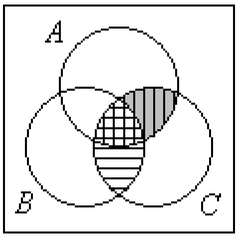
Trečios pratybos

1 užduotis.
$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5\}$. Rasti $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

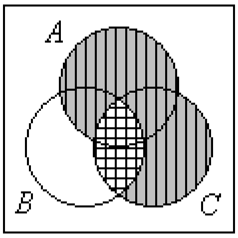
Atsakymas.
$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$,
$A \cap B = \{3,4\}$,
$A \setminus B = \{1,2\}$,
$B \setminus A = \{5\}$.

2 užduotis.
Pavaizduoti duotą aibę Veno diagrama (Oilerio skrituliais).
1) $(A \cap C) \setminus (B \cap C)$
2) $(A \cup C) \setminus (B \cap C)$

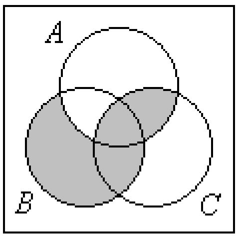
Sprendimas
1) Vertikaliai užbrūkšniuota sritis yra $A \cap C$, horizontaliai – $B \cap C$, o atsakymas nuspalvintas pilkai.



2) Vertikaliai užbrūkšniuota sritis yra $A \cup C$, horizontaliai – $B \cap C$, o atsakymas nuspalvintas pilkai.



3 užduotis.
Duota Veno diagrama:

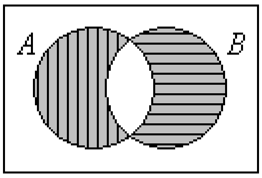


Užrašyti aibę formule.

Atsakymas.
$(B \setminus A) \cup (A \cap C)$

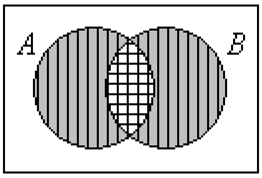
4 užduotis.
Įrodyti lygybę
$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
(a) Veno diagramų pagalba,
(b) analitiškai.

Sprendimas.
(a) Lygybės kairiosios pusės Veno diagrama:



Čia vertikaliai užbrūkšniuota sritis yra $A \setminus B$, horizontaliai – $B \setminus A$, o visa aibė nuspalvinta pilkai.

Lygybės dešiniosios pusės Veno diagrama:



Čia vertikaliai užbrūkšniuota sritis yra $A \cup B$, horizontaliai – $A \cap B$, o visa aibė nuspalvinta pilkai.

Matome, kad abiem atvejais nuspalvinta ta pati sritis, todėl duotos aibės yra lygios.

(b) $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \vee x \in (B \setminus A)$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$
(pritaikykime distributyvumo dėsnį: $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$)
$\Leftrightarrow (x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin A)) \wedge (x \notin B \vee (x \in B \wedge x \notin A))$
(dar kartą taikome tą patį distributyvumo dėsnį ir nutriname skliaustus)
$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \wedge (x \notin B \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)$
$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge t \wedge t \wedge (\neg (x \in B) \vee \neg (x \in A))$
(de Morgano dėsnis)
$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg (x \in B \wedge x \in A)$
$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge \neg (x \in A \cap B)$
$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

5 užduotis.

Suprastinti reiškinius:

1) $((A \cup B) \setminus (A \cup \emptyset)) \setminus B$
2) $(A \cup ((C \setminus B) \cap \emptyset)) \cap (A \cup U)$ (čia U – universali aibė, $A, B \subseteq U$)

Sprendimas.

1) $((A \cup B) \setminus (A \cup \emptyset)) \setminus B$
   $= ((A \cup B) \setminus A) \setminus B = (B \setminus A) \setminus B = \emptyset$.
   Iš tikrųjų, naudojant Veno diagramas lengva įsitikinti, kad $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A$ ir $(B \setminus A) \setminus B = \emptyset$.
2) $(A \cup ((C \setminus B) \cap \emptyset)) \cap (A \cup U)$
   $= (A \cup \emptyset) \cap U = A$

6 užduotis.

Duota funkcija $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, kur $\mathbf{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ yra natūraliųjų skaičių aibė. Rasti aibės A vaizdą f(A), aibės B pirmavaizdį $f^{-1}(B)$ ir funkcijos f reikšmių sritį $R_f = \{f(x) : x \in \mathbf{N}\}$. Nustatyti, ar ši funkcija yra injekcija, siurjekcija, bijekcija.

1) $f(x) = x+1$, $A = B = \{0,1,2,3\}$,
2) $f(x) = x^2$, $A = B = \{0,1,2,3\}$.

Atsakymas.

1) $f(A) = \{1,2,3,4\}$
   $f^{-1}(B) = \{0,1,2\}$
   $R_f = \mathbf{N} \setminus \{1\} = \{1,2,3,4,5,6,\dots\}$
   Yra injekcija, nėra siurjekcija, nėra bijekcija
2) $f(A) = \{0,1,4,9\}$
   $f^{-1}(B) = \{0,1\}$
   $R_f = \{x : x = n^2, n \in \mathbf{N}\} = \{n^2 : n \in \mathbf{N}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$
   Injekcija, nėra siurjekcija, nėra bijekcija

7 užduotis.

Apibrėžti bijekciją tarp

1) lyginių sveikųjų skaičių aibės $\mathbf{Z}_2$ = {…,-4,-2,0,2,4,…} ir natūraliųjų skaičių aibės **N** = {0,1,2,3,…},
2) realiųjų skaičių aibės **R** ir intervalo (0,∞),
3) **R** ir (0,1),
4) *(neprivalomas)* Dekarto sandaugos (0,1)×(0,1) ir intervalo (0,1).

Atsakymas.

1) f(x) = $\begin{cases} x, & jei \quad x \geq 0, \\ -x-1, & jei \quad x < 0. \end{cases}$
2) f(x) = e^x (arba f(x) = a^x, kur a – bet koks realus skaičius, a > 0, a ≠ 1).
3) f(x) = (arctg x)/π + ½.
   Galimi ir kiti variantai:
   f(x) = (arcctg x)/π,
   arba, pavyzdžiui,
   f(x) = $\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot 2^x, & kai \quad x < 0, \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^x}+\frac{1}{2}, & kai \quad x > 0, \\ \frac{1}{2}, & kai \quad x = 0. \end{cases}$
4) Jei x = 0,$x_1x_2x_3$…, y = 0,$y_1y_2y_3$…, tai f(x,y) = 0,$x_1y_1x_2y_2x_3y_3$…

Namų darbai

1) [0,1) ir (1/4,1/2],
2) (-1,1) ir **R**,
3) **N**×**N** ir **N**.

Atsakymas.

1) f(x) = (2-x)/4.
2) f(x) = tg (xπ/2).