rasime iš sąryšių

$$\vec{r}_1=-\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2=-\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \qquad (1.77)$$

Kadangi dalelę, kurios masė μ veikia centrinė jėga, tai minėtos inertinės sistemos atžvilgiu *(S')* (tos kurios centras susietas su masių centru) galioja impulso momento ir energijos tvermės dėsniai.

$$\mu[r\vec{v}] = L_0 \quad \text{ir} \quad \frac{\mu v^2}{2} + U(r) = E_0 \qquad (1.78)$$

pasinaudoję jau nagrinėtu dalelės judėjimo centriniame lauke uždaviniu ir atlikę pakeitimą

$$m \to \mu, ,\ L \to \vec{L}_0 \ \text{bei} \ E \to E_0 \qquad (1.79)$$

gauname bendrą lygties (1.75) sprendinį

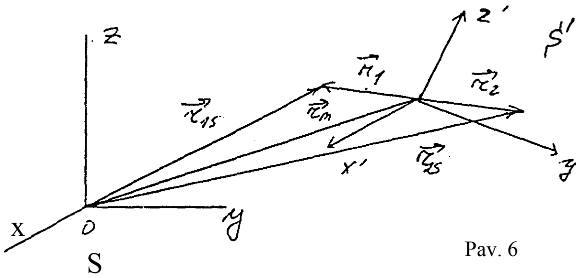
$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_0 - U_{eff}\right)}} + const$$

$$\varphi = \frac{\frac{L_0}{\mu r^2} dr}{\int \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E_0 - U_{eff}\right)}} + const \qquad (1.80)$$

$$U_{eff} = U(r) + \frac{(L_0)^2}{2\mu r^2}$$

Nagrinėdami taško judėjimą centriniame lauke parodėme, kad taško trajektorija yra plokštumoje einančioje per jėgos centrą. Taigi, mūsų nagrinėjamu atveju ši plokštuma yra statmena L_0 *ir* eina per masių centrą. Iš (1.80) galime rasti $\vec{r}(t)$ ir tuo pačiu iš (1.77) nustatyti dalelių judėjimo dėsnį masių centro sistemos atžvilgiu.

Turėdami omeny, kad masių centro sistema (pvz. S`) juda laboratorinės (arba *S* sistemos atžvilgiu) tiesiaeigiai ir tolygiai, galime rasti taškų judėjimo dėsnius šios sistemos atžvilgiu. Tuo tikslu įvesime 6pav. parodytus pažymėjimus



Pav. 6

$$\text{Tada} \quad \vec{r}_{1s}(t) = \vec{r}_m - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}(t) \qquad (1.81)$$

$$\vec{r}_{2s}(t) = \vec{r}_m - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}(t)$$

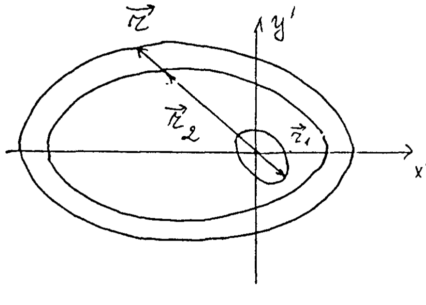
Analogiškai galime rasti ir dalelių greičius laboratorinės sistemos atžvilgiu.

Pavyzdys. Kad galėtume įsivaizduoti kaip realiai judės dalelės masių centro atskaitos sistemos atžvilgiu, panagrinėkime dviejų dalelių uždavinį pasinaudoję mūsų nagrinėtu dalelės judėjimo lauke, kurios potencinė energija yra lygi $U = \frac{a}{r}$, kur $a = \gamma m_1 m_2$ gravitacinė, arba α = -$e_1 e_2$ kuloninė sąveikos; m_1 ir m_2 dalelių masės e_1, e_2-jų krūviai. Laikykime, kad taško, kurio masė μ trajektorija yra elipsė. Tada, tais atvejais, kai dalelių masės yra lygios $m_1 = m_2$ ir kai $m_2 \ll m_1$. Iš (1.77) seka, kad dalelių radiusai vektoriai išsireikš per taško μ radiusą vektorių taip

$$\vec{r}_1 \approx \frac{m_2}{m_1}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2 \approx \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)\vec{r}, \qquad m_2 \ll m_1$$

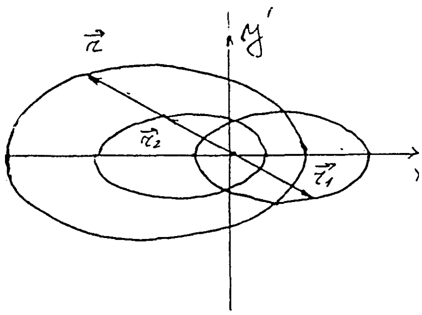
$$\vec{r}_1 = -\frac{\vec{r}}{2}, \qquad \vec{r}_2 = \frac{\vec{r}}{2} \qquad m_1 = m_2$$

Taigi iš čia seka, kad jeigu taškas μ juda elipse, tai ir realios dalies sistemos *S`* atžvilgiu taip pat judės elipsinėmis orbitomis parodytomis paveikslėlyje.



$m_2 \ll m_1$

$m_1 = m_2$



Šie atvejai žinomi kaip "planetos ir Saulės" ir "dvigubų žvaigždžių" judėjimo atvejai.

Pav. 7

III.4. Dalelių sklaidos teorija.

Pasinaudoję uždaroms sistemoms galiojančiais impulso ir energijos tvermės dėsniais, galime spręsti apie skirtingų mechaninių procesų savybes. Ypač yra svarbu, kad nagrinėjamos **savybės nepriklauso nuo sąveikos tarp dalelių prigimties**. Šiame skyrelyje remdamiesi tvermės dėsniais panagrinėsime dalelių sklaidos uždavinį.

Dalelių sklaida – tai procesas, kurio metu pradiniu momentu pakankamai nutolę dalelės dėl atitinkamai nukreiptų greičių suartėja, sąveikauja ir vėl nutolsta. Sklaidos proceso metu pakinta jų greičių dydžiai ir kryptys.

III.4.1.Dviejų dalelių sklaidos uždavinys

Šiame skyriuje nagrinėsime **tamprią dviejų dalelių sąveiką. Tampriąja sąveika** vadinsime tokią dalelių sąveiką, kuri nekeičia jų vidinės būsenos. Tegu dalelės, kurių masės m_1 ir m_2 iki susidūrimo juda masių centro sistemos (S\`) atžvilgiu greičiais $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$. Jeigu dalelių sąveika yra tampri, tai taikydami energijos tvermės dėsnį vidinės dalelių energijos (1.68) formulėje galime nepaisyti. Dalelių greičiai $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$ surišti su jų greičiais $\vec{v}_1$ ir $\vec{v}_2$ laboratorinėje sistemoje sąryšiais (žiūr. (1.77))

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}; \quad \vec{v}_2 = \dot{\vec{r}}_2 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v} \qquad (1.82)$$

kur $$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \left|\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1\right| = \left|\dot{\vec{r}}_{2S} - \dot{\vec{r}}_{1S}\right|$$

Iš impulso tvermės dėsnio dalelių sistemai seka, kad dalelių impulsai po sąveikos bus to paties dydžio kaip ir prieš sąveiką, bet priešingos krypties. Taigi, dalelių greitis po sąveikos (jį žymėsime štrichu) masių centro atžvilgiu bus

$$\vec{v}_1' = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}'; \quad \vec{v}_2' = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}' \qquad (1.83)$$

Nežinomo vektoriaus $\vec{v}'$ dydį galime gauti pasinaudoję energijos tvermės dėsniu masių centro sistemos atžvilgiu laikydami, kad sąveika tampri, t. yra, kad vidinė sistemos energija nekinta

$$\frac{\mu(v')^2}{2} + U' = \frac{\mu(v)^2}{2} + U \qquad (1.84)$$

čia U' ir U - dalelių sąveikos potencinė energija prieš ir po sąveikos. Kadangi $U = U'$,tai

$$v' = v \qquad (1.85)$$

Iš (1.85) ir (1.81) plaukia, kad laboratorinėje atskaitos sistemoje *(S)* dalelių greičiai po sąveikos bus aprašomi sąryšiais

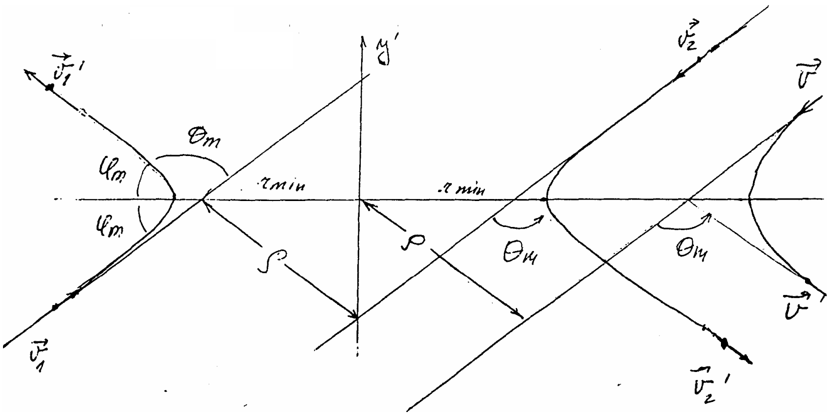
$$\vec{v}_{1S}' = \vec{V} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}'; \qquad \vec{v}_{1S}' = \vec{V} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}' \qquad (1.86)$$

čia $\vec{V} = \dot{\vec{r}}_m$ - masių centro greitis S sistemos atžvilgiu. Įskaitę (1.85) nežinomą vektorių v' galime užrašyti

$$\vec{v}' = v\vec{n}_0 \qquad (1.87)$$

kur $v = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$, t. yra žinomas dydis, $\vec{n}_0$ vienetinis vektorius nukreiptas vektoriaus $\vec{v}$ arba kaip seka iš (1.83) vektoriaus $\vec{v}_2'$ kryptimi. Taigi nustatyti $\vec{n}_0$ iš impulso ir tvermės dėsnių negalime. Šis dydis priklauso **nuo dalelių sąveikos dėsnio ir išsidėstymo sąveikos metu.**

Pavyzdys. Vektorių $\vec{n}_{0_m}$ nesunkai galima nustatyti pasinaudojus dviejų dalelių judėjimo uždaviniu. Kadangi nagrinėjame infinitinį judėjimą (t.y. kad kiekviena dalelė ateina iš begalybės ir ten po sąveikos grįžta) aiškumo dėlei panagrinėkime μ dalelę, kurios judėjimo trajektorija bus hiperbolė. Tegu tai atvejis kai veikia atostūmio jėga (a<0) ir E>0). Nagrinėsime μ dalelės judėjimą centrinių jėgų lauke $U(r)$, kurio centras nejuda. Šis μ dalelės judėjimo atvejis parodytas pav.8. Realių dalelių trajektorijos atspindi atvejį, kai $m_1 = m_2$.



Pav. 8

Suintegravę (1.82) lygtį nuo r_{min} iki begalybės gausime

$$\varphi_m = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{L}{r^2}dr}{\sqrt{2\mu[E-U(r)]-\frac{L^2}{r^2}}} \qquad (1.87)$$

čia r_{min} lygties $E_0 = U_{eff}$ sprendinys;

Kampo φ_m pagalba galime apskaičiuoti dalelės atsilenkimo lauke *U(r)* kampą θ_m. Iš paveikslėlio matyti, kad jis yra lygus

$$\theta_m = \pi - 2\varphi_m \qquad (1.88)$$

Kampas θ_m yra vadinamas **dalelės sklaidos masių centro sistemoje kampu.** Jo pagalba masių centro sistemoje yra nusakoma vienetinio vektoriaus $\bar{n}_0$ kryptis, t.yra kokiu kampu šioje atskaitos sistemoje pasisuko dėl sąveikos pirmoji dalelė.

III.4.2. Daugelio dalelių sklaida. Rezerfordo formulė.

Nagrinėjant dalelių sklaidą patogu konstantas *E* ir *L* išreikšti per greičių skirtumą *v* ir taikymo atstumą ρ. **Taikymo atstumu** ρ yra vadinamas minimalus atstumas tarp dalelių, kuriuo jos pralėktų viena pro kitą, jeigu nebūtų sąveikos tarp jų.

Skaitydami, kad potencinė dalelių sąveikos energija begalybėje yra lygi nuliui, $E = \frac{m(v)^2}{2}$, o $r\sin(\vec{r},\vec{v})\big|_{t\to-\infty} = \rho$ ir savo ruožtu $L = \mu r v \cdot \sin(\vec{r},\vec{v})\big|_{t\to-\infty} = \mu\rho v$, gauname

$$\varphi_m = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U}{mv^2}}} \qquad (1.89)$$

išraišką apibrėžiančią kampo φ_m, o turint omeny (1.88) ir θ_m, priklausomybę nuo ρ.

Čia tenka pažymėti, kad fizikoje dažniausiai tenka susidurti su didelio dalelių skaičiaus, judančio vienodais greičiais $\vec{v}$ jėgos centro atžvilgiu, sklaida. Skirtingos dalelės pluoštelyje pasižymi skirtingais ρ ir aišku yra išbarstomos skirtingais kampais θ_m. Pažymėkime *dN* dalelių skaičių, kurios yra išsklaidomos per laiko vienetą kampais, esančiais intervale tarp θ_m ir $\theta_m + d\theta_m$ Įvesime dydį

$$d\sigma = \frac{dN}{n} \qquad (1.90)$$

Čia *n*- dalelių, kurios per laiko vienetą pralekia per pluoštelio skerspjūvio ploto vienetą. Čia laikome, kad dalelių pluoštelis yra vienalytis visame pjūvyje.

Dydis $d\sigma$ yra vadinamas **efektyviniu sklaidos skerspjuviu.** Šis dydis priklauso nuo sklaidos lauko ir yra viena svarbiausių sklaidos proceso charakteristikų. Duotame intervale tarp θ_m ir $\theta_m + d\theta_m$ įvyks tik tų dalelių sklaida, kurių taikymo atstumas ρ yra intervale tarp ρ ir $\rho + d\rho$. Tokių dalelių skaičius yra lygus žiedo, kurio radiusai ρ ir $\rho + d\rho$ plotui padaugintam iš *n*, todėl efektyvnį skerspjūvį šiuo atveju galime užrašyti

$$d\sigma = \frac{dN}{n} = \frac{2\pi\rho d\rho n}{n} = 2\pi\rho d\rho \qquad (1.91)$$

kadangi ρ yra kampo θ_m funkcija, (1.91) galime perrašyti

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta_m)\left|\frac{d\rho(\theta_m)}{d\theta_m}\right|d\theta_m \qquad (1.92)$$

Dažnai $d\sigma$ apibrėžime naudoja ne plokščio kampo $d\theta_m$, elementą, o erdvinio kampo $d\Omega$ elementą tarp konusų, apibrėžiamų kampais θ_m ir $\theta_m + d\theta_m$ kuris yra lygus

$$d\Omega = 2\pi\sin\theta_m d\theta_m \; d\sigma = \frac{\rho(\theta_m)}{\sin\theta_m}\left(\frac{d\rho(\theta_m)}{d\theta_m}\right)d\Omega \qquad (1.93)$$

Eksperimente paprastai matuojame dalelių skaičių pluoštelyje iki sklaidos ir dalelių išsklaidytų Įvairiais kampais skaičius laboratorinėje sistemoje (S).Teorija įgalina $d\sigma(\theta_m)$ rasti masių centro sistemoje. Po to, naudodamiesi greičių diagramomis (žiūr. 1 priedą), paremtomis lygčių (1.86) sprendimu, galime gauti $\theta_m(\theta_1)$ ir $\theta_m(\theta_2)$ funkcijas, kur $\theta_1 ir \theta_2$ dalelių sklaidos kampai laboratorinėje sistemoje.

Detaliau panagrinėsime vieną iš svarbiausių dalelių sklaidos atvejų – elektringųjų dalelių sklaidą kuloniniame lauke. Prilyginę $U = -\frac{a}{r}$ (1.89) formulėje ir atlikę integravimą, gausime

$$\varphi_m = \arccos\frac{\frac{\alpha}{mv^2\rho}}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{mv^2\rho}\right)^2}} \qquad (1.94)$$

iš kur

$$\rho^2 = \frac{a^2}{m^2v^4}tg^2\varphi$$

Atsižvelgę į (1.88), gauname

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v^4} tg^2 \frac{\theta_m}{2} \qquad (1.95)$$

Diferencijuodami (1.95) pagal θ_m, ir įstatę į (1.92) arba (1.93) gauname

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \frac{\cos\frac{\theta_m}{2}}{\sin^2\frac{\theta_m}{2}} d\theta_m \qquad (1.96)$$

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta_m}{2}} \qquad (1.97)$$

Formulės (1.96) ir (1.97) vadinamos **Rezerfordo formule** ir apibrėžia efektyvinį arba diferencialinį sklaidos skerspjūvį masių centro arba inertinėje sistemoje.

IV. Lagranžo lygtys

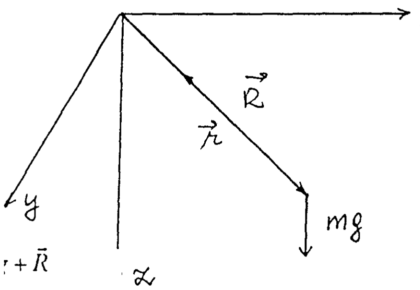
IV.l. Ryšiai. Pagrindinis dinamikos uždavinys.

Daugumą mechanikos uždavinių galime matematiškai užrašyti judėjimo lygčių

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_1(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N, \vec{v}_1,...,\vec{v}_N, t), \qquad (i = 1,2,3,...N) \qquad (2.1)$$

pagalba. Čia jėga $\vec{F}_1$ yra laikoma žinoma dalelės radiuso vektoriaus, greičio, bei laiko funkcija. Pradines sąlygas šiuo atveju galime užduoti bet kokias, t.y. pradinėms sąlygoms jokių apribojimų nėra. Tačiau egzistuoja ir kita mechanikos uždavinių klasė, kai be žinomų jėgų yra ir jėgos, kurių priklausomybė nuo dalelės padėties, jos greičio ir laiko nėra žinoma.

Pavyzdys: Tegu materialus taškas svyruoja netoli žemės paviršiaus pakabintas ant netampraus siūlo, kurio ilgis l. Oro pasipriešinimo galime nepaisyti. Tada tašką, kurio masė m, veikia žinoma jėga $m\vec{g}$ ir nežinoma siūlo įtempimo jėga $\vec{R}$. Taigi, iš antrojo Niutono dėsnio plaukia, kad švytuoklės judėjimo lygtis turi pavidalą



$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{R} \qquad (2.2)$$

pav 9

Vektorinė (2.2) lygtis yra ekvivalentiška trijų diferencialinių lygčių sistemai, priklausančiai nuo šešių nežinomų funkcijų. Dekarto koordinačių sistemoje tai bus: *x(t), y(t), z(t), Rx(t), Ry(t), Rz(t)*- Kad jas rastume reikia papildomų duomenų, Tie duomenys yra duoti uždavinio sąlygoje. Iš tikrųjų, bet kuriuo laiko momentu materialus taškas juda sferos, kurios radiusas lygus vienetui, paviršiumi ir jo koordinatės tenkina sąlygą $r^2 = l^2$. Be to, siūlo įtempimas nukreiptas išilgai siūlo, todėl galime užrašyti $\vec{R} = 2\lambda\vec{r}$, čia λ - nežinoma skaliarinė funkcija. Taigi, turime keturias diferencialines lygtis

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + 2\lambda\vec{r}, r^2 - l^2 = 0 \qquad (2.3)$$

ir keturias nežinomas funkcijas *x(t), y(l). z(t)* ir λ(t). Iš čia galime rasti taško judėjimo dėsnį sferiniu paviršiumi ir siūlo įtempimą, butiną, kad taškas judėtų tuo paviršiumi. Pradinės šio uždavinio sąlygos nėra laisvai pasirenkamos ir pradiniu laiko momentu taškas turi būti sferos, kurios radiusas *l* paviršiuje, o jo greičio vektorius turi būti plokštumoje, liečiančioje sferą.

Iš pavyzdžio matyti, kad taško padėtis, jo greitis ir pagreitis turi tenkinti sąlygas, kurios tiesiogiai neišplaukia iš taško judėjimo lygties. Tokiu atveju yra sakoma, kad materialus taškas nėra laisvas. Taško judėjimas yra apribotas **ryšiais.**

*Apibrėžimas.***Ryšiais** yra vadinami neišplaukiantys iš judėjimo lygčių mechaninės sistemos taškų padėties, greičio ir pagreičio apribojimai. Ryšiai, tai įvairių kūnų plokštumos, strypai arba siūlai ir t.t. Analitiškai ryšiai yra išreiškiami ryšių lygtimis, t. yra sąryšiais tarp taškų radiusų vektorių, jų greičių ir pagreičių.

Apibrėžimas. **Jėgos**, kurių pagalba yra įgyvendinami ryšiai, yra vadinamos **reakcijos jėgomis.** Jeigu *N* materialiųjų taškų sistemos judėjimas yra ribojamas *k* ryšiais, visų jų reakcija į *i*-tąjį tašką yra lygi

$$\vec{R}_l = \sum_{a=1}^{k} \vec{R}_{ai} \qquad (2.4)$$

Kur $\vec{R}_{ai}$ tai ryšio *a* reakcija į *i*-tąjį tašką.

Ryšiai yra skirstomi į **holonominius ir neholonominius, stacionarius ir nestacionarius.**

Apibrėžimas. **Holonominiais** (arba integruojamaisiais) ryšiais yra vadinami ryšiai, kurie aprašomi lygtimis priklausančiomis tik nuo taškų koordinačių ir laiko

$$f(\vec{r}_1,.....,\vec{r}_N, t) = 0 \qquad (2.5)$$

Apibrėžimas. **Neholonominiais** (arba neintegruojamaisiais) ryšiais yra vadinami ryšiai, kuriuos aprašančios lygtys negali būti suvestos į lygtis priklausančias tik nuo taškų koordinačių ir laiko.

Šiame kurse apsiribosime sistemų su holonominiais ryšiais nagrinėjimu.

Apibrėžimas. Jeigu ryšio lygtis tiesiogiai nepriklauso nuo laiko, ryšys vadinamas **stacionariuoju.** Kitais atvejais ryšys vadinamas **nestacionariuoju.**

Taigi, įvedus ryšių ir jų reakcijų sąvokas, **pagrindinį surištos mechaninės *N* - dalelinės sistemos**

mechanikos uždavinį galime formuluoti kaip sistemos judėjimo dėsnio ir ryšių reakcijos jėgų radimo uždavinį, kai yra žinomos jėgos $F_i(i=1,2,3,...,N)$ ir holonominių ryšių lygtys

$$\begin{cases} m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i, (i=1,2,...,N) \\ f_a(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N,t) = 0, (a=1,2,...,k) \end{cases} \qquad (2.6)$$

Pradinės sąlygos čia išplaukia iš ryšių lygčių. Kaip matome iš (2.6) tai 3N+k skaliarinių lygčių turinčių savyje 6N nežinomų funkcijų: $\vec{r}_i(t)$ ir $\vec{R}_i(t)$ $(i=1,2,...,N)$. Uždėjus ryšius laisvės laipsnių skaičius(Parametrų arba kintamųjų skaičius, būtinas sistemos būsenai aprašyti yra vadinamas sistemos **laisvės laipsnių skaičiumi)** sumažėja ir tampa lygus *3N — k.* Jeigu $k=3N$, tai ryšių lygčių pakanka, kad galima būtų pilnai aprašyti sistemos judėjimą. Jeigu *k<3N,* tai nagrinėjamas uždavinys yra apibrėžtas tik tada, jeigu yra žinomi *3N-k* nepriklausomų sąryšių tarp dalelių padėties ir jų ryšių reakcijų. Jas galime gauti pasinaudojus D'Alambero principu.

IV.2. D'Alambero principas

Reikia pažymėti, kad pagrindinis dinamikos uždavinys surištai arba ryšiais ribojamai dalelių sistemai (nelaisvai) yra apibrėžtas tik taip vadinamiems **idealiesiems ryšiams.** Kad galėtume įvesti tokią sąvoką apibrėšime realius, galimus ir virtualius poslinkius, materialiam taškui, kuriam galioja holonominis ryšys

$$f(\vec{r},t) = 0 \qquad (2.7)$$

Apibrėžimas. **Realiu taško poslinkiu** $d\vec{r}$ vadiname be galo mažą taško poslinkį, kurį jis atlieka veikiamas jėgų (tame tarpe ir ryšio reakcijos jėgos). **Realus poslinkis tenkina judėjinio ir ryšio** lygtis.

Apibrėžimas. **Galimu poslinkiu** yra vadinamas taško poslinkis, kurį leidžia ryšys. Jis skiriasi nuo realaus taško poslinkio tuo, kad **tenkina tik ryšio lygtis.** Realus poslinkis yra vienas iš galimų poslinkių. Diferencialinę lygtį, kurią tenkina galimi poslinkiai, galime gauti iš (2.7)

$$df = \nabla f d\vec{r} + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0 \qquad (2.8)$$

Apibrėžimas.Virtualiu **poslinkiu** $\delta\vec{r}$ yra vadinamas įsivaizduojamas be galo mažas taško poslinkis, kurį leidžia ryšys fiksuotu laiko momentu, tai yra laikant, kad šiuo laiko momentu ryšio kitimas laikui kintant nevyksta. virtualūs poslinkiai nevyksta veikiant jėgai ir laiko intervale. Juos gausime padarę judančios plokštumos momentinę nuotrauką ir nagrinėdami galimus taško poslinkius ant nufotografuoto plokštumos paviršiaus.

Diferencialinė lygtis, kurią tenkina virtualus poslinkis gaunama iš (2.7) varijuojant $f(r,t)$ fiksuotam laikui esant

$$\delta f = \nabla f \delta\vec{r} = 0 \qquad (2.9)$$

Iš (2.8) ir (2.9) plaukia, kad virtualiųjų poslinkių visuma sutampa su galimais poslinkiais tik tada, kai ryšiai stacionarūs, tai yra kai $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

Pavyzdys. Tegu taškas juda horizontalia plokštuma, kuri savo ruožtu pastoviu greičiu $\vec{u}$ juda vertikalia kryptimi. Ryšio lygtis

$$f = z - ut = 0.$$

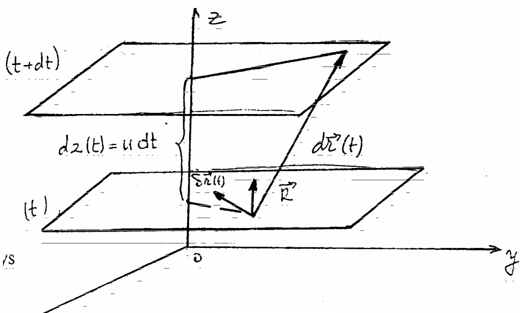
Matome, kad tai holonomimų ryšių lygtis, ribojanti taško padėtį, greitį ir pagreitį sąryšiais

$$z = ut, \dot{z} = u, \ddot{z} = 0$$

Tada galimų ir virtualių poslinkių lygtys $dz - udt = 0$ ir $\delta z(t) = 0$.

Virtualų darbą, kurį atliks ryšių reakcijos jėgos *N* dalelių sistemoje, galime apibrėžti

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta\vec{r}_i \quad (2.10)$$



Pav. 10

D'Alambero principas teigia, kad virtualus darbas, kurį atlieka ryšių reakcijos jėgos *N* – dalelinėje mechaninėje sistemoje yra lygus nuliui

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (2.11)$$

jcigu $\delta\vec{r}_i$ tenkina *k* (2.9) tipo lygčių sistemą

$$\sum_i (\nabla, f_\alpha)\delta r_i = 0, (\alpha = 1,2,...,N) \qquad (2.12)$$

Čia (kaip jau matėme anksčiau) (2.12) nusako virtualius poslinkius, tai yra tokius, kuriems $\vec{r}_i + \delta\vec{r}_i$ kaip ir $\vec{r}$, stacionaraus ryšio atveju tenkina (2.6) antrąją lygtį. Taigi, D`Alambero principas leidžia išskirti tam tikrą ryšių klasę.

*Apibrėžimas.***Ryšiai,** tenkinantys (2.11) sąlygą yra vadinami **idealiais ryšiais.** Reikia pažymėti, kad fizikinis idealių ryšių pagrindas gali būti labai skirtingas.

Pavyzdys. Panagrinėkime tašką, judantį horizontaliąja plokštuma, laikydami, kad ji yra absoliučiai lygi. Tada plokštumos reakcija taškui bet kokiu laiko momentu bus statmena plokštumai, t.y. $R_x = 0, R_y = 0, R_z \neq 0$. Taigi virtualus darbas $\delta A_R = \vec{R}\delta\vec{r} = R_z\delta z = 0$, nes šiam ryšiui $\delta z = 0$ .Dėl šios priežasties, kaip nejudanti taip ir judanti plokštuma yra idealus ryšys. Taigi, virtualaus darbo sąvoka šiuo atveju atspindi fizikinę paviršiaus savybę - jo lygumą. Iš čia taip pat plaukia, kad D'Alambero principas negalioja, jeigu įskaitoma trintis.

IV.3. Pirmos rūšies Lagranžo lygtys. Hamiltono principas.

Grįžkime prie (2.10) ir (2.12) sąryšių. Jeigu $\delta\vec{r}_i$, bet kokie, tai (2.11) lygtys sutaps su lygtimis $\vec{R}_i = 0$, o tai veda prie pradinių judėjimo lygčių $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$, kai nėra jokių judėjimą ribojančių ryšių. Tada lygtys $\vec{R}_i = 0$ prideda trūkstamus *3N* sąryšiu. Tuo atveju, kai sistemos judėjimas yra apribotas k kinematiniais sąryšiais (žiūr. (2.6) 2-ą lygtį), iš visų $3N$ taškų komponenčių variacijų skaičiaus, k variacijų bus priklausomos ir tenkins (2.12) lygtis. Kitos gi $3N$-k taškų koordinačių variacijos bus nepriklausomos. Norėdami eliminuoti k priklausomų variacijų iš (2.11) lygties prie jos pridėsime k (2.12) lygčių, padauginę kiekvieną jų atskirai iš tam tikru būdu parinkto daugiklio λ_a.

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{R}_i-\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\nabla_i f_\alpha\right)\delta\vec{r}_i \qquad (2.13)$$

Daugiklis λ_α parenkamas taip, kad koeficientai prie pirmųjų k variacijų $\delta\vec{r}_i$, komponenčių būtų lygūs nuliui. Iš čia

$$\vec{R}_i=\sum_{\alpha=1}^{k}\lambda_\alpha\nabla_i f_\alpha,(i=1,2,...,N) \qquad (2.14)$$

Šis metodas matematikoje yra vadinamas Lagranžo neapibrėžtųjų daugiklių metodu.
Įstatę (2.14) į (2.6) gauname **mechaninės sistemos su idealiaisiais holonominiais ryšiais judejimo lygtis**

$$\begin{cases} m_i\ddot{\vec{r}}_i=\vec{F}_i+\sum_{a=1}^{k}\lambda_a\nabla_i f_a,(i=1,2,...,N) \\ f_a(\vec{r}_i,...,\vec{r}_N,t)=0,(a=1,2,...,k) \end{cases} \qquad (2.15)$$

(2.15) lygtys dar yra vadinamos **Lagranžo lygtimis ryšių reakcijomis** arba **1-mos rusies Lagranžo lygtimis.** Nežinomaisiais čia yra $r_i(t)$ ir $\lambda_a(t)$. Matome, kad nežinomųjų ir lygčių skaičius sutampa ir yra lygus $(3N+k)$. Eliminuosime reakcijos jėgas, padaugindami kiekvieną jų iš pirmųjų (2.15) lygčių iš $\delta\vec{r}_i$, ir sudėdami gautus rezultatus

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\delta\vec{r}_i+\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{a=1}^{k}\lambda_a\nabla_i f_a\right)\delta\vec{r}_i \qquad (2.16)$$

Paskutinis narys dešinėje pusėje - tai visų ryšių reakcijos jėgų virtualus darbas. Iš ryšių idealumo sąlygos seka, kad jis yra lygus nuliui. Sukeitę sumavimo tvarką, iš (2.11) ir (2.12) gauname

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{a=1}^{k}\lambda_a\nabla_i f_a\delta\vec{r}_i=\sum_{a=1}^{k}\lambda_a\left(\sum_{i=1}^{N}\nabla_i f_a\delta\vec{r}_i\right)=0 \qquad (2.17)$$

Taigi (2.16) galime perrašyti

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{m_i\ddot{\vec{r}}_i-\vec{F}_i\right\}\delta\vec{r}_i=0 \qquad (2.18)$$

čia $\delta\vec{r}_i$ tenkina (2.12) lygtį. (2.18) lygtis yra vadinama **D'Alambero - Lagranžo lygtimi** arba **bendrąja mechanikos lygtimi.** Panagrinėkime dvi sistemos trajektorijas, kurioms galioja kinematiniai sąryšiai. Viena jų $\vec{r}_i(t)$ aprašo realiai judančią sistemą, antroji aprašoma $\vec{r}_i(t)+\delta\vec{r}_i(t)$ - atitinka galimą trajektoriją, kuri irgi kaip minėjome stacionaraus ryšio atveju tenkina ryšių lygtį. Greičio $\delta\dot{\vec{r}}$ variacijai gauname

$$\delta\dot{\vec{r}}_i=\frac{d}{dt}(\vec{r}_i(t)+\delta\vec{r}_i(t))-\frac{d}{dt}\vec{r}_i=\frac{d}{dt}(\delta\vec{r}) \qquad (2.19)$$

Iš čia tarp kitko matome, kad variacinėje algebroje galima keisti variavimą ir diferencijavimą vietomis. Nuo to gautas rezultatas nekinta. Suintegruokime abi (2.18) puses pagal dt nuo t_2 iki t_1

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i-\vec{F}_i\right)\delta\vec{r}_i dt=0 \qquad (2.20)$$

Kadangi po integralu stovintis reiškinys lygus nuliui, bet kokiu laiko momentu, integralas lygus nuliui. Pasinaudoję (2.19) ir tuo, kad

$$\ddot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i=\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i\right)-\dot{\vec{r}}_i\frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i \qquad (2.21)$$

pirmajam (2.20) kairės pusės nariui gauname tokią išraišką

$$\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i-\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r}}_i\delta\dot{\vec{r}}_i \qquad (2.22)$$

Tada iš (2.20) seka

$$\sum_i m_i\left(\dot{\vec{r}}_i\delta\vec{r}_i\right)\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta T+\sum_i\left(\vec{F}_i\delta\vec{r}_i\right)\right]dt=0 \qquad (2.23)$$

čia

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\dot{\vec{r}}_i\right)^2 \qquad (2.24)$$

nes $\delta T=\frac{1}{2}\cdot 2\sum m_i\dot{\vec{r}}_i\delta\dot{\vec{r}}_i$

yra kinetinės energijos variacija.
Jeigu apsiribosime konservatyviosiomis sistemomis, t.y. tokiomis, kuriose jėga apibrėžiama (1.13) formule, tai

$$\sum_i\left(\vec{F}_i\delta\vec{r}_i\right)=-\delta U \qquad (2.25)$$

ir variacijomis

$$\delta\vec{r}_i=0\text{, kai } t=t_1 \text{ ir } t=t_2 \qquad (2.26)$$

tai iš (2.20), (2.25) ir (2.26) gauname

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T-\delta U)dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-U)dt=\delta\int_{t_1}^{t_2}Ldt=0 \qquad (2.27)$$

Funkcija $L=T-U$ vadinama **Lagranžo funkcija arba Lagranžianu**. (2.27) lygtis yra vadinama **Hamiltono principu**. Šis principas galioja, kai trajektorijos galai nevarijuojami. **Hamiltono principas** yra ekvivalentiškas **D'Alambero principui** ir pradinėms Niutono lygtims tuo atveju, kai trajektorijos, kuriomis juda dalelės tenkina **ryšių lygtis. Hamiltono principas** skiriasi nuo aukščiau minėtų judėjimo dėsnių formuluotės tuo, kad jis **nepriklauso nuo koordinačių**, kurių pagalba aprašoma sistema**, pasirinkimo būdo**.

IV.4. Lagranžo lygtys apibendrintosiose koordinatėse.

Trečiajame šio skyriaus skirsnyje parodėme, kad Lagranžo lygtys įgalina rasti sistemos dalelių radiusų vektorių ir ryšių reakcijos jėgų priklausomybę nuo laiko. Dažnai tokios detalios informacijos apie sistemos judėjimą nereikia. Pakanka tiesiog rasti surištos sistemos taškų judėjimo dėsnį. Iš kitos pusės, vietoj *3N* dekarto koordinačių, *k* ryšių lygčių ir λ_a (α=1, 2, ..., *k*) daugiklių patogu įsivesti $s=3N-k$ nepriklausomų kintamųjų, kurie pilnai aprašo sistemos būseną. Šiam tikslui reikalingos judėjimo lygtys, kuriose nežinomųjų vaidmenį vaidintų nepriklausomos koordinatės. Be abejo šios lygtys turi įskaityti ir ryšių poveikį nagrinėjamai sistemai Tokius reikalavimus tenkina **antros eilės Lagranžo lygtys,** labiau žinomos kaip **Lagranžo lygtys apibendrintosiose koordinatėse.**

Apibrėžimas. **Apibendrintosiomis** nepriklausomomis **koordinatėmis** yra vadinami bet kokie *3N-k* dydžiai, kurie vienareikšmiai apibrėžia sistemos padėtį.

Aišku, kad nepriklausomų apibendrintųjų koordinačių skaičius *s* turi būti lygus sistemos laisvės laipsnių skaičiui *(s=3N-k).* Iš apibendrintųjų koordinačių apibrėžimo seka, kad jos turi tenkinti tokias sąlygas:

1 .Sistemos taškų radiusai vektoriai turi būti vienareikšmėmis apibendrintųjų koordinačių *q* funkcijomis

$$\vec r_i=\vec r_i(q_1,q_2,...,q_s,t), \qquad (i=1,2,...,N) \qquad (2.28)$$

Be to *s* iš *3N* minėtų funkcijų (radiusų vektorių projekcijų) turi būti nepriklausomos, t.y. tenkinti funkcijų nepriklausomumo sąlygą

$$\frac{D(x_1,x_2,...,x_{3N})}{D(q_1,q_2,...,q_s)}=\begin{Vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial x_1}{\partial q_s}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial x_{3N}}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial x_{3N}}{\partial q_s}\end{Vmatrix}\neq 0 \qquad (2.29)$$

čia patogumo dėlei dalelių koordinatės numeruojamos iš eilės didėjančia tvarka ir žymime vienu simboliu x_i. Pavyzdžiui, trijų dalelių sistemos koordinatės vietoj $x_1,y_1,z_1;x_2,y_2,z_2;x_3,y_3,z_3$ yra pažymėtos $x_1,x_2,x_3;x_4,x_5,x_6;x_7,x_8,x_9$.

2. Apibendrintosios koordinatės turi būti parenkamos taip, kad (2.28) tenkintų (2.6) antrąją lygtį, t.y.

$$f_a(\vec r_1,\vec r_2,...,\vec r_N,t)\Bigg|_{\substack{\vec r_1\to\vec r_1(q,t)\\ \cdots\cdots\\ \vec r_N\to\vec r_N(q,t)}}\equiv 0 \qquad (2.30)$$

*Pavyzdžia*i. Tegu taškas juda sfera, kurios radiusas lygus l, o centras yra koordinačių centre. Tada ryšio lygtis

$$f=x^2+y^2+z^2-l^2=0$$

Šią lygtį tenkins tokios *x, y* ir *z* reikšmės (sferinėse koordinatėse):

$$x=l\sin\theta\cos\varphi, \qquad y=l\sin\theta\cos\varphi, \qquad z=l\cos\theta$$

Iš čia seka, kad sferinės koordinatės θ ir φ gali būti nepriklausomomis apibendrintosiomis koordinatėmis. Jų skaičius sutampa su sistemos laisvės laipsnių skaičiumi $(s=3N-k=2)$.

2. Laisvai judančios dalelės (s=3) apibendrintosiomis koordinatėmis galėtų būti, pavyzdžiui, cilindrinės koordinatės ρ, φ ir *z.*

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi \text{ ir } z$$

Iš (2.28) išreikšime $\delta\vec r_i$ variaciją per apibendrintąsias koordinates

$$\delta\vec r_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_i}\delta q_j, \qquad (i=1,2,...,N) \qquad (2.31)$$

Taip pat iš (2.28) galime užrašyti dalelių greičius kaip apibendrintųjų koordinačių funkcijas

$$\dot{\vec r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j}\dot q_j+\frac{\partial\vec r_i}{\partial t}, \qquad (i=1,2,...,N) \qquad (2.32)$$

Iš čia seka, kad materialių taškų greičiai yra tiesinės $\dot q_j$ funkcijos. Dydžiai $\dot q_j$ yra vadinami **apibendrintaisiais greičiais.**

Iš (2.32) taip pat seka dar vienas svarbus sąryšis

$$\frac{\partial\dot{\vec r}_i}{\partial\dot q_j}=\frac{\partial\vec r_i}{\partial q_j}, \qquad \begin{pmatrix}i=1,2,...,N\\ j=1,2,...,s\end{pmatrix} \qquad (2.33)$$

Iš tikrųjų, diferencijuodami (2.32) pagal $\dot q_j$ gauname, kad visi nariai išskyrus *j*-tąjį yra lygūs nuliui, nes nepriklauso nuo $\dot q_j$.

Pasinaudoję (2.32) formule kinetinę sistemos energiją galime užrašyti kaip apibendrintųjų koordinačių, apibendrintųjų greičių ir laiko funkciją

$$T\left(q,\dot q,t\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\left(\dot{\vec r}_i\right)^2\Bigg|_{\begin{array}{l}\dot{\vec r}_i=\dot{\vec r}_i\left(q,\dot q,t\right)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \dot{\vec r}_N=\dot{\vec r}_N\left(q,\dot q,t\right)\end{array}} \qquad (2.34)$$

čia q ir $\dot q$ - apibendrintųjų koordinačių ir apibendrintųjų greičių visumos.

Potencinė sistemos energija apibendrintosiose koordinatėse stacionariu atveju lygi $U=U(q)$. Taigi, Lagranžo funkcija apibendrintosiose koordinatėse įgauna pavidalą

$$L\left(q,\dot q\right)=T\left(q,\dot q\right)-U(q) \qquad (2.35)$$

Pritaikysime Lagranžianui Hamiltono principą. Tuo tikslu užrašysime jo variaciją

$$\delta L=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}\delta\dot q_j+\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (2.36)$$

čia $\delta\dot q_j=\frac{d}{dt}\delta q_j$

Apibendrintose koordinatėse kraštinės sąlygos (2.26) įgyja pavidalą

$$\delta q_j=0,\quad kai\ t=t_1\ ir\ t=t_2 \qquad (2.37)$$

Tada iš variacinio Hamiltono principo (2.27) gauname

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L dt=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}\delta\dot q_j\,dt+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j dt=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}\delta q_j\Bigg|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}\delta q_j dt+\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}\right]\delta q_j dt=0 \qquad (2.38)$$

Šis integralas turi būti lygus nuliui esant bet kokiems δq_j, o tai įmanoma tik tada, kai pointegralinis reiškinys yra lygus nuliui

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0,\quad (j=1,2,\dots,s) \qquad (2.39)$$

Lygtys (2.39) yra vadinamos **II-os rūšies Lagranžo lygtimis** arba **Lagranžo lygtimis apibendrintosiose koordinatėse.**

Detalesniam Lagranžo lygčių tyrimui įvesime **apibendrintųjų impulsų** ir **apibendrintųjų jėgų** sąvokas, apibrėždami juos lygybėmis

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial\dot q_j} \qquad (2.40)$$

$$F_j=\frac{\partial L}{\partial q_j},\quad (j=1,2,\dots,s) \qquad (2.41)$$

Pasinaudoję (2.40) ir (2.41), Lagranžo lygtis (2.39) galime užrašyti

$$\dot p_j=\frac{\partial L}{\partial q_j},\quad (j=1,2,\dots s) \qquad (2.42)$$

arba

$$\dot p_j=F_j \qquad (2.43)$$

Pateiksime kelis Lagranžo lygčių apibendrintosiose koordinatėse pavyzdžius:

1. Tuo atveju, kai sistema juda laisvai, apibendrintosiomis koordinatėmis galima pasirinkti dekarto koordinates. Tada Lagranžo funkcija turės pavidalą

$$L=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\dot x_1^2+\dot y_1^2+\dot z_1^2\right)-U(x_1,x_2,\dots)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot x_1}=m_i\dot x_i,\qquad \frac{\partial L}{\partial\dot y_1}=m_i\dot y_i,\qquad \frac{\partial L}{\partial\dot z_1}=m_i\dot z_i,\qquad \frac{\partial L}{\partial\dot x_1}=-\frac{\partial U}{\partial x_1}\qquad \text{ir t.t}$$

ir (2.39) lygtys pavirs į Niutono judėjimo lygtis (1.56).

2. Jeigu dalelė juda sferinės simetrijos lauke $U(r)$, patogu apibendrintosiomis koordinatėmis pasirinkti sferines koordinates: $q_1=r$, $q_2=\theta,\ q_3=\varphi$. Tada sistemos kinetinė energija

$$T=\frac{1}{2}m\left(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2\right),$$

o Lagranžo funkcija bus lygi

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2\right)-U(r),$$

iš čia apibendrintieji impulsai

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi}.$$

ir (2.41) įgyja pavidalą

$$\dot{p}_\varphi = 0, \quad \dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2 ctg\theta}{mr^2\sin\theta}, \qquad \dot{p}_\varphi = r\dot{\theta}^2\, m.$$

IV.l Tvermės dėsniai

Antrajame ir trečiajame skyriuose parodėme, kad vienos ir dviejų dalelių judėjimo uždavinys gali būti išspręstas bendru atveju pakankamai plačiai jėgų klasei. Tačiau dalelių sistemų, sudarytų iš didesnio skaičiaus dalelių, judėjimą aprašyti turint tik pakankamai bendras prielaidas apie jų sąveikos pobūdį nepavyksta. Dėl šios priežasties ypatingą svarbą tokių uždavinių sprendimui turi bendros teoremos, kurias tenkina bet kokio dalelių skaičiaus sistema. Tokiomis universaliomis teoremomis yra **impulso, judesio kiekio momento ir energijos tvermės dėsniai.** Minėti tvermės dėsniai veda prie taip vadinamų **judėjimo integralų,** t.y. mechaninės sistemos judėjimą aprašančių dydžių q_j ir $\dot{q}_j$ (j=1,2,...,s) funkcijų, kurios nekinta judėjimo metu ir priklauso tik nuo pradinių sąlygų. Nesunku matyti, kad *s* laisvės laipsnių turinti mechaninė sistema turi *2s-l* judėjimo integralų. Iš tikrųjų, išsprendę s judėjimo lygčių, gausime *2s* laisvai pasirenkamų konstantų. Kadangi judėjimo lygtys uždarai sistemai tiesiogiai nuo laiko nepriklauso, tai laiko atskaitos tašką galime pasirinkti laisvai. Taigi, viena iš laisvai pasirinktų konstantų gali būti parinkta t_g. Eliminavę t_0 iš *2s* funkcijų $q_j = q_j(t+t_0, C_1, C_2,...,C_{2s-1})$ ir $\dot{q}_j = \dot{q}_j(t+t_0, C_1, C_2,...,C_{2s-1})$, *2s-l* nepriklausomų konstantų galime užrašyti kaip q ir $\dot{q}$ funkcijas, kurios ir bus judėjimo integralais. Tačiau ne visi judėjimo integralai vaidina mechanikoje vienodą rolę. Tarp jų yra keli, kurių tvarumas yra susijęs su **erdvės** ir **laiko** savybėmis, jo vienalytiškumu ir izotropija. Šiame skyriuje plačiau panagrinėsime minėtus sąryšius. Čia, beje, reikia pažymėti dar vieną svarbią tvarių dydžių savybę - visi tvarūs dydžiai pasižymi **adityvumu,** t.y. jų reikšmė sistemai, susidedančiai iš nesąveikaujančių tarpusavyje dalių, yra lygi atskirų dalių reikšmių sumai. Adityvumas šiems judėjimo integralams suteikia ypatingą svarbą. Pavyzdžiui, tegu du kūnai kurį tai laiką sąveikauja. Kadangi kaip prieš sąveiką taip ir po jos kiekvienas iš adityvių sistemos judėjimo integralų yra lygus abiejų kūnų integralų sumai, tai iš tvermės dėsnio galime gauti žinių apie kūnų būseną po sąveikos, jeigu yra žinoma jų būsena prieš sąveiką.

1) Panagrinėkime tvermės dėsnį, kylantį iš **laiko vienalytiškumo.** Jeigu laikas vienalytis, tai Lagranžo funkcija tiesiogiai nuo laiko nepriklauso, ir

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j, \quad (j = 1,2,...,s) \qquad (2.48)$$

Pakeitę $\frac{\partial L}{\partial q_j}$ (iš (2.39)) į $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, gauname

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j = \sum_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right),$$

ir perkėlę dešinį narį į karę, gauname

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L\right) = 0, \qquad (2.49)$$

iš kur

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = const. \qquad (2.50)$$

Tuo atveju, kai potencinė energija, priklauso tik nuo koordinačių q_i, o q_i įeina tik į kinetinę energiją gauname

$$\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T, \qquad (2.51)$$

Ir iš (2.49) seka

$$E = T + U = const. \qquad (2.52)$$

arba **energijos tvermės dėsnis.**

Reikia pažymėti, kad energijos tvermės dėsnis galioja ir sistemoms, kurios yra pastoviame išoriniame lauke. Iš tikrųjų, vienintelė, išvedant šį dėsnį, panaudota prielaida, tai tiesioginės priklausomybės nuo laiko nebuvimas Lagranžiane, arba sistemos konservatyvumo sąlyga.

2) **Erdvės vienalytiškumas.** Dėl šios erdvės savybės mechaninės uždaros sistemos savybės nekinta atliekant lygiagrečius sistemos poslinkius erdvėje. Panagrinėkime be galo mažą postūmį ε ir pareikalaukime, kad Lagranžo funkcija dėl to nepakistų.

Apibrėžimas. Lygiagretus postūmis, tai tokia transformacija, kurios metu visi sistemos taškai pasislenka tuo pat atstumu, t.y. jų radiusai vektoriai $\vec{r}_i \to \vec{r}_i + \vec{\varepsilon}$, $(i = 1,2,...,N)$. Tada

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}\delta\vec{r}_i = \vec{\varepsilon}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}, \qquad (2.53)$$

čia sumavimas pagal visas sistemos daleles.

Kadangi ε bet koks, reikalavimas, kad $\delta L = 0$ ekvivalentus reikalavimui, kad

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0, \qquad (2.54)$$

iš Lagranžo lygties (2.39), gauname

$$\sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{d}{dt}\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0. \qquad (2.55)$$

Tokiu būdu uždarai mechaninei sistemai vektorinis dydis

$$\vec{P} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i}, \qquad (2.56)$$

nekinta sistemai judant. Kaip jau aišku, iš aukščiau gautų sąryšių, vektorius $\vec{P}$ - tai sistemos impulsas. Išdiferencijavę sistemos Lagranžo funkciją

$$L = \sum_i \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots)$$

gausime gerai žinomą išraišką

$$\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i. \qquad (2.57)$$

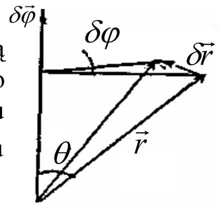
Be to skirtingai nuo energijos sistemos impulsas yra lygus atskirų dalelių impulsų sumai

$$\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i \qquad (2.58)$$

nepriklausomai nuo to dalelės sąveikauja ar ne.

Trijų impulso vektoriaus komponenčių tvermės dėsnis galioja tik tuo atveju kai nėra išorinio lauko.

3) **Erdvės izotropija** reiškia, kad uždaros sistemos mechaninės savybės nekinta bet kaip pasukus sistemą erdvėje. Panagrinėsime be galo mažą sistemos posūkį ir pareikalausime, kad jos Lagranžo funkcija liktų ta pati. Tuo tikslu įvesime be galo mažo posūkio vektorių $\delta\vec{\varphi}$, kurio absoliutus dydis yra lygus posūkio kampui $\delta\varphi$, o kryptis sutampa su posūkio ašimi. Tokio posūkio metu radius vektoriaus, jungiančio koordinačių pradžią (esančią ant posūkio ašies) su bet kokiu sukamos sistemos tašku, prieauglis yra lygus



Pav. 11

$$|\delta\vec{r}| = r\sin\theta\,\delta\varphi \qquad (2.59)$$

Radiuso vektoriaus prieauglio kryptis statmena plokštumai, einančiai per $\vec{r}$ ir $\delta\vec{\varphi}$ todėl

$$\delta\vec{r}_i = [\delta\vec{\varphi}\cdot\vec{r}_i] \qquad (2.60)$$

Posūkio metu kinta ne tik radiuso vektoriaus, bet ir visų dalelių greičiai, tačiau vektoriai kinta pagal tą patį kitimo dėsnį. Todėl greičio pokytis sistemos koordinačių atžvilgiu bus lygus

$$\delta\dot{\vec{r}}_i = \left[\delta\vec{\varphi}\cdot\dot{\vec{r}}_i\right] \qquad (2.61)$$

Įstatę $\delta\dot{\vec{r}}_i$ ir $\delta\vec{r}_i$ išraiškas į δL ir prilyginę ją nuliui

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\delta L}{\delta r_i}\delta\vec{r}_i + \frac{\delta L}{\delta \dot{r}_i}\delta\dot{\vec{r}}_i\right) = 0 \qquad (2.62)$$

bei pakeitę $\frac{\delta L}{\delta\dot{\vec{r}}_i} = \vec{p}_i$ ir $\frac{\delta L}{\delta\vec{r}_i} = \dot{\vec{p}}_i$, gauname

$$\sum_i\left[\vec{p}_i[\delta\vec{\varphi}\cdot\vec{r}_i] + \dot{\vec{p}}_i\left[\delta\vec{\varphi}\cdot\dot{\vec{r}}_i\right]\right] = 0 \qquad (2.63)$$

arba, atlikę ciklinį dauginamųjų keitimą ir išnešę $\delta\vec{\varphi}$ prieš sumos ženklą

$$\delta\vec{\varphi}\sum_i\left(\left[\vec{r}_i\cdot\dot{\vec{p}}_i\right] + \left[\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{p}_i\right]\right) = \delta\vec{\varphi}\frac{d}{dt}\sum_i[\vec{r}_i\cdot\vec{p}_i] = 0 \qquad (2.64)$$

Kadangi $\delta\vec{\varphi}$ bet koks, iš čia seka, kad

$$\frac{d}{dt}\sum_i[\vec{r}_i\cdot\vec{p}_i] = 0, \text{ tačiau } \sum_i[\vec{r}_i\cdot\vec{p}_i] = \vec{L}.$$

Taigi, judant uždarai sistemai jos **judesio kiekio momentas yra judėjimo integralas** arba galioja **judesio kiekio momento tvermės dėsnis**. Kaip ir impulso, judesio kiekio momento adityvumas nepriklauso nuo sąveikos tarp dalelių.

Taigi energijos, impulso ir judesio kiekio momento tvermės dėsniai yra tie adityvūs judėjimo integralai apie kuriuos mes kalbėjome skyriaus pradžioje. Iš čia seka, kad **bet kuri uždara sistema** gali būti **charakterizuojama septyniais judėjimo integralais:** vienu energijos, trim integralais atitinkančiais impulso komponentes ir trim integralais atitinkančiais judesio kiekio momento komponentes.

V. Svyravimų teorija.

Vienas iš labai paplitusių mechaninės sistemos judėjimo tipų yra taip vadinami **tiesiniai svyravimai**, t.y. svyravimai netoli pusiausvyros padėties.

Nagrinėsime sistemas, kurių judėjimą riboja idealūs holonominiai ir stacionarūs ryšiai, o veikiančios jėgos tiesiogiai nepriklauso nuo laiko. Be to laikoma, kad sistema yra charakterizuojama bent vienu **nuostovios pusiausvyros tašku**. Šios teorijos esmė yra tai, kad nuostoviosios pusiausvyros aplinkoje Lagranžo lygtys gali būti suvedamos į tiesines diferencialines lygtis, todėl maži svyravimai dažnai yra vadinami tiesiniais svyravimais.

V.1. Tiesiniai materialių taškų sistemos svyravimai.

Panagrinėsime mechaninės sistemos pusiausvyros būsenas. Tegu sistemos judėjimas aprašomas Lagranžo lygtimis (2.39), o Lagranžo funkcija yra apibendrintųjų koordinačių ir greičių funkcija

$$L(q,\dot{q}) = T(q_k,\dot{q}_k) - U(q_k) \qquad (3,1)$$

Sistemos **nuostovios pusiausvyros būsena** yra apibrėžiama, kaip būsena aprašoma apibendrintų koordinačių rinkiniu $q_k^{(0)}$, kurioms $\dot{q}_k = 0$, kai $q_k = q_k^{(0)}$ Be to, kai

$$q_k = q_k^0, \quad \dot{q}_k = 0, \quad \ddot{q}_k = 0, \quad \dddot{q}_k = 0 \qquad (3,2)$$

t.y. visos aukštesnės eilės išvestinės pagal laiką nuo q_k irgi yra lygios nuliui. Tai reiškia, kad, jeigu sistemos dalelės padėtyse, aprašomuose koordinatėmis $q_k = q_k^{(0)}$ nejuda, tai jos tose padėtyse liks ir tolimesniais laiko tarpais. Įstatę (2,32) į (2,34), galime užrašyti kinetinės energijos išraišką apibendrintose koordinatėse (jeigu $\bar{r}$ tiesiogiai nuo laiko nepriklauso)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{S} a_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l \qquad (3,3)$$

kur

$$a_{kl} = a_{lk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_l} \qquad (3,4)$$

bendru atveju priklauso nuo apibendrintųjų koordinačių.

Tada iš (2,39) ir (3,2) sąlygų seka, kad būtina **pusiausvyros** sąlyga yra

$$\frac{\partial U}{\partial q_k} = 0, \; (k=1,2,...,S) \text{ jeigu } q_l = q_l^{(0)} \; (l=1,2,...,S) \qquad (3.5)$$

Tai reiškia, kad pusiausvyros padėtyje potencinė funkcija turi **ekstremumą**. Reikia taip pat neužmiršti, kad ekstremumu gali būti ne tik maksimumo, bet ir minimumo, bei balno taškai. Pirmuoju ir trečiuoju atvejais taškas nebus nenuostovios pusiausvyros tašku. Taigi, **nuostovios pusiausvyros taškas, kuriame potencinė energija yra minimali.** Bet koks atsilenkimas nuo šio taško sukelia jėgą $-\frac{dU}{dq}$, verčiančią sistemą grįžti į pusiausvyros padėtį.

Kadangi mus domina tik maži atsilenkimai nuo pusiausvyros padėties, skleiskime funkcijas *U(q)* ir $T(q,\dot{q})$ eilute pusiausvyros taške (galime juo pasirinkti, pavyzdžiui koordinačių pradžios tašką). Tada

$$U(q) = U(0) + \sum_k \left(\frac{\partial U}{\partial q_k}\right)_0 q_k + \frac{1}{2}\sum_{k,l}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_l}\right)_0 q_k q_l + \ldots \qquad (3.6)$$

$$T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{k,l}\left[(a_{kl})_0 + \sum_m \left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial q_m}\right)_0 q_m + \ldots\right]\dot{q}_k\dot{q}_l \qquad (3.7)$$

(skleidžiam eilute pagal *q*, o nuo *q* priklauso tik koeficientai).

Pasinaudoję (3.5), laikydami *U(0)=0* bei atmetę trečio ir aukštesnio laipsnio narius pagal *q* išraiškoje (3.6) ir pirmo bei aukštesnius narius išraiškoje (3.7), gausime tokio pavidalo Lagranžo funkciją

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{k,l} c_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l - \frac{1}{2}\sum_{k,l} b_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l \qquad (3.8)$$

čia

$$c_{kl} = (a_{kl})_0 = c_{lk}, \qquad b_{kl} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_k \partial q_l}\right)_0 = b_{lk} \qquad (3.9)$$

Panaudoję (2,39) ir (3,8), Lagranžo lygtį mažiems svyravimams užrašome

$$\sum_l c_{kl}\ddot{q}_l + \sum_l b_{kl} q_l = 0 \qquad (k=1,2,...,S) \qquad (3.10)$$

Taigi, gavome s tiesinių diferencialinių lygčių sistemą, su pastoviais koeficientais. Pagal tokių lygčių sprendimo taisykles ieškome $q_l(t)$ tokiame pavidale

$$q_l = A_l e^{iwt} \qquad (3.11)$$

Čia A_l – dar nenustatytos konstantos. Įstatę (3.11) į (3.10), gauname homogeninių lygčių sistemą A_l atžvilgiu

$$\sum_l \left(-w^2 c_{kl} + b_{kl}\right) A_1 = 0 \qquad (3.12)$$

Kad (3.12) turėtų nelygius nuliui sprendinius, jos determinantas turi būti lygus nuliui

$$\left|b_{kl} - w^2 c_{kl}\right| = 0 \qquad (3.13)$$

Lygtis (3.13) yra vadinama charakteringąja lygtimi. Tai *s*-tojo laipsnio lygtis w^2 atžvilgiu.

Bendru atveju (3.13) lygtis turi *s* skirtingų realių šaknų $w_m^2 = \lambda_m$ *(m=1,2,...,s).* Taip apibrėžti dydžiai w_m – yra vadinami **nuosavaisiais sistemos dažniais.**

Lygties (3.13) šaknų realumas ir teigiamumas tampa aiškus jau iš fizikinių sumetimų. Iš tikrųjų, jeigu w_m būtų menamos, tai reikštų, kad (3.11) sąryšyje atsirastų eksponentiškai didėjantys ar mažėjantys daugikliai. Tačiau tokio daugiklio atsiradimas šiuo atveju neleistinas, nes jis vestų prie kintamos realiame laike pilnos energijos ir prieštarautų jos tvermės dėsniui. Galime tuo įsitikinti ir matematiškai. Padauginę abi (3.12) puses iš A_k^* ir susumavę pagal k gausime

$$\sum_{k,l}\left(-w^2 c_{kl} + b_{kl}\right)A_k^* A_l = 0$$

iš kur

$$w^2 = \frac{\sum b_{kl} A_k^* A_l}{\sum c_{kl} A_k^* A_l} \qquad (3.14)$$

Kvadratinės formos esančios (3.14) išraiškos skaitiklyje ir vardiklyje yra realios, todėl, kad jų koeficientai b_{kl} ir c_{kl} yra realūs ir simetriški. Iš tikrųjų

$$\left(\sum_{k,l} b_{kl} A_k^* A_l\right)^* = \sum_{k,l} b_{kl} A_k A_l^* = \sum_{k,l} b_{lk} A_k A_l^* = \sum_{k,l} b_{kl} A_l A_k^*$$

Dėl šips priežasties realus ir w_m. Radę w_m, ir įstatę juos atskirai į kiekvieną iš lygčių, galime rasti ir koeficientus A_l. Jeigu visos lygties (3.13) šaknys w_m skirtingos, tai koeficientai A_l yra proporcingi determinanto (3.13), kuriame w pakeista atitinkama w_m, minoram. Pažymėję minorus Δ_{lm}, dalinį diferencialinį lygčių sprendinį galime užrašyti

$$q_k = \Delta_{lm} C_m e^{i w_m t} \qquad (3.15)$$

Čia C_m kompleksinė konstanta.
Iš diferencialinių lygčių teorijos žinome, kad bendrasis sprendinys yra užrašomas dalinių sprendinių suma. Šio sprendinio realioji dalis lygi

$$q_k = \operatorname{Re}\left\{\sum_{m=1}^{s} \Delta_{lm} c_m e^{i w_m t}\right\} \qquad (3.16)$$

Pavyzdys: panagrinėkime vienmatį svyravimą. Tegu pusiausvyros taške $U(x_0)=0,\ a(q_0)=m$ (tai įmanoma tik tada, kai x yra dekarto koordinatės), $q_0=0$. Tada Lagranžo funkciją galime užrašyti

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \qquad k = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_l}\right)_0$$

Tokia f-ja aprašoma sistema vadinama **vienmačiu osciliatoriumi**. Lagranžo lygtį atitinkamai užrašysime

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

arba

$$\ddot{x} + w^2 x = 0, \qquad \text{kur } w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\lambda^2 + w^2 = 0, \qquad \lambda^2 = w^2, \qquad \lambda = \pm w.$$

Lygties bendras sprendinys gali būti užrašytas pavidalu

$$x = a \cdot \cos(wt + \alpha)$$

Taigi netoli pusiausvyros padėties taško svyruojanti sistema atlieka harmoninius svyravimus. Čia a – amplitudė, α - fazė, w – dažnis, kuris nepriklauso nuo pradinių sąlygų ir yra pagrindinė svyravimų charakteristika. Reikia pažymėti, kad ši savybė yra susijusi su svyravimų dažnumu (tiesiniais nariais).
Pažymėję (3.16) išraiškoje

$$Q_m = \operatorname{Re}\left\{C_m e^{i w_m t}\right\} \qquad (3.17)$$

q_k galime užrašyti

$$q_k = \sum_{m=1}^{S} \Delta_{lm} Q_m \qquad (3.18)$$

Išsprendę (3.18) lygtį Q_m atžvilgiu, galime gauti Q_m priklausomybę nuo q_k ($k=1,2,...,s$).
Taigi į Q_m galime žiūrėti kaip į naujas apibendrintas koordinates. Šios koordinatės yra vadinamos **normalinėmis sistemos koordinatėmis,** o jų atliekami svyravimai **normaliniais sistemos svyravimais.**
Normalinės koordinatės tenkina lygtis

$$\ddot{Q}_m + w_m^2 Q_m = 0 \qquad (3.19)$$

Tai reiškia, kad normalinėse koordinatėse judėjimo lygtis suskyla s nepriklausomų Lagranžo lygčių. Taigi, iš čia seka, kad Lagranžo funkcija normalinėse koordinatėse suskyla į sumą išraiškų, kiekviena kurių atitinka vienmatį svyravimą su dažniu lygiu w_m

$$L = \sum_m \frac{m_m}{2}\left(\ddot{Q}_m^2 - w_m^2 Q_m^2\right) \qquad (3.20)$$

čia m_m teigiamos konstantos.
Reikia pažymėti, kad tarpusavyje sąveikaujančių dalelių sistemos, kurios neveikia išorinis laukas, judėjimas yra gana sudėtingas. Kiekviena iš sistemą sudarančių dalelių, atlieka svyruojamuosius judesius apie pusiausvyros padėties tašką. Be to pati sistema, kaip vientisas darinys gali judėti erdvėje, t.y. judėti tiesiai ir suktis. Jeigu sistemoje yra N dalelių, tai trys sistemos laisvės laipsniai bus išnaudoti tiesiaeigiui judėjimui ir trys sukimuisi. Taigi, *3N-6* laisvės laipsniai liks svyravimams. Sprendžiant sistemos svyravimų uždavinį tikslinga iš karto atskirti ir eliminuoti tuos laisvės laipsnius, kurie atsakingi už tiesiaeigį ir sukamąjį sistemos judėjimus.
Norint atskirti sistemos tiesiaeigį judėjimą, reikia pareikalauti kad sistemos impulsas būtų lygus nuliui. Sistemos radiusą vektorių užrašysime

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{i0} + \vec{r}_i^{\,'} \qquad (3,21)$$

čia $\vec{r}_{i0}$- *i*-tosios dalelės pusiausvyros padėtis radiusas vektorius; $\vec{r}_i^{\,'}$- jos atsilenkimo nuo pusiausvyros padėties radiusas vektorius; tai minėta sąlyga įgaus pavidalą

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = const \equiv \sum_i m_i \vec{r}_{i0}$$

arba
$$\sum_i m_i \vec{r}_i^{\,'} = 0 \qquad (3,22)$$

Norėdami eliminuoti sistemos sukimąsi, jos judesio kiekio momentą reikia prilyginti nuliui. Kadangi judesio kiekio momentas nėra jokio koordinačių funkcijos pilna išvestinė pagal laiką, tai bendru atveju duota sąlyga negali būti užrašyta prilyginant tam tikrą koordinačių funkciją nuliui. Tačiau mažų svyravimų atveju iš (3,21) seka, kad judesio kiekio momentą antro laipsnio mažumo dydžių tikslumu galime užrašyti kaip išvestinę pagal laiką nuo koordinačių funkcijos

$$L = \sum_i m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i] \cong \sum_i m_i \left[\vec{r}_{i0}, \dot{\vec{r}}_i^{\,'}\right] = \frac{d}{dt}\sum_i m_i \left[\vec{r}_{i0}, \vec{r}_i^{\,'}\right] \qquad (3,23)$$

taigi, sąlyga $L=0$ virsta į

$$\sum_i m_i \left[\vec{r}_{i0}, \vec{r}_i^{\,'}\right] = 0 \qquad (3,24)$$

Nagrinėjamų svyravimų pavyzdžių gali būti molekulių svyravimai. Normaliniai molekulių svyravimai yra klasifikuojami pagal jų atomų judėjimo charakterį, remiantis atomų išsidėstymo simetrija molekulėje. Čia labai svarbų vaidmenį vaidina metodas, kuris yra grindžiamas **grupių teorija**. Čia panagrinėsime kai kuriuos elementarius atvejus:

1. Jeigu visi molekulės atomai yra vienoje plokštumoje, tai normalinius svyravimus galima suskirstyti į 2 rūšis: tuos, kurie atomus palieka molekulės plokštumoje ir tuos kurie juos išveda iš plokštumos. Nesunku nustatyti jų skaičių. Kadangi judėjimas plokštumoje aprašomas *2N* laisvės laipsniais iš kurių du yra tiesiaeigio judėjimo, o vienas sukamasis, tai normaliniai svyravimai, neišvedantys molekulės atomų iš plokštumos aprašomi *2N-3* laisvės laipsniais. Likę svyravimai, išvedantys atomus iš plokštumos aprašomi *(3N-6)-(2N-3)=N-3* laisvės laipsniais.
2. Jeigu molekulės atomai yra vienoje tiesėje, tai kalbėti apie sukimąsi apie tiesę nėra prasmės ir sukimosi laisvės laipsnių yra šiuo atveju tik du, o ne trys ir svyravimai aprašomi *3N-5* laisvės laipsniais. Šiuo atveju galima išskirti išilginiu svyravimus, kurie išlaiko molekulės tiesinę formą ir molekulės atomų svyravimus neišlaikančius tos formos. Kadangi *N* dalelių judėjimą tiese galime aprašyti *N* laisvės laipsniais, iš kurių vienas atitinka tiesiaeigį judėjimą, tai svyravimai išlaikantys tiesinę molekulės formą, aprašomi *N-1* laisvės laipsniu. Tada svyravimai ardantys tiesinę molekulės formą aprašomi *(3N-5)-(N-1)=2N-4* laisvės laipsniais. Kadangi kiekvienas iš svyravimų gali būti atliekamas dviem nepriklausomais būdais – dviejuose tarpusavyje statmenose plokštumose, einančiose per molekulės ašį, šiems svyravimams atitenka iš viso tik *(N-2)* skirtingi dažniai. Iš simetrijos seka, kad tokia normalinių svyravimų pora turi vienodus dažnius.

Pavyzdys: Rasime tiesinės triatomės simetrinės molekulės *ABA* svyravimų dažnius. Atstumus tarp atomų pradiniu momentu laikysime lygiais *a*. Be to skaitysime, kad potencinė molekulės energija priklauso tik nuo atstumo tarp atomų *A-B* ir *B-A* ir nuo kampo $\angle ABA$.

PAV 12nera

Sprendimas: pasinaudoję tik ką aptarta tiesinės molekulės svyravimų klasifikacija, galime teigti, kad šiuo atveju bus (3-1)=2 svyravimai, išlaikantys molekulės tiesinę (išilginiai svyravimai) ir (3-2)=1 svyravimas ardantis tokią jos formą (skersiniai svyravimai). Panagrinėkime išilginius molekulės svyravimus. Pažymėję atomų atsilenkimus nuo pusiausvyros padėties $q_1 = x_1$, $q_2 = x_2$, $q_3 = x_3$, o $k_1 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_n \partial q_l}\right)_0$, sistemos Lagranžo funkciją išilginiams atomų atsilenkimams galime užrašyti

$$L = \frac{m_A}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2\right) + \frac{m_B}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{k_1}{2}\left[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2\right]$$

Išilginiai atomų atsilenkimai nuo pusiausvyros padėties kaip seka iš (3,22), tenkina sąryšį

$$m_A(x_1 + x_2) + m_B x_3 = 0,$$

kurio pagalba galime iš Lagranžo funkcijos eliminuoti x_2. Šiuo atveju L įgys pavidalą

$$L = \frac{m_A}{2m_B}\left(m_A + m_B\right)\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2\right) + \frac{m_A^2}{m_B}\dot{x}_1\dot{x}_3 - \frac{k_1}{2}\left\{\left(\frac{m_A + m_B}{m_B}\cdot x_1 + \frac{m_A}{m_B}x_3\right)^2 + \left(\frac{m_A}{m_B}x_1 + \frac{m_A + m_B}{m_B}x_3\right)^2\right\}$$

Įvedę naujas koordinates

$$Q_a = x_1 + x_3 \qquad \text{ir} \qquad Q_s = x_1 - x_3$$

ir pažymėję molekulės masę $\mu = 2m_A + m_B$, gauname

$$L = \frac{m_A \mu}{4m_B}\dot{Q}_a^2 + \frac{m_A}{4}\dot{Q}_s^2 - \frac{k_1\mu^2}{4m_B^2}Q_a^2 - \frac{k_1}{a}Q_s^2$$

Iš kur gauname

$$\begin{cases} \ddot{Q}_a - \dfrac{k_1\mu}{m_B m_A}Q_a = 0 \\[2ex] \ddot{Q}_s - \dfrac{k_1}{m_A}Q_s = 0 \end{cases}$$

kur Q_a ir Q_s yra normalinės koordinatės, kurių pirmoji atitinka antisimetrinį atomo B atžvilgiu molekulės svyravimą *(* $x_1 = x_3$ *(a))*, o antroji – simetrinį *(* $x_1 = -x_3$ *(b))* svyravimą. Jų dažniai atitinkamai yra lygūs

$$w_a = \sqrt{\frac{k_1 \mu}{m_A m_B}} \qquad \text{ir} \qquad w_{s_1} = \sqrt{\frac{k_1}{m_A}}$$

Skersiniai atomų poslinkiai y_1, y_2 ir y_3, kaip seka iš (3,22) tenkina lygtį

$$m_A\left(y_1 + y_3\right) + m_B y_2 = 0$$

Be to iš (3,24) įskaitę, kad pradinės atomų padėties radiusų vektorių komponentės yra lygios $x_{10} = -a,\ x_{20} = 0,\ x_{30} = a,$ $y_{10} = y_{20} = y_{30} = 0,$ bei suskaičiavę atitinkamas vektorines sandaugas, gauname dar vieną lygtį y_1=y_3. potencinė molekulės energija išreiškiama kampo $\angle ABA$ pokyčiu δ nuo π ir užrašoma $\frac{k_2 a^2 \delta^2}{2}$. Savo ruožtu $\delta = \theta_1 + \theta_2$, kur $\sin\theta_1 = \frac{y_1 + y_2}{a}$, $\sin\theta_2 = \frac{y_3 - y_2}{a}$. Kadangi svyravimai maži $\sin\theta_1 \approx \theta_1$ ir $\sin\theta_2 \approx \theta_2$.

Iš čia $\delta = \frac{1}{a}\left[\left(y_1 - y_2\right) + \left(y_3 - y_2\right)\right]$. Tada pasinaudojame aukščiau gautais sąryšiais, išreiškiame y_1 ir y_2 per δ

$$y_1 = \frac{a\delta m_A}{2\mu}, \qquad y_2 = -\frac{m_B a\delta}{\mu}$$

čia $\mu = 2m_A + m_B$.

Išdiferencijavę pagal laiką gauname kinetinės energijos komponentę ir užrašome Lagranžo funkciją:

$$L = \frac{m_A m_B}{4\mu} a^2 \dot{\delta}^2 - \frac{k_2 a^2}{2} \delta^2$$

Lagranžo lygtis nusakanti tiesinius svyravimus įgauna pavidalą

$$\ddot{\delta} + w^2 \delta = 0$$

čia $w_{s2} = \sqrt{\frac{2k_2 \mu}{m_A m_B}}$ skersinių svyravimų dažnis.

V.1.2 Priverstiniai svyravimai

Panagrinėsime sistemos, kurią veikia išorinis laukas, svyravimus. Tokie svyravimai, skirtingai nuo ką tik nagrinėtų laisvųjų svyravimų, yra vadinami **priverstiniais svyravimais**. Kadangi svyravimus kaip ir anksčiau laikysime mažais, tai tuo pačiu ir išorinis laukas turi būti laikomas silpnu, nes priešingu atveju jis sukeltų didelius atsilenkimus nuo pusiausvyros padėties.

Šiuo atveju be nuosavos potencinės energijos, kuri vienmačiu atveju, yra lygi $\frac{1}{2}kx^2$, sistema turės ir potencinę energiją $U_{iš}(x,t)$, susijusią su išorinio lauko poveikiu. Skleisdami šį narį mažo dydžio x laipsnių eilute, gauname

$$U_{iš}(x,t) \approx U_{iš}(0,t) + x\left.\frac{\partial U_{iš}}{\partial x}\right|_{x=0} \qquad (3.25)$$

Kadangi pirmasis narys (3.25) priklauso tik nuo laiko, jį galime praleisti. Pažymėję $-\frac{\partial U_{iš}}{\partial x} = F(t)$ Lagranžo funkciją užrašysime

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t) \qquad (3.26)$$

Tada judėjimo lygtis įgaus pavidalą

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \qquad (3.27)$$

arba

$$\ddot{x} + w^2 x = \frac{1}{m}F(t) \qquad (3.28)$$

čia w – laisvų svyravimų dažnis.

Iš diferencialinių lygčių teorijos žinome, kad nehomogeninės tiesinės lygčių sistemos su pastoviais koeficientais sprendinys yra suma

$$x = x_0 + x_1$$

čia x_1 – dalinis nehomogeninės lygties sprendinys, x_0 – bendras homogeninės lygties sprendinys.

Bendras homogeninės lygties sprendinys x_0 žinomas. Jis lygus

$$x_0 = a\cos(wt + \alpha)$$

Tegu jėga yra periodinė laiko funkcija

$$F(t) = f\cos(\gamma t + \beta)$$

Tada lygties (3.28) dalinio sprendinio galime ieškoti pavidalu

$$x_1 = b\cos(\gamma t + \beta)$$

Įstatę į (3.28) gauname

$$b = \frac{t}{m}\left(w^2 - \gamma^2\right)$$

ir

$$x = a\cos(wt + \alpha) + \frac{t}{m\left(w^2 - \gamma^2\right)}\cos(\gamma t + \beta) \qquad (3.29)$$

Kur a ir α nustatysime iš pradinių sąlygų.
Taigi, veikiama periodinės jėgos sistema atlieka judesius, susidedančius iš dviejų svyravimų: vienas iš jų vyksta sistemos **nuosavuoju dažniu *w*,** kits **priverstiniu dažniu *γ*.**
Rasime lygties (3.28) sprendinį tuo atveju, kai periodinės jėgos dažnis sutampa su nuosavuoju sistemos dažniu (t.y. rezonanso atveju). Šiuo atveju (3.29) sprendinio pavidalas yra nepatogus, nes $\gamma \to w$ veda prie begalybės. Todėl patogu jį perrašyti tokiu pavidalu

$$x = a\cos(wt + \alpha) + \frac{t}{m\left(w^2 - \gamma^2\right)}\left[\cos(\gamma t + \beta) - \cos(wt + \beta)\right] \qquad (3,30)$$

kuris, kaip nesinku įsitikinti, irgi tenkina (3,28) lygtį. Kai $\gamma \to w$ antrasis (3,30) narys tampa neapibrėžtas (gauname $\frac{0}{0}$ tipo neapibrėžtumą), kurį galime panaikinti taikydami Lopitalio taisyklę

$$x = a\cos(wt + \alpha) + \frac{t}{2mw}t\sin(wt + \beta) \qquad (3.31)$$

Iš (3,31) matyti, kad rezonanso atveju svyravimo amplitudė auga tiesiškai laikui (kol svyravimai tampa dideli ir teorija nebegalioja).
Netoli rezonanso, t.y. kai $\gamma = w + \varepsilon$, kur ε - mažas dydis bendrą sprendinį galime užrašyti pavidalu

$$x = Ae^{iwt} + Be^{i(w+\varepsilon)t} = \left(A + Be^{i\varepsilon t}\right)e^{iwt} \qquad (3.32)$$

Kadangi $A + Be^{i\varepsilon t}$ mažai kinta, kai *t* kinta nuo 0 iki $\frac{2\pi}{w}$, tai judėjimą netoli rezonanso galime laikyti mažu svyravimu, tačiau su kintama amplitude.
Pažymėję pastarąją $c = \left|A + Be^{i\varepsilon t}\right|$, o *A* ir *B* savo ruožtu pažymėję $ae^{i\alpha}$ ir $be^{i\beta}$, kur *a* ir *b* – realūs skaičiai, gausime

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varepsilon t + \beta - \alpha)$$

Taigi, svyravimų amplitudė kinta periodiškai dažniu ε nuo

$$|a - b| \le c \le a + b$$

Šis reiškinys yra vadinamas **mušimais.**

V.1.3. slopinamieji svyravimai.

Nagrinėdami kūnų judėjimą laikėme, kad jis vyksta vakuume, t.y., kad aplinkos poveikio judėjimui galime nepaisyti. Iš tikrųjų aplinka priešinasi kūnų judėjimui ir judančių kūnų energija praeina į šiluminę energiją arba išsisklaido. Judėjimas tokiomis sąlygos jau nėra vien mechaninis procesas ir jį nagrinėjant reikia įskaityti aplinkos judėjimą bei vidinę šiluminę aplinkos ir judančio kūno būseną. Taigi, bendru atveju nebegalima teigti, kad judančio kūno pagreitis yra tik jo koordinačių ir greičio bei laiko funkcija. Kitaip tariant mechanika ir jos judėjimo lygtys nebegalioja. Nežiūrint į tai, egzistuoja atvejai, kai judėjimas aplinkoje gali būti apytikriai aprašomas mechanikos judėjimo lygtimis į jas įtraukus papildomus narius. Vienas tokių tai svyravimai mažais dažniais, palyginus su tais, kuriais charakterizuojami vidiniai disipanciniai procesai aplinkoje. Jeigu ši sąlyga galioja, tai galime laikyti, kad kūną veikia trinties jėga priklausanti tik nuo kūno greičio. Jei kūno greitis yra nedidelis, tai trinties jėgą galime skleisti greičio laipsnių eilute. Nulinis laipsnio narys yra lygus nuliui, nes jokia jėga neveikia nejudančio kūno. Todėl pirmasis neišnykstantis narys eilutėje yra proporcingas greičiui. Taigi, apibendrintąją trinties jėgą, veikiančią sistema, kuri atlieka mažus svyravimus vienmačiu atveju galime užrašyti taip

$$F_{tr} = -\alpha\dot{x} \qquad (3.32)$$

čia *α* – teigiamas koeficientas, o minuso ženklas rodo, kad jėga veikia priešinga greičiui kryptimi, *x* – apibendrintoji koordinatė. Pridėję (3.32) lygtį prie dešinės pusės vienmačio judėjimo (svyravimo) lygties gausime

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \qquad (3.33)$$

padalinę iš *m* ir įvedę pažymėjimus

$$\frac{k}{m} = w_0^2 \qquad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda$$

čia w_0 sistemos laisvųjų svyravimų dažnis, kai nėra trinties; dydis *λ* – yra vadinamas **slopinimo koeficientu.** Tada (3.32) galime perrašyti:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x}w_0^2 = 0 \qquad (3.34)$$

Iš bendrųjų tiesinių lygčių su pastoviais koeficientais sprendimo taisyklių seka, kad laikydami $x = e^{rt}$, galime gauti charakteringąją lygtį kintamajam *r* nustatyti

$$r^2 + 2\lambda r + w_0^2 = 0$$

tada bendrasis (3.34) lygties sprendinys užrašomas pavidalu

$$x = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}, \quad \text{kur}$$

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - w_0^2}$$

Čia galime išskirti du atvejus:

1. Jeigu $\lambda < w_0$, turime dvi kompleksiškai jungtines r reikšmes ir bendrasis lygties sprendinys gali būti užrašomas

$$x = \mathrm{Re}\left\{A \exp\left(-\lambda t + it\sqrt{\lambda^2 - w_0^2}\right)\right\} \qquad (3.35)$$

čia A – laisvai pasirinkta kompleksinė konstanta. Iš kitos pusės (3.35) kaip ir anksčiau galime perrašyti

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(wt + \alpha), \quad w = \sqrt{\lambda^2 - w_0^2} \qquad (3.36)$$

a ir α – realios konstantos.
(3.36) formule nusakomas judėjimas yra vadinamas **slopinamuoju svyravimu**. Į ji galime žiūrėti kaip į harmoninį svyravimą, kurio amplitudė eksponentiškai mažėja. Laipsnio rodiklis λ apsprendžia amplitudės mažėjimo greitį. Svyravimo dažnis w yra mažesnis negu laisvųjų svyravimų atveju (kai trinties nėra).
2. Tegu $\lambda > w_0$. Tada abi r reikšmės yra realios ir neigiamos ir bendrasis sprendinys

$$x = C_1 e^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - w_0^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w_0^2}\right)t} \qquad (3.37)$$

Šis atvejis realizuojamas, kai trintis gana didelė ir judėjimas vyksta $|x|$ mažėjimo kryptimi, t.y. kai $t \to \infty$ x artėja prie pusiausvyros padėties asimptotiškai. Toks judėjimo tipas vadinamas **aperiodiniu slopinimu.**

Baigiant, keli žodžiai apie **disipacinies jėgas.**
Dideliu laisvės laipsnių skaičiumi charakterizuojamai sistemai apibendrintosios trinties jėgos, atitinkančios koordinates q_i, yra nusakomos tiesinėmis greičių funkcijomis]

$$f_{i_{tr}} = -\sum_k a_{ik}\dot{q}_k \qquad (3.38)$$

Statistinėje fizikoje galima parodyti, kad $a_{ik}=a_{ki}$, todėl (3.38) išraišką galime užrašyti kaip kvadratinės formos

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k \qquad (3.39)$$

išvestinę

$$f_{i_{tr}} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \qquad (3.40)$$

Funkcija (3.39) vadinama **disipacine funkcja.** Kaip jau minėjome (3.40) jėgas turime pridėti prie Lagranžo lygčių dešinės pusės

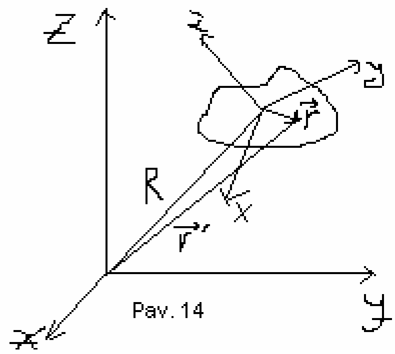
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \qquad (3.41)$$

Disipacinė funkcija turi svarbią fizikinę reikšmę. Nesunku parodyti, kad jos pagalba yra nusakomos **energijos disipacijos (išsklaidymo) intensyvumas sistemoje**

$$\frac{dF}{dt} = -2F, \qquad F > 0 \qquad (3.42)$$

VI. Kieto kūno dinamika

Apibrėžimas. **Absoliučiai kietu kūnu** yra vadinama materialių taškų sistema, atstumai tarp kurių nekinta sistemai judant.
Kitaip tariant, kietą kūną galime nagrinėti kaip materialiųjų taškų sistemą su idealiais vidiniais ryšiais. Todėl kietam kūnui charakterizuoti reikia mažiau laisvės laipsnių negu laisvų dalelių sistemai.
Įveskime dvi koordinačių sistemas: viena jų laikysime nejudančia ir pažymėsima XYZ, o kitą – judančiąją koordinačių sistema xyz surišime su kietu kūnu. Šios sistemos parinksime kūno masių centre.



Tada nejudančios koordinačių sistemos atžvilgiu kieto kūno padėtis vienareikšmiškai bus nustatyta, jeigu užduosime judančios koordinačių sistemos padėtį. Tegu $\vec{R}$ sistemos xyz pradžios radiusas vektorius XYZ sistemos ašių orientacija nejudančios atžvilgiu yra nusakoma trijų nepriklausomų kampų pagalba, tai kieto kūno padėtis gali būti charakterizuojama šešiais laipsniais.
Panagrinėkime labai mažą kieto kūno poslinkį erdvėje. Jį galime įsivaizduoti kaip be galo mažą lygiagretų kieto kūno postūmį, kurio metu jo masės centras pasistumia erdvėje, nepakitus judančios koordinačių sistemos ašių orientacijai ir begalo mažą postūmį apie masių centrą. Pažymėję laisvai pasirinkto kieto kūno taško radiusą vektorių judančioje ir nejudančioje koordinačių sistemose atitinkamai $\vec{r}$ ir $\vec{r}\,'$, begalo mažą taško poslinkį nejudančios sistemos atžvilgiu galime užrašyti 2-jų ddėmenų sumos pavidalu

$$d\vec{r}\,' = d\vec{R} + [d\vec{\varphi} \cdot \vec{r}] \qquad (4.1)$$

čia $d\vec{R}$ - masių centro postūmis; $[d\vec{\varphi} \cdot \vec{r}]$ - dėl posūkio begalo mažu kampu $d\vec{\varphi}$ įvykęs postūmis masių centro atžvilgiu.
Padalinę (4.1) iš laiko dt, per kurį tas poslinkis įvyksta gauname

$$\frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \cdot \vec{r}\right] \qquad (4.2)$$

iš kur, pažymėję $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}, \dfrac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ ir $\dfrac{d\varphi}{dt} = \vec{\Omega}$, gauname

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}] \qquad (4.3)$$

čia $\vec{v}$ - nusako laisvai pasirinkto kieto kūno taško greitį nejudančios koordinačių sistemos atžvilgiu; $\vec{V}$ – kūno masių centro arba jo tiesiaeigio judėjimo greitį; $\vec{\Omega}$ - kampinį kieto kūno sukimosi greitį.

Taigi, iš (4.3) plaukia , kad kieto kūno (nejudanti) patrinkta taip kad jos pradžia yra tške O", nutolusiame nuo masių centro O atstumu $\vec{a}$.

Pažymėkime koordinačių pradžios poslinkio greitį $\vec{V}$ ", sistemos kampinį greitį $\vec{\Omega}$ " ir laisvai pasirinktą kieto kūno taško radiusą vektorių naujosios sistemos atžvilgiu $\vec{r}$ ". Tada $\vec{r} = \vec{r}'' + \vec{a}$. Įstatę į (4.3), gausime

$$\vec{v} = \vec{V} + [\vec{\Omega}\vec{a}] + [\vec{\Omega}r''] \qquad (4.4)$$

Iš kitos pusės, pagal $\vec{V}$ " ir $\vec{\Omega}$ " apibrėžimą, turi būti $\vec{v} = \vec{V}'' + [\vec{\Omega}''\vec{r}'']$. Todėl turi būti tenkinamos lygybės

$$\vec{V}'' = V' + [\vec{\Omega}\vec{a}], \quad \vec{\Omega}'' = \Omega \qquad (4.5)$$

Ypač svarbi antroji lygybė. Ji reiškia, kad kampinis judančios koordinačių sistemos greitis, nepriklauso nuo sistemos. Visos sistemos, surištos su kietu kūnu duotu laiko momentu sukasi apie lygiagrečias viena kitai ašis su vienodais absoliutiniu dydžiu kampiniais greičiais.

Taigi, galime teigti, kad $\vec{\Omega}$ yra **kieto kūno sukimosi greitis.** Kaip nesunku matyti iš (4.5) jo tiesiaeigio judėjimo greitis tokia savybe nepasižymi. Toliau laikysime, kad judančios sistemos pradžia yra masių centre ir kūno sukimosi ašis eina per šį centrą.

Rasime kieto kūno Lagranžo funkciją. Kadangi į kietą kūną galime žiūrėti, kaip į tam tikrą daugiadalelinę sistemą, kinetinę kūno energiją galime užrašyti visų taškų dedamųjų sumos pavidalu. Praleidę sumavimo pagal daleles indeksą, gausime

$$T = \sum \frac{mv^2}{2} \qquad (4.6)$$

Įstatę (4.3), gausime

$$T = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{V} + \left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]\right)^2 = \sum \frac{m}{2}V^2 + \sum m\vec{V}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right] + \sum \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]^2 \qquad (4.7)$$

Kadangi greičiai $\vec{V}$ ir $\vec{\Omega}$ vienodi visiems kūno taškams, tai pirmąjame naryje galime $\dfrac{V^2}{2}$ iškelti prieš sumos ženklą, o kūno masę ∑m – pažymėję raide μ. Antrajame (4.7) naryje (pasinaudoje tuo, kad $\vec{a}[\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{c}[\vec{b} \times \vec{a}] = \vec{b}[\vec{a} \times \vec{c}]$) galime cikliškai pakeisti daugianarių tvarką

$$\sum m\vec{V}[\vec{\Omega}\vec{r}] = \sum m\vec{r}[\vec{V}\vec{\Omega}] = [\vec{V}\vec{\Omega}]\sum m\vec{r} \qquad (4.8)$$

Taigi, jeigu judančios koordinačių sistemos pasirinkome taip, kad ji sutaptų su masių centru, tai (4.8) antras narys (4.7) yra lygus nuliui, nes masių centras nejuda (jud. sistemoj) t. yra $\sum m\vec{r} = 0$.

Trečiąjį (4.7) narį, įskaitę faktą, kad vektorinės sandaugos kvadratas yra lygus $\left[\vec{a}\vec{b}\right]^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2$, gali būti perrašyta taip

$$\frac{1}{2}\sum m\left\{\Omega^2 r^2 - \left(\vec{\Omega}\vec{r}\right)^2\right\}$$

Ir kinetinė energija įgauna pavidalą

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left\{\Omega^2 r^2 - \left(\vec{\Omega}\vec{r}\right)^2\right\} \qquad (4.9)$$

Pirmasis narys kinetinėje energijoje tai **kūno**, kurio masė yra sukoncentruota masės centre, **tiesiaeigio judėjimo energija**. Antrasis narys **aprašo kinetinę kūno sukimosi apie ašį, einančią per masės centrą, energija**.

Pažymėję x_1= x, x_2= y, x_2= z, išreiškime kinetinę sukimosi energiją vektorių $\vec{r}$ ir $\vec{\Omega}$ komponentėmis

$$T_{suk} = \frac{1}{2}\sum m\left\{\Omega_i^2 x_e^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\right\} \qquad (4.10)$$

Čia indeksai i,k ir e prabėga skaičius 1,2 ir 3 sumų pagal juos ženklą praleisime, o sumuosime pagal visus pasikartojančius indeksus, t. yra $a_i b_i = \vec{A}\vec{B}$, $a_i^2 = a_i a_i = \vec{a}^2$ ir t.t.

Turėdami omeny, kad $\Omega_i = \delta_{ik}\Omega_k$, kur δ_{ik} -kronekerio $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$

(4.10) perrašysime taip

$$T_{suk} = \frac{1}{2}\sum m\left\{\Omega_i\Omega_k\delta_{ik}x_e^2 - \Omega_i\Omega_k x_i x_k\right\} = \frac{1}{2}\Omega_i\Omega_k\sum m\left(x_e^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) \qquad (4.11)$$

Pažymėję $\quad I_{ik} = \sum m\left(x_e^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) \qquad (4.12)$

Kinetinę kieto kūno energiją galime užrašyti: $$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k \qquad (4.13)$$
Lagranžo f-ją kieto kūno judėjimui aprašyti gausime atėmę iš (4.13) potencinę enrgiją
$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U \qquad (4.14)$$
Potencinė kieto kūno energija bendru atveju yra šešių kintamųjų funkcija. Jais pvz. Gali būti trys masių centro koordinatės X, Y, Z ir trys kampai, nusakantys judančios koordinačių sistemos ašių orientaciją nejudančios sistemos at˛vilgiu.

VI.1.1. Inercijos tenzorius

Dydis I_{ik} yra vadinamas **inercijos momento** tenzoriumi arba **kūno inercijos** tenzoriumi. Iš (4.12) seka, kad jis simetrinis
$$I_{ik} = I_{ki} \qquad (4.15)$$
Aiškumo dėlei užrašykime inercijos tenzoriaus komponentes. Prisiminę, kad laikome, kad x_1=x, x_2=y, x_3=z ir pasinaudoję (4.12) išraiška gausime
$$I_{ik} = \begin{vmatrix} \sum m(y^2+z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2+z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2+y^2) \end{vmatrix} \qquad (4.16)$$
Tenzoriaus komponentes I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} vadina inercijos momentais atitinkamų ašių atžvilgiu.
Aišku, kad inercijos tenzorius – adityvus, t. yra kūno inercijos momentas yra lygūs atskirų jo dalių inercijos momentų sumai. Kaip ir bet koks simetrinis tenzorių, inercijos tenzorių galima diagonalizuoti atitinkamai parinkus ašių x_1, x_2, x_3 orientaciją. Tokios ašių kryptys, kai inercijos tenzorius diagonalus yra vadinamos **pagrindinėmis inercijos ašimis,** o atitinkamos tenzoriaus komponentės – **pagrindiniais inercijos momentais**. Juos pažymėkime I_1, I_2, I_3. šiuo atveju, kinetinė kietojo kūno sukimosi energija lygi
$$T_{suk} = \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right) \qquad (4.17)$$
Pagrindinių inercijos ašių radimas supaprastėja, jeigu kietas kūnas simetriškas. Pvz. jeigu kūnas turi simetrijos plokštumą, tai masių centras turi būti toje plokštumojr. Šioje plokštumoje bus ir 2 pagrindinės inercijos ašys, o trečioji – statmena simetrijos plokštumai. Toks atvejis realizuosis jeigu dalelių sistema bus plokštumoje. Jeigu tai bus pvz. x_1x_2 plokštuma, tai visoms sistemos dalelėms x_3=0, turėsime
$$I_1 = \sum m x_2^2,\ I_2 = m x_1^2,\ I_3 = m\left(x_1^2 + x_2^2\right) \qquad (4.18)$$
arba
$$I_3 = I_1 + I_2$$
Jeigu kūnas turi simetrijos ašį, tai masių centras bus ant tos ašies. Su ašimi sutaps ir vienas iš pagrindinių inercijos ašių, o likusios bus jai statmenos.
Ypatingas atvejis, tai dalelių, išsidėsčiusių ant tiesės sistema. Tegu ta tiesė sutampa su x_3 ašimi, tada visoms dalelėms x_1= x_2=0 ir todėl 2 pagrindiniai inercjos momentai sutampa, o trečias lygus nuliui
$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2 \qquad I_3 = 0 \qquad (4.19)$$
Tokių sistemų vadiname **rotatoriumi.** Sistema įdomi tuo, kad turi tik 2 sukamuosius laisvės laipsnius, atitinkančius posūkius apie x_1 ir x_2 ašis. Kalbėti gi apie tiesės sukimasi apie save pačių aišku beprasmiška.

VI.1.2. Kieto kūno judesio kiekio momentas

Priminsiu, kad judesio kiekio momentas apibrėžiamas taip $\vec{L} = m[\vec{r}\vec{v}]$. Taigi, šis dydis priklauso nuo taško, kurio atžvilgiu jis apibrėžiamas. Kieto kūno mechanikoje jis paprastai apibrėžiamas judančios koordinačių sistemos pradžios taškas, sutampantis su masių (inercijos) centru. Nesunkiai galima parodyti, kad judesio kiekio momentas susideda iš jo “nuosavojo” judesio kiekio momento, sistemos, kurios atžvilgiu kūnas nejuda ir momento susijusio su jo sistemos kaip tokios judėjimo kiekio momento. Taigi, jeigu parinksime atskaitos tašką anksčiau aptartu būdu t. yra kūno masių centro taške, kieto kūno judesio kiekio momentas $\vec{L}$ sutaps su jo „nuosavuoju momentu“, susijusiu tik su kūno taškų judėjimu masių centro atžvilgiu. Šiuo atveju į kietojo kūno judesio kiekio apibrėžimą įrašę vietoj $\vec{v}$, turimą įrašyti aukštąjį (4.3) dėmenį. Tada
$$\vec{L} = \sum m[\vec{r}\vec{v}] = \sum m\left[\vec{r}\left[\vec{\Omega}\vec{r}\right]\right] = \sum m\left[r^2\vec{\Omega} - \vec{r}\left(\vec{r}\vec{\Omega}\right)\right] \qquad (4.20)$$
Pasinaudoję priimtais pažymėjimais (4.20) galime perrašyti koordinatiniame pavidale
$$L_i = \sum m\left\{x_e^2\Omega_i - x_i x_k \Omega_k\right\} = \Omega_k \sum m\left\{x_e^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right\} \qquad (4.21)$$
Įskaitę (4.12) gauname
$$L_i = I_{ik}\Omega_k \qquad (4.22)$$
Jeigu x_1, x_2 ir x_3 sutampa su inercijos momento tenzoriaus pagrindinėmis ašimis, iš (4.22) seka, kad
$$L_1 = I_1\Omega_1 \qquad L_2 = I_2\Omega_2 \qquad L_3 = I_3\Omega_3 \qquad (4.23)$$

o tuo atveju, kai visos trys inercijos momento pagrindinės ašys sutampa

$$\vec{L} = I\vec{\Omega} \qquad (4.24)$$

t.yra judesio kiekio momento vektorius yra proporcingas kampinio greičio vektoriui.

Bendru atveju, bet kokio kieto kūno judesio kiekio momento vektoriaus kryptis nebūtinai sutampa su vektoriaus $\vec{\Omega}$ kryptimi ir tik kūnui sukantis apie kurią tai iš jo pagrindinių inercijos ašių $\vec{L}$ ir $\vec{\Omega}$ turi tą pačią kryptį.

VI.3. Kietojo kūno judėjimo lygtys

Kietojo kūno judėjimas bendru atveju yra charakterizuojamas šešiais laisvės laipsniais. Taigi, jo judėjimo turi būti aprašomas 6-mis nepriklausomomis judėjimo lygtimis. Jas galime užrašyti kaip sistemos impulso ir jos judesio kiekio išvestines pagal laiką.

Pirmąją jų gausime sumuodami lygtis $\dot{\vec{p}} = f$ pagal visas kietojo kūno daleles; čia $\vec{p}$ - dalelės impulsas, o $\vec{f}$ -veikianti dalelę jėga. Apibrėžę sistemos impulsą kaip

$$\vec{p} = \sum \vec{p} = \mu\vec{V} \qquad (4.25)$$

o jėgą, veikiančią kietą kūną kaip

$$\sum \vec{f} = \vec{F} \qquad (4.26)$$

gauname

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad (4.27)$$

Čia reikia pažymėti, kad nors mes jėgą apibrėžiame kaip sumą visų jėgų $\vec{f}$, veikiančių kiekvieną kietojo kūno dalelę, faktiškai $\vec{F}$ tai išorinių jėgos šaltinių poveikis į kietąjį kųną. Visos sąveikos tarp atskirų dalelių jėgos susiprastina. Iš tikrųjų, jeigu kūno neveikia išorinės jėgos, jo impulsas yra tvarus ir $\vec{F} = 0$.

Tegu U – potencinė kieto kūno energija išoriniame lauke. Tada jėgą $\vec{F}$ rasime diferencijuodami U pagal inercijos (masių) centro koordinates

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}} \qquad (4.28)$$

Iš tikrųjų, tiesiaeigiai pasislenkant kūnui be galo mažu dydžiu $\delta\vec{R}$ tiek pat kinta ir kiekvieno kūno taško radiusai vektoriai $\vec{r}'$, todėl potencinė energija pakinta

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}'}\delta\vec{r} = \delta\vec{R}\sum \frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} = -\delta\vec{R}\sum \vec{f} = -\vec{F}\delta\vec{R} \qquad (4.29)$$

Čia reikia pasakyti, kad lygtis (4.27) gali būti gauta ir kaip Lagranžo lygtis masės centro atžvilgiu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} \qquad (4.30)$$

Čia L lygi (4.14), kuriai

$$\frac{\partial L}{\partial V} = \mu\vec{V} = \vec{p} \qquad \frac{\partial L}{\partial \vec{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{R}} = \vec{F} \qquad (4.31)$$

Išvesime antrąją judėjimo lygtį, nusakančią judesio kiekio momento išvestinę pagal laiką. Paprastumo dėlei parinksime nejudančią koordinačių sistemą taip, kad duotuo laiko momentu masių centras jos atžvilgiu nejudėtų. Tokiu būdu gauta lygtis Galilėjaus reliatyvumo principo dėka turi galioti ir bet kokiai kitai inercinei atskaitos sistemai. Gausime

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\sum[\vec{r}\vec{p}] = \sum[\dot{\vec{r}}\vec{p}] + \sum[\vec{r}\dot{\vec{p}}] \qquad (4.32)$$

Dėl minėto pasirinkimo $(\vec{V} = 0)$, $\dot{\vec{r}} = \vec{r}'$. Kadangi vektoriai $\vec{v}$ ir $\vec{p} = m\vec{v}$ turi tą pačią kryptį, $[\dot{\vec{r}}\vec{p}] = 0$. Pakeitę $\dot{\vec{p}}$ jėga t, gauname

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{k} \qquad (4.33)$$

čia

$$\vec{k} = \sum[\vec{r}\vec{f}] \qquad (4.34)$$

Vektorius $[\vec{r}\vec{f}]$ yra vadinamas jėgos $\vec{f}$ momentu, todėl $\vec{k}$ yra visų jėgų veikiančių kietą kūną momentų suma.

Į lygybę (4.33) galime žiūrėti kaip į Lagranžo lygtį

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{\Omega}} = \frac{\partial L}{\partial q} \qquad (4.35)$$

“Sukimosi koordinačių” atžvilgiu. Iš tikrųjų diferencijuodami Lagranžo funkciją (4.14) $\vec{\Omega}$ komponenčių atžvilgiu gausime

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega_i} = I_{ik}\Omega_k \qquad (4.36)$$

Potencinės energijos U pokytis pasukus kietą kūną begalo mažu kampu $\delta\vec{\varphi}$ lygus

$$\delta U = -\sum \vec{f}\delta\vec{r}' = -\sum \vec{f}\left[\delta\vec{\varphi}\vec{r}\right] = -\delta\vec{\varphi}\sum\left[\vec{r}\vec{f}\right] = -\vec{k}\delta\vec{\varphi} \qquad (4.37)$$

Iš kur

$$\vec{k} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}} \qquad (4.38)$$

($\frac{\partial U}{\partial r'} = -F; \partial\vec{r}' = [\partial\vec{\varphi}\vec{r}]$ kadangi m centras nejuda)

taip kad

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{\varphi}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{\varphi}} = \vec{k} \qquad (4.39)$$

Jeigu koordinačių pradžią perkelsime atstumu $\vec{a}$, tai nauji kūno taškų radius vektoriai $\vec{r}''$ būtų susieti su $\vec{r} = \vec{r}'' + \vec{a}$. Todėl

$$\vec{k} = \sum\left[\vec{r}''\vec{f}\right] + \sum\left[\vec{a}\vec{f}\right] \qquad (4.40)$$

arba

$$\vec{k} = \vec{k}'' + \left[\vec{a}\vec{F}\right] \qquad (4.41)$$

Taigi, jėgų momento dydis nepriklauso nuo koordinačių pradžios pasirinkimo, jeigu pilna jėga $\vec{F} = 0$ (tokiu atveju paprastai sakoma, kad kūną veikia jėgų pora).

Laikysime, kad vektoriai $\vec{F}$ ir $\vec{k}$ statmeni vienas kitam. Tokiu atveju visada galima rasti tokį vektorių $\vec{a}$, kad (4.41) formulėje $\vec{k}''$ virsta nuliu, tai yra

$$\vec{k} = \left[\vec{a}\vec{F}\right] \qquad (4.42)$$

Be to, reikia pastebėti, kad $\vec{a}$ pasirinkimas nevienareikšmis, jeigu prie jo pridėsime bet kokį vektorių $\parallel$ vektoriui $\vec{F}$, tai (4.42) nesikeis.

Taigi sąlyga $\vec{k} = 0$ nurodo ne tam tikrą tašką judančioje koordinačių sistemoje, bet tam tikrą tiesią liniją. Taigi, esant $\vec{k} = \vec{F}$ visą kūną veikiančių jėgų poveikis gali būti suvestas į vienos jėgos veikiančios išilgai duotos tiesės poveikį.

Tokio atvejo pavyzdžiu gali būti pavyzdžiui vienalyčios jėgos lauko, kuriame materialią kūno dalelę veikia jėga turinti pavidalą $F = e\vec{E}$, kur $\vec{E}$ pastovus vektorius, charakterizuojantis lauką, o e dydis charakterizuojantis kieto kūno dalelės savybes lauko atžvilgiu. Šiuo atveju

$$\vec{F} = \vec{E}\sum e \qquad \vec{k} = \left[\sum e\vec{r}\vec{E}\right] \qquad (4.43)$$

(vienalyčiame elektriniame lauke $\vec{E}$ - el. Lauko stipris, e – dalelės krūvis. Vienalyčiame traukos jėgos lauke $\vec{E}$ - sunkio jėgos pagreitis $\vec{g}$, o e – dalelės masė.)

laikydami, kad $e \neq 0$, įvesime radiusą vektorių $\vec{r}_0$, apibrėžimą

$$\vec{r}_0 = \frac{\sum e\vec{r}}{\sum e} \qquad (4.44)$$

Tada gauname pilną jėgų momento išraišką

$$\vec{k} = \left[\vec{r}_0\vec{F}\right] \qquad (4.45)$$

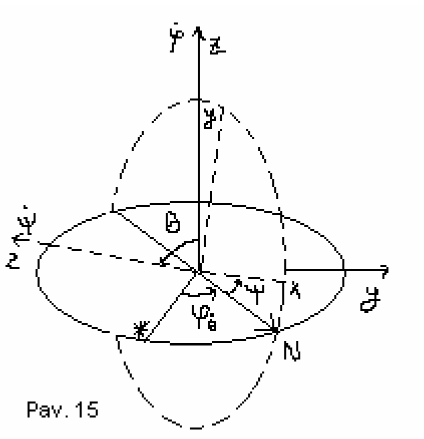
Taigi, kietam kūnui judant vienalyčiame lauke, lauko įtaka susiveda į vienos jėgos, kuri veikia kieto kūno tašką, nusakoma radius-vektoriumi (4.44), poveikį. Šio taško padėtis priklauso tik nuo pačio kieto kūno savybių. Pvz. traukos jėgos lauke, šio taško padėtis sutampa su kūno masės centru.

VI.3.1 Eulerio kampai

Jau minėjome, kad aprašant kieto kūno judėjimą galima naudotis trimis jo koordinatėmis masių centro atžvilgiu ir kokiais tai 3 kampais nusakančiais sistemos $x_1x_2x_3$ ašių orientaciją, nejudančios sistemos XYZ at˛vilgiu. Tais kampais da=nai parenkami taip vadinami **Eulerio kampai.**

Koordinačių centrus sutapatinsime, nes mus domina tik kampai tarp ašių. Tegu judančioji plokštuma x_1x_2 kerta nejudančiąją plokštumą XY tiese ON. Ją vadina **mazgų linija**. □i linija, aišku, $\perp$ ne tik ašiai z, bet ir ašiai x_3; jos (+) teigiamą kryptį parinksime taip, kad ji atitiktų vektoriniai sandaugai $\left[\vec{k}\vec{x}_3\right]$, (čia $\vec{k}$ ir $\vec{x}_3$ atitinkami Z ir x_3 ortai).

Dyd˛iais, nusakančiais x_1 x_2 ir x_3 padėtį ašių XYZ atžvilgiu laikysime kampus. Kampą θ tarp ašių z ir x_3; kampą φ tarp X ir N ir kampą ψ tarp N ir x_1. Kampus φ ir ψ skaitysime kryptimi pagal var˛to sukimo taisyklę apie ašis z ir x_3. (θ kinta nuo $0 \div \pi$, φ ir ψ nuo $0 \div 2\pi$).



Pav. 15

Nesunku pastebėti, kad $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ ir $\dot{\psi}$ - yra kampiniai sukimosi greičiai apie ašis ON, z ir x_3, atitinkamai, todėl norėdami sistemoje išreikšti kampinį greitį $\vec{\Omega}$ judančioje koordinačių sistemoje, išreikšime jo komponentes per Eulerio kampus. Tam reikia suprojektuoti į x_1, x_2 ir x_3 ašis kampinius greičius $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ ir $\dot{\psi}$.

Kampinis greitis $\dot{\theta}$ yra nukreiptas ON kryptimi ir jo komponentės judančioje koordinačių sistemoje bus

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}\cos\psi \qquad \dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}\sin\psi \qquad \dot{\theta}_3 = 0 \qquad (4.46)$$

Kampinis greitis $\dot{\varphi}$ nukreiptas išilgai z ašies. Jo projekcija į ašį x_3 yra lygi $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}\cos\theta$, į plokštumą x_1x_2 (x y) lygi $\dot{\varphi}\sin\theta$. Paskutiniąją dar kartą suskaidę į dedamąsias pagal ašis, gauname:

$$\varphi_3 = \dot{\varphi}\cos\theta \qquad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \qquad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \qquad (4.47)$$

Kampinis greitis $\dot{\psi}$ nukreiptas x_3 ašies kryptimi. Surinkę visas dedamąsias kiekvienai iš ašių gauname

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\sin\psi \\
\Omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \qquad (4.48) \\
\Omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}
\end{aligned}$$

Jeigu ašys x_1, x_2 ir x_3 parinktos taip, kad sutaptų su pagrindinėmis kieto kūno inercijos ašimis, tai kinetinę sukimo energiją per Eulerio kampus gausime įtatę (4.48) į (4.47).

Jeigu $I_1 = I_2 \neq I_3$, tai

$$T_{suk} = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 \qquad (4.49)$$

VI.3.2 Eulerio lygtys

Anksčiau nagrinėtos judėjimo lygtys (4.27) ir (4.33) buvo užrašytos nejudančios koordinačių sistemos atžvilgiu. Tačiau pasirodo, kad paprasčiausią pavidalą sąryšis tarp sukamojo judesio kiekio momento $\vec{L}$ komponenčių ir kampinio greičio kampo menčių įgyja judančioje koordinačių sistemoje, kurios ašys yra nukreiptos pagrindinių inercijos momento ašių kryptimis. Todėl užrašysime judėjimo lygtis judančios koordinačių sistemos atžvilgiu. Tuo tikslu reikia rasti sąryšį tarp bet kokio vektoriaus $\vec{a}$ išvestinių pagal laiką judančioje sistemoje x_1, x_2 ir x_3, sistemoje XYZ. Jeigu sistemoje $x_1x_2x_3$ yra lygi nuliui $\frac{d}{dt}\vec{a} = 0$, tai turime vektorių kuris tiesiogiai susietas su kietuoju kūnu. Tada

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_{XYZ} = \left[\Omega\vec{Q}\right] \qquad (4.50)$$

t. yra jo pokytis nejudančios sistemos at˛vilgiu yra susijźs su sukimusi, arba bendru atveju

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_{XYZ} = \frac{d\vec{a}}{dt}_{X_1X_2X_3} + \left[\Omega\vec{a}\right] \qquad (4.51)$$

Pasinaudojź (4.51), (4.27) ir (4.33) galime perrašyti

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{X_1X_2X_3} + \left[\vec{\Omega}\vec{p}\right] = \vec{F} \qquad \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{X_1X_2X_3} + \left[\vec{\Omega}\vec{L}\right] = \vec{k} \qquad (4.52)$$

Kadangi čia diferencijuojama pagal laiką judančioje koordinačių sistemoje, galima (4.52) užrašyti projekcijų į $X_1X_2X_3$ sistemos ašis pavidalu

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{X_1} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}, \ldots, \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{X_1} = \frac{d\vec{L}_{X_1}}{dt} \qquad (4.53)$$

Pakeitź pirmojoje lygtyje $\vec{p}$ į $\mu\vec{V}$ ir pažymėję vietoj $x_1 \to 1$ $x_2 \to 2$ $x_3 \to 3$

$$\mu\left(\frac{dV_1}{dt}+\Omega_2V_3-\Omega_3V_2\right)=F_1$$
$$\mu\left(\frac{dV_2}{dt}+\Omega_3V_1-\Omega_1V_3\right)=F_2 \qquad (4.54)$$
$$\mu\left(\frac{dV_3}{dt}+\Omega_1V_2-\Omega_2V_1\right)=F_3$$

Laikydami, kad ašys $x_1x_2x_3$ parinktos taip, kad sutaptų su pagrindinėmis inercijos momento ašimis, antrąją lygtį galime užrašyti

$$I_1\frac{d\Omega_1}{dt}+(I_3-I_2)\Omega_2\Omega_3=k_1$$
$$I_2\frac{d\Omega_2}{dt}+(I_1-I_3)\Omega_3\Omega_1=k_2 \qquad (4.55)$$
$$I_3\frac{d\Omega_3}{dt}+(I_2-I_1)\Omega_1\Omega_2=k_3$$

(4.55) lygtys yra vadinamos **Eulerio lygtimis**. Jeigu $\vec{k}=0$, t.yra jėgos momentas yra lygus 0 arba sukimasis yra laisvas, tai (4.55) dešinėje – nuliai.

Pavyzdys: pritaikydami Eulerio lygtis atveju kai

$I_1=I_2\neq I_3$ (tokia sistema vadinama simetriniu vilkeliu, o sukimasis laisvas)

$$\begin{pmatrix} I_1=I_2=I_3-sferinis.vilkelis \\ I_1=I_2;I_3=0-rotatorius \end{pmatrix}$$

Tada iš (4.55) 3 lygties gauname

$$\frac{d\Omega_3}{dt}=0 \quad \text{arba} \quad \Omega_3=0$$

t. yra $\Omega_3=const$.

$$\dot{\Omega}_1=\frac{I_1-I_3}{I_1}\Omega_2\Omega_3 \qquad \dot{\Omega}_2=\frac{I_3-I_1}{I_1}\Omega_3\Omega_1$$

Pažymėję $w=\Omega_3\dfrac{I_3-I_1}{I_1}$, gauname

$$\dot{\Omega}_1=-w\Omega_2 \qquad \dot{\Omega}_2=w\Omega_1$$

padauginę antrąją lygtį iš i ir pridėję prie pirmos, gausime

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1+i\Omega_2)=iw(\Omega_1+i\Omega_2)$$

Iš kur

$$(\Omega_1+i\Omega_2)=Ae^{iwt}$$

Čia A – konstanta.

Tada

$$\Omega_1=A\cos wt$$
$$\Omega_2=A\sin wt$$

Matome, kad kampinio greičio projekcija į plokštumą, statmeną vilkelio ašiai, sukasi šioje plokštumoje greičiu w, o jos dydis išlieka pastovus $\sqrt{\Omega_1^2+\Omega_2^2}=A$.

Kadangi Ω_3 (vilkelio kampinio greičio projekcija į vilkelio ašį) irgi pastovi, tai ir pilnas $\vec{\Omega}$ vektorius tolygiai sukasi kampiniu greičiu w apie Vilkelio ašį, o jo dydis nekinta. Kadangi $L_1=I_1\Omega_1$ $L_2=I_2\Omega_2$ $L_3=I_3\Omega_3$, tai taip pat juda ir judesio kiekio momento vektorius $\vec{L}$.

VI.4 Judėjimas neįnercinėse atskaitos sitemose

Iki šiol visada turėjome omeny, kad atskaitos sistemos, kurių atžvilgiu nagrinėjame mechaninių sistemų judėjimą yra inercinės. Tiktai inercinėse atskaitos sistemose vienos dalelės, judančios išoriniame lauke Lagran˛o funkcija turi pavidalą

$$L_0 = \frac{m\vec{v}_0^2}{2} - U \qquad (4.56)$$

o judėjimo lygtis yra

$$m\frac{d\vec{v}_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \qquad (4.57)$$

(čia indeksas “0” rodo, kad nagrinėjama sistema inercinės sistemos atžvilgiu).
Kaip turėtų atrodyti **dalelės judėjimo lygtis neinercinėję atskaitos sistemoje?** Grįškime atgal prie (2.27) formulės, kuria yra išreikiamas Hamiltono principas, kuris kaip jau minėjome nepriklauso nuo koordinačių sistemos, kurioje yra aprašoma sistema **pasirinkimo būdo** ir kurio pagalba išvedėme Lagranžo lygtis apibendrintose koordinatėse. Taigi iš šio principoseka, kad Lagranžo lygtis

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \qquad (4.58)$$

yra teisinga bet kuriose atskaitos sistemose, tačiau Lagranžo funkcija nebus lygi mūsų atveju L_0 (žiūr. (4.56)). Ji turi būti pakeista.

Nagrinėsime atskaitos sistemą K', kuri juda inercinės sistemos K_0 at˛vilgiu tiesiaeigiu greičiu $\vec{V}(t)$. □ių sistemų atžvilgiu dalelės greičius pažymėsime atitinkamai $\vec{v}_0$ ir $\vec{v}_k$. Jie išsireiškia vienas per kitą

$$\vec{v}_0 = \vec{v}' + \vec{V}(t) \qquad (4.59)$$

Įstatę (4.59) į (4.56), gausime Lagranžo funkciją sistemos K' atžvilgiu

$$L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} + m\vec{v}'\vec{V} + \frac{m}{2}\vec{V}^2 - U \qquad (4.60)$$

Tačiau $\vec{V}^2(t)$ - žinoma laiko funkcija, todėl gali būti užrašyta, kaip kokios tai kitos funkcijos pilna išvestinė. ir todėl gali būti praleista. Parodysime iš kur tai plaukia.
Tegu dvi Lagranžo tunkcijos $L'(q,\dot{q},t)$ ir $L(q,\dot{q},t)$ skiriasi laiko išvestine nuo laisvai pasirinktos koordinačių ir laiko funkcijos

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{d}{dt}\Phi(q,t)$$

Tada pasinaudoję (2.27), integralą galime užrašyti taip

$$\int_{t_1}^{t_2} L'(q,\dot{q},t)dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\Phi(q,t)}{dt}dt =$$
$$= S' + \Phi(q^{(2)},t_2) - \Phi(q^{(1)},t_1)$$

Varijuodami gausime $\delta S' = \delta S$. Taigi judėjimo lygtys (2.39) bus tos pačios. Kitaip tariant **Lagranžo funkcija yra apibrėžta pilnos išvestinės pagal laiką tikslumu** (nuo koordinačių ir laiko funkcijos).

Taigi, trečią narį (4.60) galime praleisti. Toliau $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$, kur $\vec{r}'$ - dalelės radiusas vektorius sistemoje K’. Tada $m\vec{v}'\vec{v}H$ galime užrašyti per diferencialą

$$m\vec{v}'\vec{V}(t) = m\vec{V}\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}\vec{r}') - m\vec{r}'\frac{d\vec{V}}{dt} \qquad (4.61)$$

Įstatę (4.61) į Lagranžo funkciją ir vėl praleidę išvestinę pagal laiką, gauname

$$L' = \frac{m\vec{v}'^2}{2} - m\vec{W}(t)\vec{r}' - U \qquad (4.62)$$

čia $\vec{W} = \dfrac{d\vec{V}}{dt}$ - sistemos K' tiesiaeigio judėjimo pagreitis. Pasinaudoję (4.62) Lagranžo lygtį galime užrašyti

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m\vec{W}(t) \tag{4.63}$$

Iš (4.63) matome, kad tiesiaeigis atskaitos sistemos judėjimas su pagreičiu $\vec{W}$ yra ekvivalentus, poveikio į dalelės judėjimo lygtį prasme, vienalyčio jėgos lauko atsiradimui, o veikiant šiame lauke dalelę jėga yra absoliutiniu didumu lygi dalelės masės ir pagreičio $\vec{W}$ sandaugai. Jėgos kryptis yra priešinga pagreičio krypčiai. Įveskime dar vieną atskaitos sistemą K, kurios pradžia sutampa su sistemos K' pradžia. Ši sistema sistemos K' atžvilgiu sukasi kampiniu greičiu $\vec{\Omega}(t)$. Tokiu būdu inercinės sistemos K_0 atžvilgiu sistema K ne tik juda tiesiaeigiai, bet ir sukasi.

Dalelės greitis sistemos K' atžvilgiu $\vec{v}'$ dabar bus sudarytas iš jos greičio sistemos K atžvilgiu $\vec{v}$ ir jos sukimosi greičio kartu su sistema K

$$\vec{v}' = \vec{v} + [\vec{\Omega}\vec{r}] \tag{4.64}$$

(čia reikia pažymėti, kad dalelės koordinatės $\vec{r}$ ir $\vec{r}'$ sistemų K ir K' atžvilgiu sutampa)
Įstatę (4.64) į (4.62) gausime dalelės judėjimo neinercinėje sistemoje Lagranžo funkciją

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + \frac{m}{2}[\vec{\Omega}\vec{r}]^2 - m\vec{W}\vec{r} - U \tag{4.65}$$

Matome, kad atsiranda ypatingas palyginus su (4.62) ir (4.56) narys, proporcingas dalelės greičiui. Rasime dalelės judėjimo lygtį neinercinėje sistemoje. Tam užrašysime Lagranžo funkcijos diferencialą

$$\begin{aligned} dL &= m\vec{v}d\vec{v} + md\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + m\vec{v}[\vec{\Omega}d\vec{r}] + m[\vec{\Omega}\vec{r}][\vec{\Omega}d\vec{r}] - m\vec{W}d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}d\vec{r} = \\ &= m\vec{v}d\vec{v} + md\vec{v}[\vec{\Omega}\vec{r}] + md\vec{r}[\vec{v}\vec{\Omega}] + m[[\vec{\Omega}\vec{r}]\vec{\Omega}]d\vec{r} - m\vec{W}d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}d\vec{r} \end{aligned} \tag{4.66}$$

Čia pasinaudojom vektorinės sandaugos savybėmis

$$\vec{a}\times[\vec{b}\times\vec{c}] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$
$$[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot[\vec{c}\times\vec{d}] = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$$

Surinkę narius prie $d\vec{v}$ ir $d\vec{r}$ gausime

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + m[\vec{\Omega}\vec{r}] \tag{4.67}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m[\vec{v}\vec{\Omega}] + m[[\vec{\Omega}\vec{r}]\vec{\Omega}] - m\vec{W} - \frac{\partial U}{\partial r} \tag{4.68}$$

Įstatę į (4.58) gauname judėjimo (Lagranžo) lygtį dalelei neinercinėje atskaitos sistemoje

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m\vec{W} + m[\vec{r}\dot{\vec{\Omega}}] + 2m[\vec{v}\vec{\Omega}] + m[\vec{\Omega}[\vec{r}\vec{\Omega}]] \tag{4.69}$$

Iš (4.69) matyti, kad jėgos, atsiradę dėl to, kad atskaitos sistema sukasi susideda iš trijų dedamųjų. Jėga $m[\vec{r}\dot{\vec{\Omega}}]$ susijusi su sukimosi netolydumu, o kitos dvi egzistuoja ir tolydžiai besisukančios sistemos atveju.

Jėga $2m[\vec{r}\vec{\Omega}]$ - yra vadinama **Koriolio jėga.** Ji priklauso nuo dalelės greičio. $m[\vec{\Omega}[\vec{r}\vec{\Omega}]]$ - jėga vadinama **išcentrine jėga.** Ši jėga visada statmena momentinei sukimosi ašiai (nukreipta priešinga kryptimi, t.y. nuo ašies).(plokštumoje)

VII. Kanoninės lygtys

VII.1. Hamiltono lygtys

Teorinės mechanikos dėsnių formulavimas Lagranžo funkcijos ir iš jos išvedamų Lagranžo lygčių pagalba leidžia mechaninę sistemą aprašyti apibendrintųjų greičių ir koordinačių pagalba. Lagranžo lygtys, tai antros eilės diferencialinės lygtys (jų skaičius lygus laisvės laipsnių skaičiui *s*). Tačiau dažnai patogu pereiti prie *2s* pirmos eilės diferencialinių lygčių sistemos. Tai lygtys apibendrintųjų koordinačių ir impulsų atžvilgiu. Rasime šias lygtis.

Tuo tikslu užrašysime Lagranžo funkcijos $L(q,\dot{q},t)$ diferencialą

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \qquad (5.1)$$

Turėdami omeny, kad $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$, o $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$, tai (5.1) galime perrašyti taip

$$dL = \sum \dot{p}_i\, dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i \qquad (5.2)$$

Antrajį (5.2) narį išreiškę per pilną diferecialą

$$\sum p_i d\dot{q}_i = d\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i\, dp_i \qquad (5.3),$$

(5.2) galime perrašyti pavidalu

$$d\left(\sum p_i d\dot{q}_i - L\right) = -\sum \dot{p}_i\, dq_i + \sum \dot{q}_i\, dp_i \qquad (5.4)$$

Dydis po diferencialo ženklu yra sistemos energija, nes

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T\,,$$

Funkcija

$$H(p,q,t) = \sum_i p_i \dot{q} - L \qquad (5.5)$$

yra vadinama **Hamiltono funkcija.**

Iš (5.4) įskaitę (5.5) gausime

$$dH = -\sum \dot{p}\, dq_i + \sum \dot{q}_i\, dp_i \qquad (5.6)$$

Iš čia plaukia lygtys

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \qquad -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \qquad (5.7)$$

Tai ir yra mūsų ieškomos pirmos eilės judėjimo lygtys *2s* kintamųjų *p(t)* ir *q(t)* atžvilgiu. Jos vadinamos **Hamiltono lygtimis.** Dėl paprastumo ir formalios simetrijos šios lygtys kartais dar vadinamos **kanoninėmis lygtimis.**

Rasime Hamiltono funkcijos išvestinę pagal laiką

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \qquad (5.8)$$

Įstatę $\dot{q}_i$ ir $\dot{p}_i$ iš (5.7) gauname

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (5.9)$$

Tuo atveju, kai Hamiltono funkcija tiesiogiai nuo laiko nepriklauso $\left(\frac{dH}{dt} = 0\right)$, gauname **energijos tvermės dėsnį.**

Hamiltono lygtys vaidina svarbų vaidmenį fizikoje dėl šių priežasčių.

1. Kvantinė mechanika yra formuluojama taikant Hamiltono funkcijos formalizmą. (Lagranžo funkcijos formalizmas taikomas lauko teorijoje).
2. Hamiltono formalizmas yra labai patogus tais atvejais, kai nagrinėjamos sistemos, kurioms neįmanoma rasti tikslius judėjimo lygties sprendinius. Kadangi dažniausiai tai sistemos, kurios tik nedaug skiriasi nuo paprastesnių sistemų, kurioms uždavinys sprendžiamas tiksliai, tai šiuo atveju taikoma trikdžių arba perturbacijų teorija, kurios teiginiams suformuluoti Hamiltono formalizmas yra labai patogus.
3. Statistinėje mechanikoje irgi patogu naudotis Hamiltono formalizmu. Statistinėje mechanikoje *2s*-dimensinė *(p, q)* erdvė yra vadinama **fazine erdve.**

VII.2. Puasono skliausteliai

Tegu f(p, q, t) – bet kokia koordinačių, impulsų ir laiko funkcija. Tada

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \qquad (5.10)$$

Įstatę vietoj $\dot{q}_i$ ir $\dot{p}_i$ - išraiškos ir Hamiltono lygčių (5.7), gausime

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + [Hf] \qquad (5.11)$$

Čia

$$[Hf] = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \qquad (5.12)$$

(5.12) išraiška yra vadinama dydžių H ir f **Puasono skliaustais.**

Iš (5.11) seka, kad tam, kad dydis f būtų judėjimo integralas, turi būti tenkinama sąlyga

$$\frac{\partial f}{\partial t} + [Hf] = 0 \qquad (5.13)$$

Tuo atveju, kai f tiesiogiai nuo laiko nepriklauso, ši sąlyga susiveda į

$$[Hf] = 0 \qquad (5.14)$$

Fizikiniams dydžiams f ir g Puasono skliaustai apibrėžiami analogiškai (5.12)

$$[fg] = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \qquad (5.15)$$

Iš (5.15) seka Puasono skliaustų savybės.

1. Jeigu funkcijas f ir g sukeisti vietomis, tai skliaustai pakeis ženklą

$$[fg] = -[gf] \qquad (5.16)$$

2. Jeigu viena iš funkcijų yra konstanta, tai

$$[fc] = 0 \qquad (5.17)$$

3. $$[f_1 + f_2, g] = [f_1 g] + [f_2 g] \qquad (5.18)$$

4. $$[f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g] \qquad (5.19)$$

5. $$\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right] \qquad (5.20)$$

6. Jeigu viena iš funkcijų sutampa su vienu iš impilsų arba viena iš koordinačių, tai

$$[f, q_i] = \frac{\partial f}{\partial p_i} \qquad (5.21)$$

$$[f, p_i] = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \qquad (5.22)$$

Prilyginę (5.21) funkciją $f = q_k$, o (5.22) $f = p_k$ gausime

$$[q_k, q_i] = 0, \quad [p_k, p_i] = 0, \quad [p_k, q_i] = \delta_{ik} \qquad (5.23)$$

Tarp Puasono skliaustų, sudarytų iš trijų funkcijų galioja sąryšis

$$[f[g,h]] + [g[h,f]] + [h[t,g]] = 0 \qquad (5.24)$$

vadinamas **Jakobi tapatybe.**

Labai svarbi Puasono skliaustų savybė: jeigu f ir g – du judėjimo integralai, tai iš jų sudaryti Puasono skliaustai taip pat yra judėjimo integralas

$$[t, g] = const \qquad (5.25)$$

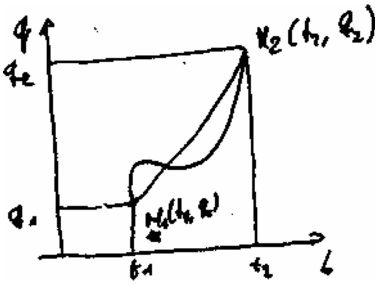
(5.25) formulė išreiškiama **Puasono teorema.** Aišku, kad taikydami Puasono teoremą, ne visada gausime naujus judėjimo integralus, nes jų skaičius, bendrai taikant, yra ribotas (*2s-1*, kur *s* – laisvės laipsnių skaičius). Kai kuriais atvejais gausime trivialų atvejį – konstantą. Kitais atvejais naujas judėjimo integralas bus tiesiog *g* ir *t* funkcija. Jeigu nei tas nei kitas atvejis, tai bus naujai gautas judėjimo integralas *β.*

VII.3. Variaciniai principai

Išvesdami Lagranžo lygtis holonominiais ryšiais apribotai sistemai mes jau įvedėme du variacinius principus: D`Alambero principą ir Hamiltono principą, kurio pagalba išvedėme Lagranžo lygtis apibendrintose koordinatėse.

Apibrėžimas. Laisvai pasirinktai holonominei sistemai, kurios Lagranžo funkcijos $L(\dot{q}, q, t)$, integralas laiko intervale $[t_1,t_2]$.

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q},q,t)dt \qquad (5.26)$$



yra vadinamas "veiksmo funkcija" arba "veiksmu" .Iš tikrųjų, kadangi $L = L(\dot{q},q,t)$, tai tam, kad gautume (5.26) turime užduoti *q(t)* intervale nuo $t_1 \le t \le t_1$, . Kitais žodžiais tariant veiksmas S yra funkcionalas, priklausantis nuo sistemos judėjimo.

Uždavę *q(t)* ,gauname sistemos judėjimą, kurį jai leidžia atlikti judėjimą ribojantys ryšiai. Kaip jau minėjome, tokį judėjimą galime atvaizduoti tam tikra trajektorija. Nagrinėjame visas įmanomas trajektorijas, einančias per taškus $M_1(t_1,q_1)$ ir $M_2(t_2,q_2)$, *t.* yra kelius, kuriais galime iš taško q_1 sistemą pervesti į tašką q_2. Galime prileisti, kad egzistuoja vienas, tiesiausias kelias, t. y. toks. Kuriuo juda sistema , esant duotai Lagranžo funkcijai *L.* Parodėme, kad tada *L* tenkina Lagranžo lygtį (2.39).

Visi kiti keliai, einantys per taškus M_1 ir M_2 yra "aplinkiniai". Galime nesunkiai parodyti, kad veiksmas *S* "tiesiąjam" keliui palyginus su "aplinkiniais" yra ekstremalus. Kadangi galioja ir atvirkštinis teiginys, tai yra jeigu duotajam keliui $\delta S = 0$, tai kelias "tiesiausias", tai Hamiltono arba mažiausio veikimo principas sudaro holonominių sistemų dinamikos pagrindą. J*o* pagalba galime išvesti Lagranžo judėjimo lygtis. arba turėdami tas lygtis galime išvesti mažiausio veikimo principą.

Panagrinėkime veikimo sąvoką kiek kitu aspektu. Tegu S- dydis, charakterizuojantis judėjimą "tiesiausia" trajektorija. Sulyginkime reikšmes, kurias S įgaus trajektorijoms, kurių pradžia taške $q_1=q(t_1)$, bet galiniai taškai (momentu t_2)skiriasi. Kitais žodžiais tariant nagrinėsime veiksmo integralą "tiesiausioms" trajektorijoms, kaip viršutinės integravimo ribos koordinatės funkciją. Iš (2.36) ir (2.38) galime parašyti:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \,\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \qquad (5.27)$$

Kadangi "tiesioji" trajektorija tenkina Lagranžo lygtį. Tai pointegralinis reiškinys lygus nuliui. Iš mažiausio veikimo principo taip pat plaukia, kad pirmajame naryje$\delta q(t_1) = 0$, o $\delta q(t_2)= \delta q$.

Įskaitę, kad $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$, gauname $\delta S=p\delta q$ arba sistemai su bet kokiu laisvės laipsnių skaičiumi

$$\delta S=\sum_i p_i \delta q_i$$

Iš (5.28) gauname

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad (5.29)$$

Analogiškai S galime laikyti tiesiogai nuo laiko priklausančia funkcija ir nagrinėti trajektorijas, kurios duotu laiko momentu t_1 prasideda taške $q_{(1)}$ ir baigiasi taške $q_{(2)}$ skirtingais laiko momentais t_2=t. $\frac{\partial L}{\partial t}$ gausime, pasinaudoję (5.29).Pagal apibrėžimą

$$\frac{dS}{dt} = L \qquad (5.30)$$

Iš kitos pusės, jeigu S(q,t),pasinaudoję (5.29),gausime

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i \qquad (5.31)$$

Sulyginę (5.30) ir (5.31) gauname

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i \qquad (5.32)$$

ir įskaitę (5.5), gauname

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -H \qquad (5.33)$$

Kartu (5.29) ir (5.33) galime užrašyti kaip pilną veiksmo, kaip koordinačių ir laiko funkcijos viršutinėje integravimo riboje, diferencialą:

$$dS = \sum_i p_i dq_i - Hdt \qquad (5.34)$$

Taigi, mažiausio veikimo principas pilnai nusako mechaninės sistemos judėjimą: sprendžiant iš jo sekančias judėjimo lygtis galime gauti ne tik trajektoriją, bet ir ta trajektorija judančio kūno padėties priklausomybę nuo laiko.

Apsiribokime atveju, kai reikia nustatyti tik trajektoriją; kaip tokiu atveju atrodis pats mažiausio veikimo principas. Tegu Lagranžo funkcija (ir Hamiltono taip pat, aišku) tiesiogiai nuo laiko nepriklauso, o tai savo ruožtu reiškia, kad sistemos energija

$$H(p,q) = E = \text{const.} \qquad (5.35)$$

Iš mažiausio veikimo principo seka, kad veiksmo variacija yra tygi nuliui duotoms pradinėms ir baigtinėms koordinatėms ir laiko momentams esant. Tačiau jeigu laikysime, kad galinis laiko momentas varijuojamas, esant pastovioms pradinėms ir galinėms koordinatėms, tai (žiūr. 5.35)

$\delta S = -H\delta t$ (5.35)

Taigi. dabar lyginsime ne visus sistemos virtualinius judėjimus, o tik tuos, kurie tenkina energijos tvermės dėsnį. Tokioma trajektorijoms galime pakeisti(5.35) H į E. Tada

$$\delta S + E\delta t = 0 \qquad (5.36)$$

Užrašę S pavidalu

$$S = \int\left(\sum_i p_i dq_i - Hdt\right) = \int\sum_i p_i dq_i - E(t - t_1) \qquad (5.37)$$

Pažymėję pirmąjį narį $S' = \int\sum_i p_i \delta q_i$ ir įstatę (5.37) į (5.36) gauname

$\delta S' = 0$ (5.38)

Taigi šiuo atveju S’ yra minimalus visų trajektorijų atžvilgiu, tenkinančių energijos tvermės dėsnį ir einančių per galinį tašką nefiksuotu laiko momentu.Taip suformuluotas dalinis principo variantas yra vadinamas **Mopertiui principu.**

VII.4. Kanoninės transformacijos

Matėme, kad apibendrintųjų koordinačių pasirinkimas nėra ribojamas jokiomis sąlygomis. Jomis gali būti bet kokie s dydžiai. vienareikšmiai nusakantys sistemos padėtį erdvėje. Formaliai Lagranžo lygčių pavidalas nepriklauso kaip mes pasirinksime apibendrimąsias koordinates ir ta prasme Lagranžo lygtys yra invariantinės transformacijų, kurių pagalba pereinama nuo vienų apibendrintųjų koordinaiių $q_1,\ldots q_s$ prie kitų $Q_1..Q_s$. Naujosios apibendrintosios koordinatės Q bus senųjų koordinačių q funkcijomis. Be to, leiskime, kad jos parenkamos taip, kad minėti sąryšiai turi savyje ir tiesioginę prtklausomybę nuo laiko, t.y.

$$Q_i = Q_i(q,t) \qquad (5.40)$$

Tokių transformacijų dėka išlaiko savo pavidalą ir Hamiltono lygtys (5.7). Tačiau pastarosios nekinta ir žymiai platesnės transformacijų klasės išdavoje. Tai susiję su tuo, kad Hamiltono lygtyse p ir q yra lygiaverčiai nepriklausomi kintamieji. Dėl šios priežasties, transformacijos sąvoka gali būti praplėsta įtraukiant į ją visus $2s$ nepriklausomus kintamuosius, transformuojant iš p ir q į P ir Q pagal formulas

$$Q_i = Q_i(p,q,t),\ P_i = (p,q,t) \qquad (5.41)$$

Toks galimų transformacijų klasės praplėtimas yra viena iš šio metodo teigiamybių. Išvesime sąlygas, kurias turi tenkinti transformacija (5.41), kad judėjimo lygtys (5.7) išreikštos naujaisiais kintamaisiais P ir Q išlaikvtu esarną pavidalą, t.yra kad

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i};\quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

čia $H'(P,Q)$ naujo pavidalo Hamiltono funkcija. Tokią sąiygą tenkinančios transformacijos vadinamos **kanoninėmis transformacijomis**. Pasinaudosime anksčiau aptartu mažiausio veiksmo principu, užrašytu tokiu pavidalu

$$\delta\int\left(\sum_i p_i dq_i - Hdt\right) = 0 \qquad (5.43)$$

Čia varijuojame visas nepriklausomas koordinates ir impulsus. Kad naujieji kintamieji tenkintų Hamiltono lygtis, jiems irgi turi galioti (5.43) sąryšis

$$\delta\int(P_i dQ_i - H'dt) = 0 \qquad (5.44)$$

Principai (5.43) ir (5.44) yra ekvivalentūs tik tada jeigu jų pointegraliniai reiškiniai skiriasi pilnu laisvai pasirinktos funkcijos nuo koordinačių ir laiko diferencialu

$$\sum p_i dq_i - Hdt = \sum P_i dQ_i - H'dt + d\Phi \qquad (5.45)$$

iš čia seka, kad kanoninės transformacijos yra charakterizuojamos funkcija Φ, kuri yra vadinama **generuojančiąja transformacijos funkcija.**

Perrašę (5.45) pavidalu

$$d\Phi = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + (H - H')dt \qquad (5.46)$$

matome, kad

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial Q_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

čia laikome, kad *Φ(q,Q,t).*

Duota *Φ*-esant, (5.47) rodo ryšį tarp naujų ir senų koordinačių, apibrėžia *H'*.

Kartais patogu *Φ* laikyti ne *q* ir *Q*, o *q* ir *P* funkciją. Tada (5.46) perrašome taip

$$d(F + \sum P_i Q_i) = \sum p_i dq_i + \sum Q_i dP_i + (H - H')dt \tag{5.48}$$

nes

$$d\sum P_i Q_i = \sum (P_i dQ_i + Q_i dP_i)$$

Po diferencialu kairėje esanti funkcija, išreikšta per *q, P* ir *t* yra ne kas kita kaip nauja generuojančioji funkcija *Φ(q,P,t)*. Tada

$$p_i = \frac{\partial \Phi'}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi'}{\partial P_i}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Phi'}{\partial t}, \tag{5.49}$$

Analogiškai galime pereiti prie kanoninių transformacijų formulių, kurios bus išreikštos generuojančiąsias funkcijas priklausančias nuo kintamųjų *p* ir *Q*, arba *p* ir *P*. Kadangi transformacijos (5.41) suriša kiekvieną *P* ir Q su koordinatėmis *q* ir impulsais *P*, tai *Q* jau nebegalima laikyti erdvinėmis

koordinatėmis. Dėl šios priežasties galime teigti, kad kanoninės trransformacijos Hamiltono metode tam tikra prasme panaikina pradinę apibendrintųjų koordinačių ir impulsų prasmę. Tai ypač gerai matyti, pavyzdžiui, tokių transformacijų atveju

$$Q_i = p_i \qquad P_i = -q_i \tag{5.50}$$

kuri nekeičia kanoninių lygčių pavidalo ir susiveda į kintamųjų pervadinimą. Dėl šios priežasties *p* ir *q* kintamuosius Hamiltono metode dažnai vadina **tarpusavyje sujungtiniais** kintamaisiais arba dydžiais. Kanoninio sujungtinumo sąlygą galime užrašyti Puasono skliaustelių pagalba. Tegu dydžių *f* ir *g* Puasono skliausteliai

a) čia diferencijuojame pagal *p* ir *q* $-[f, g]_{pq}$

b) čia diferencijuojame pagal *P* ir *Q* $[f, g]_{PQ}$

Tada

$$[f, g]_{pq} = [f, g]_{PQ} \tag{5.51}$$

Įrodysime (5.51). Tegu *g*-kokios tai sistemos Hamoltono funkcija, o *f* ir *q* nepriklauso tiesiogiai nuo laiko. Tada iš (5.11) plaukia, kad $[f, g]_{pq} = \frac{df}{dt}$, tačiau dydis $\frac{df}{dt}$ nepriklauso nuo kintamųjų parinkimo, todėl Puasono sklaiusteliai nekinta pereinant nuo vienų kintamųjų prie kitų.

Ir galiausiai iš (5.51) seka, kad

$$[Q_i Q_k]_{p,q} = 0 \qquad [P_i P_k]_{p,q} = 0 \qquad [P_i Q_k]_{p,q} = \delta_{ik} \tag{5.52}$$

Arba sąlygos, kurias turi tenkinti nauji (5.52) kintamieji, kad transformacijos nuo *p,q* prie *P,Q* būtų kanoninėmis.

VIII. Lagranžo ir Hamiltono formalizmas tolydinėms sistemoms

Visos iki šiol nagrinėtos sistemos buvo sudarytos iš materialių taškinių dalelių ir todėl galėjo būti aprašomos baigtinių kintamųjų skaičiumi. Tačiau egzistuoja ir tokios fizinės sistemos, kurios turi būti aprašomos begaliniu skaičiumi kintamųjų. Pvz. vietoj kintamųjų q_k (k=1,2,…,s), yra vienas ar keli kintamieji *q(x)*, kuri yra tolydinio kintamojo *x* funkcijomis (q_k irgi buvo galima laikyti diskretinio kintamojo *k* funkcijomis). Toks atvejis gali realizuotis pavyzdžiui, kai turime tolydinę skysčių arba dujų aplinką arba laukus. Tada iškyla klausimas ar tokie patogūs formalizmai kaip Lagranžo ir Hamiltono gali būti panaudoti aprašant minėtas sistemas.

Suformuluosime problemą taip: turime judėjimo lygčių, aprašančių mus dominančius reiškinius visumą. Norėtume naudotis judėjimo lygtimis kanoniniame pavidale. Kitaip tariant norėtume rasti naujų kintamųjų visumą ir užrašyti Hamiltonianą per tuos naujus kintamuosius taip, kad judėjimo lygtys turėtų (5.7) pavidalą. Kai rasime reikalingus kintamuosius ir Hamiltono fukciją, uždavinį galėsime suvesti į tai kaip įvesti kanoninį formalizmą, jeigu pradiniai kintamieji yra tolygiai kintantys dydžiai. Panagrinėsime bangos, sklindančios stangriu strypu lygtį

$$\rho''\xi - E\frac{\partial \xi}{\partial x^2} = 0 \tag{5.53}$$

čia *ξ(x,t)* funkcija, nusakanti aplinkos poslinkį laiko momentu *t* taške *x*; *ρ*-aplinkos tankis; *E*- Jungo modulis – arba išilginio tamprumo modulis, kuris charakterizuoja medžiagos aplinkos gebą priešintis tempimo deformacijai. Be to yra laikoma, kad strypas yra ribotas. Jo ilgis yra *L*. Taigi funkcija *ξ* tenkina kraštines sąlygas

$$\xi(x+L,t) = \xi(x,t) \tag{5.54}$$

Išskleidę *ξ(x,t)* Furje eilute, gauname

$$\xi(x,t) = L^{-1/2}\sum_k \xi_n(t)e^{ikx} \tag{5.55}$$

kur

$$\xi_n^{(t)} = L^{-1/2}\int \xi(x)e^{-ikx}dx \tag{5.56}$$

$\xi_k(t)$-kompleksiniai dydžiai, o *k* gali būti kaip teigimi taip ir neigiami. Kadangi *ξ(x,t)*-reali funkcija, tai

$$\xi_k = \xi_k^* \tag{5.57}$$

ir nepriklausomų kintamųjų skaičius yra lygus galimų k reikšmių skaičiui.

Atvejį, kai k reikšmės kinta tolygiai atitinka riba $L \to \infty$. Tuo atveju

$$\sum_{kL} \to \frac{L}{2\pi} \int dk, \qquad \xi_k \to \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{1/2} \xi(k) \tag{5.58}$$

Ir gauname gerai žinomas Furje integralų išraiškas

$$\xi(x,t) = (2\pi)^{-1/2} \int \xi(k,t) e^{ikx} dk$$
$$\xi(k,t) = (2\pi)^{-1/2} \int \xi(x,t) e^{-ikx} dk \tag{5.59}$$

(5.53) lygtyje perėję prie Furje eilutės komponenčių, gausime

$$\rho \ddot{\xi}_n + k^2 \sum \xi_n = 0 \tag{5.60}$$

(5.60) lygtis ir yra sistemos, turinčios be galo daug laisvės laipsnių judėjimo lygtimi. Ji gali būti gauta iš tokios Lagranžo funkcijos

$$L(\xi_k, \dot{\xi}_k) = \frac{1}{2} \rho \sum_k \dot{\xi}_k \dot{\xi}_{-k} - \frac{1}{2} E \sum_k k^2 \dot{\xi}_k \dot{\xi}_{-k} \tag{5.61}$$

Įvedę impulsą (sujungtinis ξ_n)

$$\pi_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_n} = \rho \xi_{-k}; \tag{5.62}$$

bei atsižvelgę į (**5.51**), gauname sistemos **Hamiltono** funkciją:

$$H(\xi_k, \pi_k) = \sum_k \pi_k \dot{\xi}_k - L = \frac{1}{2\rho} \sum_k \pi_k \pi_{-k} + \frac{1}{2} E \sum_k k^2 \xi_k \xi_{-k}; \tag{5.62}$$

ir iš kanoninės judėjimo lygties (**5.7**) vėl gauname (**5.60**).

Kaip kinta gautos formulės, kai pereiname nuo ξ_k prie $\xi(x)$. Perėjimas turi būti toks, kad judėjimo lygtys susivestų į (**5.53**). Grįžkime prie (**5.58**) ir (**5.59**) kai $L \to \infty$. Panagrinėsime (**5.61**) formulėje pirmąją sumą.

$$\frac{1}{2} \rho \sum_k \dot{\xi}_k \dot{\xi}_{-k} \to \frac{1}{2} \rho \int \dot{\xi}(k) \xi(-k) dk = \frac{1}{2} \rho (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dx \dot{\xi}(x) \int dk e^{-ikx} \dot{\xi}(x) =$$
$$= -\frac{1}{2} \int dx \dot{\xi}(x) \int dk e^{-ikx} = \frac{1}{2} \rho \int dx \dot{\xi}(x) \dot{\xi}(x) = \int T(x) dx; \tag{5.63}$$

$$T(x) = \frac{1}{2} \rho \dot{\xi}(x) \dot{\xi}(x); \tag{5.64}$$

čia T(x) – kinetinės energijos tankis, arba vienetinio tūrio kinetinė energija. Antroji suma yra lygi:

$$\frac{1}{2} E \sum_k k^2 \xi_k \xi_{-k} = \frac{1}{2} E \int k^2 \xi(k) \xi(-k) dk = \frac{1}{2} E (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \iint dx dk \xi(x) k^2 e^{-ikx} \xi(-k) =$$
$$= \frac{1}{2} E (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \iint dx dk \xi(x) \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-ikx}\right) \xi(-k) = \frac{1}{2} E (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dx \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi(x) \right] \int dk e^{-ikx} \xi(-k) =$$
$$= \frac{1}{2} E \int dx \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi(x) \right] \xi(x) = \frac{1}{2} E \int \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 dx = \int U(x) dx; \quad (5.65)$$

čia $U(x) = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$; (5.66) potencinės energijos tankis (pagal apibrėžimą). Įvedę **Lagranžiano** tankį, gauname: $L = T - U$; (5.67). Šiam atvejui variacinis arba mažiausio veiksmo principas atrodo taip: $\delta \iint L dx dt = 0$; (5.68)

(**5.68**) formulėje erdvinė ir laiko koordinatės yra lygiavertės. **Lagranžiano** tankis bus $\xi \dot{\xi}$ ir $\frac{\partial \xi}{dx}$ funkcija, todėl iš (**5.68**) gauname:

$$\delta\int Ldxdt = \iint \delta L dxdt = 0 = \iint\left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\delta\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\delta\dot{\xi} + \frac{\partial L}{(\partial\xi/\partial x)}\delta\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\right)dxdt =$$

$$= \iint\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)}\right]\delta\xi dxdt + \int\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\delta\xi dx + \int\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \xi}{\partial \infty}\right)}\delta\xi dt$$

Įskaitę, kad $\delta\xi = 0$ integruojant laiko ir erdvės intervaluose, gauname

$$[\iint \frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)}]\delta\xi dxdt = 0; \quad (5.69)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial(\partial\xi/\partial x)} = 0; \quad (5.70)$$

Jeigu įvedam funkcinės išvestinės $\frac{\delta}{\delta\xi}$ nuo funkcijos, apibrėžiamas taip:

$$\frac{\delta f\left(\xi, \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)}{\delta \xi} = \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{(\partial\xi/\partial x)}; \quad (5.70a)$$

Tai iš (**5.70**) gaunam formaliai tapatingą lygtį **Lagranžo** lygčiai:

$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0; \quad (5.71)$. Čia reikia pažymėti, kad į (**5.70**) įeina **Lagranžiano** tankis, o į **Lagranžo** lygtį – **Lagranžianas**.

Analogiškai įvedamas ir **kanoninis impulso tankis**: $\pi = \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{\xi}}; \quad (5.72)$

Ir **Hamiltoniano tankis**: $H = \pi\dot{\xi} - L; \quad (5.73)$. Iš mažiausio veikimo principo:

$\iint \delta(\pi\dot{\xi} - H)dxdt; \quad (5.74)$, prisiminę, kad H yra $\pi, \xi\ ir \frac{\partial \xi}{\partial x}$ funkcija, panašiai kaip ir anksčiau gauname:

$\iint\left[\dot{\xi} - \frac{\partial H}{\partial \pi}\right]\delta\pi - \left(\dot{\pi} + \frac{\delta H}{\delta \xi}\delta\xi\right)dxdt = 0; \quad (5.75)$. Iš kur: $\dot{\xi} = \frac{\delta H}{\delta \pi}\ \ ir\ \ \dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta \xi}; \quad (5.76)$

Čia $\frac{\partial H}{\partial \pi}$ pakeitėme funkcine išvestine $\frac{\delta H}{\delta \pi}$ apibrėžta (**5.70a**) formule.

(**5.76**) lygtys skiriasi nuo (**5.7**) tuo, kad

a) Vietoj **Hamiltoniano** ir impulso įvedami jų tankiai;
b) Vietoj paprastųjų naudojamos funkcinės išvestinės.

Taigi pereinant prie tolydinių sistemų į **Hamiltono** ir **Lagranžo** formalizmus įvedami tokio pobūdžio pakeitimai. **Lagranžiano tankį L, gauname …**