VILNIAUS UNIVERSITETAS

Julijonas Jonas Kaladė

MATEMATINIO MODELIAVIMO PAGRINDAI

Mokymo priemonė

Vilnius 2004

Matematinis modeliavimas – tai mokslinio tyrimo, besiremiančio matematiniais metodais, būdas. Dažnai matematinis modeliavimas priskiriamas matematikos krypčiai, tačiau čia vien matematikos nepakanka. Būtinos specialiosios pažinimo šakų, kurioms tirti taikomas matematinis modeliavimas, žinios. Šiame leidinyje aptariami bendrieji matematinio modeliavimo principai. Daugiausia dėmesio skiriama matematinių modelių praktiniam taikymui, kartais praleidžiant matematikoje priimtą samprotavimų griežtumą.

Mokymo priemonė skirta Fizikos fakulteto studentams, studijuojantiems matematinį modeliavimą. Jai pritarta Teorinės fizikos katedroje (protokolas 2-2004).

Turinys

I skyrius

Matematinio modeliavimo pagrindinės sąvokos

1.1 Matematinio modeliavimo tikslai ir uždaviniai

Matematinis modeliavimas (toliau sutrumpintai MM) plačiąja prasme – tai fizikinės, technologinės, ekonominės ar kt. teorijos sukūrimas, t.y., tam tikros žodinės informacijos užrašymas matematiniais sąryšiais ir iš jų matematikos ir logikos keliu naujos informacijos radimas. Nauja informacija randama analizuojant užrašytuosius matematinius sąryšius, interpretuojant rezultatus, juos skaitmeniškai imituojant bei formuluojant išvadas. Kartais netiksliai matematinių sąryšių (pavyzdžiui, diferencialinių lygčių sprendinių) skaitmeninis imitavimas vadinamas MM. Tačiau skaitmeninis imitavimas tėra tik MM sudedamoji dalis.

Gali susidaryti įspūdis, kad beveik visiems gyvenimo atvejams teorijos jau sukurtos, t.y., parašytos atitinkamos lygtys, o mums belieka tas lygtis išspręsti ir surasti dominančią informaciją. Pavyzdžiui, mechaniniam judėjimui aprašyti yra Niutono lygtys, mikroobjektų judėjimui – kvantinės mechanikos Šredingerio lygtis. Tačiau yra daugybė sudėtingų fizikinių sistemų ir reiškinių, nors ir valdomų mechaninio ar kvantmechaninio judėjimo dėsnių, kuriems šių teorijų metodai negali būti pritaikyti. Mat, juos taikant tektų spręsti tokį sudėtingą uždavinį, jog galutinė išvada nebūtų pasiekiama. Todėl ir tenka kurti praktinę svarbą turinčias teorijas, kuriose išsaugant minėtų pirminių teorijų pagrindines nuostatas, kažkurias reiškinių savybes aprašytume supaprastintai, bet turėtume galimybę rasti galutines išvadas. MM labai svarbus tiriant biomedicininius, ekonominius, gamtosauginius reiškinius. Išskiriami tokie matematiniai modeliai: fizikiniai, biomedicininiai, gamtosaugos – jiems būdingas priežastingumo principas (vadinamieji deterministiniai modeliai); masinių reiškinių modeliai – jiems būdingas tikimybinis aprašymo būdas; matematikos modeliai – tai matematikos teorijos.

Kaip sukurti tam tikro reiškinio matematinį modelį? Atsakymas toks: vienareikšmių taisyklių nėra, tačiau bendruosius MM tarpsnius įvardinti galima. Kadangi tenka nagrinėti sudėtingus reiškinius, kurie vyksta dar ir sudėtingomis sąlygomis, matematinių reiškinio sąryšių sudarymas nėra paprastas darbas. Pirmiausia tenka, nepaisant antraeilių, išskirti pagrindinius reiškinio bruožus. Sprendžiant šį uždavinį reikalingos specialiosios (fizikos, ekonomikos ar kt.) žinios ... ir menas. Pastarasis MM tarpsnis vadinamas <u>idealizavimu</u>. Šis tarpsnis gana ryškus sudarant fizikinius modelius. Kitas MM žingsnis – išskirtųjų savybių išraiška matematinėmis sąvokomis ir matematiniais dydžiais bei jų sąryšių postulavimas. Tai matematinio <u>modelio sudarymo</u> tarpsnis.

Toliau – <u>modelio adekvatumo tikrinimas</u>. Vienareikšmių principų, kaip tai reikėtų padaryti, nėra. Pavyzdžiui galima pradėti matematinių išraiškų dėmenų dimensijų patikra ir baigti gautų išvadų ir stebėjimo rezultatų gretinimu. Taigi adekvatumo patikra gali būti bet kuriame MM tarpsnyje. Dar viena MM sudedamoji – <u>modelio tobulinimas</u> – kaip ir adekvatumo patikra nėra vienareikšmė operacija ir gali būti atliekama bet kuriuo MM momentu. Reikia modelį tobulinti, ar ne, priklauso nuo to, ko ir kokiu tikslumu siekiame. Pavyzdžiui, jeigu nagrinėdami kūno judėjimą pirminiame modelyje nepaisėme trinties – jos galime ir nepaisyti, jei mus domina tik nedidelis judėjimo laikotarpis. Tačiau tada, kai svarbu, per kiek laiko kūnas dėl trinties sustos – modelį būtina tobulinti. Tobulinant modelį žinotina, kad ši operacija prasminga tik tada, kai patikslinimų įnašas didesnis, negu išvadų, gautų dėl netikslių pradinių duomenų, paklaidos arba paklaidos, susidarančios gretinant modelio ir apytiksles stebėjimų išvadas. Matematiniu modeliavimu siekiama arba prognozių, kurių kitaip gauti neįmanoma (pavyzdžiui, apie reiškinius, vykstančius kosmose, arba apie reiškinius, kuriuos tirti eksperimentu labai sudėtinga ir brangu), arba reiškinio detalesnio suvokimo. Taigi, paskutinysis MM tarpsnis – rezultatų interpretavimas – tai matymas to, kas išreikšta formule, pavaizduota paveiksle ar lentelėje. Šis matymas turi būti išreikštas užsakovui suprantama kalba. Išmokti matyti, kas išreikšta formule – ne tik mokslas, bet ir didelis menas.

1.2 Sistema ir jos aplinka

Čia aptarsime fizikinę sistemą ir jos aplinką. Fizikine sistema vadinsime fizinės tikrumos dalį, kurią sudaro mūsų pasirinkti tam tikrus požymius turintys kūnai (dalelės). Sistemai nepriskirta fizinės tikrumos dalis vadinama aplinka (išoriniais kūnais). Aplinkos kūnų (dalelių) būsena ir jų padėtis sistemos atžvilgiu sudaro tai, ką vadiname išorinėmis sąlygomis. Pagal sistemos ir aplinkos sąryšį skiriamos izoliuotoji, atviroji, uždaroji sistemos. Jeigu tarp sistemos ir aplinkos nėra nei energijos nei medžiagos mainų, sistema vadinama izoliuotąja. Jeigu energijos mainai galimi, bet medžiagos mainų nėra – sistema uždaroji. Atviroji – tokia, tarp kurios ir aplinkos galimi medžiagos mainai. Medždiagos mainus visada lydi energijos mai-nai. Taigi, jei sistema atviroji – tarp jos ir aplinkos yra ne tik medžiagos, bet ir energijos mainai.

Apibūdindami fizikinę sistemą klasikinės mechanikos metodais nurodome kiekvienos sistemos dalelės koordinates ir judesio kiekį. Tarus, kad visos sistemos dalelės vienodos ir jų yra N, o vienos dalelės laisvės laipsnių (bendrasis koordinačių ir judesio kiekio dedamųjų) skaičius lygus f, išeitų, kad mechanikoje sistemą apibūdiname Nf skaičiumi fizikinių dydžių. Kvantinėje mechanikoje nusakomi kiekvienos dalelės visi kvantiniai skaičiai, todėl čia sistema apibūdinama dydžiais, kurių skaičius taip pat artimas Nf. Klasikinės arba kvantinės mechanikos būdas sistemoms apibūdinti vadinamas mikroskopiniu arba pilnutiniu (detaliausiu), o taip aprašyta sistemos būsena (savybių visuma) - mikroskopine. Todėl klasikinės bei kvantinės mechanikos fizikinių sistemų apibūdinimo modelius galime pavadinti mikroskopiniais modeliais.

Realiai egzistuojančių sistemų Nf yra labai didelis, $Nf \sim 10^{20}$, ir daugiau. Tokiomis sąlygomis mikroskopinių modelių išvadų neįmanoma surasti. Todėl, kai Nf labai didelis, atsisakoma mikroskopinio aprašymo ir sistemos būsena nusakoma žymiai mažesniu negu Nf nepriklausomų fizikinių dydžių skaičiumi (jų gali būti 2, 3 ar panašus skaičius). Šie dydžiai vadinami makroskopiniais parametrais, jais aprašyta sistemos būsena – makroskopinė, o pats aprašymo būdas makroskopiniu arba nepilnutiniu. Pavadinimas „makroskopinis parametras“ reiškia, kad tas dydis sietinas su visa sistema, o ne su kuria nors jos dalele. Matematinius modelius, kurie sistemai apibūdinti naudoja makroskopinius parametrus, vadinsime makroskopiniais.

Makroskopiniai parametrai, kurių vertes lemia išorinės sąlygos, vadinami išoriniais. Parametrai, kurių vertės kinta kintant sistemos būsenai, kai išoriniai parametrai pastovūs, vadinami vidiniais. Nepriklausomų parametrų rinkinį sudaro visi išoriniai ir dalis vidinių parametrų. Kiti vidiniai, jei tokių yra, yra nepriklausomųjų finkcijos.

Jeigu esant pastoviom išorinėm sąlygom visi sistemos makroskopiniai parametrai laikui bėgant nekinta kiek norima ilgai, sakoma, kad sistema yra pusiausviros būsenos. Tokioje sistemoje nėra pernašos reiškinių (nepernešama masė, elektros krūvis, energija ir kt.). Jeigu sistema nėra pusiausvirosios būsenos, joje yra pernašos srautai. Gali būti taip, kad sistemą apibūdinantys parametrai nekinta, bet jų pastovumą palaiko besikeičiančios išorinės sąlygos. Tada sakoma, jos sistema yra nuostoviosios būsenos. Nuostovioji būsena skiriasi nuo pusiausvirosios tuo, jog nuostosios būsenos sistemoje yra pernaša, tik pernašos charakteristikos, pavyzdžiui, srautų tankiai, nekinta laikui bėgant.

1.3 Konservatyviosios sistemos

Sudarant sudėtingų reiškinių matematinius modelius būtina žinoti sistemų, kuriose tie reiškiniai vyksta, bendrąsias savybes. Jas aptarsime šiame ir kitame skirsniuose.

Klasikinėje ir kvantinėje mechanikoje svarbūs tvermės dėsniai, išplaukiantys iš tų teorijų lygčių. Pvz., iš Niutono antrojo dėsnio

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i}^{N} \vec{F}_{ij}\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right), \qquad (3.1)$$

kai sistemos neveikia laikui bėgant besikeičiantys poveikiai, o jėgos reiškiamos potencialo gradientu,

$$F_{ij} = -grad_j U_{ij}\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right),$$

tvarūs trys dydžiai: pilnutinė energija

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{V}_i^2}{2} + \sum_{i \rangle j=1}^{N} U_{ij}\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right),$$

pilnutinis judesio kiekis

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i,$$

pilnutinis judesio kiekio momentas

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \left[m_i \vec{r}_i , \vec{V}_i \right]$$

Čia *N*- dalelių skaičius, *t*- laikas, $m_i, \vec{r}_i, \vec{V}_i$ -i-osios dalelės masė, radiusas vektorius, greitis; $\vec{F}_{ij}$ - *i* ir *j* dalelių sąveikos jėga, U_{ij} - *i* ir *j* dalelių sąveikos potencinė energija. Sistemos, kurioms būdingi šie trys tvermės dėsniai, vadinamos konservatyviosiomis. Joms būdingas grįžtamumas, t.y., jei (3.1) lygčių sprendiniai yra $\vec{r}_i(t), \vec{p}_i(t) \left(i = 1,...,N\right)$, tai tų pačių lygčių sprendiniai yra ir $\vec{r}_i(-t), -\vec{p}_i(-t)$ (čia $\vec{p}_i$ - i-osios dalelės judesio kiekis). Taigi apgrężus laiką, kiekviena sistemos dalelė atvirkščia tvarka praeina tuos pačius erdvės taškus. Tuo pačiu sistema grįžta į pradinę būseną. Grįžtamumas būdingas visoms konservatyvioms sistemoms – ne tik mechaninėm, bet ir kvantinė mechanika bei elektrodinamika apibūdinamoms.

Konservatyviosios sistemos gali būti aprašomos Niutono lygtis pakeičiančiomis Hamiltono lygtimis

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = grad_{\vec{p}_i} H, \quad \frac{d\vec{p}_i}{dt} = -grad_{\vec{r}_i} H. \tag{3.2}$$

Čia *H*- Hamiltono funkcija,

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m_i} + \sum_{i \rangle j=1}^{N} U_{ij} \left(\left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right| \right), \tag{3.3}$$

išreiškianti sistemos mechaninę energiją.

Konservatyviosios sistemos mikroskopinę būseną galima vaizduoti tam tikros daugiamatės erdvės-fazinės erdvės-tašku, vadinamu faziniu tašku. Šios erdvės taško padėtį nusako apibrėžto laiko momento visų $\vec{r}_i$ ir visų $\vec{p}_i$ vertės. Laikui kintant, kinta $\vec{r}_i$ ir $\vec{p}_i$. Todėl laikui bėgant fazinės erdvės taškas juda, nubrėždamas fazinę trajektoriją. Šioji trajektorija vaizduoja sistemos mikroskopinės būsenos kitimą laikui bėgant. Iš mechanikos lygčių plaukia, kad fazinių taškų judėjimas toks, tarsi tai būtų nespūdus skystis.

Jeigu pasaulis būtų tik iš konservatyviųjų sistemų, jis, dėl minėto grįžtamumo, būtų labai nestabilus ir jautrus pradinėms sąlygoms. Nestabilumas rastųsi dėl to, kad bet koks poveikis nebūtų užmirštamas (neužgęstų) ir galėtų vyksmus kreipti bet kuria linkme. Jautrumas pradinėms sąlygoms ir mažiems poveikiams darytų jį neprognozuojamu. Tokio nepragnozuojamumo pavyzdys – vieno rutulio judėjimas tarp parimusių rutulių, su kuriais susiduriama tampriai. Pakanka visai nedaug, netgi stebėjimu nefiksuojamai, pasikeisti pradinėms judančio rutulio sąlygoms ir jau po kelių susidūrimų jo trajektorija žymiai pakinta (2 pav.).

1.4 Disipatyviosios sistemos

Tai fizikinės sistemos, kurioms nebūdingi konservatyvių sistemų tvermės dėsniai. Būdingas pavyzdys – judėjimas su trintimi. Materialiojo taško judėjimą su trintimi aprašo lygtis

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = -\gamma\vec{V} \; . \tag{4.1}$$

Pakeitę šioje lygtyje $t \to -t, \vec{V} \to -\vec{V}$, matome jog pasikeičia lygties pavidalas. Taigi iš (4.1) išplaukia judėjimo su trintimi mikroskopinis negrįžtamumas. Vadinasi, disipatyviosioms sistemoms nebūdingas grįžtamumas. Šiuo jos labiausiai ir skiriasi nuo konservatyviųjų sistemų. Tenka pastebėti, kad konservatyvioji sistema greičiau teorinė abstrakcija, o ne reali fizikinė sistema. Tuo tarpu disipatyviosios sistemos gamtoje paplitę – pirmiausia tai biologinės sistemos. Fizikinės sistemos, egzistuojančios laikui bėgant besikeičiančiomis sąlygomis, yra disipatyviosios.

Disipatyviųjų sistemų negrįžtamumo savybė ypač svarbi tų sistemų makroskopinėse teorijose – statistinėje fizikoje. Aptarsime kelis pavyzdžius. Tegu cheminės reakcijos metu molekulė *A*, susidurdama su molekule *B*, sudaro produktą iš *C* ir *D* molekulių. Laikysime, kad
A ir *B* molekulių reakcija nepriklauso nuo *C* ir *D* kiekio, ir kad kiekvienos *A* molekulės susidūrimas su kiekviena *B* molekule – nepriklausomi reiškiniai. Tarkime, vienos *A* molekulės susidūrimo su viena *B* molekule tikimybė lygi k_0. Tuomet susidūrimo vienos *A* molekulės su visomis *B* molekulėmis tikimybė lygi $k_0 N_B$ ($N_B - B$ molekulių skaičius). Dabar galime rašyti, kad

$$\frac{dN_A}{dt} = -\left(k_0 N_B\right) N_A . \tag{4.2}$$

Pagal sąlygas pradinių ir galutinių produktų molekulių skaičius *N* pastovus. Tuomet, padaliję (4.2) abi puses iš *N* ir apibrėžę, kaip chemijoje priimta, produktų koncentracijas $C_A = N_A / N$ ir t.t., vietoj (4.2) turėsime lygtį

$$\frac{dC_A}{dt} = -kC_A C_B , \tag{4.3}$$

kurioje $k = k_0 N$ - cheminės reakcijos greičio konstanta.

Iš (4.3) plaukia, kad C_A mažėja laikui bėgant. Apgręžus laiką vietoj (4.3) turime lygtį

$$\frac{dC_A}{dt} = kC_A C_B , \tag{4.4}$$

kurioje matyti, kad C_A dabar didėja, kaip ir turėtų būti. Tačiau (4.3) ir (4.4) lygčių pavidalai skirtingi, todėl ir jų sprendiniai skirsis. Taigi, aprašytoji cheminė reakcija yra negrįžtamoji: sprendinys $C_A(-t)$ nors ir didėtų, bet nepakartotų $C_A(t)$ mažėjimo priešingąja kryptimi.

Kitas būdingas pavyzdys – difuzija. Tarkime vienalytėje sistemoje (skystyje arba dujose) sukuriame kokį nors nevienalytiškumą. Laikui bėgant tas nevienalytiškumas išplinta ir galiausiai išnyksta. Reiškinį aprašo difuzijos lygtis

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\, divgradn. \tag{4.5}$$

Čia n- nevienalytiškumo tankis, $D\rangle 0$- difuzijos koeficientas. Apgręžus laiką, pasikeičia (4.5) pavidalas. Taigi difuzija – negrįžtamasis reiškinys.

Aprašant disipatyviąsias sistemas makroskopiniais modeliais susiduriama su dviejų rūšių dydžiais. Vieni jų (greitis, judesio kiekis) apgręžus t keičia ženklą, kiti (difuzijos koeficientas, cheminės reakcijos greičio konstanta) – ne.

1.5 Makroskopinio modelio lygčių bendrasis pavidalas

Nepriklausomuosius makroskopinius parametrus, apibūdinančius sistemos ar reiškinio savybes, žymėsime F_i (čia $i = 1,\ldots,s,\ s$ - nepriklausomų parametrų skaičius, arba laisvės laipsnių skaičius). Mūsų tikslas nusakyti dydžių F_i kitimą laikui bėgant. Kadangi tą kitimą lemia tam tikros priežastys, tai, išreikšdami šį priežastinį sąryšį, turime išreikšti F_i išvestinę laiku. Bendrasis šios išraiškos pavidalas yra šitoks:

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} = \Phi_i(\{F\},\lambda),\ i = 1,\ldots,s. \tag{5.1}$$

Čia $\{F\}$- tų būsenos parametrų F_i ir jų išvestinių koordinačių atžvilgiu rinkinys, kurie lemia tam tikro F_i kitimą; λ- dydžių, kurie laikomi žinomais ir nuo kurių verčių priklauso F_i kitimas, rinkinys. Pastarieji dydžiai (susidūrimo tikimybės, reakcijų konstantos ir pan.) nustatomi eksperimentu, arba apskaičiuojami kitose teorijose (mikroskopinėse), bet ne iš (5.1) lygčių. Jie vadinami valdančiaisiais parametrais. Geometrinė erdvė, kurioje taško padėtį nusako valdančiųjų parametrų apibrėžtos vertės, vadinama valdančiąja erdve. Φ_i žymi matematinę operaciją, kuri atliekama su rinkiniais $\{F\}$ ir λ. (5.1) lygtys labai apibendrintos, todėl vadinamos bendrosiomis modelio lygtimis.

Nors (5.1) lygtys gana bendros, o konkrečios tų lygčių dešiniųjų pusių išraiškos gali būti nustatytos tik visiškai apibrėžtomis sąlygomis, vis tik kai kurias $\Phi_i(\{F\},\lambda)$ savybes galima įvardinti. Tarkime, kad nėra sudaryta specialių išorinių sąlygų, palaikančių sistemoje esančius pernašos reiškinius (sakoma, kad nepusiausvira sistema palikta savieigai). Tada (5.1) turi turėti pusiausvyrą aprašančius sprendinius F_{ip}, taigi turi galioti lygybė

$$\Phi_i\left(\{F_p\}, \lambda_p\right) = 0,\ i = 1,\dots,s. \tag{5.2}$$

Čia λ_p - rinkinys valdančiųjų parametrų, apibrėžiančių pusiausvirąją būseną. Jeigu sudarytos išorinės pastovios sąlygos, palaikančios pernašą, tai tas sąlygas aprašantys dydžiai iš rinkinio λ vadinami sistemą ribojančiaisiais (pavyzdžiui pastovūs sistemos ir aplinkos temperatūrų, slėgių ar kt. skirtumai). Esant ribojimams pusiausviroji būsena nesusidaro, bet galima nuostovioji būsena, apibūdinama dydžiais F_{in} ir rinkiniu λ_n. Šiuo atveju turi galioti

$$\Phi_i\left(\{F_n\}, \lambda_n\right) = 0,\ i = 1,\dots,s. \tag{5.3}$$

Kuo gi skiriasi (5.2) ir (5.3) kairiosios pusės? $\Phi_i\left(\{F_p\}, \lambda_p\right)$ neturi priklausyti nuo pernašos charakteristikų (pvz., srautų tankių), o jei sistema vienalytė - išreikštu pavidalu ir nuo koordinačių (pvz., išvestinių koordinačių atžvilgiu). Tuo tarpu $\Phi_i\left(\{F_n\}, \lambda_n\right)$ priklauso nuo pernašos charakteristikų (pastovių srautų tankų), o taip pat išreikštai nuo koordinačių netgi vienalytės sistemos atveju. (5.1) lygčių dešiniosios pusės išraiškos tam tikrus ribojimus nusako ir F_i prasmė. Pvz., jei tarp F_i yra apibrėžto ženklo dydžiai – termodinaminė temperatūra, koncentracijos ar kt., tai Φ_i išraiškos turi būti tokios, kad iš (5.1) –(5.3) lygčių išplauktų, pvz., termodinaminės temperatūros bei kokio nors dydžio tankio teigiamasis ženklas.

Tarkime, kad Φ_i išraiška tenkina anksčiau minėtus reikalavimus. Tuomet svarbu tiesinis, ar netiesinis Φ_i pavidalas. Jeigu $\Phi_i\left(\{F\}, \lambda\right)$ išreikšta dėmenimis, priklausančiais tik nuo F_i nulinio ir pirmojo laipsnio, tai (5.1) ir iš jos išplaukiančios lygtys yra tiesinės. Tiesinėmis lygtimis aprašomos sistemos vadinamos tiesinėmis, o atitinkami modeliai – tiesiniais. Tiesinėms sistemoms būdingas <u>superpozicijos principas</u>: jei kokį nors F_i keičia du faktoriai ir abu keičia teisiškai, tai abiejų faktorių bendras poveikis lygus sumai poveikių, kuriuos sukurtų kiekvienas faktorius, veikdamas atskirai. Tačiau aprašant realias sistemas, kuriose svarbi sistemos dalių sąveika, tiesinis modelis netinka. Kadangi dalių sąveika egzistuoja, tai bendruoju atveju Φ_i išraiška turėtų būti netiesinė. Tuomet atitinkamos lygtys yra netiesinės, o jomis aprašomos sistemos vadinamos netiesinėmis. Netiesinėms sistemoms negalioja superpozicijos principas, o nedidelis valdančiųjų parametrų pokytis dažnai sukelia didelius F_i pokyčius. Netiesinių lygčių gali būti labai daug pavidalų, todėl, nesisiedami su konkrečiu lygčių pavidalu, tarkime, radome pusiausvirąjį sprendinį $F = F(\lambda)$. Tiesinėje teorijoje F būtų vienareikšmė λ funkcija. Netiesinėje taip gali ir nebūti. Tarkime, kad $F(\lambda)$ pavaizduota 3 pav. (λ - valdantysis parametras).

Kai $\lambda \langle \lambda_1$ ir $\lambda \rangle \lambda_2$ dydis F- vienareikšmė λ funkcija. Tačiau, kai $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2, F$ jau nėra vienareikšmė. Taškų $\lambda = \lambda_1$ ir $\lambda = \lambda_2$ artumoje F bus labai jautri nežymiems išorinių sąlygų pokyčiams, arba vidinėms fluktuacijoms, kurios ir lems verčių 1 arba $1'$, 2 arba $2'$ pasirinkimą. Šis modelis atspindi pvz., pusiausvirąjį dvifazį virsmą: kai $\lambda\langle\lambda_1$ ir $\lambda\rangle\lambda_2$ egzistuotų tik viena pusiausvira fazė, o kai $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$ - pusiausvira dvifazė sistema.

Netiesiškumo efektai ypač išryškėja, kai sistema tolima pusiausvirajai. Šiomis sąlygomis galimi reguliavimosi reiškiniai (pvz., tam tikra medžiaga gali pati didinti arba mažinti savos ar kitos medžiagos gamybą), arba grįžtamasis ryšys (pvz., cheminės reakcijos metu išsiskyrusi šiluma didina aplinkos temperatūrą, o dėl to spartėja pati cheminė reakcija).

1.6. Entropijos vaidmuo

Jeigu sistema konservatyvioji, tai jos būsenos kitimą laikui bėgant lemia pradinės sąlygos ir aukščiau išvardyti tvermės dėsniai – pirmiausia energijos tvermės dėsnis. Disipatyviojoje sistemoje taip nėra: daugybė vyksmų, neprieštaraujančių energijos tvermei, nestebimi. Šiose sistemose energijos tvermės dėsnis tarsi tik geras finansininkas, o vyksmų reguliuotojas – antrasis termodinamikos dėsnis, iš kurio išplaukia, kad egzistuoja sistemos makrobūseną apibūdinantis dydis – entropija *S*. Jei sistema izoliuotoji, tai bet kokiame vyksme *S* gali tik didėti arba nekisti, $\frac{dS}{dt} \ge 0.$ Lygybės ženklas galioja tik pusiausvirajam (idealiajam) vyksmui. Taigi, izoliuotos sistemos vyksmų kryptis – entropijos didėjimo kryptis. Entropijai pasiekus didžiausią vertę sistema tampa pusiausvira, visi vykę pernašos reiškiniai išnykę. Vadinasi, nagrinėjant entropijos maksimumo sąlygas galima ištirti sistemos pusiausvyrą.

Jeigu sistema nėra izoliuotoji ir tarp jos ir aplinkos yra šilumos mainai, tai tokios sistemos entropija gali kaip didėti, taip ir mažėti. Šiuo atveju entropijos pokytis per vienetinę trukmę $\frac{dS}{dt}$ turi du dėmenis: vidinių šaltinių dėmenį ir šilumos mainų nulemtą dėmenį. Vidinių šaltinių per vienetinę trukmę vienetiniame sistemos dalies tūryje sukurtas entropijos kiekis vadinamas entropijos išeiga. Kai sistema arti pusiausvyros, entropijos išeiga minimali nuostoviajame vyksme. Vyksmai neizoliuotoje sistemoje gali būti visai kitų savybių, negu vyksmai izoliuotoje sistemoje.

Nagrinėjant izoliuotąją sistemą kartais parankiau naudoti ne pačią entropiją *S*, o dydį $\Delta S = S - S_{pusiausv.}$. Visada $\Delta S\langle 0$ ir artėjant prie pusiausvyros $\Delta S \to 0$.

1.7. Stabilumo samprata

Tarkime, konservatyvioji arba disipatyvioji sistema laikui bėgant pasiekia būseną, kurioje vėliau ir pasilieka. Tą būseną pavadinsime standartine, o ją apibūdinančių parametrų F_i vertės pažymėsime F_{iS}. Konservatyviajai sistemai, tai būtų mechaninės pusiausvyros būsena, o disipatyviajai – pusiausviroji arba nuostovioji būsena. Reali sistema yra nuolat veikiama mažų aplinkos pokyčių bei vidinių fliuktuacijų. Pavadinkime tuos poveikius trikdžiais. Dėl pastarųjų sistema niekada nebūna pastovios būsenos, o dėl to būsenos parametrai F_i fliuktuoja arti standartinės būsenos verčių:

$$F_i(t) = F_{iS} + x_i(t). \tag{7.1}$$

Jeigu $x_i(t)$, t.y., parametro nuokrypis nuo F_{iS}, sukeltas vidinių fliuktuacijų (pvz., dėl dalelių atsitiktinio judėjimo joms susikaupus sistemos tam tikroje dalyje), jis dažniausiai priklauso ir nuo koordinačių.

Sistemai esant standartinės būsenos jos savybės gali būti prognozuojamos kiek norima tolimai ateičiai, todėl tokios būsenos yra svarbios kaip praktikoje, taip ir teorijoje. Kaip standartinės būsenos sistema reaguoja į minėtuosius trikdžius? Jų paveikta ji gali nutolti nuo standartinės būsenos, arba išlikti standartinei artimos būsenos. Reakcijai į trikdžius apibūdinti naudojama stabilumo (pastovumo) sąvoka.

1. $F_i(t)$ (7.1) lieka F_{iS} artumoje visą laiką, t.y., esant pradinei vertei $|x(t_0)|$, ribotai baigtiniu dydžiu, ribota ir $|x(t)|$ vertė visiems $t \rangle t_0$. Šiuo atveju naudojama stabilumo pagal Liapunovą sąvoka. Matematiškai formuluojama šitaip: jei iš anksto parinktam $\varepsilon \rangle 0$, tokiam, kad visiems $t \rangle t_0$ būtų $|x(t)| \langle \varepsilon$, egzistuoja toks baigtinis $\eta \rangle 0$, priklausantis nuo ε ir t_0, jog $|x(t_0)| \langle \eta$, tai sakoma, kad standartinis sprendinys F_s stabilus pagal Liapunovą. Taigi sprendiniams, stabiliems pagal Liapunovą, mes galime nustatyti, kokia turi būti didžiausia pradinė nuokrypio vertė, kad kiekvienu vėlesniu laiko momentu nuokrypa nuo standartinio sprendinio neviršytų pasirinkto dydžio ε. Pagal Liapunovą stabilų standartinį sprendinį vaizduoja 4 pav. Mechaninis stabilumo pagal Liapunovą pavyzdys – dalelės judėjimas potencinėje duobėje (be trinties). Toks vienmatis judėjimas parodytas 5 pav. Pradiniu laiko momentu parimusią dalelę $(x = x_S)$ perkėlus į tašką x_1, toliau jos koordinatė periodiškai kinta, neišeidama iš intervalo $x_1 \le x \le x_2$. Būnant standartinės, šiuo atveju mechaninės pusiausviros būsenos, dalelės judesio kiekis lygus nuliui. Sutrikdytai dalelei esant taške $x = x_S$, jos judesio kiekis nelygus nuliui. Dabar jis lygus nuliui taškuose x_1 ir x_2. Pažymėkime dalelės judesio kiekį *p*. Jis, kaip ir *x*, kinta periodiškai. 6 pav. pavaizduotos dalelės fazinės trajektorijos (kintamųjų *x, p* erdvėje). Jos uždaros dėl dalelės būsenos parametrų *x* ir *p* periodinio kitimo. Dvi uždaros kreivės (ištisinė ir brūkšninė) atitinka du skirtingus trikdžius.

Tarkime, judėjimas periodinis (periodinis $F_i(t)$ kitimas) ir mus domina, kaip viso periodo būsenų seka reaguoja į trikdį. Tuomet naudojama orbitinio stabilumo sąvoka. 6 pav. vaizduotų orbitinį stabilumą, pagal Liapunovą – ištisinė kreivė – standartinė orbita, brūkšninė – sutrikdytoji orbita.

2. Jeigu $x_i(t) \to 0$, kai $t \to \infty$, sakoma, kad F_{iS} asimptotiškai stabilus. Asimptotiniu stabilumu nepasižymi konservatyviosios sistemos. Šis stabilumas būdingas tik disipatyviosioms sistemoms ir nulemtas vyksmų negrįžtamumo. Asimptotinio stabilumo schemos parodytos 7 ir 8 pav. 8 pav. vaizduoja fazines trajektorijas, atitinkančias du skirtingus trikdžius. Tos trajektorijos gali būti dalelės, judančios su trintimi potencinėje dėžėje, fazinės trajektorijos, arba dviejų

būsenos parametrų $F_1(t)$ ir $F_2(t)$ sąryšio vienodu laiko momentu kreives, kurias taip pat vadinsime fazinėmis trajektorijomis. Standartinė būsena yra tas fazinis taškas, į kurį sueina fazinės trajektorijos. Asimptotinio stabilumo atveju standartinė būsena vadinama atraktoriumi. Jeigu asimptotinis stabilumas egzistuoja bet kokio didumo pradiniam nuokrypiui, standartinė būsena vadinama globaliuoju atraktoriumi. Izoliuotosios sistemos pusiausviroji būsena yra globalusis atraktorius, nes prie jos, vis tos pačios, būsenos priartėja izoliuotoji sistema, nepriklausomai nuo to, kokia būtų pradinė nepusiausviroji būsena.

Taigi, asimptotinis stabilumas reiškia tai, jog sistema pašalina trikdžio poveikį ir ilgainiui atkuria standartinę būseną, kurios ji buvo iki poveikio.

3. Jeigu esant tam tikro didumo pradiniam nuokrypiui, jį atitinkantis $|x_i(t)|$ visą laiką negali būti mažesnis už laisvai pasirinktą vertę, t.y., $F_i(t)$ nepasilieka F_{iS} aplinkoje, sakoma, kad F_{iS} (arba standartinė būsena) nestabilus. Gali būti, jog nestabilumas reiškiasi, kai x_i pradinė vertė viršija tam tikrą, arba ir bet kokio didumo pradiniam nuokrypiui. Nestabilių standartinių būsenų schemos parodytos 9, 10 pav. Mechaninis nestabilumo pavyzdys – dalelė būsenos, atitinkančios jos potencinės energijos maksimumą. Bet kokio didumo trikdis šią dalelę iš nuostovios būsenos išveda negrįžtamai.

Nestabilios gali būti kaip konservatyviųjų, taip ir disipatyviųjų sistemų standartinės būsenos.

4. Jeigu nuokrypos pradinei vertei $|x_i(t_0)|$ neviršijant tam tikros baigtinės slenkstinės vertės $F_i(t)$ išlieka F_{iS} aplinkoje, t.y., egzistuoja asimptotinis stabilumas arba stabilumas pagal Liapunovą, o vertei $|x_i(t_0)|$ viršijus slenkstinę, F_{iS} nestabilus ($F_i(t)$ nutolsta nuo F_{iS}), sakoma, jog standartinė būsena stabili lokaliai (vietinis stabilumas), bet nestabili globaliai.

Kaip jau kalbėjome 1.6 skirsnyje, izoliuotosios sistemos entropijos nuokrypis nuo standartinės vertės $\Delta S \le 0$ ir $\frac{d}{dt}\Delta S \ge 0$. Pastarieji du sąryšiai yra izoliuotosios sistemos globaliojo stabilumo sąlygų matematinės išraiškos. Neizoliuotajai sistemai šios sąlygos negalioja, todėl jose galimos kokybiškai kitos būsenos – faziniai virsmai, pereinamieji reiškiniai ir kt. Kadangi neizoliuotosioms sistemoms neegzistuoja tokie universalūs sąryšiai, kaip minėtieji izoliuotajai, tai neizoliuotųjų sistemų standartinių būsenų stabilumo tyrimas – sudėtingas uždavinys.

5. Kaip matėme, modelio lygčių (5.1) dešiniosios pusės priklauso nuo valdančiųjų parametrų. Dalis tų parametrų gali kisti ir šuoliškai, todėl kintant λ kinta netik lygčių sprendiniai, bet gali pakisti ir pačių lygčių sandara. Jeigu valdančiajam parametrui pakitus, $\lambda \to \lambda + \varepsilon$, visi (5.1) lygčių sprendiniai pakinta taip, kad bet kuriuo laiko momentu $|F_i(\lambda+\varepsilon) - F_i(\lambda)|$ yra ε eilės dydis, tai sakoma, kad sprendinys $F_i(\lambda)$ struktūriškai stabilus (modelis struktūriškai stabilus). Struktūriškai stabilių sprendinių visų fazinių trajektorijų tipologinė sandara vienoda. Jeigu $|F_i(\lambda+\varepsilon) - F_i(\lambda)|$ žymiai viršija ε, tai sprendiniai struktūriškai nestabilūs. Tarkime, turime laisvai judančią dalelę. Jos koordinatė kinta tiesiškai, o judesio kiekis lieka pastovus. Realiai visada yra trintis, o dėl jos dalelė visada sustos. Tarus, kad λ - reiškia valdantįjį parametrą, aprašantį trintį, $\lambda = 0$ -

laisvasis judėjimas, $\lambda = \varepsilon$ - judėjimas su trintimi, matome, kad koks mažas bebūtų ε, praėjus pakankamam laikotarpiui, skirtumas tarp laisvos ir su trintimi judančios dalelės koordinatės ir judesio kiekio kiek norima kartų bus didesnis už ε. Taigi dalelės judėjimo lygčių sprendiniai struktūriškai nestabilūs trinties atžvilgiu.

Baigdami skirsnį išnagrinėsime pavyzdį. Tarkime modelio lygtis šitokia:

$$\frac{dF}{dt} = 1 - F^2. \tag{7.2}$$

Nuostovieji (standartiniai) (7.2) sprendiniai yra $F_S = 1$ ir $F_S = -1$. Perrašę (7.2) trikdžiui

$$x(t) = F(t) - F_S,$$

turime

$$\frac{dx}{dt} = -2F_S x - x^2. \tag{7.3}$$

Kai laiko momentu $t = 0$ trikdis $x = x_0$, (7.3) sprendinys yra šitoks:

$$x(t) = 2F_S \frac{\frac{x_0}{2F_S + x_0} e^{-2F_S t}}{1 - \frac{x_0}{2F_S + x_0} e^{-2F_S t}}. \tag{7.4}$$

Iš (7.4) plaukia, kad visiems $x_0 \neq -2$ sprendinys $F_S = 1$ asimptotiškai stabilus, $\lim x(t) = 0$. Sprendinys $F_S = -1$ asimptotiškai nėra stabilus, nes jo atveju $\lim x(t) = 2$. Ar sprendinys $F_S = 1$ stabilus pagal Liapunovą? Taigi, pareikalaukime, kad būtų $|x(t)| \langle \varepsilon$ esant $t \rangle 0$. Ar egzistuoja toks $|x_0| \langle \eta$, kad galiotų $|x(t)| \langle \varepsilon$. Remdamiesi (7.4) nustatome, kad $|x(t)| \langle \varepsilon$, jei $0 \langle x_0 \langle \varepsilon$, arba $|x_0| \langle \varepsilon$ bei kartu $|x_0| \langle 2$, kai $x_0 \langle 0$. Iš šių rezultatų išvedame, kad $\eta = \varepsilon$, kai $\varepsilon \langle 2$ ir $\eta = 2$, kai $\varepsilon \geq 2$. Vadinasi, pasirinktam ε visada galime nustatyti nuo ε priklausančią η vertę. Taigi, sprendinys $F_S = 1$ stabilus pagal Liapunovą. Sprendinys $F_S = -1$ nėra stabilus ir pagal Liapunovą (bendruoju atveju), nes pakankamai dideliam $t |x(t)|$ artimas 2. Galima įrodyti, kad $|x(t)|$ neribotai išauga, kai $x_0 \langle 0$ ir $t \to \frac{1}{2} \ln(1 + 2/|x_0|)$. Todėl bet kokiam $|x_0|$ neegzistuoja baigtinis ε.

1.8. Dvejinio samprata

Aptarsime standartinio sprendinio (5.2), (5.3) priklausomybės nuo valdančiųjų parametrų pobūdį. Kaip minėjome, (5.2), (5.3) lygtys netiesinės, todėl standartinių sprendinių priklausomybė nuo valdančiųjų parametrų sudėtinga. Tarkime, kad kokio nors būsenos parametro standartinės vertės priklausomybė yra tokia, kuri pavaizduota 11 pav.
Tarkime, kad, kai $\lambda < \lambda_c, F_S$ vienareikšmė λ funkcija ir yra asimptotiškai stabili (11 pav. ji pavaizduota kaip nepriklausanti nuo λ). Vienareikšmis asimptotiškai stabilus standartinis sprendinys vadinamas termodinamine šaka. Kai $\lambda = \lambda_c$ pavaizduotoji termodinaminė šaka praranda stabilumą ir, kai $\lambda > \lambda_c$ - ji nestabili. Tačiau, kai $\lambda > \lambda_c$ atsiranda du nauji sprendiniai (11 pav. 1 ir 2 kreivės) ir abu stabilūs asimptotiškai. Taigi, kai $\lambda \geq \lambda_c$ atsiranda sprendinio šakojimasis (dvišakumas), kuris vadinamas dvejiniu. 11 pav. gali vaizduoti fazinio virsmo atsiradimą, kintant, pavyzdžiui, termodinaminei temperatūrai $T(\lambda = T)$: kai $T < T_c$ turime, pvz., vienalytį skystį, o kai $T > T_c$ - pusiausvirą sistemą iš skysčio ir sočiųjų garų. Eksperimentu iš anksto negalima nustatyti, kurią iš šakų (1 ar 2) pasirinks sistema. Tas pasirinkimas įvyksta atsitiktinai, pvz., dėl vidinių fluktuacijų. Butent, kai $\lambda = \lambda_c$, mažos fluktuacijos nebeužgęsta, o sustiprėja ir dėl to susidaro du stabilūs režimai. Iš čia išplaukia fluktuacijų svarba faziniuose virsmuose.

Kiekvienai sistemai būdinga tam tikra simetrija (transliacijų, posūkių, inversijų ir pan.). Kiekvieną simetriją išreiškia tam tikri tvermės dėsniai, į kuriuos atsižvelgiama sudarant modelį. Sistemoje atsirandančios fluktuacijos (pvz., tankio fluktuacijos) sukelia simetrijos pažaidą – sistemos vidinę diferenciaciją. Taigi dvejinio reiškinys – vidinės diferenciacijos išraiška. Biologijoje mutacijos yra fizikinių sistemų fluktuacijų analogas, o štai natūralioji atranka – pačios sistemos organizuojama stabiliųjų būsenų paieška. Dvejiniai – tai naujų bei sudėtingų savybių atsiradimo fizikinėse ir biologinėse sistemose, pagrindas.

1.9. Dvejinių pavyzdžiai

Išnagrinėsime formalaus parametro F lygtį

$$\frac{dF}{dt} = \mu - F^2 \tag{9.1}$$

Laikome, kad F- fizikinis dydis, todėl turi būti realus. Nuostovieji (9.1) sprendiniai yra

$$F_S^{(+)} = \sqrt{\mu}, \quad F_S^{(-)} = -\sqrt{\mu}\,. \tag{9.2}$$

Kadangi F realus, tai (9.2) egzistuoja tik tada, kai $\mu \geq 0$. Kai $\mu = 0$, abu sprendiniai (9.2) susilieja, sakoma anihiliuoja. Taškas $\mu = 0$ vadinamas ribiniu tašku, nes į kairę nuo jo standartinių sprendinių nėra. Šis dvejinys vadinamas ribinio taško dvejiniu (12 pav.). Ištirsime (9.2) stabilumą. Pagal (9.1) trikdžio lygtis:

$$\frac{dx}{dt} = -2F_S x - x^2 \qquad (9.3)$$

sutampa su (7.3), todėl (9.3) sprendinys reiškiamas (7.4) formule. Iš jos, kaip ir 7 skirsnyje, plaukia, kad dvejinio šaka $F_S^{(+)}$ asimptotiškai stabili, tuo tarpu šaka $F_S^{(-)}$ - nestabili.

Kitas pavyzdys:

$$\frac{dF}{dt} = \mu F - F^3. \qquad (9.4)$$

Standartiniai šios lygties sprendiniai yra

$$F_S = 0, \quad F_S = \pm\sqrt{\mu}. \qquad (9.5)$$

Trivialusis sprendinys $F_S = 0$ nepriklauso nuo μ ir egzistuoja visame μ intervale, tuo tarpu sprendiniai $F_S = \pm\sqrt{\mu}$ egzistuoja tik tada, kai $\mu \rangle 0$ (13 pav.).

$F_S = \pm\sqrt{\mu}$ nėra analizinė μ funkcija – tai dvejinio požymis. Ištirsinė F_S stabilumą. Atskyrę (9.4) lygtyje kintamuosius, randame

$$\frac{dF}{F} - \frac{1}{2}\frac{d\left(\mu - F^2\right)}{\mu - F^2} = \mu dt. \qquad (9.6)$$

Kai $\mu \langle 0$, vietoj (9.6) rašome

$$\frac{dF}{F} - \frac{1}{2}\frac{d\left(|\mu| + F^2\right)}{|\mu| + F^2} = -|\mu| dt. \qquad (9.7)$$

Pažymėję pradinę F vertę F_0, iš (9.7) turime

$$F(t) = \pm\sqrt{\frac{|\mu| F_0^2 e^{-2|\mu| t}}{|\mu| + F_0^2 - F_0^2 e^{-2|\mu| t}}}. \qquad (9.8)$$

Taigi, nuostovioji vertė susidaro, kai $t = \infty$, ir $F(\infty) = F_S = 0$. $F = F_S + x(t)$ tenkina (9.7), todėl išreiškiamas (9.8) lygybe. Standartinei vertei $F_S = 0$ (9.8) formulėje turime rašyti $F_0 = x_0$ (x_0 - pradinė trikdžio vertė). Randame

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{|\mu| x_0^2 e^{-2|\mu|t}}{|\mu| + x_0^2 - x_0^2 e^{-2|\mu|t}}}. \tag{9.9}$$

Šioje išraiškoje matome, kad $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ visiems x_0. Vadinasi, standartinis sprendinys $F_S = 0$ globaliai asimptotiškai stabilus, kai $\mu\langle 0$. Tuo atveju, kai $\mu\rangle 0$, iš (9.6) randame

$$F(t) = \pm\sqrt{\frac{\mu F_0^2 e^{2\mu t}}{\mu - F_0^2 + F_0^2 e^{2\mu t}}}. \tag{9.10}$$

Taigi, kai $\mu\rangle 0$, standartinio sprendinio $F_S = 0$ trikdis

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{\mu x_0^2 e^{2\mu t}}{\mu - x_0^2 + x_0^2 e^{2\mu t}}} \tag{9.11}$$

ir, kaip matome, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \pm\sqrt{\mu}$. Vadinasi, $F_S = 0$ nestabilus asimptotiškai, kai $\mu\rangle 0$. Taškas $\mu = 0$ yra $F_S = 0$ stabilumo praradimo taškas. Jis vadinamas to sprendinio <u>kriziniu tašku</u>.

Dabar ištirsime sprendinių $F_S = \pm\sqrt{\mu}$ stabilumą. Iš (9.10) plaukia, kad standartiniai sprendiniai susidaro, kai $t \to \infty$. Todėl

$$x(t) \pm \sqrt{\mu} = \pm\sqrt{\frac{\mu\left(\pm\sqrt{\mu} + x_0\right)^2 e^{2\mu t}}{\mu - \left(\pm\sqrt{\mu} + x_0\right)^2 + \left(\pm\sqrt{\mu} + x_0\right)^2 e^{2\mu t}}}. \tag{9.12}$$

Matome, kad $x(\infty) \pm \sqrt{\mu} = \pm\sqrt{\mu}$, t.y., $x(\infty) = 0$ visais atvejais, išskyrus $x_0 \pm \sqrt{\mu} = 0$. Vadinasi, standartiniai sprendiniai $F_S = \pm\sqrt{\mu}$ asimptotiškai, bet neglobaliai, stabilūs.

Matome, kad, kai $\mu\langle 0$, egzistuoja vienas globaliai asimptotiškai stabilus $F_S = 0$. Taške $\mu = 0$ jis praranda stabilumą ir atsiranda dvejinys iš dviejų stabilių (simetriškų) šakų. Šio pobūdžio dvejinys yra <u>virškrizinis</u> dvejinys (dar vadinamas kamertono dvejiniu).

Dar išnagrinėsime lygtį

$$\frac{dF}{dt} = \mu + \lambda F - F^3, \tag{9.13}$$

kurioje yra du valdantieji parametrai μ ir λ. Dėmens su F^2 (9.13) dešiniojoje pusėje nebuvimas nėra esminis, nes tiesiniu keitiniu tokį dėmenį galima pašalinti. Tokiu būdu (9.13) dešinioji pusė yra gana bendras trečiojo laipsnio polinomas, sutinkamas realiuose modeliuose. Standartinių sprendinių lygtis

$$\mu + \lambda F_S - F_S = 0 \qquad (9.14)$$

bendruoju atveju gali turėti tris skirtingus sprendinius. Kintant μ ir λ šaknys gali susilieti ir skirtingų sprendinių sumažėti. Šaknų dvigubo kartotinumo sąlyga randama išdiferencijavus (9.14):

$$\lambda - 3F_S^2 = 0. \qquad (9.15)$$

(9.14) ir (9.15) bendrieji sprendiniai yra du kartus pasikartojantys (9.14) sprendiniai. Trigubo kartotinumo (visų trijų sprendinių susiliejimo) sąlyga

$$-6F_S = 0,$$

t.y., $F_S = 0$. Iš (9.15), (9.14) plaukia, kad $F_S = 0$ negalimas, jei kartu μ ir λ nelygūs nuliui. Ištirsime dukart pasikartojančios šaknies sąlygas. Iš (9.15) radę F_S ir įrašę į (9.14), randame valdančiųjų parametrų sąryšį

$$4\lambda^3 = 27\mu^2, \qquad (9.16)$$

kuriam esant sprendinys $F_S = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{3}}$ dukart išsigimęs. Matome, kad sprendinys išsigimęs, kai $\lambda \geq 0$. 14 pav. parodytos μ, λ erdvės sritys, kuriose egzistuoja realūs (9.14) sprendiniai. 14 pav. ištisinė kreivė vaizduoja μ, λ vertes, kurioms (9.14) turi realius sprendinius (dukart kartotinius). Kompleksinio sprendinio, kurio realioji dalis α, o menamoji β, egzistavimo sąlyga yra

$$3\alpha^2 - \beta^2 = \lambda, \quad -2\alpha\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = \mu. \qquad (9.17)$$

Srityje *b*, t.y., kai $|\mu| \langle \frac{2}{3\sqrt{3}}\lambda^{3/2}, (\lambda\rangle 0)$, (9.17) lygtys sprendinio neturi, todėl srityje gali egzistuoti 3 skirtingi realūs sprendiniai. Tuo tarpu srityje *a*, t.y., kai $\lambda \langle\ 0$ arba $\lambda\rangle 0$, bet $|\mu|\rangle \frac{2}{3\sqrt{3}}\lambda^{3/2}$, gali egzistuoti kompleksinis sprendinys, todėl toji sritis yra vieno realaus sprendinio sritimi. Taške $\lambda = \mu = 0$ trys sprendiniai susilieja ir tas taškas vadinamas smailės tašku.

15 a pav. parodyta standartinio (9.14) sprendinio priklausomybės nuo μ, kai $\lambda\rangle 0$ ir yra pastovus, schema. Srityje $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ egzistuoja du stabilūs sprendiniai (ištisinė linija) – bistabilumas. Bistabilumas baigiasi ribiniuose taškuose. Bistabilumo srityje išviso yra trys realūs sprendiniai, kitur – po vieną. (9.14) sprendinių schema, kai pastovus $\mu\left(\mu = \mu_1\right)$, parodyta 15 b pav. Vienas sprendinys egzistuoja visiems λ, o kiti du atsiranda, kai $\lambda \geq \lambda_1\rangle 0$. Čia λ_1 nustatomas pagal

(9.16). Taškas $\lambda = \lambda_1$ yra ribinio taško dvejinio taškas. Viena šio dvejinio šaka stabili, kita – ne.

Išnagrinėtame pavyzdyje matome, kad esant valdančiųjų parametrų sąryšiams, atsiranda dvejiniai. Realioje sistemoje parametrų tikslūs sąryšiai vargiai galimi. Jeigu dvejinys išyra nežymiai suardžius sąryšį – tai struktūrinio nestabilumo požymis. Taigi, svarbu tie ypatumai, kurie išlieka mažai keičiant valdančiuosius parametrus (struktūrinio stabilumo požymis). Struktūriškai stabilus ypatumas parodytas 15 pav.

II skyrius

Tiesinė stabilumo teorija

Dažniausiai modelio lygtys gana sudėtingos ir analiziniu pavidalu sprendinio nepavyksta surasti. Šiame skyriuje suformuluosime stabilumo tyrimo metodus nenaudojant lygčių tiksliųjų sprendinių.

2.1. Pagrindinės tiesinės stabilumo teorijos lygtys

Trikdomą modelio lygčių sprendinį išreiškiame šitaip:

$$F_i(t) = F_{iS} + x_i(t). \tag{1.1}$$

Tuomet modelio lygtys užrašomos taip:

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} = \Phi_i(\{F_S + x\}, \lambda). \tag{1.2}$$

Kadangi F_{iS} nuo laiko nepriklauso, tai (1.2) kairiojoje pusėje lieka trikdžių išvestinės. Toliau laikysime, kad Φ_i gali būti išskleista x_i laipsnių eilute ir kad tą eilutę galima nutraukti apsiribojant baigtiniu dėmenų skaičiumi. Taip galima daryti, jei x_i maži, t.y., jei

$$\frac{|x_i|}{|F_{iS}|} \langle\langle 1.$$

(1.3)

Išvados, suformuluotos (1.3) sąlygomis, vadinamos infinitezimaliojo stabilumo išvadomis. Jos gali būti laikomos būtinosiomis stabilumo sąlygomis. Mat, jeigu sprendiniai nestabilūs mažiems trikdžiams, jie bus nestabilūs aplamai. Taigi rašome

$$\Phi_i(\{F_S + x\}, \lambda) = \Phi_i(\{F_S\}, \lambda) + \sum_j x_j \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial F_j}\right)_{(F=F_S)} + \frac{1}{2}\sum_{j,k} x_j x_k \left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial F_j \partial F_k}\right)_{(F=F_S)} + \ldots \quad (1.4)$$

Tačiau $\Phi_i(\{F_S\}, \lambda) = 0$. Dar pažymėję

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial F_j}\right)_{(F=F_S)},$$

$$h_i(\{x\}, \lambda) = \frac{1}{2}\sum_{j,k}\left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial F_j \partial F_k}\right)_{F=F_S} x_j x_k + \ldots, \quad (1.5)$$

vietoj (1.2) turime lygtis

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_j a_{ij} x_j + h_i(\{x\}, \lambda), \quad (1.6)$$

kurios ekvivalenčios modelio lygtims (1.2) ir, kaip ir pastarosios, yra netiesinės. Nepaisydami (1.6) lygtyse netiesinio dėmens $h_i(\{x\}, \lambda)$, gauname pagalbines tiesines lygtis

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_j a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots S. \quad (1.7)$$

Pastebėsime, kad trivialusis sprendinys $x_i \equiv 0$ tenkina kaip pagalbines (1.7), taip ir tikslias (1.6) lygtis. Trivialusis sprendinys $x_i = 0$ reiškia, jog $F_i = F_{iS}$.

Lygtys (1.6) ir (1.7) yra pagrindinės tiriant standartinių sprendinių stabilumą. (1.7) lygtys yra tiesinės stabilumo teorijos pagrindinės lygtys.

2.2. Tiesinio stabilumo teorema

1. Jei tiesinių lygčių (1.7) sprendinys $x_i \equiv 0$ asimptotiškai stabilus, tai asimptotiškai stabilus ir netiesinių lygčių (1.6) trivialusis sprendinys, t.y., tada asimptotiškai stabilus modelio standartinis sprendinys $F_i = F_{iS}$.
2. Jei tiesinių lygčių (1.7) trivialusis sprendinys nestabilus, tai nestabilus ir (1.6) lygčių trivialusis sprendinys, t.y., nestabilus standartinis sprendinys $F_i = F_{iS}$.

Griežtas teoremos įrodymas sudėtingas, reikalaujantis specialaus matematinio pasiruošimo, todėl čia tos teoremos neįrodinėsime. Teoremos teisingumas suprantamas iš ankščiau minėto infinitezimaliojo stabilumo sampratos: kadangi x_i maži, todėl lemia (1.6) dešiniosios pusės pirmasis dėmuo, t.y., tiesinis artinys.

Tokiu būdu netiesinio uždavinio stabilumo tyrimas yra pakeistas tiesinio uždavinio stabilumo tyrimu. Kadangi tiesinio uždavinio (trivialusis) standartinis sprendinys $x_{iS} = 0$, tai šio sprendinio trikdžio lygtys taip pat sutampa su (1.7) lygtimis.

2.3 Būdingoji lygtis

Nagrinėsime (1.7) lygtis. Matriciniai elementai a_{ij} yra kvadratinės matricos elementai, nepriklausantys nuo laiko, tačiau galintys priklausyti nuo koordinačių, jei sistema pusiausvira, bet nevienalytė, arba jei yra nepusiausvirosios nuostoviosios būsenos (pastaruoju atveju priklausomybė nuo koordinačių būtų reiškiama išvestinėmis). Aišku, kad (1.7) lygties sprendinio pavidalas šitoks:

$$x_i = U_i e^{\omega t}, \tag{3.1}$$

Čia w – dažnis, U_i – amplitudė, kuri nepriklauso nuo laiko, bet gali priklausyti nuo koordinačių. Įrašę (3.1) į (1.7) ir suprastinę lygčių abiejuose pusėse vienodus daugiklius, e^{wt} gauname lygtis:

$$\sum_j a_{ij} U_j = w U_i \ . \tag{3.2}$$

Pažymėję a_{ij} elementų matricą A ir U_j rinkinį – matrica stulpeliu U, vietoj (3.2) turime matricinę lygtį

$$A(\vec{r}, \lambda) U = \omega U \ . \tag{3.3}$$

Tai standartinė operatoriaus $A(\vec{r}, \lambda)$ tikrinių verčių ω lygtis. Ji vadinama būdingąja lygtimi. Stabilumo uždavinys išsprendžiamas, jei pavyksta rasti visas (3.3) tikrines vertes.

Jeigu operatorius A nepriklauso nuo išvestinių koordinačių atžvilgiu, tai (3.3) arba (3.2) yra vienalyčių tiesinių algebrinių lygčių sistema

$$\sum_{j=1}^{S} a_{ij} U_j - \omega U_i = 0, \quad i = 1,2,\ldots,S. \tag{3.4}$$

Tuomet dažnių lygtis šitokia:

$$\det\begin{vmatrix} a_{11}-\omega & a_{12}...a_{1S} \\ a_{21} & a_{22}-\omega...a_{2S} \\ ------ & ---- \\ ------ & ---- \\ a_{S1} & a_{S2}...a_{SS}-\omega \end{vmatrix}=0, \tag{3.5}$$

čia a_{ij} priklauso tik nuo F_{iS} ir λ; *S*- modelio funkcijų F_i skaičius.

Jeigu operatorius $A(\vec{r},\lambda)$ yra diferencialinis, arba integralinis, tai (3.2), arba (3.3) lygtys yra diferencialinės, arba integralinės lygtys ir dažniai nustatomi iš kraštinių sąlygų. Šiuo atveju uždavinys sudėtingesnis.

Tarkime suradome dažnių spektrą ω_j (bendruoju atveju ω_j verčių yra *S*). Apibrėžra ω_j vertė nusakys dalinį sprendinį, o bendrasis (1.7) sprendinys yra dalinių tiesinis darinys. Bendruoju atveju ω_j kompleksinė funkcija,

$$\omega_j = \mathrm{Re}\,\omega_j + i\,\mathrm{Im}\,\omega_j. \tag{3.6}$$

Jei visos $\mathrm{Re}\,\omega_j \langle 0$, tai x_i laikui bėgant mažėja ir, kai $t \to \infty$, $x_i \to 0$. Tada (1.7) trivialusis sprendinys asimptotiškai stabilus, t.y., modelio standartinis sprendinys F_{iS} asimptotiškai stabilus. Kai visiems *j* $\mathrm{Re}\,\omega_j \langle 0, \mathrm{Im}\,\omega_j \neq 0$ (bent kaikuriems ω_j), tai x_i slopimas lydimas virpesių. Jeigu bent vieno $\mathrm{Re}\,\omega_j \rangle 0$, tai trivialusis sprendinys asimptotiškai nestabilus, taigi ir $F_i = F_{iS}$ nestabilus.

Dažnių spektras priklauso nuo valdančiųjų parametrų. Todėl nuo $\mathrm{Re}\,\omega_j \langle 0$ prie $\mathrm{Re}\,\omega_j \rangle 0$ pereinama kintant λ. Vadinasi egzistuoja $\lambda = \lambda_e$, kuriam esant $\mathrm{Re}\,\omega_j = 0$ (16 pav.). Ši λ_C vertė vadinama krizine, o ją atitinkantis stabilumas marginaliniu (ribiniu) stabilumu (sistemos būsena – marginaliniu rėžimu).

2.4 Dviejų laisvės laipsnių sistema

Išnagrinėsime dažną atvejį, kai sistema apibūdinama dviem funkcijom F_1 ir F_2. Laikysime, kad matrica *A* nepriklauso nuo išvestinių (arba integralų), veikiančių x_i. Tuomet iš (1.7) plaukia

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \tag{4.1}$$

Šių lygčių sprendinio ieškome pavidalu

$$x_1 = x_{10}e^{\omega t}, \quad x_2 = x_{20}e^{\omega t} \tag{4.2}$$

Įrašę (4.2) į (4.1), gauname amplitudžių lygtis

$$\begin{aligned} &(a_{11}-\omega)x_{10}+a_{12}x_{20}=0, \\ &a_{21}x_{10}+(a_{22}-\omega)x_{20}=0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dažnių lygtis (3.5) dabar šitokia:

$$\begin{aligned} &\omega^2-T\omega+\Lambda=0, \\ &T=a_{11}+a_{22}, \quad \Lambda=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

(4.4) sprendiniai

$$\omega_{1,2}=\frac{T\pm\sqrt{T^2-4\Lambda}}{2}. \tag{4.5}$$

16 pav. Perėjimo iš stabilios būsenos į nestabilią schema.
$\lambda=\lambda_C$ - marginalinio stabilumo taškas.

$$x_1=C_1e^{\omega_1 t}+C_2e^{\omega_2 t},\ x_2=C_1K_1e^{\omega_1 t}+C_2K_2e^{\omega_2 t} \tag{4.6}$$

Tiesinio darinio koeficientai C_1 ir C_2 nustatomi iš x_1 ir x_2 pradinių sąlygų. K_1 ir K_2 vadinami pasiskirstymo koeficientais ir nustatomi iš (4.3) lygčių, kurios apibrėžia dalinių sprendinių amplitudžių santykį:

$$K_1=\frac{x_{20}(\omega_1)}{x_{10}(\omega_1)},\ K_2=\frac{x_{20}(\omega_2)}{x_{10}(\omega_2)}.$$

Ištirsime (4.6). Dydžių x_1 ir x_2 fazinėje erdvėje galime spręsti apie (4.6) artėjimą, arba nutolimą nuo standartinio sprendinio, kuris šiuo atveju yra pusiausvirasis sprendinys. Standartinis sprendinys šioje erdvėje vaizduojamas tašku ir vadinamas ypatinguoju (kartais kriziniu) tašku. Klasifikuosime ypatinguosius taškus.

1. Tarkime $T^2-4\Lambda\geq 0$. Tada abi šaknys realiosios.

a) $\Lambda\rangle 0$. Tada abiejų šaknų ženklai vienodi ir tokie, kaip ir dydžio *T*. Šiuo atveju x_1 ir x_2 arba monotoniškai artėja, arba monotoniškai tolsta nuo F_S. Sakoma, kad ypatingasis taškas yra mazgas.

Mazgo fazinių trajektorijų kryptys parodytos 17 pav. Gali būti du a) atvejai, kai šaknys kartotinės. Kartotinumo sąlyga $T^2-4\Lambda=0,$ t.y., $(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}=0.$ Pirmasis atvejis: $a_{12}=a_{21}=0,\ a_{11}=0_{22}\equiv a\neq 0$. Tuomet

$$\frac{dx_1}{dt}=ax_1,\quad \frac{dx_2}{dt}=ax_2.$$

Dakar fazinės trajektorijos yra spinduliai, iš begalybės ateinantys į ypatingąjį tašką, kai $a\langle 0$, arba iš jo nueinantys į begalybę, kai $a\rangle 0$. Tuomet S vadinamas žvaigždiniu mazgu (18 pav.).

Antrasis atvejis: $a_{11} = a_{22} = a,\, a_{12} = a,\, a_{21} = 0, (a \neq 0)$. Tuomet

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 + ax_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = ax_2.$$

Šių lygčių sprendiniai:

$$x_1 = x_{10}e^{at} + ax_{20}te^{at},\, x_2 = x_{20}e^{at}.$$

Pašalinę laiką, randame fazinių trajektorijų lygtis:

$x_2 = 0,\, x_1$ - bet koks (kai $x_{20} = 0$),

$x_1 = x_2 \ln(x_2) + Cx_2$, $C = const \neq \infty$.

Šio atvejo fazinės trajektorijos pavaizduotos 19 pav. Ypatingasis taškas vadinamas išsigimusiuoju mazgu (mazgas, turintis vieną liestinę S taške: $\frac{dx_1}{dx_2} = \ln|x_2| + 1 + C$ - kai $x_2 = 0,\, \frac{dx_1}{dx_2} = -\infty$, nepriklausomai nuo C).

b) $\Lambda\langle 0$. Dakar abi šaknys realiosios ir skirtingų ženklų. Tarus, kad $\omega_1\rangle 0$, o $\omega_2\langle 0$ ir pašalinus iš (4.6) laiką, randame fazinių trajektorijų lygtį

$$\left(\frac{x_2 - K_2x_1}{C_1(K_1 - K_2)}\right)^{\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right|} = \frac{x_2 - K_1x_1}{C_2(K_2 - K_1)}.$$

Šiuo atveju S vadinamas balnu. Balnas visada nestabilus, išskyrus balno asymptotes (separatrises), kurios atitinka pradines sąlygas: $C_1 = 0$ ir $C_2 = 0$. Tos asimptotės yra: $x_2 = K_2x_1$ ir $x_2 = K_1x_1$. Visos kitos fazinės trajektorijos ateina iš begalybės ir nueina į begalybę (20 pav.), nesiekdamos S.

2. $T^2 - 4\Lambda\langle 0$. Abi šaknys kompleksinės jungtinės.

a) $T \neq 0$. Realiąją ω dalį nusako T. Todėl artėjimas $(T\langle 0)$ arba nutolimas $(T\rangle 0)$ nuo S yra virpamojo pobūdžio, tačiau su mažėjančia arba didėjančia amplitude. Fazinės šio atvejo trajektorijos parodytos 21 pav. Ypatingasis taškas vadinamas židiniu.

b) $T = 0, \Lambda\rangle 0$. Šaknys grynai menamosios: $\omega = \pm i\gamma$ (negęstantieji virpesiai). Fazinės trajektorijos – uždarosios kreivės, juosiančios S. Jų lygtys

$$x_2^2 - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{12}^2}x_1^2 + 2\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1x_2 = 4\frac{\Lambda}{a_{12}^2}C_1C_2.$$

Ypatingasis taškas vadinamas centru (22 pav.). Centras asimptotiškai nestabilus, bet stabilus pagal Liapunovą (uždarosios trajektorijos nuotolį nuo S lemia C_1 ir C_2 vertės).

3. $\Lambda = 0$. Tai mazgo $(\Lambda \rangle 0)$ ir balno $(\Lambda \langle 0)$ tarpinis atvejis. Ypatingasis taškas vadinamas daugialypiu.

Sąlyga $\Lambda = 0$ reiškia, kad

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0,$$

t.y., kad

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial F_1}\right)_{F=F_S}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial F_2}\right)_{F=F_S} - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial F_2}\right)_{F=F_S}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial F_1}\right)_{F=F_S} = 0. \qquad (4.7)$$

Standartinį sprendinį nusako dviejų kreivių, kurių neišreikštos lygtys yra lygybės $\Phi_1(F_1, F_2, \lambda) = 0$ ir $\Phi_2(F_1, F_2, \lambda) = 0$, susikirtimo taškas (taškai). Tų kreivių liestinių lygtis randame išdiferencijavę lygybes $\Phi_1 = 0$ ir $\Phi_2 = 0$:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial F_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial F_2}\frac{\partial F_2}{\partial F_1} = 0, \frac{\partial \Phi_2}{\partial F_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial F_2}\frac{\partial F_2}{\partial F_1} = 0. \qquad (4.8)$$

Iš (4.8) plaukia, kad atitinkamai pirmosios ir antrosios kreivių liestinių lygtys yra šitokios:

$$\left(\frac{\partial F_2}{\partial F_1}\right) = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial F_1} / \frac{\partial \Phi_1}{\partial F_2}, \left(\frac{\partial F_2}{\partial F_1}\right)_2 = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial F_1} / \frac{\partial \Phi_2}{\partial F_2}.$$

Abiejų kreivių bendros liestinės sąlyga yra lygybė

$$-\frac{\partial \Phi_1}{\partial F_1} / \frac{\partial \Phi_1}{\partial F_2} = -\frac{\partial \Phi_2}{\partial F_1} / \frac{\partial \Phi_2}{\partial F_2}. \qquad (4.9)$$

Palyginę (4.9) ir (4.7) matome, kad (4.7) išreiškia tai, jog daugialypis ypatingasis taškas yra kreivių $\Phi_1 = 0$ ir $\Phi_2 = 0$ bendros liestinės taškas. Daugialypio ypatingojo taško fazinės trajektorijos sudėtingos (23 pav.).

Daugialypio ypatingojo taško stabilumo analizė taip pat sudėtinga. Mažai pakitus funkcijoms Φ_1 ir Φ_2, daugialypis taškas bendruoju atveju skyla į du paprastus ypatinguosius taškus. Taigi, daugialypį ypatingąjį tašką galima nagrinėti kaip dviejų paprastųjų susiliejimą, pasiekiamą keičiant valdančiųjų parametrų vertes.

2.5. Dvejinio sąlygos dviejų laisvės laipsnių sistemoje

Daugialypio ypatingojo taško skilimas į du paprastuosius reiškia dvejinio atsiradimą. Kita marginalinio stabilumo sąlyga – centras. Centro sąlygomis egzistuoja fazinės trajektorijos, praeinančios arti centro, bet neišeinančios iš jo artumos. Tai taip pat reikštų galimą standartinių sprendinių šakojimąsi. Bet kokio laisvės laipsnių sistemos standartinių sprendinių šakojimasi tyrimas labia sudėtingas. Visiškai suformuluota teorija dviejų laisvės laipsnių sistemai. Įrodyta, kad dvejinio sąlygos yra:

1) lygties (4.4) realioji šaknis $\omega = 0$ nekartotinė (kartotinumas lygus 1),
2) lygties (4.4) abi šaknys grynai menamosios.

Pirmoji sąlyga reiškia daugialypio ypatingojo taško egzistavimą,

$$\Lambda(\lambda_C) = 0, \tag{5.1}$$

o antroji – centro sąlygą,

$$T(\lambda_C) = 0. \tag{5.2}$$

Čia λ_C žymi valdančiųjų parametrų vertes, kurioms galioja (5.1) ir (5.2) lygybės.

Dar kartą atkreipsime dėmesį į tai, kad dvejiniui atsirasti svarbu šaknies $\omega(\lambda_C) = 0$ kartotinumas. Lyginio kartotinumo atveju dvejinių gali ir nebūti. Ir dar: būtina skirti standartinio sprendinio kartotinumą ir modų dažnių kartotinumą.

Tarus, kad (5.1), (5.2) sąlygomis,

$$\left.\frac{d\omega(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_C} \rangle 0, \quad \left.\frac{d}{d\lambda} R_e\omega(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_C} \rangle 0,$$

įrodoma, jog sprendiniai, išsišakojantys, kai $\lambda \rangle \lambda_C$, yra asimptotiškai stabilūs, o išsišakojantieji, kai $\lambda \langle \lambda_C$ - asimptotiškai nestabilūs (24 pav.). Tai pat įrodoma, kad atsišakojantieji sprendiniai yra nuostovūs, jei $\operatorname{Im}\omega(\lambda_C) = 0$ periodiniai, jei $\operatorname{Im}\omega(\lambda_C) \neq 0$. 24 pav. šakos, pažymėtos 1, praranda stabilumą taške $\lambda = \lambda_C$ ir, kai $\lambda \rangle \lambda_C$, nėra stabilios $(1')$. Stabilūs šakojimaisi pažymėti ištisinėmis, nestabilūs – brūkšninėmis linijomis.

III skyrius

Katastrofų teorijos samprata

Katastrofų teorija – vienas iš matematinių modelių tyrimo metodų.

3.1. Katastrofos samprata

Tarkime, materialusis taškas juda veikiamas vienmatės jėgos, kurios potencialas

$$V = x^3 - cx, \tag{1.1}$$

čia $c \geq 0$ ir gali būti valdomas. Mechaninės pusiausvyros padėtis $x = \sqrt{c/3}$. Kol c > 0, mažai pakitus valdančiajam parametrui, mažai pakinta ir materialiojo taško mechaninės pusiausvyros padėtis. Tačiau, kai c sumažinamas iki artimos nuliui vertės, tolesnis nežymus to parametro pokytis pasiekiant $c = 0$, sukelia labai didelį taško padėties pokytį – potencialo minimumas išnyksta (jis susilieja su maksimumu) ir taškas nutolsta į $x = -\infty$ (25 pav.) – sakoma, kad įvyko katastrofa. Taigi <u>katastrofa</u> – sistemos būsenos ženklus pokytis nežymiai keičiant valdančiojo parametro (parametrų) vertę, kai iki tol nežymus valdančiojo parametro vertės pokytis sukeldavo tik nežymų būsenos pokytį.

Katastrofos pobūdžio reiškiniai sutinkami fizikinėse, technologinėse, biologinėse, ekonominėse sistemose. Norint šiuos reiškinius valdyti, būtina žinoti sąlygas, kuriomis jie įvyksta. Valdančiųjų parametrų verčių, kurioms esant įvyksta standartinės būsenos katastrofa, visuma vadinama <u>katastrofų aibe</u>. Valdančiojoje erdvėje ši aibė gali būti vaizduojama atskirais taškais, kreivėmis, paviršiais. Aukščiu aptarto judėjimo atveju katastrofų aibę sudaro vienintelė vertė $c = 0$. Pagrindinis katastrofų teorijos uždavinys – katastrofų aibės nustatymas. Pastarasis uždavinys gali būti išspręstas ir 1 bei 2 skyriuose aprašytais metodais. Todėl katastrofų teorija tėra tik vienas iš metodų, taikomų tiriant matematinius modelius.

3.2. Katastrofų teorijos nagrinėjamų matematinių modelių lygčių pavidalas

Katastrofų teorijoje nagrinėjamų lygčių bendrasis pavidalas yra šitoks:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \ \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{s}, \tag{2.1}$$

čia x_i - iš modelio lygčių nustatomi sistemą apibūdinantys parametrai (1 ir 2 skirsniuose žymėti sudėtingesne raide F_i), $V = V(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$ - sistemos potencialo funkcija, kurios pavidalas nustatomas sudarant modelio lygtis; λ – valdančiųjų parametrų rinkinys. Nustatysime sąlygas, kurioms esant pirmame skyriuje apibrėžtos modelio lygtys gali būti parašytos (2.1) pavidalu. Sulyginę (2.1) su pirmojo skyriaus lygtimis matome, jog turi galioti lygybė

$$-\frac{\partial V}{\partial x_i} = \Phi_i . \tag{2.2}$$

Išdiferencijavę (2.2) abi puses parametru x_j ir pasinaudoję lygybe

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} ,$$

randame ieškomąją sąlygą:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} . \tag{2.3}$$

Pastaroji lygybė suvaržo galimus Φ_i pavidalus, todėl (2.1) lygtis yra anksčiau aptartų lygčių atskiras atvejis. Sistemos, kurių matematiniai modeliai išreiškiami (2.1) pavidalo lygtimis, vadinamos gradientinėmis.

Jeigu V išreikštai nepriklauso nuo laiko, tai nuostoviąją būseną nusako lygtys

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 , \ i = 1,...,s . \tag{2.4}$$

Jos atitinka gradientinių sistemų standartinius sprendinius nusakančias lygtis $\Phi_i = 0$. (2.4) lygtys nusako potencialo funkcijos ekstremumo taškus, todėl katastrofų teorijoje (2.4) sprendiniai dažnai vadinami ypatingaisiais taškais.

Jeigu V yra tik vieno kintamojo x (s = 1) funkcija, $V = V(x,\lambda)$, tai ypatingieji taškai yra minimumo, maksimumo ir perlinkio, tenkinančio papildomą sąlygą $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$, taškai. Kai kintamųjų x daugiau (s > 1), ypatingųjų taškų gali būti daugiau ir jie sudėtingesni. Tarkime, V yra dviejų kintamųjų šitokio pavidalo:

$$V = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 . \tag{2.5}$$

Jei $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, tai (2.5) turi vieną ypatingąjį tašką – vietinį maksimumą, esantį koordinačių pradžioje $(x_1 = x_2 = 0)$. Jei $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, tai egzistuoja tik vietinis minimumas koordinačių pradžioje. Kai $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, ypatingasis taškas vadinamas balnu (jis taip pat koordinačių pradžioje ir x_1 ašimi turi minimumo, o x_2 ašimi maksimumo savybę). Jei $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, tai minimumas $(x_1 = 0)$ egzistuoja išilgai visos ašies x_2, todėl pastarosios ypatingasis taškas vadinamas loviu. Matome, kad kintant λ_1 ir λ_2 vienas ypatingasis taškas gali virsti kitu. Bendruoju atveju keičiantis valdančiųjų parametrų vertėms kai kurie ypatingieji taškai gali išnykti arba atsirasti nauji.

(2.1) lygčių sprendiniai, kai V išreiškiamas (2.5) lygybe yra šitokie:

$$x_1(t) = x_1(0)e^{-2\lambda_1 t}, \qquad x_2(t) = x_2(0)e^{-2\lambda_2 t}. \tag{2.6}$$

Vietinio minimumo sąlygomis ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$) laikui bėgant x_1 ir x_2 artėja prie lygių nuliui verčių nepriklausomai nuo pradinių verčių $x_1(0)$, $x_2(0)$. Tuo tarpu balno sąlygomis ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$) laikui bėgant dydis x_2, priklausomai nuo $x_2(0)$ ženklo, artėja prie $\pm\infty$. Matome, kad nedidelis λ_2 pokytis, kuriame pakinta λ_2 ženklas, sukelia žymų (2.6) lygybėmis aprašomos sistemos būsenos pokytį. Taigi lovio sąlygos $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ (arba $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$) yra katastrofos sąlygos. Lovys – susilieję vietinio minimumo ir balno ypatingieji taškai. Nedaug keičiant λ_2 lovys virsta vietiniu minimumu, arba balnu. Tuo tarpu nedaug pakitus valdančiajam parametrui vietinis minimumas lieka vietiniu minimumu, balnas – balnu.

Ypatingieji taškai, kurie, nedaug keičiant valdančiųjų parametrų vertes, nepakeičia savo pobūdžio (maksimumas išlieka maksimumu, balnas – balnu ir t.t.), vadinami <u>neišsigimusiaisiais</u> arba <u>izoliuotaisiais</u>. Jiems būdinga tai, jog matricos

$$S = \left| \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_s} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_s \partial x_1} & \dots\dots\dots\dots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_s^2} \end{array} \right| \tag{2.7}$$

determinantas, apskaičiuotas x_i vertėms, atitinkančioms ypatingąjį tašką, $x_i = x_{iyp.}$, nelygus nuliui:

$$\det S\big|_{x_i = x_{iyp.}} \neq 0. \tag{2.8}$$

Taigi, (2.8) sąlygomis katastrofų nėra. Jeigu

$$\det S\big|_{x_i = x_{iyp.}} = 0, \tag{2.9}$$

tai ypatingasis taškas vadinamas išsigimusiuoju, arba daugialypiu. Toks taškas pakitus valdančiajam parametrui keičia savo pobūdį. Taigi (2.9) yra katastrofos sąlyga. Matrica S vadinama stabilumo matrica. (2.5) atveju

$$\det S = 4\lambda_1 \lambda_2, \tag{2.10}$$

todėl vietiniam maksimumui, vietiniam minimumui ir balnui galioja (2.8), o loviui – (2.9).

(2.4), (2.9) lygybės yra katastrofų aibės nustatymo sąryšiai: iš (2.4) suradę $x_{iyp.} = x_{iyp.}(\lambda)$ ir šias išraiškas įrašę į (2.9), randame valdančiųjų parametrų sąryšį, kuriam esant vyksta katastrofos.

3.3. Elementariosios katastrofos

1972 m. prancūzų matematikas R. Toma išnagrinėjo septynias potencialo funkcijas V formas, vadinamas elementariosiomis katastrofomis, t.y., septynis vieno, dviejų ir trijų kintamųjų polinomus su valdančiųjų parametrų skaičiumi, neviršijančiu 4, ir nustatė šių formų ypatinguosius taškus bei katastrofų aibes. Čia nenagrinėsime visų tų formų, o tik fizikoje gana dažnai sutinkamos dvi.

1. Klostės katastrofa. Šiuo atveju

$$V(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax \tag{3.1}$$

ir iš esmės sutampa su išnagrinėta funkcija (1.1). Dabar ypatingųjų taškų lygtis

$$\frac{dV}{dx} = x^2 + a = 0 \tag{3.2}$$

ir jų išsigimimo (daugialypiškumo) lygtis

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 2x = 0\,. \tag{3.3}$$

Radę x iš (3.2) ir tą vertę įrašę į (3.3), randame katastrofų aibę, kuri šiuo atveju sudaryta iš vieno taško $a = 0$. Taigi dukart išsigimęs ypatingasis taškas yra $x = 0$, $a = 0$. Kai a > 0, V neturi ypatingųjų taškų. Kai a < 0 – yra du ypatingieji taškai. Šias dvi kokybiškai skirtingas V sritis skiria riba $a = 0$ (27 pav.). katastrofa įvyksta, kai nykstamai mažu a pokyčiu nuo a < 0 pereinama prie a > 0. tuomet iš pusiausvyros būsenos S išeinama negrįžtamai. Ribinė $a = 0$ kreivė vadinama kloste.

2. Smailės katastrofa. Šiuo atveju

$$V(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx\,. \tag{3.4}$$

Katastrofų aibę apibrėžiančios lygtys šitokios:

$$\begin{aligned} &x^3 + ax + b = 0, \\ &3x^2 + a = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Pašalinę x iš (3.5) ($3x^2 = -a$, tuomet $2x^3 = b$) randame valdančiųjų parametrų sąryšį

$$\left(\frac{a}{3}\right)^3+\left(\frac{b}{2}\right)^2=0, \qquad (3.6)$$

apibrėžiantį katastrofų aibę – valdančiojoje erdvėje smailė (28 pav.). Dukart išsigimęs ypatingasis taškas

$$x=-\frac{3b}{2a},\ \ a\neq 0.$$

Kai $\left(\frac{a}{3}\right)^3+\left(\frac{b}{2}\right)^2 < 0$, egzistuoja trys skirtingi ypatingieji taškai, o kai $\left(\frac{a}{3}\right)^3+\left(\frac{b}{2}\right)^2 > 0$ – tik vienas realusis ypatingasis taškas, kiti du sprendiniai yra kompleksiniai jungtiniai. Detaliau žiūrėti 1.9 skirsnyje kubinės lygties šaknų tyrimą.

IV skyrius

Konkretūs modeliai ir jų analizė

Šiame skyriuje sudarysime ir tirsime kai kuriuos gamtosaugos bei fizikinius matematinius modelius. Pradėsime matematiškai paprasčiausiais.

4.1. Vienarūšės populiacijos modelis

Populiacija – tai vienos rūšies individų bendruomenė: žmonės, gyvūnai, paukščiai, vabzdžiai ir kt. Populiacijose vykstantys reiškiniai labai sudėtingi todėl iš populiacijų modelių dažnai didelio tikslumo tikėti netenka. Tačiau vis tik išskiriami modeliai, kuriais siekiama siauresnių tikslų – vadinamų taktiniai modeliai - , pvz., kaip tam tikromis konkrečiomis sąlygomis reikėtų kovoti su tam tikrais žemės ūkio kenkėjais. Kiti – strateginiai modeliai – skirti bendresniems populiacijų atsiradimo, dauginimosi, išnykimo klausimams aprašyti. Daug gamtos išteklių sunaudojama negrįžtamai, labai aktualios gamtos išsaugojimo problemos ir kt. Ieškant šių problemų optimalių sprendimo būdų matematiniams populiacijų modeliams šiuo metu skiriama daug dėmesio.

Dažnai populiacijos vienos kitas veikia (sąveikauja) ir turėtų būti nagrinėjamos kaip viena sistema. Tačiau pradėsime nuo vienos rūšies individų sistemos. Toks modelis turės prasmę, jei toji populiacija pakankamai izoliuota (savarankiška), pvz. žmonių populiacija.

1798 m. Maltusas suformulavo hipotezę, kad žmonių skaičius auga geometrine progresija ir kad tą augimą gali sustabdyti tik epidemijos ir stichinės nelaimės. Dėl ribotų maisto ir kitų gamtos išteklių žmonių skaičiaus didėjimo problema aktuali ir šiandien.

Pažymėkime populiacijos skaičių N. Tuomet Maltuso hipotezė populiacijai būtų išreiškiama šitokia lygybe

$$\frac{dN}{dt} = aN \; , \tag{1.1}$$

t. y., populiacijos skaičiaus pokytis per vienetinę trukmę yra proporcingas populiacijos skaičiui. Proporcingumo daugiklis a – daugėjimo tikimybė – populiacijos skaičiaus padidėjimas iš vieno individo per vienetinę trukmę. Tarus, kad a nepriklauso nuo laiko (arba N), iš (1.1) randame

$$N(t) = N_0 e^{at} \; , \tag{1.2}$$

čia N_0 – populiacijos skaičius pradiniu laiko momentu ($t = 0$).

Realiai populiacijos dinamika nenusakoma (1.2) dėsniu. Aptarsime modelio tobulinimo būdus. Pirmiausia, populiacijos skaičiaus kitimas priklauso ne tik nuo gimimų, bet ir nuo mirčių skaičiaus. Tarkime, gimimo iš vieno individo tikimybė yra b, o vieno individo mirties tikimybė d. Tuomet daugėjimo daugiklis $a = b - d$. Vėl tarus, kad $a = const$ rastume, jog laikui bėgant N neribotai didės, jei $a > 0$, artės prie 0, jei $a < 0$ ir bus nuostovus, jei $a = 0$. Tačiau ši nuostovioji būsena būtų labai nestabili, nes ir labai nedidelės a nuokrypos nuo vertės $a = 0$ sukeltų didelius N pokyčius. Taigi toks modelis taip pat nepakankamas. Populiacijos didėjimą lemia ne vien gimimai ir mirtys, bet ir kiti vidiniai reguliavimosi mechanizmai – maistas, vieta ir kt. Dėl tų vidinių mechanizmų visada egzistuoja tam tikras $N = N_{\max}$, kurį pasiekus N pradeda mažėti ir tik pasikeitus egzistavimo sąlygoms (pagerėjus resursams) N vėl gali didėti. Todėl tikslesnė a išraiška būtų

$$a = b - d - cN \; . \tag{1.3}$$

Čia $-cN$ – daugėjimo tikimybės sumažėjimas dėl vidinio reguliavimosi, o c – vidinio reguliavimosi koeficientas. Pažymėję $a_m = b - d$, $K = a_m / c$, vietoj (1.1) randame

$$\frac{dN}{dt} = a_m \left(1 - \frac{N}{K}\right) N \; . \tag{1.4}$$

Šios lygties sprendinys

$$N(t) = N_0 \frac{K e^{a_m t}}{K - N_0 (1 - e^{a_m t})} \tag{1.5}$$

pavaizduotas 29 pav. Nepriklausomai nuo pradinės vertės N_0, laikui bėgant populiacijos skaičius N visada priartėja prie nuostoviosios vertės $N_s = K$.

Aptarto modelio trūkumas yra tas, jog (1.4) lygtyje gimimo ir mirties įnašai susieti su populiacijos skaičiumi laiko momentu t. Ištiktųjų tie įnašai turėtų būti siejami su ankstesnių laiko momentų populiacijų skaičiais. Tačiau čia šių patikslinimų nenagrinėsime. (1.4) lygtis mums svarbi aptariant kitus modelius.

4.2. Dviejų konkuruojančių rūšių modelis

Nagrinėsime sistemą, kurią sudaro dvi populiacijos, kovojančios, pvz., dėl tų pačių maisto išteklių – ganyklų, gyvūnų ar panašiai – tačiau tiesiogiai viena kitos nenaikinančios. Jeigu šios rūšys viena kitos neveiktų, tai sistemą aprašytų dvi (1.4) pavidalo lygtys:

$$\frac{dN_1}{dt} = (a_1 - b_{11}N_1)N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = (a_2 - b_{22}N_2)N_2. \tag{2.1}$$

Čia N_1, N_2 – atitinkamai pirmosios ir antrosios rūšių skaičiai; a_1, a_2 – rūšių gimimo – mirimo tikimybės; $b_{11}N_1$, $b_{11}N_2$ – vidinio reguliavimosi tikimybės; b_{11}, b_{22} – vidinio reguliavimosi koeficientai. Rūšių konkurencija mažina daugėjimo tikimybes $a - bN$, o sumažėjimas priklauso nuo rūšies konkurentės skaičiaus. Taigi, vietoj (2.1) turime rašyti

$$\frac{dN_1}{dt} = (a_1 - b_{11}N_1 - b_{12}N_2)N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = (a_2 - b_{22}N_2 - b_{21}N_1)N_2. \tag{2.2}$$

Čia $b_{12}N_2$ – pirmosios rūšies daugėjimo tikimybės sumažėjimas dėl antrosios rūšies poveikio, atitinkamai $b_{21}N_1$ nusako pirmosios rūšies poveikį antrosios daugėjimui, b_{12}, b_{21} – rūšių sąveikos koeficientai.

(2.2) lygtys netiesinės, kintamieji neatsiskiria, todėl analizinės N_1 ir N_2 priklausomybės nuo laiko rasti nepavyksta. Gali būti gautas tik skaitmeninis (2.2) lygčių sprendinių imitavimas. Tokiu atveju ypač svarbi kokybinė informacija, išplaukianti iš lygčių pavidalo.

Nuostoviuosius (standartinius) sprendinius apibrėžiančios lygtys šitokios:

$$(1 - \frac{b_{11}}{a_1}N_1 - \frac{b_{12}}{a_1}N_2)N_1 = 0, \quad (1 - \frac{b_{22}}{a_2}N_2 - \frac{b_{21}}{a_2}N_1)N_2 = 0. \tag{2.3}$$

Iš jų plaukia, kad galimi šitokie nuostovieji sprendiniai:

$$N_1 = 0, \; N_2 = \frac{a_2}{b_{22}}; \tag{2.4}$$

$$N_2 = 0, \; N_1 = \frac{a_1}{b_{11}} \tag{2.5}$$

ir sprendinys, apibrėžiamas lygtimis

$$1 - \frac{b_{11}}{a_1}N_1 - \frac{b_{12}}{a_1}N_2 = 0, \quad 1 - \frac{b_{22}}{a_2}N_2 - \frac{b_{21}}{a_2}N_1 = 0 \tag{2.6}$$

Čia nenagrinėjame trivialiojo sprendinio $N_1 = N_2 = 0$, kuris nėra įdomus. (2.6) dviejų tiesių susikirtimo fazinėje N_1, N_2 erdvėje taškas (jei toks egzistuoja) apibrėžia pusiausvirąją būseną. Priklausomai nuo valdančiųjų parametrų galimi keturi rūšių sambūvio atvejai, pavaizduoti 30 pav. Jame brūkšnine linija pavaizduota (2.6) pirmasis, o ištisine linija – antrasis sąryšis. Srityje į dešinę nuo brūkšninės linijos $\frac{dN_1}{dt} < 0$, o į kairę $\frac{dN_1}{dt} > 0$. Atitinkamai ištisinės linijos dešinėje $\frac{dN_2}{dt} < 0$, kairėje $\frac{dN_2}{dt} > 0$. a ir d atvejais egzistuoja pusiausviroji būsena esant abiems rūšims. Tačiau a būsena stabili, o d – nestabili. Paveiksle rodyklėmis pavaizduotos fazinių trajektorijų linkmės, nustatytos pagal N_1 ir N_2 išvestinių ženklus. Taip pat matome, kad b atveju, nepriklausomai nuo pradinių sąlygų, nugali pirmoji rūšis, o c atveju – antroji rūšis.

4.3. Grobuonio ir aukos modelis

Modelį 1931 m. pasiūlė Voltera. Pagal jį grobuonis minta tik auka ir, vadinasi, kai aukos nelieka, išnyksta ir grobuonis. Pažymėkime aukos populiacijos skaičių N_a, o grobuonio N_g. Jei nebūtų grobuonių ir vidinio reguliavimosi aukos populiacijoje, tai N_a didėtų pagal Maltuso dėsnį

$$\frac{dN_a}{dt} = \alpha_a N_a . \tag{3.1}$$

Laikome, kad $\alpha_a > 0$ ir yra pastovus. Grobuonio egzistavimas sumažina aukos daugėjimo tikimybę ir tą sumažėjimą išreikšime šitaip:

$$\alpha_a \to \alpha_a - \beta_a N_g .$$

Taigi, nesant reguliavimosi, vietoj (3.1) turėtume

$$\frac{dN_a}{dt} = (\alpha_a - \beta_a N_g) N_a , \tag{3.2}$$

o atsižvelgę į aukas reguliavimąsi – šitokią lygtį:

$$\frac{dN_a}{dt} = (\alpha_a - \beta_a N_g - \gamma N_a) N_a . \tag{3.3}$$

Jei aukos nebūtų, grobuonis išnyktų, taigi turėtume šitokią grobuonio populiacijos mažėjimo lygtį

$$\frac{dN_g}{dt} = -\alpha_g N_g . \tag{3.4}$$

Čia grobuonio išnykimo tikimybė $\alpha_g > 0$ ir laikoma pastovia. Aukos buvimas mažina grobuonio išnykimą (didina N_g), todėl (3.4) lygtyje turime keisti

$$\alpha_g \to \alpha_g - \beta_g N_a$$

Tuomet

$$\frac{dN_g}{dt} = (\beta_g N_a - \alpha_g) N_g . \qquad (3.5)$$

Grobuonio populiacijos egzistavimui svarbus tik aukos buvimas, o vidinio reguliavimosi nėra arba jis neženklus. Taigi (3.5) visiškai tinka grobuonių skaičiaus dinamikai nustatyti. Tuomet iš (3.5) aukos nuostovusis skaičius, kai grobuonių yra, šitoks:

$$N_{as} = \frac{\alpha_g}{\beta_g} . \qquad (3.6)$$

Tarus, kad auka aprašoma (3.2) lygtimi, grobuonių nuostovusis skaičius

$$N_{gs} = \frac{\alpha_a}{\beta_a} , \qquad (3.7)$$

o, atsižvelgus į aukos reguliavimąsi,

$$N_{gs} = \frac{\alpha_a \beta_g - \gamma \alpha_g}{\beta_a \beta_g} . \qquad (3.8)$$

Kai aukos reguliavimosi nepaisoma, fazinių trajektorijų lygtis šitokia:

$$\frac{dN_g}{dN_a} = \frac{(\beta_g N_a - \alpha_g) N_g}{(\alpha_a - \beta_a N_g) N_a} .$$

Atskyrę (3.9) kintamuosius ir suintegravę, randame

$$\frac{N_g^{\alpha_a}}{(e^{N_g})^{\beta_a}} \cdot \frac{N_a^{\alpha_g}}{(e^{N_a})^{\beta_g}} = C . \qquad (3.10)$$

Čia C > 0 ir priklauso nuo pradinių sąlygų. Fazinės trajektorijos (3.10) yra uždaros kreivės (31 pav.). Taigi, iš pusiausvirosios būsenos išvesta grobuonio ir aukos sistema, kai auka be vidinio reguliavimosi, į tą būseną negrįžta, o populiacijų skaičiai kinta periodiškai.

Esant aukos vidiniam reguliavimuisi fazinių trajektorijų lygtyje kintamieji neatsiskiria, todėl sprendiniai gali būti surasti tik skaitmeniškai. Ištirsime šį atvejį tiesinės stabilumo teorijos metodu. Pagal (3.3) ir (3.5)

$$\Phi_a = (\alpha_a - \beta_a N_g - \gamma N_a) N_a, \qquad \Phi_g = (\beta_g N_a - \alpha_g) N_g,$$

todėl tiesinės stabilumo teorijos koeficientai

$$a_{aa} = \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial N_a}\right)_{N=N_s} = -\gamma N_{as}, \; a_{ag} = \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial N_g}\right)_{N=N_s} = -\beta_a N_{as},$$
$$a_{ga} = \left(\frac{\partial \Phi_g}{\partial N_a}\right)_{N=N_s} = -\beta_g N_{gs}, \; a_{gg} = \left(\frac{\partial \Phi_g}{\partial N_g}\right)_{N=N_s} = 0. \qquad (3.11)$$

Šios dviejų laisvės laipsnių sistemos dažniai

$$\omega_{1,2} = \frac{-\gamma N_{as} \pm \sqrt{\gamma^2 N_{as}^2 - 4\beta_a \beta_g N_{as} N_{gs}}}{2}, \qquad (3.12)$$

čia N_{as}, N_{gs} išreiškiami atitinkamai (3.6), (3.8) lygybėmis. Matome, kad $\mathrm{Re}\,\omega_{1,2} < 0$ ($\gamma \neq 0$) ir, kai

$$\gamma^2 N_{as} - 4\beta_a \beta_g N_{gs} > 0, \qquad (3.13)$$

pusiausviroji būsena yra stabilusis mazgas, o kai

$$\gamma^2 N_{as} - 4\beta_a \beta_g N_{gs} < 0 \qquad (3.14)$$

– stabilusis židinys. Taigi, kai aukos populiacijoje yra vidinis reguliavimasis, iš pusiausvyros išvesta sistema sugrįžta į pusiausvirąją būseną. Jeigu aukos reguliavimosi nėra, tai (3.11) - (3.14) formulėse turime įrašyti $\gamma = 0$. Tuomet $\mathrm{Re}\,\omega_{1,2} = 0$, $\mathrm{Im}\,\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\beta_a \beta_g N_{gs}}$ ir pusiausviroji būsena yra centras, ką jau ir nustatėme anksčiau (31 pav.).

4.4 Puslaidininkinio sluoksnio fotosužadinimo relaksacijos modelis vienalytės šviesos sugerties sąlygomis.

Nagrinėsime puslaidininkinę sistemą, kurios matmenys dviem kryptimis daug didesni negu trečiąja kryptimi. Tokia sistema vadinama sluoksniu, o matmenys trečiąja kryptimi – sluoksnio storiu, kurį žymėsime l. Yra puslaidininkių, kuriuos įnešus į elektrinį lauką, elektros srovė juose neatsiranda. Tačiau srovė atsiranda, jei jie, prieš įnešant į elektrinį lauką, apšviečiami. Taip yra todėl, kad dėl vidinio fotoefekto susidaro laisvieji krūvininkai, kurie ir lemia elektros srovę. Nustatyta, kad yra atvejų, kai egzistuoja apšviesto puslaidininkinio sluoksnio nuostovioji būsena, kurios esantį sluoksnį įnešus į elektrinį lauką, pradinės srovės stipris netiesiškai priklauso nuo apšvietos dozės. Sudarysime reiškinių, vykstančių apšviestame sluoksnyje, matematinį modelį. Laikysime, kad šviesos sugertis vienalytė ir kad sluoksnio medžiagos savybės visur vienodos. Tokiomis sąlygomis, kol sluoksnis neįneštas į elektrinį lauką, modelio lygtyse išreikštos priklausomybės nuo koordinačių nebus, t.y., reiškinius apibūdinantys dydžiai galės priklausyti tik nuo laiko.

Pradžioje aptarsime akimirkinės apšvietos atvejį. Tarsime, kad dėl vidinio fotoefekto judriais tampa tik elektronai, o teigiamasis krūvis , kokiu yra netekę elektronų atomai arba molekulės, nejudrus. Jeigu šviesos sukurti elektronai ir liktų visą laiką laisvi, tai sluoksnį įnešus į išorinį elektrinį lauką, kurio stipris E, atsirastų srovė, kurios tankio pradinė vertė būtų $j_0 = en_0\mu E$; čia e - elementarusis krūvis, μ - elektronų judris (μE - elektronų greitis), n_0 - šviesa sukurtų elektronų tankis, kuris yra proporcingas apšvietos dozei D. Taigi plauktų, kad $j_0 \sim D$. Kad j_0 netiesiškai priklausytų nuo D, matomai dalis sukurtų elektronų turėtų išnykti kaip laisvi, pavyzdžiui, tapti nejudriais.

Tarkime, kad sukurto elektrono išnykimo kaip laisvo, tikimybė lygi w ir nepriklauso nuo laiko. Tuomet galime rašyti

$$\frac{dn}{dt} = -wn, \tag{4.1}$$

čia t - laikas, skaičiuojamas nuo apšvietos momento, n - laisvųjų elektronų tankis. (4.1) sprendinys

$$n(t) = n_0 e^{-wt}, \tag{4.2}$$

iš kurio plaukia, kad nuostovioji n vertė $n_s = 0$, todėl nuostoviosios būsenos sąlygomis elektros srovė neatsiras. Patikslinsime modelį atsižvelgdami į tai, jog puslaidininkyje gali būti (dažniausiai yra) potencinių duobių, į kurias gali patekti ir tapti nejudrus laisvasis elektronas, atlikdamas šiluminį judėjimą. Tuomet sakoma, kad elektronas lokalizuojamas. Potencinių duobių prigimtis gali būti įvairi – dėl kitos medžiagos atomų intarpų, dėl mechaninių defektų ir pan. Iš aplinkos įgijęs pakankamai energijos lokalizuotasis elektronas gali iššokti iš duobės ir vėl tapti laisvu. Dėl tarp elektronų veikiančių stūmos jėgų, paprastai į vieną duobę gali patekti nedaugiau kaip vienas elektronas. Taigi lokalizuotų elektronų tankį riboja duobių tankis. Pažymėję lokalizuotų elektronų tankį m, duobių tankį M, bei išsilaisvinimo iš duobės tikimybę β, galime rašyti

$$\frac{dm}{dt} = \alpha\left(1 - \frac{m}{M}\right)n - \beta m , \tag{4.3}$$

čia $\alpha\left(1 - \frac{m}{M}\right)n$ - laisvojo elektrono lokalizavimo tikimybė, o daugiklis $1 - \frac{m}{M}$ aprašo lokalizavimo „reguliavimąsi“, pagal kurį lokalizuotų elektronų tankiui pasiekus maksimalią vertę $m_{\max} = M$, lokalizavimas sustoja. Aišku, kad laisvų ir lokalizuotų elektronų tankių suma lygi sukurtųjų elektronų tankiui,

$$n + m = n_0. \tag{4.4}$$

Tuomet pagal (4.3), (4.4) laisvųjų elektronų nuostovųjį tankį n_s nusakanti lygtis šitokia:

$$\alpha\left(1 - \frac{n_0 - n_s}{M}\right)n_s - \beta(n_0 - n_s) = 0\,, \tag{4.5}$$

o jos sprendinys

$$n_s = \frac{1}{2\alpha}\left(\left((\beta M + \alpha(M - n_0))^2 + 4\alpha\beta n_0 M\right)^{\frac{1}{2}} - \beta M - \alpha(M - n_0)\right). \tag{4.6}$$

Pastarojoje išraiškoje matome, kad n_s nuo n_0, taigi ir nuo apšvietos dozės, priklauso netiesiškai, todėl netiesiškai nuo dozės priklausys ir pradinis elektros srovės tankis.

Iš (4.4) išreiškę m ir tą išraišką įrašę į (4.3), randame lygtį tankiui n ir apskaičiuojame tiesinės stabilumo teorijos koeficientą:

$$a_{nn} = -\beta - \alpha\left(1 - \frac{n_0 - n_s}{M}\right) - \frac{\alpha n_s}{M}\ . \tag{4.7}$$

Šiuo atveju yra tik vienas stabilumo dažnis $\omega = a_{nn}$. Iš (4.7) plaukia, kad $\omega < 0$, taigi (4.6) sprendinys asimptotiškai stabilus.

Dabar aptarsime atvejį, kai sluoksnis šviečiamas pastoviai. Tuomet (4.3) lygtį turime papildyti lygtimi, nusakančia laisvų elektronų tankio kitimą. Pažymėję per vienetinę trukmę vienetiniame sluoksnio tūryje šviesa sukuriamų elektronų skaičių g, turėtume

$$\frac{dn}{dt} = g - \frac{dm}{dt}. \tag{4.8}$$

Šiuo atveju pradinės vertės $n_0 = m_0 = 0$, todėl iš (4.8) randame

$$n(t) + m(t) = gt. \tag{4.9}$$

Matome, kad nuostovioji būsena, kaip ir turėtų būti, nesusidaro. Jeigu apšvieta trunka baigtinę trukmę T, tai nuostovioji būsena susidaro po apšvietos nutraukimo, o nuostovioji n vertė reiškiama (4.6) lygybe, kurioje vietoj n_0 įrašytas dydis gT, kuris proporcingas apšvietos dozei. Jeigu neribotai šviečiant sluoksnį pastoviu šviesos intensyvumu pasiekiama nuostovioji būsena, tai reiškia, jog egzistuoja (4.3), (4.8) lygtyse neaprašytas mechanizmas, stabdantis neribotą elektronų tankio n, o tuo pačiu ir teigiamųjų krūvių tankio p didėjimą. Toks mechanizmas – tai laisvųjų elektronų ir teigiamųjų krūvių rekombinacija, kai laisvasis elektronas dėl šiluminio judėjimo nutolęs nuo atomo ar molekulės, iš kurių jis išplėštas, patenka į kito atomo ar molekulės teigiamojo krūvio lauką ir yra to lauko lokalizuojamas, t.y., rekombinuoja. Aišku, kad rekombinacija neženkli, jei teigiamųjų ir neigiamųjų krūvių tankiai maži. Tačiau pastovios apšvietos sąlygomis laikui bėgant šie tankiai didėja, o tuo pačiu intensyvėja ir rekombinacija.

Tarkime, kad vieno elektrono rekombinacijos per vienetinę trukmę su vienu teigiamuoju krūviu, esančiu tame pačiame vienetiniame tūryje kaip ir elektronas, tikimybė lygi γ ir yra pastovi. Tuomet rekombinacijos su visais p to paties vienetinio tūrio teigiamaisiais krūviais tikimybė bus lygi γp. Vadinasi per vienetinę trukmę dėl rekombinacijos vienetinio tūrio elektronų skaičiaus n sumažėjimas bus lygus γpn. Dabar vietoj (4.8) turime rašyti

$$\frac{dn}{dt} = g - \frac{dm}{dt} - \gamma pn \,. \tag{4.10}$$

Teigiamųjų krūvių (krūvių skaičiaus, o ne krūvio!) tankio kitimą išreiškia lygtis

$$\frac{dp}{dt} = g - \gamma pn \,. \tag{4.11}$$

Kadangi pradiniu laiko momentu $n_0 = p_0 = m_0 = 0$, tai iš (4.11), (4.10), vietoj (4.9) turime

$$n + m = p. \tag{4.12}$$

Pasinaudoję (4.12) ir iš (4.10) pašalinę p, randame n kitimą nusakančią lygtį:

$$\frac{dn}{dt} = g - \alpha\left(1 - \frac{m}{M}\right)n + \beta m - \gamma n(n+m). \tag{4.13}$$

Iš (4.3) ir (4.15) išplaukia šitokia nuostoviojo elektronų tankio lygtis:

$$n_s^3 + (1+s)n_s^2 - an_s - sa = 0, \tag{4.14}$$

čia n_s - bedimensinis tankis, $n_s = \frac{n_{s\,\dim}}{M}$; $a = \frac{g}{\gamma M^2}$, $s = \frac{\beta}{\alpha}$ - abu taip pat bedimensiniai dydžiai, galintys įgyti tik teigiamąsias vertes. Lokalizuotų elektronų nuostovioji vertė, išreikšta taip pat dydžiu M,

$$m_s = n_s(n_s + s)^{-1}. \tag{4.15}$$

Šioje išraiškoje matome, kad $m_s < 1$, t.y., nuostoviuoju atveju dar yra potencinių duobių , kuriose nėra lokalizuotų elektronų (didžiausia galima m bedimensinė vertė lygi 1).

Pažymėję (4.14) šaknis x_1, x_2, x_3, turime

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = -s - 1 < 0\,, \\ &x_1 x_2 x_3 = as > 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Iš čia plaukia, kad teigiamoji šaknis gali būti tik viena. Kitos dvi – neigiamosios arba kompleksinės. Galima įrodyti, kad fizikinę prasmę turintis teigiamasis (4.14) sprendinys yra asimptotiškai stabilus mazgas.

4.5 Puslaidininkinio sluoksnio fotosužadinimo relaksacijos modelis nevienalytės šviesos sugerties sąlygomis

Nagrinėsime tokią pačią sistemą, kurią aptarėme 4.4. skirsnyje. Laikysime, kad šviesos sugertis yra akimirkinė, bet nevienalytė. Šiuo atveju šviesa sukurtų elektronų tankis priklauso nuo koordinatės x, todėl atsiranda laisvųjų elektronų difuzija. Elektronams pasislinkus dėl difuzijos lieka nesukompensuotas nejudrus teigiamasis krūvis. Ir nors visa sistema išlieka elektriškai neutrali, vietinio elektrinio neutralumo nebelieka. Dėl to atsiranda vidinis elektrinis laukas, sukeliantis dreifinę elektronų pernašą. Taigi, elektronų krūvio srauto tankis j turi dreifinį ir difuzinį dėmenis ir yra išreiškiamas šitaip:

$$j = e\mu nE + eD\frac{\partial n}{\partial x}. \tag{5.1}$$

Čia D - difuzijos koeficientas; x - koordinatė, skaičiuojama skersai sluoksnio nuo apšviečiamojo paviršiaus. Lokalizuotų elektronų tankio m lygtis išlieka (4.3) pavidalo, tačiau dabar išvestinė laiko atžvilgiu – dalinė:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \alpha\left(1 - \frac{m}{M}\right)n - \beta m. \tag{5.2}$$

(4.4) lygybė dabar nebegalioja, todėl turi būti sudaryta laisvųjų elektronų tankio n lygtis. Atsižvelgę į tai, kad dabar n kinta ir dėl krūvio pernašos, turime šitokią lygtį:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{e}\frac{\partial j}{\partial x} - \alpha\left(1 - \frac{m}{M}\right)n + \beta m\,. \tag{5.3}$$

Prie parašytųjų lygčių turi būti pridėta elektrinio lauko stiprį nusakanti lygtis:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(p - n - m\right). \tag{5.4}$$

Ši lygtis dažnai vadinama Puasono lygtimi. Jos dešiniojoje pusėje – erdvinio krūvio tankis $e(p-n-m)$; čia ep - teigiamojo (laikomo nejudriu) krūvio tankis, ε - santykinė dielektrinė skvarba, ε_0 - elektrinė konstanta. Laikydami, jog apšvietos energija sugeriama pagal eksponentinio mažėjimo dėsnį, dažnai vadinamą Bugerio dėsniu, turime

$$p(x) = n_0 e^{-kx}, \tag{5.5}$$

čia k - sugerties koeficientas; n_0 - teigiamųjų krūvininkų (ne krūvio) tankis prie apšviečiamojo paviršiaus ($x=0$). Jis proporcingas apšvietos dozei.

Parašytosios lygtys matematiškai ženkliai sudėtingesnės, negu iki šiol nagrinėtų modelių. Todėl pirmiausia jas užrašysime bedimensiniu pavidalu. Tik tuomet išaiškės tikrieji valdantieji parametrai, kurių skaičius dažnai būna mažesnis, negu dimensinių dydžių lygtyse. Taigi, bedimensinė koordinatė

$$x = \frac{x_{\mathrm{dim}}}{l},$$

jos kitimo intervalas $[0,1]$. Dydžius $p,\ n,\ m$ reikšime dydžiu n_0. Tuomet vietoj (5.5) yra

$$p(x) = e^{-\eta x}, \tag{5.6}$$

čia $\eta = kl$ - bedimensinis sugerties koeficientas. Elektrinio lauko stiprį reikšdami $\frac{en_0 l}{\varepsilon\varepsilon_0}$ vienetais, vietoj (5.4) turime

$$\frac{\partial E}{\partial x} = p - n - m\,. \tag{5.7}$$

Pagaliau, apibrėžę bedimensinį laiką $t = \alpha t_{\mathrm{dim}}$, bei srovės stiprį išreiškę $en_0 l\alpha$ vienetais, vietoj (5.3) ir (5.2) atitinkamai turime

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial j}{\partial x} - n(1-am) + sm\,, \tag{5.8}$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = n(1-am) - sm\,; \tag{5.9}$$

čia $a = \frac{n_0}{M}$, $s = \frac{\beta}{\alpha}$. Pažymėję

$$b = \frac{en_0\mu}{\varepsilon\varepsilon_0\alpha}, \qquad c = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 kT}{n_0 (el)^2},$$

vietoj (5.1) randame

$$j = b(nE + c\frac{\partial n}{\partial x}), \tag{5.10}$$

čia pasinaudota Einšteino sąryšiu $eD = kT\mu$, kuriame T — termodinaminė temperatūra, k — Bolcmano konstanta.

Bedimensinėse modelio lygtyse (5.6) – (5.10) yra penki bedimensiniai valdantieji parametrai: η, a, b, c, s. Dimensinėse lygtyse jų yra aštuoni.

Iš nuostoviąją būseną apibrėžiančių lygčių

$$n_s(1 - am_s) - sm_s = 0, \quad \frac{\partial j_s}{\partial x} = 0 \tag{5.11}$$

randame

$$m_s = \frac{n_s}{s + an_s}, \tag{5.12}$$

o iš (5.11) antrosios plaukia, kad j_s nuo koordinačių nepriklauso. Kadangi išorinio elektrinio lauko nėra (sluoksnis į jį dar neįneštas), tai krūvio srauto per sluoksnio paviršius nėra: $j_s(0) = j_s(1) = 0$, o iš čia išplaukia , kad $j_s(x) = 0$. Tuomet iš (5.10) randame

$$E_s = -c\frac{1}{n_s}\frac{\partial n_s}{\partial x}. \tag{5.13}$$

Įrašę (5.13) į (5.7), bei pasinaudoję (5.12) ir (5.6) išraiškomis, gauname n_s lygtį

$$cn_s\frac{\partial^2 n_s}{\partial x^2} - c(\frac{\partial n_s}{\partial x})^2 - n_s^3(1 + \frac{1}{s + an_s}) + n_s^2 e^{-\eta x} = 0, \tag{5.14}$$

kurios sprendinį valdo keturi parametrai . Tai netiesinė lygtis, kurios sprendinį galima rasti tik skaitmeniškai. Kadangi (5.14) lygtyje yra antroji išvestinė, tai vienareikšmį sprendinį apibrėžia dvi kraštinės sąlygos. Jos išplaukia iš (5.13), pasirėmus tuo, kad dėl sluoksnio integralaus neutralumo $E_s(0) = E_s(1) = 0$, taigi

$$(\frac{\partial n_s}{\partial x})_{x=0} = 0, \quad (\frac{\partial n_s}{\partial x})_{x=1} = 0. \tag{5.15}$$

Matome, kad kraštinės sąlygos nustatytos skirtinguose taškuose. Tai vadinamasis dvikraštis kraštinis uždavinys netiesinei lygčiai. Matematiškai gana sudėtingas uždavinys.

Čia mes neieškosime (5.14) skaitmeninės imitacijos, o siekdami išsiaiškinti, kaip sprendžiamas stabilumo uždavinys, kai modelio lygtyse yra išvestinės koordinačių atžvilgiu, modelio lygtis supaprastinsime, laikydami, kad krūvio pernašą lemia tik difuzija. Tuomet iš (5.10) plaukia, kad

$$\frac{\partial n_s}{\partial x} = 0 \,. \tag{5.16}$$

Vadinasi, $n_s = const$. Šia konstantą nustatome iš sluoksnio integralinio neutralumo sąlygos:

$$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (n_s + m_s)dx \,. \tag{5.17}$$

Randame

$$\varphi \equiv \frac{1 - e^{-\eta}}{\eta} = n_s + m_s = n_s + \frac{n_s}{s + an_s} \,.$$

Iš pastarosios

$$n_s = \frac{a\varphi - s - 1 + \sqrt{(a\varphi - s - 1)^2 + 4as\varphi}}{2a} \,. \tag{5.18}$$

Vietoj (5.8) ir (5.9) dabar turime

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= bc\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - n(1 - am) + sm \,, \\ \frac{\partial m}{\partial t} &= n(1 - am) - sm \,. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Pažymėję n nuokrypą nuo n_s raide y_1, o m nuokrypą — y_2, randame lygtis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial t} &= g\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - (1 - am_s)y_1 + (an_s + s)y_2 \,, \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} &= (1 - am_s)y_1 - (an_s + s)y_2 \,. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Nuokrypas išreiškiame lygybėmis

$$y_1(x,t) = U_1(x)e^{\omega t} \,, \;\; y_2(x,t) = U_2(x)e^{\omega t} \,, \tag{5.21}$$

o tada iš (5.20) antrosios amplitudę U_2 išreiškiame amplitude U_1 ir šią išraišką įrašę į (5.20) pirmąją, randame lygtį

$$g\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}+(\frac{(s+an_s)(1-am_s)}{\omega+s+an_s}+am_s-1-\omega)U_1=0. \qquad (5.22)$$

Čia $g=cb=D(\alpha l^2)^{-1}$. (5.22) sprendinio ieškosime laikydami, kad nuokrypą sukelia vidinės fluktuacijos, nesireiškiančios sluoksnio paviršiuose. Tuomet

$$U_1(0)=U_1(1)=0. \qquad (5.23)$$

Dalinis, (5.23) kraštines sąlygas tenkinantis, (5.22) sprendinys šitoks:

$$U_1(x)=\sin(\pi v x), \qquad (5.24)$$

čia $v=0$, 1, ... Įrašę (5.24) į (5.22) ir dar pasinaudoję (5.12) išraiška, randame dažnio lygtį

$$\omega^2+(g(\pi v)^2+\frac{s+(s+an_s)^2}{s+an_s})\omega+g(\pi v)^2(s+an_s)=0, \qquad (5.25)$$

kurioje matome, kad galimos tik abi neigiamosios šaknys. Taigi nuostovusis sprendinys n_s yra asimptotiškai stabilus. Pažymėję $\omega_1(v)$, $\omega_2(v)$ (5.25) šaknis, atitinkančias apibrėžtą v vertę, bendrąjį (5.20) lygčių sprendinį išreiškiame šitaip:

$$y_1(x,t)=\sum_{v=1}^{\infty}(A_v e^{\omega_1(v)t}+B_v e^{\omega_2(v)t})\sin(\pi v x), \qquad (5.26)$$

$$y_2(x,t)=\sum_{v=1}^{\infty}(\frac{sA_v e^{\omega_1(v)t}}{(s+an_s)(\omega_1(v)+s+an_s)}+\frac{sB_v e^{\omega_2(v)t}}{(s+an_s)(\omega_2(v)+s+an_s)})\sin(\pi v x).$$

Šiose išraiškose esantys A_v ir B_v nustatomi iš y_1 ir y_2 pradinių verčių $\varphi_1(x)=y_1(x,0)$, $\varphi_2(x)=y_2(x,0)$:

$$A_v+B_v=2\int_0^1\varphi_1(x)\sin(\pi v x)dx, \qquad (5.27)$$

$$\frac{s}{s+an_s}(\frac{A_v}{\omega_1(v)+s+an_s}+\frac{B_v}{\omega_2(v)+s+an_s})=2\int_0^1\varphi_2(x)\sin(\pi v x)dx.$$

4.6. Krūvio pernašos puslaidininkiniame sluoksnyje modelis

Dabar nagrinėsime puslaidininkinį sluoksnį, kuris yra išoriniame elektriniame lauke ir kartu veikiamas šviesa (elektromagnetine spinduliuote). Tokiomis sąlygomis puslaidininkiniai sluoksniai plačiai naudojami technikoje įvairiai informacijai užrašyti, saugoti, perdirbti ir perduoti. Išorinio lauko sąlygos gali būti įvairios. Čia ir toliau nagrinėsime du atvejus. 1) elektrografinio rėžimo (arba atvirosios grandinės) sąlygos, kai išorinio šaltinio vienas polius prijungtas prie sluoksnio vieno iš paviršių (pagrindo), o ant kito paviršiaus sudarytas paviršinis (jonų) krūvis ir antrasis šaltinio polius nuo šio paviršiaus nukeltas į begalybę. Per įelektrintąjį paviršių sluoksnį veikiant šviesa, sluoksnio paviršių potencialų skirtumas mažėja dėl darbo, kurį išoriniame elektriniame lauke atlieka judantys krūvininkai. 2) sluoksnio paviršių potencialų skirtumas palaikomas pastoviu (uždaroji grandinė). Krūvininkų judėjimas lemia grandine tekančios srovės stiprį.

Šviesos poveikiu išlaisvinus elektronus iš medžiagos atomo ar molekulės, į jų vietą lauko veikiami tuneliuoja (netapdami laisvais) gretimų sričių elektronai, taigi susidaro sąlygos, tarsi laisvai judėtų teigiamasis krūvis. Sakoma, kad šviesa sukuriamos elektrono ir skylės poros. Taigi daugumai puslaidininkinių medžiagų būdinga elektronų ir skylių pernaša išoriniame elektriniame lauke.

Sudarysime krūvio pernašos modelį puslaidininkyje, kuriame vieno ženklo krūvininkų (tarsime, elektronų) pernaša neženkli dėlto, kad pastarieji patenka į gilias potencines duobes (lokalizuojami) arti tos vietos, kurioje jie susidarė. Kito ženklo krūvininkai (skylės) juda ir bejudėdamos, priartėję prie lokalizuotų elektronų, su pastaraisiais rekombinuoja (išnyksta krūvininkų pora, energiją perduodant mechaniniam atomų judėjimui sukelti arba ją išspinduliuojant).

Lokalizuotų elektronų tankį pažymėję m, turime šitokią jų kitimo lygtį:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \varphi(x,t) - \gamma mp \,, \tag{6.1}$$

čia $\varphi(x,t)$ — per vienetinę trukmę laiko momentu t taške x apšvieta sukurtų porų tankis, p — laisvų skylių tankis, γm — skylės rekombinacijos tikimybė, γ — rekombinacijos koeficientas. Laikysime, kad krūvininkų pora atsiranda tame taške, kuriame sugeriama apšvietos energija. Skylių tankio kitimą nusakanti lygtis:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{e}\frac{\partial j}{\partial x} - \gamma mp + \varphi(x,t) \,, \tag{6.2}$$

čia j — skylių krūvio srauto tankis, kurį dabar išreikšime šitaip:

$$j = e\mu pE - eD\frac{\partial p}{\partial x} \,. \tag{6.3}$$

Pagaliau elektrinio lauko stiprio E lygtis

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}(p - m) \,. \tag{6.4}$$

Išdiferencijavę (6.4) laiku, bei pasinaudoję (6.1) ir (6.2) lygybėmis, randame

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\partial j}{\partial x} = 0 \,.$$

Iš pastarosios plaukia, kad

$$j(x,t)+\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}=const\ , \tag{6.5}$$

t.y. (6.5) kairiosios pusės dėmenų (laidumo j ir perstūmos $\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$ srovių) suma nepriklauso nuo x bet kuriame taške tarp elektrodų. Atvirosios grandinės sąlygomis virš sluoksnio abu tie dėmenys lygūs nuliui, taigi

$$j(x,t)+\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E(x,t)}{\partial t}=0 \tag{6.6}$$

ir sluoksnio viduje. (6.6) lygybė kartais vadinama elektrografinio rėžimo sąlyga. Ja galima panaudoti kaip vieną modelio lygčių; kitos būtų (6.1), (6.3), (6.4).

Jeigu sluoksnio paviršių potencialo skirtumas V pastovus, tai $const = J(t) \neq 0$. Suintegravę (6.5) sluoksnio storiu ir atsižvelgę į tai, kad

$$V=\int_0^l E(x,t)dx=const\ ,$$

randame

$$J(t)=\frac{1}{l}\int_0^l j(x,t)dx\ . \tag{6.7}$$

Tarkime, kad $\varphi(x,t)=\varphi_0$ ir nepriklauso nei nuo x, nei nuo t. Elektrografinio rėžimo sąlygomis nuostovioji būsena nusakoma lygtimis:

$$j_s=0\ , \tag{6.8}$$

$$e\mu p_s E_s - eD\frac{\partial p_s}{\partial x}=0\ , \tag{6.9}$$

$$\gamma m_s p_s=\varphi_0\ , \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial x}=\frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}(p_s-m_s)\ . \tag{6.11}$$

Iš šių lygčių randame

$$m_s=\frac{\varphi_0}{\gamma p_s}\ ,\ \ E_s=\frac{eD}{e\mu}\frac{1}{p_s}\frac{\partial p_s}{\partial x}\ ,$$

kuriomis pasirėmę vietoj (6.11) gauname p_s lygtį

$$a\frac{\partial^2 p_s}{\partial x^2}-\frac{a}{p_s}(\frac{\partial p_s}{\partial x})^2-p_s^2+1=0\ . \tag{6.12}$$

Čia x – bedimensinė koordinatė, išreikšta sluoksnio storiu l ir skaičiuojama nuo apšviečiamojo paviršiaus; p_s – bedimensinis skylių tankis, išreikštas dydžiu $\sqrt{\dfrac{\varphi_0}{\gamma}}$,

$$a = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 D}{e\mu \cdot l^2}\sqrt{\frac{\gamma}{\varphi_0}} . \tag{6.13}$$

Tarsime, kad sluoksnis įelektrintas ant jo paviršaus nusėdus teigiamajam krūviui. Tuomet $E(x,t)$, kai $x=0$ yra pastovus dydis, lygus E_0, o viena iš kraštinių sąlygų yra

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln p_s\Big|_{x=0} = \frac{e\mu E_0 l}{eD} \equiv b . \tag{6.14}$$

Kitame sluoksnio paviršiuje nuostoviomis sąlygomis $E_s = 0$, taigi antroji kraštinė sąlyga

$$\left.\frac{\partial p_s}{\partial x}\right|_{x=1} = 0 . \tag{6.15}$$

Matome, kad (6.12) yra dvitaškio kraštinio uždavinio lygtis.

Elektrografinio rėžimo sąlygomis difuzijos dažnai nepaisoma, kaip nevaidinančios reikšmingesnio vaidmens. Tuomet iš (6.12) išplaukia, kad bedimensinis $p_s = 1$, o iš (6.10) tais pačiais vienetais išreikštas m_s taip pat lygus 1. Taigi ir E_s nepriklauso nuo x ir lygus nuliui. Tačiau tokie sprendiniai galimi visiems x, išskyrus $x=0$. Taške $x=0$ turime $E_s = E_0$, todėl tame taške $p_s \to 0$, o $m_s \to \infty$. Nesant difuzijos nuokrypoms turime šitokias lygtis:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = -ax_1 - ax_2 , \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = -ax_1 - ax_2 - \frac{1}{e}\frac{\partial x_3}{\partial x} , \tag{6.17}$$

$$x_3 = e\mu \cdot \left(\frac{\varphi_0}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} x_4 , \tag{6.18}$$

$$\frac{\partial x_4}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(x_2 - x_1\right). \tag{6.19}$$

Čia $a = \left(\gamma\varphi_0\right)^{\frac{1}{2}}$, o x_1, x_2, x_3, x_4 – atitinkamai m, p, j ir E nuokrypos nuo pusiausvirųjų verčių. Iš (6.16) – (6.19) išplaukia, kad sprendinys $m_s = p_s = \left(\varphi_0 / \gamma\right)^{\frac{1}{2}}$, $j_s = 0$, $E_s = 0$ asimtotiškai stabilus (stabilus mazgas).

Dar aptarsime standartinį sprendinį sluoksnio pastovaus potencialo sąlygomis ir, kaip ir aukščiau, nepaisydami difuzijos. Dabar vietoj (6.8) iš (6.5) išplaukia lygybė

$$j_s = J\ , \tag{6.20}$$

kurioje *J* nepriklauso nuo *t*. Taigi j_s – koordinatės ir laiko pastovioji. Vietoj (6.9) turime

$$J = e\mu p_s E_s\ , \tag{6.21}$$

o (6.10) ir (6.11) pavidalas nepakinta. Iš (6.21) išreiškę p_s, o po to iš (6.10) ir m_s, randame šitokią E_s lygtį

$$\frac{dE_s}{dx} = \frac{A}{E_s} - BE_s\ , \tag{6.22}$$

čia *x* kaip ir anksčiau, išreikštas sluoksnio storiu, o E_s verte $E_0 = V_0 / l$, V_0 – pastovioji potencialo vertė,

$$A = \frac{Jl}{\varepsilon\varepsilon_0 \mu E_0^2}\ , \qquad B = \frac{e^2 \mu \varphi_0 l}{\varepsilon\varepsilon_0 \gamma J} \tag{6.23}$$

– bedimensiniai parametrai. Tarus, kad teigiamasis polius yra paviršiuje $x = 0$, (6.22) sprendinys
šitoks:

$$E_s(x) = \left(\frac{A}{B} + \left(E_1^2 - \frac{A}{B}\right)\cdot e^{-2Bx}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6.24}$$

čia $E_1 = E_s(0)$ ir nustatomas iš potencialo pastovumo sąlygos

$$\int_0^1 E_s(x)dx = 1\,. \tag{6.25}$$

Į (6.25) įrašę (6.24) ir suintegravę, randame šitokią E_1 lygtį:

$$\frac{1}{2B}\left\{2E_1 - 2\left(\frac{A}{B} + \left(E_1^2 - \frac{A}{B}\right)\cdot e^{-2B}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2}} \ln \frac{\left(E_1 - \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left[\left(\frac{A}{B} + \left(E_1^2 - \frac{A}{B}\right)\cdot e^{-2B}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{\left(E_1 + \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left[\left(\frac{A}{B} + \left(E_1^2 - \frac{A}{B}\right)\cdot e^{-2B}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}\right\} = 1 \tag{6.26}$$

Pastovioji vertė *J* surandama sprendžiant (6.1) – (6.4) lygtis pastovaus potencialo sąlygomis ir nustatant *J* pagal (6.7).

Ištirsime nuostoviojo sprendinio, kurį dabar nusako (6.10), (6.20), (6.21) ir (6.24) lygybės, stabilumą. Čia E_s (6.24) išreikštas bedimensiniais dydžiais. Išreiškę j_s dydžiu *J*, p_s – dydžiu $J/e\mu E_0$, o m_s – dydžiu $e\mu\varphi_0 E_0/\gamma J$, randame tokias lygybes:

$$j_s = 1,\ p_s = \frac{1}{E_s},\ m_s = E_s. \tag{6.27}$$

Pažymėję *m*, *p*, *j*, *E*, ir *J* nuokrypas nuo nuostoviųjų verčių atitinkamai x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ir ieškodami

$$x_i(x,t) = U_i(x)\cdot e^{\omega t},$$

(čia *t* išreikštas dydžiu $l/\mu E_0$), gauname amplitudžių lygtis:

$$\begin{aligned}
&(\omega + Ap_s)U_1 + Am_s U_2 = 0,\\
&U_3 = p_s U_4 + E_s U_2,\\
&\frac{\partial U_4}{\partial x} = AU_2 - BU_1,\\
&U_3 + \frac{\omega}{A}U_4 = U_5.
\end{aligned} \tag{6.28}$$

Čia pritaikyta Lanževeno lygybė $e\mu = \varepsilon\varepsilon_0\gamma$. Iš (6.28), bei pasinaudoję (6.27), randame U_4 lygtį:

$$\frac{\partial U_4}{\partial x} + P(x)U_4 = Q(x), \tag{6.29}$$

kurioje

$$\begin{aligned}
&P(x) = \left(A + \omega E_s + BE_s^2\right)E_s^{-2},\\
&Q = U_5 A\left(A + \omega E_s + BE_s^2\right)\left(A + \omega E_s\right)^{-1} E_s^{-1},
\end{aligned} \tag{6.30}$$

čia U_5 nepriklauso nuo *x*. Tarus, kad $U_4(0) = 0$, (6.29) lygties sprendinį išreiškiame šitaip:

$$U_4(x) = U_5 e^{-\int_0^x P(x')dx'} \int_0^x Q(x') e^{\int_0^{x'} P(x'')dx''} dx'. \tag{6.31}$$

Suintegravę funkciją *P*, randame šitokią galutinę išraišką:

$$U_4(x) = AU_5 \frac{e^{-K(x)}}{E_s(x)} \int_0^x \frac{A + \omega E_s(x') + BE_s^2(x')}{A + \omega E_s(x')} \cdot e^{K(x')} dx' , \tag{6.32}$$

čia

$$K(x) = 2Bx + \frac{\omega}{2\sqrt{BA}} \ln\left(E_s(x) + \sqrt{\frac{A}{B}}\right)\left(E_1 - \sqrt{\frac{A}{B}}\right)\left(E_s(x) - \sqrt{\frac{A}{B}}\right)^{-1}\left(E_1 + \sqrt{\frac{A}{B}}\right)^{-1} .$$

Iš potencialo pastovumo sąlygos plaukia, kad

$$\int_0^1 U_4(x) dx = 0 . \tag{6.33}$$

Tai ir yra lygtis stabilumo dažniams nustatyti.

Modelis, kai elektronai laikomi visiškai nejudriais, nėra tikslus. Atsižvelgę į elektronų judėjimą, bet laikydami, kad jie gali būti lokalizuojami baigtinio tankio M duobėse, vietoj (6.1) lygties turime šitokią:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \alpha\left(1 - \frac{m}{M}\right)n - \gamma mp . \tag{6.34}$$

Laisvųjų elektronų tankio n kitimo lygtis šitokia:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \varphi(x,t) + \frac{1}{e}\frac{\partial j_e}{\partial x} - \alpha\left(1 - \frac{m}{M}\right)n , \tag{6.35}$$

čia j_e – elektronų krūvio srauto tankis,

$$j_s = e\mu_e nE + eD_e \frac{\partial n}{\partial x} , \tag{6.36}$$

čia μ_e – elektronų judris, D_e – elektronų difuzijos koeficientas. Elektrinio lauko stipriui vietoj (6.4) dabar turime

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon\varepsilon_0}(p - n - m) . \tag{6.37}$$

Prie (6.34) – (6.37) lygčių turi būti pridėtos (6.2) ir (6.3) lygtys, o papildomoji lygtis (6.5) dabar būtų pakeičiama šitokia:

$$j + j_e + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = const_x = J(t) . \tag{6.38}$$

Parašytosios lygtys pakankamai apibendrintos, todėl gali būti pavadintos bendrosiomis krūvio pernašos puslaidininkiniame sluoksnyje lygtimis. Matematiškai tai gana sudėtinga netiesinių lygčių dalinėmis išvestinėmis sistema, todėl ir šių lygčių sprendinių savybės dar nėra pakankamai ištirtos.

Uždaviniai

1. Raskite lygties

$$x^3 + a \cdot x \cdot e^{-\gamma \cdot x} + b = 0$$

realiąsias ir kompleksines šaknis, kai *b*=8, $\gamma = 0$; 1.5, *a*=0; 1; 5.

2. Tam tikro modelio dalelių tankių *m* ir *n* lygtys šitokios:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = n \cdot (1 - m) \cdot e^{-b \cdot m} - a \cdot m^2 - a \cdot m \cdot n,$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = c \cdot e^{-b \cdot n} - n \cdot (1 - m) \cdot e^{-b \cdot m},$$

a, *b*, *c* – valdantieji parametrai. Apskaičiuokite *m* ir *n* priklausomybę nuo laiko, kai pradinės sąlygos *m*=*n*=0; raskite nuostoviąsias *m* ir *n* vertes bei fazines trajektorijas. Rezultatus pavaizduokite grafiškai (paviršiais, kreivėmis). *b*=0.5; *c*=0.8; $0.1 \le a \le 1$.

3. Tiesinės stabilumo teorijos metodu ištirkite 2-jo uždavinio nuostoviojo sprendinio stabilumą.

4. Kaip žinote, vienarūšės populiacijos skaičiaus *N* lygtis šitokia:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = a \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right) \cdot N.$$

Raskite sistemos potencialo funkciją ir nustatykite katastrofų aibę.

5. Katastrofų teorijos metodu ištirkite puslaidininkinio sluoksnio fotosužadinimo relaksacijos modelio šviesos vienalytės sugerties sąlygomis nuostovųjį sprendinį.

6. Raskite (6.26) lygties sprendinį, kai *A*=1 ir *B*=1; *A*=0.5 ir *B*=10.

7. Puslaidininkinis sluoksnis relaksuoja apšviestas nevienalyčiai sugeriama šviesa. Apskaičiuokite ir grafiškai pavaizduokite stabilumo dažnių ir pasiskirstymo koeficientų priklausomybę nuo skaičiaus *v* (*v*=1, 2,..., ∞). Valdantieji parametrai: $\eta = 1.5$; *g*=3; *s*=1; *a*=0.1 ir 10.

8. Puslaidininkinis sluoksnis pastovaus potencialo sąlygomis šviečiamas vienalyčiai sugeriama šviesa. Apskaičiuokite stabilumo dažnius ((6.32), (6.33) formulės), kai *A*=1 ir *B*=1; *A*=0.5 ir *B*=10.

Literatūra

1. G.Joss, J.Daniel. Elementary stability and bifurcation theory. New York, 1980, 300 p.

2. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системахю М.: Мир, 1979. Познание сложного. М.: Мир, 1990, 342 с.

3. G. Jetschke. Mathematik der Selbstorganisation. Berlin, 1989, 333 s.

4. Арнольд В. И. Теорня катастроф. М.: Наука, 1990, 128 с.

5. Горошко А. Б. Познакомтесь с математическим моделированием, М.: Знание, 1991, 156 с.

6. R. Simutis, S. Butkienė. Procesų ir sistemų modeliavimas. Kaunas, Technologija, 1996, 62 p.

7. H. Heming, B. Lencke. Mathematical modelling with calculators and computers. Magdeburg, O. von Guericke Univ., 1998, 20 p.

8. Тарасевич Ю. Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Москва УРСС, 2003.