II dalis
Aibės, funkcijos ir sąryšiai

Šita kurso dalis yra paruošta pagal dr. Valdo Dičiūno diskrečiosios matematikos paskaitų konspektus. Autorius norėtų jam padėkoti už suteiktą galimybę pasinaudoti išeities tekstais ruošiant šiuos konspektus.

1 Aibių algebra

Paprasčiausias diskretus objektas yra *baigtinė aibė*, todėl šiame paragrafe priminsime kai kurias aibių teorijos sąvokas.

Aibė ir jos *elementas* yra pirminės matematikos sąvokos (kaip *skaičius*, *taškas* ir pan.), jos nėra formaliai apibrėžiamos. Intuityviai aibę laikome skirtingų objektų rinkiniu, o pačius objektus vadiname tos aibės elementais. Tai, kad elementas a priklauso aibei A, žymime $a \in A$. Jei b nepriklauso A, rašome $b \notin A$. Tuščią rinkinį vadiname *tuščia aibe* ir žymime $\varnothing$. Aibė B yra aibės A *poaibis* (žymime $B \subseteq A$), jei kiekvienas aibės B elementas priklauso ir aibei A. Tuščią aibę laikome bet kurios aibės poaibiu. Aibės A ir B vadinamos *lygiomis* (žymime $A = B$), jei jos yra sudarytos iš vienodų elementų. Jei $B \subseteq A$ ir $B \neq A$, poaibį B vadiname *tikru* (arba *tikruoju*, *tikriniu*) ir žymime $B \subset A$. Aibės A poaibių aibę žymime $\mathcal{P}(A)$. Baigtinę aibę, turinčią $n \geqslant 0$ elementų, vadiname n-*aibe*, o bet kurį jos poaibį, turintį m elementų, vadiname m-*poaibiu* $(0 \leqslant m \leqslant n)$. Baigtinės aibės elementų skaičius dar vadinamas jos *galia*. Aibės A galia žymima $|A|$. Baigtinė aibė paprastai apibrėžiama, išvardijant jos elementus: $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Kitas aibės apibrėžimo būdas — nurodoma savybė S, kuria pasižymi tos aibės elementai ir nepasižymi visi kiti objektai. Tokiu atveju naudojamas užrašas $A = \{x\colon S(x)\}$ arba $A = \{x \mid S(x)\}$. Dažnai visos nagrinėjamos aibės yra poaibiai kokios nors didesnės aibės U, vadinamos *universalia aibe*.

Pavyzdys. Tarkime, turime aibes

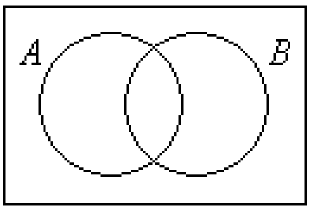
$$A = \{x\colon x \text{ — sveikas lyginis skaičius}\} = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

ir $B = \{-12, 6\}$. Tada $14 \in A$, $3 \notin A$, B yra aibės A tikrasis poaibis ($B \subset A$), aibės B ir $\{6, -12\}$ yra lygios,

$$\mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{-12\}, \{6\}, B\},$$

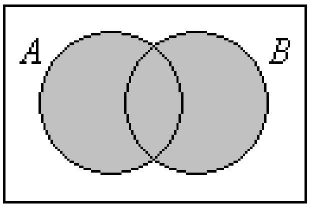
$|B| = 2$. Universali aibė U galėtų būti, pavyzdžiui, sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{Z}$, jei mes nagrinėjame tik aibes, sudarytas iš sveikųjų skaičių. $\square$

Aibes patogu vaizduoti grafiškai *Veno diagramų* (dar vadinamų *Oilerio skrituliais*) pagalba. Universalią aibę vaizduojame stačiakampiu, o jos poaibius — susikertančiais skrituliais. Pavyzdžiui, dviejų aibių A ir B Veno diagrama būtų tokia:



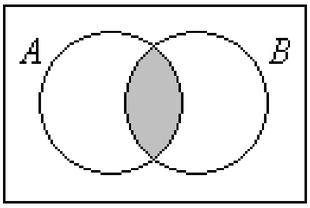
Apibrėšime pagrindines aibių operacijas:

- Aibių A ir B *sąjunga* $A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ arba } x \in B\}$. Ją galima būtų pavaizduoti tokia Veno diagrama:

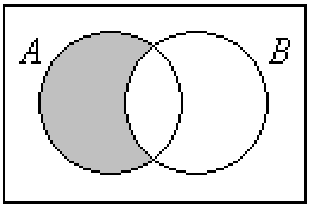


čia aibių A ir B sąjunga $A \cup B$ yra nuspalvinta pilkai.

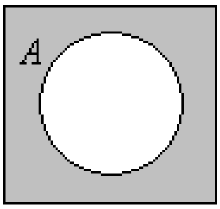
- Aibių A ir B *sankirta* $A \cap B = \{x\colon x \in A \text{ ir } x \in B\}$.



- Aibių A ir B *skirtumas* $A \setminus B = \{x\colon x \in A \text{ ir } x \notin B\}$.



- Aibės $A \subseteq U$ *papildinys* (iki aibės U) $\overline{A} = U \setminus A = \{x\colon x \notin A\}$.



Aišku, kad aibė U turi būti nurodyta arba nuspėjama iš konteksto.

Pavyzdys. Nagrinėsime natūrinių skaičių aibės $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ poaibius, t.y. $U = \mathbb{N}$. Apibrėžę

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_2 &= \{x\colon x \text{ dalinasi iš 2}\} = \{0, 2, 4, \ldots\} \quad \text{ir} \\ \mathbb{N}_3 &= \{x\colon x \text{ dalinasi iš 3}\} = \{0, 3, 6, \ldots\}, \end{aligned}$$

gauname

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_2 \cup \mathbb{N}_3 &= \{x\colon x \text{ dalinasi iš 2 arba 3}\} = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, \ldots\}; \\ \mathbb{N}_2 \cap \mathbb{N}_3 &= \{x\colon x \text{ dalinasi iš 6}\} = \{0, 6, 12, \ldots\}; \\ \mathbb{N}_2 \setminus \mathbb{N}_3 &= \{x\colon x \text{ dalinasi iš 2, bet nesidalina iš 3}\} = \{2, 4, 8, 10, 14, \ldots\}; \\ \overline{\mathbb{N}_2} &= \{x\colon x \text{ nesidalina iš 2}\} = \{1, 3, 5, \ldots\}. \end{aligned}$$

Aibių operacijos $\cup, \cap$ ir $^{-}$ (papildinys) atitinka logines operacijas $\vee, \wedge$ ir $\neg$. Todėl aibių operacijos tenkina dėsnius, kuriuos jūs jau žinote iš matematinės logikos:

(1) $A \circ B = B \circ A$ (*komutatyvumas*; čia vietoje $\circ$ abiejose lygybės pusėse galime įstatyti $\cup$ arba $\cap$);

(2) $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$ (*asociatyvumas*);

(3) (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
(b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*distributyvumo dėsniai*);

(4) (a) $A \cup \varnothing = A$;
(b) $A \cap \varnothing = \varnothing$ (tuščia aibė $\varnothing$ atitinka konstantą k matematinėje logikoje);

(5) $\overline{\overline{A}} = A$.

(6) (a) $A \cup A = A$;
(b) $A \cap A = A$ (*idempotentumas*);

(7) (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
(b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*De Morgano dėsniai*);

Aibių visumą, kurioje galioja dėsniai (1)–(7), vadina *aibių algebra*.

Pastebėkime, kad dėsnius (3)(b), (6)(b) ir (7)(b) galima gauti atitinkamai iš dėsnių (3)(a), (6)(a) ir (7)(a), pakeitus juose ženklus $\cup$ į $\cap$ ir atvirkščiai. Pasirodo, aibių algebroje galioja taisyklė, vadinama *dualumo principu*:

> Jei turime teisingą aibių lygybę, sudarytą iš universalios aibės U poaibių ir operacijų $\cup, \cap$ bei $^{-}$ (papildinio), tai pakeitę abejose lygybės pusėse ženklus $\cup$ į $\cap$, $\cap$ į $\cup$, $\varnothing$ į U ir U į $\varnothing$, vėl gausime teisingą aibių lygybę.

Pavyzdžiui, iš (4) galime gauti teisingas lygybes

(8) (a) $A \cap U = A$;
(b) $A \cup U = U$.

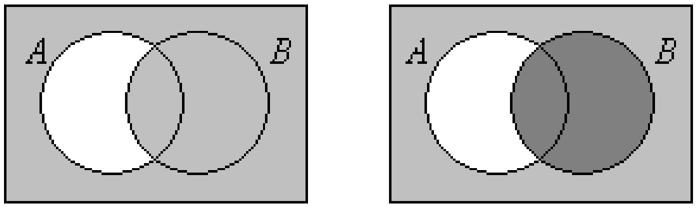
Kaip galima įrodyti šiuos dėsnius? Įrodykime, pavyzdžiui, distributyvumo dėsnį (3)(b).

Įrodymas. Kad įrodytume, kad dvi aibės C ir D yra lygios, užtenka parodyti, kad loginiai teiginiai $x \in C$ ir $x \in D$ yra ekvivalentūs kiekvienam elementui x. Įrodinėjame, naudodamiesi logikos dėsniais (distributyvumu) ir aibių operacijų apibrėžimais:

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\sim x \in A \ \vee \ x \in B \cap C \\ &\sim x \in A \ \vee \ (x \in B \wedge x \in C) \\ &\sim (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ (x \in A \ \vee \ x \in C) \\ &\sim x \in A \cup B \ \wedge \ x \in A \cup C \\ &\sim x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

□

Nesudėtingas aibių algebros formules patogu patikrinti Veno diagramų pagalba. Pavyzdžiui, aibių lygybę $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cup B$ demonstruoja tokios diagramos:



Kairiojoje diagramoje pilkai nuspalvinta aibė $\overline{A \setminus B}$, o dešiniojoje diagramoje aibę $\overline{A} \cup B$ atitinka ta sritis, kuri nuspalvinta bent vienu atspalviu.

Norėdami apibrėžti paskutinę aibių operaciją, pateikiame dar keletą sąvokų.

Bet kokių objektų (t.y., nebūtinai skirtingų) rinkinį vadiname *šeima*. Baigtinę šeimą, turinčią m elementų, vadiname m*-šeima*. Sutvarkytą šeimą vadiname *seka*. Sekoje turi reikšmę ne tik pats objektas, bet ir jo vieta: sukeitę du skirtingus objektus vietomis, gauname kitą seką. Baigtines sekas iš m objektų dar vadina m*-vektoriais*, o begalines sekas — tiesiog sekomis. m-vektoriaus $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ i-tąjį elementą α_i vadina vektoriaus α i*-tąja koordinate*.

Pavyzdys. $\mathcal{A} = \{0, 1, 1, 1\}$ — šeima; $\alpha = (0, 1, 0, 0)$ ir $\beta = (1, 0, 0, 0)$ — du skirtingi 4-vektoriai; $\gamma^\infty = 00110011\ldots$ — begalinė periodinė seka. □

Dažnai praleisime kablelius ir skliaustus sekų bei vektorių žymėjime, pavyzdžiui, rašysime $\alpha = 0100$ ir pan.

Netuščių aibių $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *Dekarto sandauga* vadiname aibę

$$A_1 \times \cdots \times A_m = \big\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\colon\ \alpha_i \in A_i, i = 1, \ldots, m\big\}.$$

Tai yra aibė visų galimų m-vektorių, kurių i-toji koordinatė priklauso aibei A_i.

Pavyzdys. Jei $A = \{0, 1\}$, $B = \{a, b\}$, tai $A \times B = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$. □

Jei $A_1 = A_2 = \cdots = A_m = A$, tai aibių $A_1, A_2, \ldots, A_m$ Dekarto sandaugą žymėsime A^m ir vadinsime aibės A m*-uoju Dekarto laipsniu*, o jos elementus — m*-vektoriais aibėje* A (arba *virš aibės* A). Vektorius aibėje $\{0, 1\}$ vadiname *binariniais* (arba *dvinariais*). Taigi, α ir β iš 3 pavyzdžio — binariniai vektoriai, $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^4$. Praplėtę aibės Dekarto laipsnio apibrėžimą, simboliu A^∞ žymėsime aibę begalinių sekų, sudarytų iš aibės A elementų. Jei γ^∞ — seka iš 3 pavyzdžio, tai $\gamma^\infty \in \{0, 1\}^\infty$.

Pavyzdys. Tegu $V = \{a, b, \ldots, h\}$ (vertikalės), $H = \{1, 2, \ldots, 8\}$ (horizontalės). Tada $L = V \times H = \{a1, a2, \ldots, h8\}$ — šachmatų lentos laukelių aibė (vietoje vektoriaus $(a, 1)$ čia mes naudojame šachmatininkams įprastą žymėjimą $a1$). □

2 Funkcijos ir sąryšiai

Atitiktimi tarp netuščių aibių A ir B vadiname bet kokį netuščią poaibį $F \subseteq A \times B$.

1 pavyzdys. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $F = \{(a, 1), (b, 0), (c, 1)\}$. □

Atitiktis F — *funkcinė*, jei kiekvienam $a \in A$ egzistuoja vienintelis vektorius $(a, b) \in F$.

Pavyzdys. Paskutinio pavyzdžio atitiktis F yra funkcinė, nes aibėje F yra vienintelis vektorius, kurio pirmoji koordinatė yra a, taip pat vienintelis vektorius su b, ir taip pat su c. □

Jei F — funkcinė atitiktis, tai sakome, kad F apibrėžia *funkciją* $f: A \to B$, o vektoriaus $(a,b) \in F$ koordinatę b žymime $f(a)$ ir vadiname elemento a *vaizdu*.

2 pavyzdys. Kadangi 1 pavyzdžio atitiktis yra funkcinė, tai ji apibrėžia funkciją $f: A \to B$ tokią, kad $f(a) = 1$, $f(b) = 0$ ir $f(c) = 1$. Elemento a vaizdas yra 1, elemento b — 0, ir elemento c — 1. □

Taigi, funkcija $f: A \to B$ yra atitiktis tarp A ir B, priskirianti kiekvienam aibės A elementui kokį nors aibės B elementą. Aibė A vadinama funkcijos f *apibrėžimo sritimi*, o aibės B poaibis $f(A) = \{b\colon \exists a \in A$ toks, kad $b = f(a)\}$ vadinamas funkcijos f *reikšmių sritimi* (ženklas '$\exists$' reiškia "egzistuoja", taip pat vartosime ženklą '$\forall$', kuris reiškia "kiekvienam"). Beje, aibę $f(A)$ galima apibrėžti, vartojant trumpesnį užrašą: $f(A) = \{f(a)\colon a \in A\}$ — tai yra aibė reikšmių $f(a)$, kur a yra elementas, tenkinantis dešinėje pusėje užrašytą sąlygą ($a \in A$), t.y. a perbėga aibę A.

Pavyzdys. 2 pavyzdžio funkcijos apibrėžimo sritis yra $A = \{a, b, c\}$, o reikšmių sritis yra $f(A) = \{0, 1\} \subset B$. □

Jei $A' \subseteq A$, tai aibės B poaibį $f(A') = \{f(a)\colon a \in A'\}$ vadiname aibės A' *vaizdu*.

Pavyzdys. Jei $A' = \{a, c\} \subset A$, tai aibės A' vaizdas $f(A') = \{1\} \subset B$, kur f yra 2 pavyzdžio funkcija.□

Aibės A poaibį $f^{-1}(b) = \{a\colon f(a) = b\}$ vadiname elemento $b \in B$ *pirmavaizdžiu*. Lygiai taip pat apibrėžiamas ir aibės $B' \subseteq B$ pirmavaizdis $f^{-1}(B') = \{a\colon f(a) \in B'\}$. Nesunku įsitikinti, kad $f^{-1}(B') = \bigcup_{b \in B'} f^{-1}(b)$.

Pavyzdys. Elemento $0 \in B$ pirmavaizdis yra $f^{-1}(0) = \{b\} \subset A$, elemento 1 — $f^{-1}(1) = \{a, c\}$, ir elemento 2 — $f^{-1}(2) = \varnothing$. Aibės $\{0, 2\}$ pirmavaizdis yra $f^{-1}(\{0, 2\}) = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(2) = \{b\} \cup \varnothing = \{b\}$, o aibės $\{0, 1\}$ — $f^{-1}(\{0, 1\}) = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1) = \{b\} \cup \{a, c\} = A$. □

Kai aibės A ir B yra baigtinės, funkciją $f: A \to B$ taip pat vadiname *baigtine*. Jei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, baigtinę funkciją galime vaizduoti jos reikšmių lentele:

$$\begin{array}{c|c} x & f(x) \\ \hline a_1 & f(a_1) \\ a_2 & f(a_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_n & f(a_n) \end{array}$$

Pavyzdys. 2 pavyzdžio funkcija gali būti pavaizduota tokia lentele:

$$\begin{array}{c|c} x & f(x) \\ \hline a & 1 \\ b & 0 \\ c & 1 \end{array}$$

Funkcijos $f: A \to B$, pasižyminčios svarbiomis savybėmis, turi dar kitus pavadinimus.

Apibrėžimas.
- f — injekcija, *jei* $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$ $\forall a_1, a_2 \in A$, *t.y. jei bet kurių dviejų skirtingų elementų* a_1 *ir* a_2 *vaizdai* $f(a_1)$ *ir* $f(a_2)$ *irgi yra skirtingi;*

- f — siurjekcija, *jei* $f(A) = B$, *t.y. jei jokio aibės* B *elemento pirmavaizdis nėra tuščias, arba, kitaip tariant, jei į kiekvieną aibės* B *elementą funkcija* f *atvaizduoja bent vieną aibės* A *elementą;*

- f — bijekcija, *jei f — injekcija ir siurjekcija kartu.*

Pavyzdys. Tegu

$$A = \{0, 1\}, \quad B = \{a, b, c\}, \quad F_1 = \big\{(0, a), (1, a)\big\}, \quad F_2 = \big\{(0, b), (1, a)\big\}.$$

1. Tarkime, F_i apibrėžia $f_i : A \to B$. Tada f_2 — injekcija, bet ne siurjekcija, o f_1 — nei injekcija, nei siurjekcija.

2. Tarkime, F_2 apibrėžia $f_2 : A \to B_2 = \{a, b\}$. Tada f_2 — bijekcija.

3. Tarkime, F_1 apibrėžia $f_1 : A \to B_1 = \{a\}$. Tada f_1 — siurjekcija, bet ne injekcija.

Bijekciją dar vadina *abipus vienareikšmiu atvaizdavimu*, kadangi šiuo atveju kiekvienam $b \in B$ egzistuoja vienintelis $a \in A$ toks, kad $f(a) = b$. Pažymėję tokį elementą $a = g(b)$, gauname funkciją $g : B \to A$, kuri vadinama *atvirkštine* funkcijai f ir žymima f^{-1}. Nesunku pastebėti, kad kiekvienam $a \in A$ turime $f^{-1}(f(a)) = a$. Aišku, kad jei A ir B yra baigtinės aibės, o $f : A \to B$ — bijekcija, tai A ir B turi po tiek pat elementų.

Pavyzdys. Imkim tą pačią bijekciją $f_2 : \{0, 1\} \to \{a, b\}$ iš paskutinio pavyzdžio, apibrėžtą atitikties $F_2 = \big\{(0, b), (1, a)\big\}$. Tada $f_2(0) = b$, $f_2(1) = a$, ir atvirkštinė funkcija $f_2^{-1} : \{a, b\} \to \{0, 1\}$ įgyja tokias reikšmes: $f_2^{-1}(a) = 1$, $f_2^{-1}(b) = 0$. $\square$

Rasime dvejų pereitame paragrafe apibrėžtų aibių elementų skaičių. Priminsime, kad baigtinės aibės A galia $|A|$ vadiname jos elementų skaičių.

Teorema. *1. Jei $A_1, \ldots A_k$ yra baigtinės netuščios aibės, tai $|A_1 \times \cdots \times A_k| = |A_1| \times \cdots \times |A_k|$.*

2. Jei aibė A yra baigtinė, tai $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Įrodymas. Pirma lygybė akivaizdi, nes k-vektoriaus $\alpha \in A_1 \times \cdots \times A_k$ i-oji koordinatė α_i gali būti bet kuris iš $|A_i|$ aibės A_i elementų ($i = 1, \ldots, k$). Todėl skirtingų k-vektorių bus $|A_1| \times \cdots \times |A_k|$.

Antrą lygybę įrodysime, remdamiesi pirmąja, iš kurios išplaukia, kad $|\{0, 1\}^n| = 2^n$. Jei A tuščia, tai $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$ ir turime teisingą lygybę $1 = 2^0$. Tarkime, A — netuščia, t.y. $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ir apibrėžkime funkciją $\chi : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1\}^n$, kur kiekvienam $B \subseteq A$ $\alpha = \chi(B)$ yra n-vektorius su koordinatėmis

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & a_i \in B; \\ 0, & a_i \notin B. \end{cases}$$

Vektorius $\chi(B)$ dar vadinamas poaibio B *charakteringuoju vektoriumi*. Jis nusako, kurie aibės A elementai priklauso poaibiui B, o kurie ne. Nesunku įsitikinti, kad kiekvieną binarinį vektorių $\alpha \in \{0, 1\}^n$ atitinka lygiai vienas poaibis $B \in \mathcal{P}(A)$ toks, kad $\alpha = \chi(B)$. Taigi, χ yra bijekcija ir $|\mathcal{P}(A)| = |\{0, 1\}^n| = 2^n$. $\square$

Jei A ir B — begalinės aibės ir egzistuoja bijekcija $f : A \to B$, tai A ir B vadiname vienodos galios aibėmis ir žymime $|A| = |B|$. Natūraliųjų skaičių aibės $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ galią žymėkime $\mathcal{N}_0 = |\mathbb{N}|$. Aibė A vadinama *skaičia*, jei $|A| = |\mathbb{N}|$, t.y. egzistuoja bijekcija $f : A \to \mathbb{N}$. Realiųjų skaičių aibės galia $|\mathbb{R}|$ vadinama *kontinuumu*. Galima įrodyti, kad skaičiosios aibės poaibių aibės galia sutampa su realiųjų skaičių aibės galia, t.y. $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$, todėl kontinuumo galia, išlaikant analogiją su baigtinėmis aibėmis, žymima $2^{\mathcal{N}_0}$.

Pavyzdys. Sveikųjų skaičių aibė $\mathbb{Z}$ yra skaiti, nes funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geqslant 0, \\ -2x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

yra bijekcija tarp $\mathbb{Z}$ ir $\mathbb{N}$. Funkcija f atvaizduoja neneigiamus sveikuosius skaičius į lyginius natūraliuosius skaičius, o neigiamus sveikuosius skaičius į nelyginius natūraliuosius skaičius. □

Iš šio pavyzdžio matome, kad begalinė aibė gali būti tos pačios galios su savo tikruoju poaibiu, nes $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

n-viečiu (*n-nariniu*) *sąryšiu* aibėje A vadiname bet kokį poaibį $R \subseteq A^n$. Pavyzdžiui, Pitagoro skaičių trejetai sudaro trivietį sąryšį $P = \{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 = z^2,\ x, y, z \in \mathbb{Z}\}$ sveikųjų skaičių aibėje. Toliau nagrinėsime tik dviviečius (binarinius) sąryšius, kuriuos vadinsime tiesiog sąryšiais. Pavyzdžiui, kiekvieną funkciją $f : A \to A$ atitinka sąryšis $\{(a, f(a))\colon a \in A\}$. Jei $(a_i, a_j) \in R$, tai sakome, kad a_i ir a_j *susieti sąryšiu* R ir žymime $a_i\, R\, a_j$. Sąryšį R aibėje A vadiname:

- *refleksyviu*, jei $(a\, R\, a)\ \forall a \in A$;
- *antirefleksyviu*, jei neegzistuoja $a \in A$ tokio, kad $a\, R\, a$;
- *simetriniu*, jei $(a\, R\, b \Rightarrow b\, R\, a)\ \forall a, b \in A$;
- *antisimetriniu*, jei $(a\, R\, b\ \wedge\ b\, R\, a \Rightarrow a = b)\ \forall a, b \in A$;
- *tranzityviu*, jei $(a\, R\, b\ \wedge\ b\, R\, c \Rightarrow a\, R\, c)\ \forall a, b, c \in A$.

Antisimetriškumo apibrėžimą galima suformuluoti ir taip: $(a \neq b \Rightarrow \neg(a\, R\, b\ \wedge\ b\, R\, a))\ \forall a, b \in A$, t.y. jei $a \neq b$, tai negali būti vienu metu ir $a\, R\, b$, ir $b\, R\, a$.

Refleksyvų, tranzityvų ir simetrinį sąryšį vadiname *ekvivalentumo* sąryšiu. Pavyzdžiui, žmonių aibėje sąryšis “gyventi tame pačiame mieste” yra ekvivalentumo sąryšis. Išsiaiškinkite, kodėl.

Ekvivalentumo sąryšis pasižymi tokia svarbia savybe. Jei aibėje A apibrėžtas ekvivalentumo sąryšis R, tai aibę A galima suskaidyti į netuščius nesikertančius poaibius tokiu būdu, kad tame pačiame poaibyje esantys elementai yra susieti sąryšiu R, o esantys skirtinguose — nėra susieti. Tie poaibiai vadinami ekvivalentumo klasėmis. Pavyzdžiui, ekvivalentumo sąryšio “gyventi tame pačiame mieste” ekvivalentumo klasės yra tame pačiame mieste gyvenančių žmonių aibės, pavyzdžiui, viena klasė būtų vilniečiai, kita kauniečiai, trečia mosėdiškiai ir t.t. Iš kitos pusės, bet koks aibės A suskaidymas į netuščius nesikertančius poaibius apibrėžia ekvivalentumo sąryšį “priklausyti tam pačiam poaibiui”.

Refleksyvų, tranzityvų ir antisimetrinį sąryšį vadiname *negriežtos tvarkos* sąryšiu, o antirefleksyvų, tranzityvų ir antisimetrinį sąryšį vadiname *griežtos tvarkos* sąryšiu. Abu šie sąryšiai vadinami *tvarkos* sąryšiais. Pavyzdžiui, sąryšis “būti ne didesniu” ($\leqslant$) natūraliųjų skaičių aibėje yra negriežtos tvarkos sąryšis, o sąryšiai “būti viršininku” žmonių aibėje ir “būti mažesniu” ($<$) natūraliųjų skaičių aibėje yra griežtos tvarkos sąryšiai.

Elementai $a, b \in A$ vadinami *palyginamais* (tvarkos sąryšio R atžvilgiu), jei $a\, R\, b$ arba $b\, R\, a$. Aibė A, kurioje apibrėžtas tvarkos sąryšis R, vadinama *sutvarkyta*. Sutvarkyta aibė vadinama *visiškai sutvarkyta*, jei bet kurie du skirtingi aibės A elementai yra palyginami. Priešingu atveju aibė vadinama *iš dalies sutvarkyta*. Pavyzdžiui, natūraliųjų skaičių aibė su sąryšiu “būti ne didesniu” yra visiškai sutvarkyta aibė, o kurios nors įmonės darbuotojų aibė su sąryšiu “būti viršininku” yra iš dalies suvarkyta, nes, pavyzdžiui, du darbuotojai iš skirtingų skyrių nėra palyginami.

Pavyzdys. Tegu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ir

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \big\{(a, a)\colon a \in A\big\} \\
&= \{(1, 1), (2, 2), \ldots, (10, 10)\} \quad (A^2 \text{ “įstrižainė”}), \\
R_2 &= \big\{(a, b)\colon a \leqslant b \text{ (nelygybė tarp natūrinių skaičių)}\big\} \\
&= \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 10), (2, 2), (2, 3), \ldots, (2, 10), \ldots, (9, 9), (9, 10), (10, 10)\}, \\
R_3 &= \big\{(a, b)\colon b - a \text{ dalinasi iš 3 be liekanos}\big\} \\
&= \{(1, 1), (1, 4), (1, 7), (1, 10), (2, 2), (2, 5), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (4, 1), (4, 4), \ldots\}, \\
R_4 &= R_2 \cap R_3.
\end{aligned}
$$

Nesunku patikrinti, kad R_1 ir R_3 — ekvivalentumo sąryšiai, saryšis R_1 suskaido aibę A į ekvivalentumo klases $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{10\}$, o sąryšis R_3 — į $\{1, 4, 7, 10\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\}$. Be to, R_1, R_2 ir R_4 yra negriežtos tvarkos sąryšiai. Iš šių trijų tvarkos sąryšių tik su sąryšiu R_2 aibė A bus visiškai sutvarkyta.

Beje, sąlyga $a\, R_3\, b$ dažniau rašoma taip: $a \equiv b \bmod 3$. Galima apibendrinti šį sąryšį: jei n — bet koks natūralusis skaičius, tai $a \equiv b \bmod n$ reiškia, kad $b - a$ dalinasi iš n be liekanos (arba, kitaip sakant, b padalijus iš n, liekana bus tokia pati, kaip ir a padalijus iš n). □

Pavyzdys. Dvinarių vektorių aibėje $\{0, 1\}^n$ apibrėžkime sąryšį $\preceq$. Tegu $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ir $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \{0, 1\}^n$. Sakysime, kad α yra mažesnis arba lygus β ir žymėsime $\alpha \preceq \beta$, jei

$$\alpha_1 \leqslant \beta_1, \quad \alpha_2 \leqslant \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n \leqslant \beta_n.$$

Nesunku patikrinti, kad $\preceq$ yra negriežtos tvarkos sąryšis, taigi aibė $\{0, 1\}^n$ su šiuo sąryšiu yra sutvarkyta. Tačiau ši aibė nėra visiškai sutvarkyta (kai $n \geqslant 2$), nes, pavyzdžiui, vektoriai $(0, 1)$ ir $(1, 0)$ nėra palyginami. □