TIESINĖ ALGEBRA IR GEOMETRIJA

Eugenijus Stankus
VILNIAUS UNIVERSITETAS
Matematikos ir informatikos fakultetas
Matematikos metodikos katedra
e.paštas: eugenijus.stankus@maf.vu.lt

Vilnius, 2005

TURINYS

1

Tiesinių lygčių sistemos. Gauso metodas

Tiesinių lygčių sistemų teorija yra tiesinės algebros ir geometrijos pagrindas. Tiesinių lygčių sistemos taikomos ir kitose mokslo šakose - pavyzdžiui, fizikoje, ekonomikoje. Ekonomikoje tiesinėmis lygtimis išreiškiami įvairūs gamybos, vartojimo, mainų ir kitokios ūkinės veiklos rodiklių sąryšiai. Tiesinės lygtys ir dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos buvo sprendžiamos jau vidurinėje mokykloje. Čia nagrinėsime pačias bendriausias tiesinių lygčių sistemas – su bet kokiu nežinomųjų ir lygčių skaičiumi.

1.1. Tiesinės lygtys.

Tiesine lygtimi su n nežinomųjų vadinama lygybė

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b, \tag{1.1}$$

kurioje $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir b yra relieji skaičiai, o $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – nežinomi dydžiai. Skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vadinami lygties koeficientais, b – laisvuoju nariu, o $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – nežinomaisiais arba kintamaisiais. Nežinomųjų reikšmių rinkinys $\overline{x} = (\overline{x}_1; \overline{x}_2; \ldots; \overline{x}_n)$ vadinamas (1.1) lygties *sprendiniu*, jeigu galioja lygybė

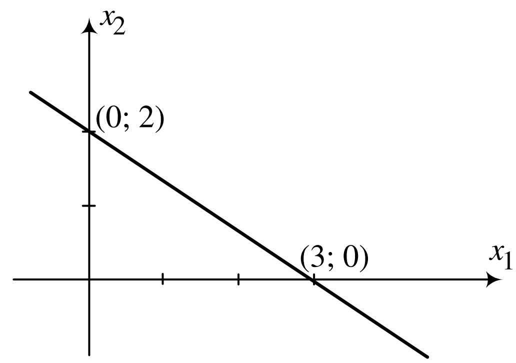
$$a_1 \cdot \overline{x}_1 + a_2 \cdot \overline{x}_2 + \cdots + a_n \cdot \overline{x}_n = b.$$

Visų tiesinės lygties sprendinių aibę pažymėkime X. Ją galima užrašyti taip:

$$X = \{(\overline{x}_1; \overline{x}_2; \ldots; \overline{x}_n) \colon a_1 \cdot \overline{x}_1 + a_2 \cdot \overline{x}_2 + \cdots + a_n \cdot \overline{x}_n = b\}.$$

Pavyzdžiui, tiesinės lygties su vienu nežinomuoju $5 \cdot x = 2$ sprendinių aibę sudaro vienintelis skaičius: 0,4.

Tuo tarpu tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 6$ turi be galo daug sprendinių. Visus juos gausime išreiškę, pavyzdžiui, kintamąjį x_1 kintamuoju x_2 ($x_1 = 3 - 1{,}5x_2$). Tuomet užrašas $(3 - 1{,}5 \cdot \alpha;\ \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, reiškia visus nagrinėjamos lygties sprendinius. Pavaizdavę šiuos sprendinius plokštumos taškais, gautume 1 pav. tiesę – tiesinės lygties sprendinių aibės $X = \{(3 - 1{,}5 \cdot \alpha;\ \alpha) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$ geometrinį vaizdą.

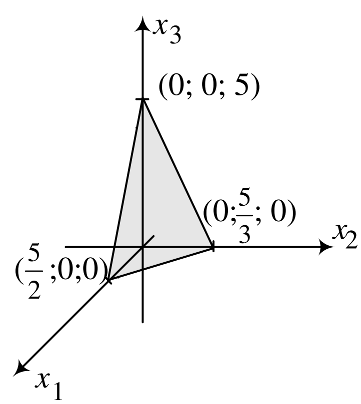


1 pav.

Lygties su trim nežinomaisiais, pavyzdžiui, lygties $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$ sprendinių aibė gali būti užrašyta taip:

$$\{(\alpha;\ \beta;\ 5 - 2\alpha - 3\beta) :\ \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Šios aibės geometrinis vaizdas - plokštuma trimatėje erdvėje (2 paveiksle pavaizduota šios plokštumos dalis, atkirsta koordinačių plokštumomis).



2 pav.

Tiesinės lygties su didesniu negu trys nežinomųjų skaičiumi ((1.1) lygties su $n \geq 4$) sprendinių aibės geometriškai nepavaizduosime. Apskritai aibės, kurios nusakomos tiesinėmis lygtimis, matematikoje vadinamos *hiperplokštumomis*.

Sprendžiant tiesines lygtis bei jų sistemas labai svarbi ekvivalentumo sąvoka.

Dvi tiesinės lygtys su n nežinomųjų

$$a'_1 \cdot x_1 + a'_2 \cdot x_2 + \cdots + a'_n \cdot x_n = b' \tag{1.2}$$

ir

$$a''_1 \cdot x_1 + a''_2 \cdot x_2 + \cdots + a''_n \cdot x_n = b'' \tag{1.3}$$

vadinamos *ekvivalenčiomis*, jeigu jų sprendinių aibės X' ir X'' sutampa.

Pavyzdžiui, tiesinės lygtys su dviem nežinomaisiais

$$3x_1 + 4x_2 = 5 \quad \text{ir} \quad 0{,}3x_1 + 0{,}4x_2 = 0{,}5$$

yra ekvivalenčios, nes abi jos turi tas pačias sprendinių aibes: $\{(\alpha;\ \frac{5}{4} - \frac{3}{4}\alpha)\colon\ \alpha \in R\}$.

Nesunku įsitikinti, kad lygtį (t. y. visus jos koeficientus ir laisvąjį narį) padauginę iš nelygaus nuliui skaičiaus, gausime ekvivalenčią lygtį. Taigi lygtys

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b,$$

ir

$$ka_1 \cdot x_1 + ka_2 \cdot x_2 + \cdots + ka_n \cdot x_n = kb$$

ekvivalenčios.

Sprendžiant tiesinių lygčių sistemą dažnai sistemos lygtys prastinamos ir lygčių sistema pertvarkoma į paprastesnę – lengviau išsprendžiamą.

Tiesinių lygčių (1.2) ir (1.3) *tiesiniu dariniu* vadinama tiesinė lygtis

$$(\lambda' a_1' + \lambda'' a_1'') \cdot x_1 + (\lambda' a_2' + \lambda'' a_2'') \cdot x_2 + \cdots +$$
$$+(\lambda' \cdot a_n' + \lambda'' \cdot a_n'') \cdot x_n = \lambda' b' + \lambda'' b''; \tag{1.4}$$

čia λ', λ'' – realieji skaičiai.

Atkreipkime dėmesį, kad su $\lambda' = \lambda'' = 1$ (1.4) tiesinis darinys yra tiesiog lygčių (1.2) ir (1.3) suma:

$$(a_1' + a_1'') \cdot x_1 + (a_2' + a_2'') \cdot x_2 + \cdots + (a_n' + a_n'') \cdot x_n = b' + b''.$$

Šių lygčių skirtumas

$$(a_1' - a_1'') \cdot x_1 + (a_2' - a_2'') \cdot x_2 + \cdots + (a_n' - a_n'') \cdot x_n = b' - b''$$

yra jų tiesinis darinys su $\lambda' = 1$ ir $\lambda'' = -1$.

Bet kurio tiesinių lygčių skaičiaus tiesinis darinys suvokiamas taip. Jeigu

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

yra tiesinės lygtys su n nežinomųjų, o λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, – bet kokie realieji skaičiai, tai tiesinė lygtis

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{i1}\right) \cdot x_1 + \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{i2}\right) \cdot x_2 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_{in}\right) \cdot x_n = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i$$

vadinama šių *m lygčių tiesiniu dariniu*. Skaičiai λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, vadinami *tiesinio darinio koeficientais*.

1.2. Tiesinių lygčių sistemos.

Tarkime, kad kintamieji $x_1, x_2, \ldots, x_n$ susieti m tiesinėmis lygtimis

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Išspręsti *m tiesinių lygčių sistemą su n nežinomųjų*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdot & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \right. \tag{1.5}$$

reiškia rasti bendrus (tinkančius visoms lygtims) jų sprendinius. Skaičiai a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots,$ m, $j = 1, 2, \ldots, n)$ vadinami *sistemos koeficientais*, b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ – sistemos *laisvaisiais nariais*, o nežinomi dydžiai x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ vadinami *sistemos nežinomaisiais* (*kintamaisiais*).

Tiesinių lygčių sistemos sprendiniu vadinamas toks nežinomųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reikšmių rinkinys $\overline{x} = (\overline{x}_1; \overline{x}_2; \cdots; \overline{x}_n)$, kuris yra sistemos kiekvienos lygties sprendinys.

Jeigu (1.5) sistemos sprendinių aibę pažymėsime X, o ją sudarančių lygčių sprendinių aibes – atitinkamai $X_1, X_2, \ldots, X_m$, tai tarp šių sprendinių aibių galioja sąryšis:

$$X = X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_m.$$

Dvi tiesinių lygčių sistemos su n nežinomųjų,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

ir

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \cdots + c_{kn}x_n = d_k, \end{cases}$$

vadinamos *ekvivalenčiomis*, jeigu jų sprendinių aibės sutampa. Lygčių sistemos vadinamos ekvivalenčiomis ir tuo atveju, kai abi neturi sprendinių.

Pavyzdžiui, nesunku įsitikinti, kad tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemos

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 = 1 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ 2x_2 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

yra ekvivalenčios, nes ir viena, ir kita turi vienintelį sprendinį $\overline{x} = (1; 1; 0)$.

Panagrinėkime kitą – neekvivalenčių tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemų porą

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 = 6, \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Pirmoji sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

kurios sprendinių aibė yra

$$X' = \{(2; \alpha; 2\alpha) \colon \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Antroji – ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 3x_3, \end{cases}$$

kurios sprendinių aibė tokia:

$$X'' = \{(2; 3\beta; \beta) \colon \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Taigi kiekviena sistema turi be galo daug sprendinių, tačiau $X' \neq X''$. Iš tikrųjų $(2; 0; 0)$ yra abiejų sistemų sprendinys, o, pavyzdžiui, $(2; 3; 1)$ yra tik antrosios sistemos sprendinys.

1.3. Gauso metodas.

Gauso metodu vadinamas (1.5) tiesinių lygčių sistemos sprendimo būdas, kai ji pertvarkoma į ekvivalenčią trikampę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\quad c_{nn}x_n = d_n \end{cases} \tag{1.6}$$

su nelygiais nuliui koeficientais $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn}$ arba trapecinę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1k}x_k + c_{1k+1}x_{k+1} + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2k}x_k + c_{2k+1}x_{k+1} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{kk}x_k + c_{kk+1}x_{k+1} + \cdots + c_{kn}x_n = d_k \end{cases} \tag{1.7}$$

su nelygiais nuliui koeficientais $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{kk}$.

Tačiau, kokiu būdu reikia pertvarkyti duotąją lygčių sistemą, kad gautųsi jai ekvivalenti sistema? Be to, kaip gauti ekvivalenčią trikampę arba trapecinę lygčių sistemą? Šitokie veiksmai gana paprasti ir vadinami *elementariaisias pertvarkiais*:

• sistemos bet kurios lygties daugyba iš nelygaus nuliui realiojo skaičiaus;

• sistemos vienos lygties keitimas jos ir kitos lygties, padaugintos iš bet kokio realiojo skaičiaus, suma.

Nesunku įsitikinti, kad su sistemos lygtimis atlikę elementariuosius pertvarkius visuomet gausime ekvivalenčią ankstesniajai lygčių sistemą.

Atkreipkime dėmesį, kad dviejų sistemos lygčių sukeitimas vietomis taip pat realizuojamas elementariaisiais pertvarkiais. Norėdami tai įrodyti, kad būtų patogiau, i-ąją sistemos lygtį žymėkime L_i, j-ąją – L_j, o lygtį, gautą pirmąją padauginus iš skaičiaus k, antrąją iš l ir jas sudėjus, žymėkime $kL_i + lL_j$. Tuomet lygtis L_i ir L_j sukeičia vietomis tokia veiksmų seka:

$$\begin{cases} L_i \\ L_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_i + L_j \\ \qquad L_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \qquad\qquad L_i + L_j \\ L_j + (L_i + L_j) \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_i + L_j \\ \quad -L_i \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (L_i + L_j) + (-L_i) \\ \qquad\qquad L_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_j \\ L_i. \end{cases}$$

Elementariaisiais pertvarkiais (1.5) sistemą galima pertvarkyti į jai ekvivalenčią trikampę (1.6) arba trapecinę (1.7) tiesinių lygčių sistemą. Gauti trikampę tiesinių lygčių sistemą įmanoma tik tuomet, kai $m \geq n$.

Lygčių sistema (1.6) turi vienintelį sprendinį. Jį gausime nuosekliai sudarydami aibes X_n, $X_n \cap X_{n-1}$, $X_n \cap X_{n-1} \cap X_{n-2}, \ldots$, $X_n \cap X_{n-1} \cap \ldots \cap X_1$; čia X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ yra (1.6) sistemos lygties L_i sprendinių aibė.

Trapecinė tiesinių lygčių sistema (1.7) turi be galo daug sprendinių. Iš tikrųjų pasirinkime bet kurias nežinomųjų $x_{k+1}, \ldots, x_n$ reikšmes, pavyzdžiui, $x_{k+1} = t_{k+1}, \ldots, x_n = t_n$

($t_{k+1}, \ldots, t_n$ – realieji skaičiai), įrašykime į (1.7) sistemos lygtis ir gautąją sistemą užrašykime taip:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1k}x_k = d_1 - c_{1k+1}t_{k+1} - \cdots - c_{1n}t_n, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \cdots + c_{2k}x_k = d_2 - c_{2k+1}t_{k+1} - \cdots - c_{2n}t_n, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad c_{kk}x_k = d_k - c_{kk+1}t_{k+1} - \cdots - c_{kn}t_n. \end{cases}$$

O tai trikampė tiesinių lygčių sistema su k nežinomųjų. Kadangi koeficientai $c_{11}, c_{22}, \ldots,$ c_{kk} nelygūs nuliui, tai ji turi vienintelį sprendinį. Pažymėkime jį $(\overline{x}_1; \overline{x}_2; \ldots; \overline{x}_k)$. Šis sprendinys atitinka laisvai pasirinktą skaičių rinkinį $(t_{k+1}; \ldots; t_n)$, o $(\overline{x}_1; \overline{x}_2; \ldots; \overline{x}_k; t_{k+1};$ $\ldots; t_n)$ yra (1.7) sistemos sprendinys. Taigi su kiekvienu laisvai pasirinktu realiųjų skaičių rinkiniu $(t_{k+1}; \ldots; t_n)$ gauname vienintelį (1.7) sistemos sprendinį.

Pertvarkant sistemą (1.5) į trikampę ar trapecinę tiesinių lygčių sistemą galima gauti tokio pavidalo lygčių:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = d.$$

Jei $d = 0$, tai tokia lygtis yra tapatybė ir ją pašaliname iš sistemos. Kai $d \neq 0$, tai ji neturi sprendinių. O tai reiškia, kad ir visos sistemos sprendinių aibė tuščia. Šiuo atveju sprendimą baigiame.

Pademonstruosime Gauso metodą pavyzdžiais.

1.1 pavyzdys. Gauso metodu išspręskime šią tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + 7x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases} \tag{1.8}$$

Sprendimas. Iš pradžių eliminuokime nežinomąjį x_1 iš lygčių L_2, L_3 ir L_4 . Tuo tikslu atlikime tokius pertvarkius: $2L_1 + L_2$, $-L_1 + L_3$, $-3L_1 + L_4$. Gausime ekvivalenčią tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Nežinomąjį x_2 eliminuokime iš trečios ir ketvirtos lygčių šiais pertvarkiais: $2L_2 + L_3$, $-L_2 + L_4$. Turėsime tokią tiesinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Atlikę pertvarkį $2L_3 + L_4$, eliminuosime nežinomąjį x_3 iš ketvirtosios lygties ir gausime trikampę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ x_3 + 2x_4 = 4, \\ 5x_4 = 10. \end{cases}$$

Šios sistemos lygčių sprendinių aibes pažymėkime X_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Tada

$$X_4 = \{(r_1; r_2; r_3; 2)\colon r_1 \in \mathbb{R}, r_2 \in \mathbb{R}, r_3 \in \mathbb{R}\},$$

$$X_4 \cap X_3 = \{(r_1; r_2; 0; 2)\colon r_1 \in \mathbb{R}, r_2 \in \mathbb{R}\},$$
$$X_4 \cap X_3 \cap X_2 = \{(r_1; 1; 0; 2)\colon r_1 \in \mathbb{R}\},$$
$$X_4 \cap X_3 \cap X_2 \cap X_1 = \{(1; 1; 0; 2)\}.$$

Vadinasi, (1.8) tiesinių lygčių sistema su keturiais nežinomaisiais turi vienintelį sprendinį: $(1; 1; 0; 2)$.

1.2 pavyzdys. Gauso metodu išspręskime tiesinių lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemą

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 6, \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 4, \\ x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 4, \\ 4x_1 & + & 5x_2 & & & - & 3x_4 & = & 6, \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 0. \end{array}\right. \tag{1.9}$$

Sprendimas. Nežinomuosius eliminuokime pagal tokią schemą:
1) $-3L_1 + 2L_2$, $L_1 - 2L_3$, $-2L_1 + L_4$, $-L_1 + L_5$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 6, \\ & & 5x_2 & - & 11x_3 & - & 4x_4 & = & -10, \\ & & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -2, \\ & & 3x_2 & - & 6x_3 & - & 3x_4 & = & -6, \\ & & 3x_2 & - & 6x_3 & - & 3x_4 & = & -6; \end{array}\right.$$

2) $\frac{1}{3}L_4$, $-L_4 + L_5$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 6, \\ & & 5x_2 & - & 11x_3 & - & 4x_4 & = & -10, \\ & & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -2, \\ & & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -2, \\ & & & & & & 0 & = & 0; \end{array}\right.$$

3) $L_2 - 5L_3$, $L_2 - 5L_4$, pašaliname L_5 – tapatybę

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 6, \\ & & 5x_2 & - & 11x_3 & - & 4x_4 & = & -10, \\ & & & - & 6x_3 & + & 6x_4 & = & 0, \\ & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 0; \end{array}\right.$$

4) $-\frac{1}{6}L_3$, $-\frac{1}{6}L_3 + L_4$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 6, \\ & & 5x_2 & - & 11x_3 & - & 4x_4 & = & -10, \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ & & & & & & 0 & = & 0. \end{array}\right.$$

Šios sistemos ketvirtoji lygtis ($0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$) yra tapatybė, todėl pašalinkime iš sistemos. Taigi (1.9) sistemą pakeitėme ekvivalenčia trapecine tiesinių lygčių sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ 5x_2 - 11x_3 - 4x_4 = -10, \\ x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Šios sistemos lygčių sprendinių aibes pažymėkime atitinkamai X_1, X_2, X_3 ir pasirinkime bet kurią nežinomojo x_4 reikšmę: $x_4 = t,\ t \in \mathbb{R}$. Tada

$$X_3 = \{(r_1; r_2; t; t) \colon r_1 \in \mathbb{R}, r_2 \in \mathbb{R}\},$$

$$X_3 \cap X_2 = \{(r_1; 3t-2; t; t) \colon r_1 \in \mathbb{R}\},$$

$$X_3 \cap X_2 \cap X_1 = \{(4-3t; 3t-2; t; t)\}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vadinasi, (1.10), taigi ir (1.9), lygčių sistema turi be galo daug sprendinių. Juos galima parašyti viena formule:

$$x(t) = (4-3t; 3t-2; t; t), t \in R.$$

1.3 pavyzdys. Gauso metodu išspręskime tiesinių lygčių su penkiais nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_3 - x_4 - x_5 = 1. \end{cases} \tag{1.11}$$

Sprendimas. Iš karto pastebime, kad šios sistemos negalima pertvarkyti į trikampę tiesinių lygčių sistemą, nes nežinomųjų yra daugiau negu lygčių. Vadinasi, elementariaisiais pertvarkiais gausime trapecinę tiesinių lygčių sistemą:

1) $L_1 - 2L_2$, $L_1 - 2L_3$, $-2L_1 + L_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1, \\ - 5x_2 + 5x_3 - 5x_4 = -5, \\ 5x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 1, \\ - 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 3x_5 = -1; \end{cases}$$

2) $-\frac{1}{5}L_2$, $L_2 + L_3$, $-\frac{2}{5}L_2 + L_4$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 0 = -4, \\ - 5x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

Matome, kad trečioji šios sistemos lygtis

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = -4$$

neturi sprendinių. Todėl ir (1.12) sistema, taip pat ir (1.11) sistema, sprendinių neturi .

Pastebėkime, kad atlikdami elementariuosius pertvarkius perskaičiuojame tik koeficientus ir laisvuosius narius. Vadinasi, nežinomųjų x_1, x_2, …, x_n tarpiniuose skaičiavimuose galėtume nerašyti, o vietoje lygčių sistemos rašyti tik jos koeficientų ir laisvųjų narių lentelę. Tokios skaičių lentelės vadinamos *matricomis*. Vėliau matricas nagrinėsime atskirai, o čia pademonstruosime kaip jos naudojamos sprendžiant tiesinių lygčių sistemas Gauso metodu.

Užrašykime matricomis, pavyzdžiui, (1.8) sistemos sprendimą:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Pagal gautąją koeficientų ir laisvųjų narių matricą nesunku užrašyti ir pačią lygčių sistemą, o tuomet ją išspręsti, kaip tai darėme anksčiau. Kartais, kad būtų patogiau, šalia matricos eilutės užrašomi atliekami su matricos eilutėmis veiksmai. Pavyzdžiui, šalia pirmosios matricos antros eilutės galėtume rašyti $2L_1 + L_2$, tuo parodydami kaip gauta tolesnės matricos antroji eilutė. Šalia priešpaskutinės matricos ketvirtos eilutės galėtume rašyti $2L_3 + L_4$ (taip gaunama paskutiniosios matricos ketvirta eilutė). Tokie pagalbiniai užrašai padeda išvengti klaidų skaičiuojant, o padarius klaidą, lengviau ją aptikti.

Sprendžiant tiesinių lygčių sistemas Gauso metodu, dažniausiai ir vartojamas toks sprendimo užrašymas.

1.4. Uždaviniai

1. Pavaizduokite grafiškai šių tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sprendinių aibes:

1) $4x_1 - 5x_2 = 20$;
2) $5x_1 + 3x_2 = 15$;
3) $-2x_1 + 7x_2 = 14$;
4) $0 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 6$;
5) $2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = -5$.

2. Gauso metodu išspręskite šias tiesinių lygčių sistemas:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7; \end{cases}$ Ats. $(1; 1; 2)$

2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 3; \end{cases}$ Ats. $(2; 1; 0)$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$ Ats. $(-1; 0; 3)$

4) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4; \end{cases}$ Ats. $(3; -2; 1)$

5)

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 17, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15; \end{cases}$$

Ats. $\emptyset$

6)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$$

Ats. $(1;1;1;1)$

7)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2; \end{cases}$$

Ats. $(2-t;0;-2+2t;t)$

8)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$$

Ats. $(1;1;1;0)$

9)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; \end{cases}$$

Ats. $(1;0;-1;2)$

10)

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3; \end{cases}$$

Ats. $(2;1;0;0)$

11)

$$\begin{cases} x_3 + 3x_4 = 4, \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 7; \end{cases}$$

Ats. $(3;2;1;1)$

12)
$$\begin{cases} 2x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 4, \\ x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 4, \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 4, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 4. \end{cases}$$

Ats. $(-4+5t; t; 4-3t; -7t+8)$

13)
$$\begin{cases} 3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 3, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0, \\ x_1 & & & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 1; \end{cases}$$

Ats. $(2; -1; 1; -2)$

14)
$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ & & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 1, \\ x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -1, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 1; \end{cases}$$

Ats. $(-1; 2; 1; -2)$

15)
$$\begin{cases} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 5, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & 4x_4 & = & 2, \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 1, \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 6; \end{cases}$$

Ats. $(3; 0; -2; 2)$

16)
$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -3, \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -5, \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 7, \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -1; \end{cases}$$

Ats. $(1; -1; 1; -1)$

17)
$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 5, \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0, \\ 4x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1, \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 4; \end{cases}$$

Ats. $(-1; 3; 4; 2)$

18)
$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1, \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 2, \\ 5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 4; \end{cases}$$

Ats. $\emptyset$

19)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -1; \end{cases}$$

Ats. $\emptyset$

20)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -3; \end{cases}$$

Ats. $(1+t; -1+t; 0; t)$

21)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10; \end{cases}$$

Ats. $(1; 2; 3; 4)$

22)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7; \end{cases}$$

Ats. $\emptyset$

23)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 5x_2 - 6x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$$

Ats. $(t; t; t; t)$

24)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_2 + 6x_3 + x_4 = 8; \end{cases}$$

Ats. $(3-2t; -4+5t; 2-t; t)$

25)

$$\begin{cases} 5x_1 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 5. \end{cases}$$

Ats. $\emptyset$

2

Determinantai

2.1. Antros ir trečios eilės determinantai.

Gauso metodas yra patogus ir nesudėtingas įvairių tiesinių lygčių sistemų sprendimo metodas. Tačiau teoriniuose klausimuose Gauso metodas mažiau parankus. Čia geriau būtų žinoti lygčių sistemos sprendinio išraišką šios sistemos koeficientais ir laisvaisiais nariais. Tokią galimybę suteikia determinanto sąvoka.

Iš pradžių išspręskime dviejų tiesinių lygčių sistemą su dviem nežinomaisiais:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{2.1}$$

Tarkime, kad bent vienas iš jos koeficientų a_{ij}, pavyzdžiui, a_{11} yra nelygus nuliui. Jeigu taip nebūtų, tai sistemą arba tenkintų bet kuri realiųjų skaičių pora $(x_1; x_2)$, arba ji neturėtų sprendinių.

Sistemos (2.1) antrąją lygtį pakeitę lygtimi $-\frac{a_{21}}{a_{11}}L_1 + L_2$ gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ (a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}})x_2 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1, \end{cases}$$

o antrą šios sistemos lygtį padauginę iš a_{11}, – sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases}$$

Iš čia, kai $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, turėsime:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{2.2}$$

Nesunku įžvelgti taisyklę, pagal kurią sudaryti pastarųjų išraiškų vardiklis ir skaitikliai. Pažymėkime

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Tai 2-*os eilės kvadratinė matrica* su *elementais* $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. Dar susitarkime matricos A elementus a_{11}, a_{22} vadinti *pagrindine įstrižaine*, o elementus a_{12}, a_{21} – *šalutine įstrižaine*. Tuomet (2.2) sistemos išraiškų vardiklis yra matricos A pagrindinės įstrižainės elementų sandaugos ir šalutinės įstrižainės elementų sandaugos skirtumas: $D = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Skaičius D vadinamas matricos A *determinantu* (arba tiesiog 2-*osios eilės determinantu*) ir žymimas

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Trupmenų (2.2) skaitikliai taip pat yra determinantai:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Tuomet (2.2) formules galima užrašyti taip:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad (D \neq 0). \tag{2.3}$$

Pastarosios nežinomųjų išraiškos vadinamos *Kramerio formulėmis* (G. Cramer, 1704-1753, šveicarų matematikas).

Panašiai nagrinėjant trijų tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \tag{2.4}$$

galima įvesti trečios eilės determinanto sąvoką. Išsprendę (2.4) lygčių sistemą (kad ir Gauso metodu), gausime tokias nežinomųjų išraiškas – Kramerio formules:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \quad (D \neq 0); \tag{2.5}$$

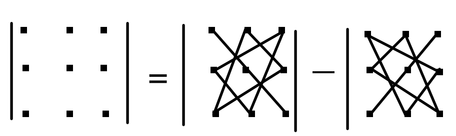
čia D, D_1, D_2, D_3 yra atitinkami (susiję su (2.4) tiesinių lygčių sistema) trečios eilės determinantai. Žinoma, jų išraiškos gerokai sudėtingės negu 2-os eilės determinantų. Formulių (2.5) vardiklio D reiškinys yra trečios eilės determinanatas

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Skaitiklių reiškiniai taip pat yra determinantai, apskaičiuojami pagal tą pačią taisyklę:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Įsižiūrėję į determinanto D išraišką pastebėsime gana paprastą jo skaičiavimo taisyklę, vadinamą Sariuso (P. F. Sarrus, 1798-1861, prancūzų matematikas,) arba tiesiog *trikampio taisykle*:



3 pav.

2.1 pavyzdys. Naudodamiesi Kramerio formulėmis išspręskime tiesinių lygčių sistemą

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 5, \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5, \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 9. \end{array}\right. \tag{2.6}$$

Sprendimas. Pagal trikampio taisyklę apskaičiuokime determinantus D, D_1, D_2 ir D_3:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 121, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 121,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 121.$$

Pritaikę Kramerio formules (2.5) gauname tokias sprendinio komponentes: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Taigi $(1; 0; 1)$ yra tiesinių lygčių sistemos (2.6) sprendinys.

Kramerio taisyklę galima taikyti ir kai nežinomųjų yra daugiau negu lygčių. Tuo tikslu kairiojoje sistemos pusėje reikia pasirinkti nežinomuosius, kurių koeficientų determinantas nelygus nuliui, o kitus narius – laisvuosius kintamuosius – perkelti į dešiniąją. Tuomet pritaikę Kramerio formules ir rinkdamiesi laisvųjų kintamųjų reikšmes iš reliųjų skaičių aibės gausime visus sistemos sprendinius, kurių šiuo atveju yra be galo daug.

2.2. Kėliniai.

Siekdami išplėsti determinanto sąvoką iki n-tos eilės determinanto ($n \in \mathbb{N}$), turime panagrinėti kėlinių, sudarytų iš natūraliųjų skaičių $1, 2, 3, ..., n$ savybes. Aišku, kad iš šių n skaičių iš viso galima sudaryti $n!$ skirtingų kėlinių $(j_1; j_2; \ldots; j_k \ldots; j_l; \ldots; j_n)$.

Jei du bet kuriuos kėlinio elementus sukeisime vietomis kitus palikdami savo vietose (šis veiksmas vadinamas tų elementų *transpozicija*), tai gausime kitą tų pačių elementų kėlinį. Elementų j_k ir j_l transpoziciją žymėsime (j_k, j_l).

2.1 teorema. Iš bet kurio n elementų kėlinio (n>1) baigtiniu transpozicijų skaičiumi galima sudaryti kiekvieną kitą tų pačių elementų kėlinį.

Įrodymas. Samprotausime taikydami matematinės indukcijos metodą kėlinio elementų skaičiaus n atžvilgiu. Teiginys akivaizdus, kai $n = 2$. Tarkime, kad teoremos teiginys teisingas su $n - 1$ elemento kėliniais. Įrodysime, kad jis teisingas n elementų kėliniams $K = (j_1; j_2; \ldots; j_n)$ ir $L = (l_1; l_2; \ldots; l_n)$.

Jei $j_1 = l_1$, tai kėliniai $(j_2; \ldots; j_n)$ ir $(l_2; \ldots; l_n)$ yra $n - 1$ elemento, ir jiems pagal indukcijos prielaidą teoremos teiginys galioja. Vadinasi, iš kėlinio K baigtiniu transpozicijų skaičiumi gausime kėlinį L.

Jeigu $j_1 \neq l_1$, tai kėlinyje L atlikę transpoziciją (j_1, l_1) gausime ką tik nagrinėtą atvejį. ∇

Sakoma, kad skaičiai j_k ir j_l kėlinyje $(j_1; j_2; \ldots; j_k \ldots; j_l; \ldots; j_n)$ sudaro *inversiją*, jeigu $j_k > j_l$. Pavyzdžiui, kėlinyje $(1; 5; 4; 2; 3)$ inversijas sudaro šios skaičių poros: 5 ir 4, 5 ir 2, 5 ir 3, 4 ir 2, 4 ir 3. Iš viso šiame rinkinyje yra penkios inversijos. Rinkinio $(j_1; j_2, \ldots, j_n)$ **inversijų skaičius** žymimas $I(j_1; j_2; \ldots; j_n)$. Taigi $I(1, 5, 4, 2, 3) = 5$.

Kėlinys, turintis lyginį inversijų skaičių, vadinamas *lyginiu kėliniu*, o kėlinys su nelyginiu inversijų skaičiumi – *nelyginiu kėliniu.* Ką tik nagrinėtas kėlinys $(1; 5; 4; 2; 3)$ yra nelyginis.

2.2 teorema. Viena kėlinio elementų transpozicija keičia kėlinio lyginumą priešingu.

Įrodymas. Iš pradžių transpoziciją (j_k, j_l) pritaikykime greta esantiems kėlinio elementams j_k ir j_l. Tokį kėlinį sutrumpintai galime žymėti A, j_k, j_l, B; čia A – elementai, esantys kairėje skaičiaus j_k, B – elementai, esantys dešinėje skaičiaus j_l. Tuomet po transpozicijos turėsime kėlinį A, j_l, j_k, B.

Skaičius j_k, taip pat ir skaičius j_l, ir prieš transpoziciją, ir po jos su aibių A ir B elementais sudaro tą patį inversijų skaičių. Todėl kėlinyje A, j_k, j_l, B atlikus transpoziciją (j_k, j_l) inversijų skaičius pasikeičia tik vienetu – taigi ir lyginumas keičiasi priešingu.

Dabar tarkime, kad tarp elementų j_k ir j_l, kuriems taikoma transpozicija, yra s kėlinio elementų ($s \geq 1$): $C, j_k, m_1, m_2, \ldots, m_s, j_l, D$; čia C – elementai, esantys kairėje skaičiaus j_k, D – elementai, esantys dešinėje skaičiaus j_l. Po transpozicijos (j_k, j_l) gautą kėlinį $C, j_l, m_1, m_2, \ldots, m_s, j_k, D$ galima gauti ir atlikus tokią transpozicijų seką:

$$(j_k, m_1),\ (j_k, m_2), \ldots, (j_k, m_s),\ (j_k, j_l),\ (m_s, j_l), \ldots, (m_2, j_l),\ (m_1, j_l).$$

Kiekviena šios sekos gretimų elementų transpozicija keičia kėlinio lyginumą priešingu. Kadangi jų iš viso yra $2s + 1$, tai ir nagrinėjamu atveju transpozicija (j_k, j_l) pakeičia kėlinio lyginumą priešingu. ∇

Išvada. Iš n elementų $1, 2, \ldots, n$ galima sudaryti $\frac{n!}{2}$ lyginių kėlinių ir tiek pat nelyginių kėlinių.

Įrodymas. Kaip matėme, iš viso yra $n!$ kėlinių. Tarkime, kad p iš jų yra lyginių, o q – nelyginių. Tuomet $p + q = n!$. Kiekviename kėlinyje atlikus, pavyzdžiui, transpoziciją $(1, 2)$ visų kėlinių lyginumas pasikeis priešingu. Gausime p nelyginių kėlinių, kurių iš viso yra q, taigi $p \leq q$. Po transpozicijos visuose nelyginiuose kėliniuose gausime q lyginių kėlinių, taigi $q \leq p$. Vadinasi, $p = q$. Tuomet $2p = n!$ ir $p = q = \frac{n!}{2}$. ∇

2.3. Keitiniai.

Dabar nagrinėkime transformacijų, leidžiančių iš vieno kėlinio gauti kitą kėlinį, aibę. Tokias transformacijas apibūdinsime kiekvienam pirmojo kėlinio elementui nusakydami atitinkantį jį antrojo kėlinio elementą. Pavyzdžiui, iš kėlinio $(3, 4, 1, 5, 2)$ gausime kėlinį $(4, 1, 5, 3, 2)$ elementui 3 priskyrę 4, elementui 4 priskyrę 1, elementui 1 priskyrę 5, elementui 5 priskyrę 3 ir elementui 2 priskyrę 2. Kalbant bendriau, šitoks priskyrimas, – kai aibės elementai priskiriami tos pačios aibės elementams, vadinamas *bijekcija į save* (apskritai bijekcija gali veikti ir į kitą aibę). Šią bijekciją galima užrašyti parašius antrąjį kėlinį po pirmuoju – ji ir vadinama keitiniu (5-ojo laipsnio):

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Kadangi užrašant keitinį svarbu nurodyti kuris elementas "pereina" į kokį, tai sukeitę stulpelius vietomis taip, kad pirmoji eilutė būtų "tvarkinga", turėsime tą patį keitinį:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Ši keitinio išraiška vadinama *standartine.* Taigi *n-ojo laipsnio keitiniu* vadinsime

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}; \tag{2.9}$$

čia $i_1, i_2, \dots i_n$ yra kuris nors elementų $1, 2, \dots n$ kėlinys. Aišku, kad iš viso skirtingų keitinių, kaip ir kėlinių, yra $n!$.

Galima kalbėti ir apie bet kokių dviejų aibių X ir Y elementų tarpusavio atitiktis.

Taisyklė f, pagal kurią kiekvieną aibės X elementą x atitinka vienintelis aibės Y elementas y, vadinama aibės X *atvaizdžiu* aibėje Y (žymėsime $f : X \to Y$). Kitaip tariant, atvaizdis f yra funkcija, apibrėžta aibėje X su reikšmėmis iš aibės Y. Elementas $y = f(x)$ vadinamas *elemento x vaizdu*, o aibė, sudaryta iš elementų x vaizdų, – *atvaizdžio f vaizdu* (žymimu $\mathrm{Im}f$).

Jeigu $\mathrm{Im}f = Y$, tai atvaizdis $f : X \to Y$ vadinamas *surjekcija*. Kai nelygių aibės X elementų vaizdai nelygūs, tai atvaizdis f vadinamas *injekcija*. Jeigu atvaizdis yra kartu surjekcija ir injekcija, tai jis vadinamas *bijekcija*.

Atkreipkime dėmesį, kad keitinio stulpelių sukeitimas vietomis nekeičia pirmosios ir antrosios eilučių inversijų sumos lyginumo. Jeigu pirmosios ir antrosios eilučių inversijų suma lyginė, tai keitinį galima vadinti *lyginiu keitiniu*, jeigu ši suma nelyginė – *nelyginiu keitiniu*. Pavyzdžiui, keitinys (2.7) yra nelyginis, nes jo pirmosios eilutės inversijų skaičius yra 5, o antrosios – 6 (suma lygi 11). Šis keitinys užrašytas standartine išraiška (2.8) išlieka nelyginis – pirmosios eilutės inversijų skaičius 0, antrosios – 7.

Dabar n-ojo laipsnio keitinių aibėje apibrėžkime daugybą. Kad būtų papraščiau, šį veiksmą pademonstruosime pavyzdžiu. Tegu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

du 5-ojo laipsnio keitiniai. Tuomet jų sandauga vadinsime keitinį

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Atkreipkime dėmesį, kad

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Taigi tokia įprasta dauginamųjų keitimo vietomis savybė - *komutatyvumas* (galiojanti, pavyzdžiui, realiųjų skaičių aibėje) keitinių aibėje negalioja. Nesunku įsitikinti, kad jungimo dėsnis (*asociatyvumas*) n-ojo laipsnio keitinių aibėje galioja, t. y. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Ypatingas yra *tapatusis* (*vienetinis*) keitinys

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Padauginę keitinį iš vienetinio iš bet kurios pusės, gausime tą patį keitinį: $AE = EA = A$. Taigi tapatusis keitinys yra keitinių aibės vienetas. Be to, n-ojo laipsnio keitinių aibėje kiekvienas keitinys A turi *atvirkštinį keitinį* (jį žymėsime A^{-1}), t. y. tokį, su kuriuo galioja lygybės $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

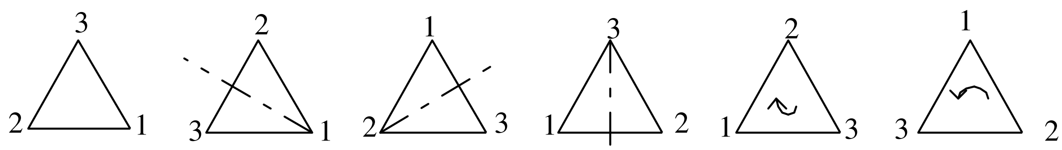
Išvardinome savybes, kurias turi n-ojo laipsnio keitinių aibė. Dėl šių ir kitų – simetrijos savybių – ši aibė vadinama *simetrijų grupe* S_n. Kai $n \geq 3$, ši grupė yra *nekomutatyvi*.

Kad suvoktume, kodėl tokia aibė vadinama **simetrijų** grupe, panagrinėkime S_3. Ši grupė turi $3! = 6$ elementus. Juos visus nesunku išvardinti:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Tarkime, turime lygiakraštį trikampį, kurio viršūnės sužymėtos skaičiais 1, 2 ir 3.

Kiekvienas šios grupės keitinys atitinka tam tikrą lygiakraščio trikampio transformaciją: pirmasis – tapačią (vienetinę); antrasis, trečiasis ir ketvirtasis – pasukimą apie pažymėtas simetrijos ašis; penktasis – pasukimą apie simetrijos centrą pagal laikrodžio rodyklę ir šeštasis – pasukimą prieš laikrodžio rodyklę.



4 pav.

Truputį keitinių teorijos. Keitinį, gautą iš tapačiojo keitinio E sukeitus du apatinės eilutės elementus i ir j vietomis (t. y., atlikus apatinio kėlinio elementų transpoziciją),

$$s = \begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & j & \dots & i & \dots \end{pmatrix}$$

irgi vadinsime tiesiog *transpozicija* arba *dvinariu ciklu* ir žymėsime (i, j); čia daugtaškiai reiškia nekeičiamus elementus. Transpozicija yra nelyginis keitinys.

Keitinį padauginę iš dešinės iš transpozicijos (i, j), apatinės šio keitinio eilutės elementus i ir j sukeisime vietomis (bus atlikta elementų i ir j transpozicija). Kadangi visus kėlinius baigtiniu transpozicijų skaičiumi galima gauti iš kėlinio $1, 2, 3, \dots, n$, tai bet kuris keitinys gali būti gautas iš vienetinio E, jį baigtinį skaičių kartų dauginant (iš dešinės) iš transpozicijų. Tokiu būdu, jeigu nerašysime vienetinio keitinio E, gausime keitinio išraišką transpozicijų sandauga. Pavyzdžiui,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2)(1,5)(3,4).$$

Atkreipkime dėmesį, kad išraiška transpozicijų sandauga yra ne vienintelė, pavyzdžiui,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,4)(2,4)(4,5)(3,4)(1,3).$$

Tačiau ir vienos, ir kitos išraiškos daugiklių skaičius yra nelyginis, be to pats keitinys yra taip pat nelyginis (7 inversijos)!

2.3 teorema. Bet kurios keitinio išraiškos transpozicijų sandauga šių transpozicijų skaičiaus lyginumas yra toks pat ir sutampa su pačio keitinio lyginumu.

Įrodymas. Matematinės indukcijos metodu įrodykime, kad k transpozicijų sandauga yra keitinys, kurio lyginumas yra toks pat kaip ir skaičiaus k. Kai $k = 1$, tai teiginys yra teisingas, nes transpozicija yra nelyginis keitinys. Tarkime, kad teiginys teisingas, kai dauginamųjų yra $k - 1$. Žinoma, skaičiai k ir $k - 1$ yra priešingo lyginumo, taip pat ir keitinio padauginimas iš transpozicijos keičia keitinio lyginumą priešingu (sukeičiami du antrosios eilutės elementai vietomis). Vadinasi, teiginys teisingas ir kai dauginamųjų yra k. Taigi teiginys teisingas su visais natūraliaisiais $k \geq 1$. ∇

Keitinys

$$s = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{k-1} & i_k & i_{k+1} & \dots & i_n \\ i_2 & i_3 & \dots & i_k & i_1 & i_{k+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

vadinamas *k-nariu ciklu* ($1 \le k \le n$) ir žymimas $s = (i_1, i_2, \dots, i_k)$. Kai $k = 2$, gausime aukščiau apibrėžtą transpoziciją.

Du n-ojo laipsnio ciklai vadinami *nepriklausomais*, jeigu jie neturi bendrų elementų.

Keitinį vieninteliu būdu galima išreikšti nepriklausomų ciklų sandauga ir, atvirkščiai, ciklais išreikštas keitinys užrašomas įprastine forma taip pat vienareikšmiškai.

Pavyzdžiui, aukščiau nagrinėti keitiniai nepriklausomų ciklų sandauga užrašomi taip:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,5,3,4)(2), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1,3)(2,4,5),$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,4,3,5), \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1,4,3,5,2),$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,2,5)(3,4).$$

Keitinio A išraiškoje matome "ciklą", kurio ilgis 1. Kartais tokie ciklai iš viso nerašomi, nes elementas nekeičiamas, tačiau tuomet būtina žinoti keitinio laipsnį.

n-ojo laipsnio keitinio A *dekrementu* (žymėsime $d(A)$) vadinamas skirtumas $n - s$; čia s yra nepriklausomų ciklų skaičius (įskaitant ir vienetinio ilgio ciklus).

Pavyzdžiui, $d(A) = 3,\ d(B) = 3,\ d(AB) = 4,\ d(BA) = 4,\ d(C) = 3$.

2.4 teorema. Keitinio lyginumas yra toks pat kaip ir šio keitinio dekremento lyginumas.

Įrodymas. Bet kurį ilgio k ciklą galima užrašyti $(k-1)$-os transpozicijos sandauga:

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) = (i_1, i_2)(i_1, i_3)\dots,(i_1, i_k).$$

Tarkime, šis keitinys (n-ojo laipsnio) užrašytas nepriklausomų ciklų sandauga, iš kurių v yra vienetinio ilgio (tiek yra "nejudinamų" elementų), o kiti r – ilgesni. Kiekvienas ne vienetinio ilgio ciklas išskaidytas tokia transpozicijų sandauga. Šių transpozicijų skaičių gausime iš "judinamų" elementų skaičiaus $n - v$ atėmę nepriklausomų ne vienetinio ilgio ciklų skaičių r. Tačiau skaičius $n - v - r = n - (v + r)$ yra keitinio dekrementas. Todėl keitinio lyginumas ir nusakomas dekremento lyginumu. ∇

2.4. *n*-osios eilės determinantas. Apibrėžimas ir savybės.

Kiekvienai kvadratinei matricai

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

apibrėžiamas skaičius, kuris vadinamas jos determinantu ir žymimas

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

arba trumpiau – $|A|$, $\det A$, Δ.

Matricos determinantas apibrėžiamas tokia taisykle:

• *Iš kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio imama po vieną matricos elementą ir jie sudauginami. Sudaromos visos galimos sandaugos* $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$ *(indeksai* $j_1, j_2, \ldots, j_n$ *yra pasirinktųjų stulpelių numeriai – visi skirtingi).*

• *Kiekviena sandauga* $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$ *padauginama iš skaičiaus* $(-1)^I$*; čia* I *– sandaugą* $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}$ *sudarančių matricos elementų indeksų keitinio*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}; \tag{2.10}$$

inversijų skaičius.

• *Visi gautieji skaičiai*

$$(-1)^I a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \tag{2.11}$$

sudedami (dėmenų iš viso yra $n!$*). Ši suma vadinama matricos* A *determinantu.*

Formule (2.11) apibrėžti skaičiai vadinami *determinanto nariais.*

Pritaikykime determinanto apibrėžimą pirmos, antros ir trečios eilės kvadratinėms matricoms.

Kai $A = (a_{11})$, tai, aišku, $\det A = a_{11}$.

Skaičiuodami antros eilės kvadratinės matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

determinantą, gauname tik du determinanto narius:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \tag{2.12}$$

Trečios eilės kvadratinės matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

determinantas yra šešių narių suma:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$$+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}. \tag{2.13}$$

Kiekvieno nario ženklą galima nustatyti apskaičiavus atitinkamo indeksų keitinio inversijų skaičių.

Skaičiuojant determinantus naudinga žinoti jų savybes. Jos išvedamos tiesiogiai iš determinanto apibrėžimo.

1 savybė. *Bet kurios kvadratinės matricos* A *determinantas lygus transponuotos matricos* A^T *determinantui:*

$$\det A = \det A^T.$$

Matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

transponuota matrica vadiname matricą

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Įrodymas. Matrica A^T sudaryta iš tų pačių elementų kaip ir matrica A – tik matricos A^T eilutes sudaro matricos A stulpeliai. Sudarant determinanto narius imama po vieną elementą iš kiekvienos eilutės ir kiekvieno stulpelio, taigi abiejų determinantų nariai bus tie patys. Matricos A^T nario indeksų keitinys yra tokio pat matricos A nario indeksų atvirkštinis keitinys, todėl jų lyginumas yra toks pat. Taigi abiejų determinantų nariai vienodi ir įeina su vienodais ženklais. ∇

Vadinasi, bet kuri determinanto savybė, įrodyta eilutėms, galios ir stulpeliams. Todėl kad būtų trumpiau kitas savybes formuluosime tik eilutėms.

2 savybė. Jei kvadratinė matrica A turi eilutę, sudarytą vien tik iš nulių, tai jos determinantas lygus nuliui.

Įrodymas. Tarkime, matricos A i-oji eilutė yra nuliai. Į kiekvieną jos determinanto narį įeina i-osios eilutės elementas - nulis. Taigi visi determinanto nariai lygūs nuliui. ∇

3 savybė. Sukeitus dvi matricos A eilutes vietomis, keisis jos determinanto ženklas.

Įrodymas. Tarkime, sukeitėme matricos A, kurios determinantas Δ, i-ąją ir j-ąją eilutes vietomis - gavome matricą A' su determinantu Δ'. Aišku, abu determinantus sudaro tie patys nariai. Determinanto Δ nario $a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{ik_i}\ldots a_{jk_j}\ldots a_{nk_n}$ ženklas nusakomas keitiniu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_i & \ldots & k_j & \ldots & i_n \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Tokio nario determinante Δ' ženklas nustatomas iš keitinio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j & \ldots & i & \ldots & n \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_i & \ldots & k_j & \ldots & i_n \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

nes, pavyzdžiui, elementas a_{ik_i} dabar yra j-oje eilutėje, tačiau lieka k_i stulpelyje. Keitiniai (2.14) ir (2.15) yra priešingo lyginumo, nes vienas iš kito gaunami padauginus iš vienos transpozicijos. Taigi kiekvieno determinanto Δ' nario ženklas yra priešingas determinanto Δ ženklui. ∇

4 savybė. Jei kvadratinė matrica A turi dvi vienodas eilutes, tai jos determinantas lygus nuliui.

Įrodymas. Tegu matricos A i-oji j-oji eilutės vienodos ($i \neq j$), o jos determinantas lygus Δ. Po šių eilučių sukeitimo vietomis gausime tokią pat matricą su determinantu lygiu $-\Delta$ (pagal 3 savybę). Taigi $\Delta = -\Delta$, t. y. $\Delta = 0$. ∇

5 savybė. Jei kvadratinės matricos A kurios nors eilutės visi elementai turi tą patį daugiklį λ, tai jį galima iškelti prieš determinanto ženklą.

Įrodymas. Tarkime matricos A i-osios eilutės visi elementai turi daugiklį λ. Kadangi į kiekvieną determinanto narį įeina šios eilutės elementas, tai ir kiekvienas determinanto narys turi šį daugiklį. Vadinasi, ir pats determinantas turi daugiklį λ. ∇

6 savybė. Jei matricos A dvi eilutės proporcingos, tai jos determinantas lygus nuliui.

Įrodymas. Jeigu matricos i-oji eilutė skiriasi nuo j-osios eilutės tuo pačiu daugikliu λ, tai šį daugiklį galima iškelti prieš determinanto ženklą. Tuomet matrica turės dvi vienodas eilutes ir jos determinantas lygus nuliui. ∇

7 savybė. Tegu matricos A vienos eilutės elementai yra dviejų skaičių sumos: $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n$. Tuomet šios matricos determinantas lygus dviejų determinantų sumai – ir pirmojo, ir antrojo visos eilutės tokios pat išskyrus i-ąją: pirmojo determinanto i-osios eilutės elementai yra b_{ij}, antrojo – c_{ij}.

Įrodymas. Kiekvienas determinanto A narys yra

$$a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{ik_i} \ldots a_{nk_n} = a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots (b_{ik_i} + c_{ik_i}) \ldots a_{nk_n} =$$

$$a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots b_{ik_i} \ldots a_{nk_n} + a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots c_{ik_i} \ldots a_{nk_n}$$

su atitinkamu ženklu. Sugrupavę pirmuosius dėmenis gausime pirmąjį determinantą, sugrupavę antruosius – antrąjį. ∇

Apibrėžimas. Sakome, kad matricos A i-oji eilutė yra kitų eilučių *tiesinis darinys*, jei ji yra šių eilučių, padaugintų iš realiųjų skaičių, suma.

8 savybė. Jei matricos A viena eilutė yra kitų eilučių tiesinis darinys, tai $\det A = 0$.

Įrodymas. Pasinaudojus 7 savybe matricos A determinantą išskaidykime determinantų suma. Kiekvienas šios sumos determinantas turės dvi proporcingas eilutes ir todėl lygus nuliui. ∇

9 savybė. Kvadratinės matricos determinantas nepasikeis, jeigu prie eilutės pridėsime kitą eilutę, padaugintą iš bet kurio skaičiaus λ.

Įrodymas. Naujai gautąjį determinantą išskaidykime dviejų determinantų suma. Vienas iš jų sutampa su pradiniu determinantu, o kitas turės dvi proporcingas eilutes ir bus lygus nuliui. ∇

Pastaba. Determinanto reikšmė irgi nepasikeis, jeigu prie eilutės pridėsime bet kurių kitų eilučių tiesinį darinį.

Naudodamiesi šiomis savybėmis jau galime apskaičiuoti ir aukštesnių negu trečios eilės determinantų reikšmes – matricą nekeičiant jos determinanto reikšmės galima suvesti į trikampę formą (kai visi elementai virš pagrindinės arba šalutinės įstrižainės yra lygūs nuliui) ir tuomet determinanto reikšmė surandama lengvai – ji yra lygi įstrižainės elementų sandaugai, su atitinkamu ženklu.

Patogesnis yra kitas determinanto skaičiavimo būdas – išreikšti jį žemesnės eilės determinantais, kuriuos jau mokame apskaičiuoti. Tuo tikslu turime įvesti matricos elemento adjunkto sąvoką.

Pasirinkime bet kurį matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{ij+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

elementą a_{ij}, išbraukime jos i-ąją eilutę ir j-ąjį stulpelį, o iš likusių elementų sudarykime $(n-1)$-os eilės kvadratinę matricą:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Šios matricos determinantas (žymimas M_{ij}) vadinamas matricos A *elemento* a_{ij} *minoru.* Taigi

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.16}$$

Pavyzdžiui, matricos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

elementų minorai tokie:

$$M_{11} = \det(3) = 3,$$

$$M_{12} = \det(0) = 0,$$

$$M_{21} = \det(-2) = -2,$$

$$M_{22} = \det(5) = 5.$$

Trečios eilės matrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

turi devynis elementus, todėl ir minorų devyni. Kelis apskaičiuokime:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 = -3;$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 4 = -17;$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 11.$$

Adjunkto apibrėžimas. *Kvadratinės matricos A elemento a_{ij} adjunktas (žym. A_{ij}) yra skaičius, gaunamas pagal formulę:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}; \tag{2.17}$$

čia M_{ij} – elemento a_{ij} minoras.

2.2 pavyzdys. Apskaičiuokime matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

elementų adjunktus A_{11}, A_{23} ir A_{42}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 6 - 0 \cdot 1 \cdot 1 = -49;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 5 - 0 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 6 - 1 \cdot 1 \cdot 5) = -25;$$

$$A_{42} = (-1)^{4+2} \cdot M_{42} = M_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 2 = -15.$$

2.5 teorema. *Kvadratinės matricos*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

determinantas $\det A$ *lygus bet kurios eilutės (bet kurio stulpelio) elementų ir jų adjunktų sandaugų sumai.*

Ši teorema yra žymai bendresnės Laplaso teoremos (kurią suformuluosime vėliau) atskiras atvejis. Skaičiuojant determinantus vis dėlto dažniau naudinga 2.5 teorema.

Parašysime determinanto skaičiavimo formules:

$$\det A = a_{i1} \cdot Ai1 + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot A_{in} \tag{2.18}$$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$;

$$\det A = a_{1j} \cdot A1j + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{nj} \cdot A_{nj} \tag{2.19}$$

$(j = 1, 2, \cdots, n)$.

Formulės (2.18) ir (2.19 vadinamos atitinkamai determinanto skleidiniu pasirinktąja eilute ir pasirinktuoju stulpeliu.

2.3 pavyzdys. Apskaičiuokime ketvirtos eilės kvadratinės matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determinantą. Skaičiuodami pagal (2.18) formulę su $i = 4$, gausime

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{42} + 0 \cdot A_{43} + 0 \cdot A_{44} = 5 \cdot A_{41} + A_{42} =$$

$$= 5 \cdot (-1)^{4+1} \cdot M_{41} + (-1)^{4+2} \cdot M_{42} = -5 \cdot M_{41} + M_{42} =$$

$$= -5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 4 + 7 \cdot 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 7 \cdot 1 \cdot 4 \cdot -2 \cdot 3 \cdot 2) +$$
$$+ (1 \cdot 1 \cdot 4 + 7 \cdot 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 7 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 2) =$$
$$= -5 \cdot (-32) + (-58) = 102.$$

Šį determinantą galima apskaičiuoti ir racionaliau, t. y. skleidinio formulę taikyti ne iš karto, kaip darėme dabar, o pirmiau, pasinaudojus savybėmis, eilutėje arba stulpelyje "padaryti visus nulius", išskyrus vieną. Tuomet skleidžiant determinantą reikėtų apskaičiuoti tik vieną adjunktą. Pavyzdžiui, trečią stulpelį padauginę iš -2 ir pridėję prie ketvirto, turėsime:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & -14 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{33} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -14 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 2(10 - 28 + 70 - 1) = 102.$$

Panašiai skleidimu mažindami skaičiuojamo determinanto eilę galėtume apskaičiuoti ir aukštesnių eilių ir apskritai n-osios eilės determinantus.

Užduotis. Naudodamiesi determinanto savybėmis ir determinanto skleidiniu eilute arba stulpeliu apskaičiuokite kvadratinės matricos

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 & 9 \\ 8 & -2 & 6 & 7 \\ 14 & 5 & -15 & 8 \\ 7 & 4 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

determinantą. (Ats.: 935.)

2.5. Laplaso teorema. (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827, prancūzų matematikas.)

Matricos A determinante pasirinkime k eilučių ir k stulpelių ($1 \leq k \leq n-1$). Elementai, stovintys pasirinktųjų eilučių ir stulpelių susikirtimuose, sudaro k-osios eilės determinantą M, vadinamą *k-osios eilės minoru.* Kai $k = 1$, turėsime pirmos eilės minorą, t. y., tiesiog matricos elementą. Visi likusieji elementai sudaro eilės $n - k$ matricą, kurios determinantas M' vadinamas *minoro M papildomu minoru.*

Jei minoras M sudarytas iš eilučių $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ir stulpelių $j_1, j_2, \ldots j_k$, tai minorą M', paimtą su ženklu $(-1)^{s_M}$, kai $s_M = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k$, vadinamas *minoro M adjunktu.*

2.5 teorema (Laplaso). Pasirinkime n-os eilės determinanto $|A|$ k, $1 \leq k \leq n-1$, eilučių (arba k stulpelių) ir sudarykime iš jų elementų visus galimus minorus M. Tuomet šių minorų ir jų adjunktų sandaugų suma lygi determinanto $|A|$ reikšmei.

Norėdami įrodyti šią teoremą, pirmiau įrodysime šitokį teiginį.

Lema. *Kiekvieno minoro M kiekvieno nario ir jo adjunkto M' kiekvieno nario sandauga yra determinanto $|A|$ narys.*

Įrodymas. Pirmiau tarkime, kad minoras M yra determinanto viršutiniame kairiajame kampe:

$$|A| = \left| \begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k-1} & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{k-11} & \cdots & a_{k-1k-1} & a_{k-1k} & a_{k-1k+1} & \cdots & a_{k-1n} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk-1} & a_{kk} & a_{kk+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline a_{k+11} & \cdots & a_{k+1k-1} & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right|$$

Tuomet minoras M' yra dešiniame apatiniame kampe, o minoro M adjunktas yra lygus $(-1)^{s_M} M' = M'$, nes $s_M = 1+2+\ldots+k+1+2+\ldots+k = 2(1+2+\ldots+k)$.

Tegu $(-1)^r a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ki_k}$ yra bet kuris minoro M narys; čia r yra inversijų skaičius keitinyje

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix}.$$

Bet kuris minoro M' narys yra $(-1)^{r'} a_{k+1l_{k+1}} a_{k+2l_{k+2}} \ldots a_{nl_n}$ su inversijų skaičiumi r' keitinyje

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \ldots & n \\ l_{k+1} & l_{k+2} & \ldots & l_n \end{pmatrix}.$$

Sudauginę šiuos narius gausime

$$(-1)^{r+r'} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{k,i_k} a_{k+1,l_{k+1}} a_{k+2,l_{k+2}} \ldots a_{n,l_n}.$$

Tačiau toks pat narys ir su tokiu pat ženklu įeina ir į determinanto $|A|$ išraišką.

Lema įrodyta atskiru atveju, kai minoras M yra determinanto viršutiniame kairiajame kampe. Norėdami įsitikinti lemos teisingumu bet kuriam minorui, tarkime minoro M elementai yra eilutėse su numeriais $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ ir stulpeliuose su numeriais $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$. Keisdami gretimas eilutes vietomis ir po to keisdami vietomis gretimus stulpelius, minorą M galima "atvaryti" į kairyjį viršutinį kampą. Tam kad i_1 eilutė būtų pirma, reikės atlikti $i_1 - 1$ keitimų, kad i_2 būtų antra jų teks atlikti $i_2 - 2$ ir t. t., kad i_k eilutė taptų k-ąja eilute, reikės atlikti $i_k - k$ keitimų – iš viso

$$i_1 - 1 + i_2 - 2 + \ldots + i_k - k = i_1 + i_2 + \ldots + i_k - (1+2+\ldots+k).$$

Taip pat elgdamiesi su stulpeliais, turėsime iš viso atlikti

$$j_1 - 1 + j_2 - 2 + \ldots + j_k - k = j_1 + j_2 + \ldots + j_k - (1+2+\ldots+k)$$

keitimų. Sudėję šiuos skaičius gausime, kad suvedant į nagrinėtąjį atvejį iš viso teks atlikti

$$s_M - 2(1+2+\ldots+k)$$

stulpelių ir eilučių transpozicijų. Vadinasi, "naujojo" determinanto kiekvieno nario ženklas yra toks pat kaip ir pradinio. ∇

Laplaso teoremos įrodymas. Iš pasirinktųjų k eilučių imant įvairius k stulpelius galima sudaryti C_n^k k-osios eilės minorų. Kiekvienas šis minoras turi $k!$ narių, o kiekvienas adjunktas turi $(n-k)!$ narių, Vadinasi, iš viso gausime $C_n^k \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$ determinanto narių. Lieka įrodyti, kad taip gausime visus determinanto $|A|$ narius.

Tarkime, kad $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$ yra bet kuris determinanto $|A|$ narys. Atrinkime iš šio nario elementus, priklausančius pasirinktosioms k eilutėms, ir sudarykime jų sandaugą. Šie nariai yra tam tikrų k stulpelių elementai, taigi sudarytoji sandauga yra minoro iš pasirinktųjų k eilučių ir k stulpelių narys. Visų sandaugos $a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{ni_n}$ likusiųjų elementų sandauga yra atitinkamo adjunkto narys, nes sudarytas iš likusių $n-k$ eilučių ir stulpelių. Vadinasi, skleidžiant determinantą pagal pasirinktąsias k eilutes, gaunamas kiekvienas determinanto narys. ∇

2.6. Uždaviniai

1. Naudodamiesi trikampio taisykle apskaičiuokite trečios eilės determinantus:

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}\ 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ a & b & c \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}\ 3)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}\ 4)\ \begin{vmatrix} x+y & y & y \\ y & x+y & y \\ y & y & x+y \end{vmatrix}.$$

2. Raskite šių kėlinių inversijų skaičių:

1) $7,5,6,4,1,3,2$; 2) $10,9,7,8,6,5,3,4,2,1$; 3) $2,4,6,\dots,2n,1,3,5,\dots,2n-1$;
4) $3,6,9,\dots,3n,2,5,8,\dots,3n-1,1,4,7,\dots,3n-2$;
5) $2,5,8,\dots,3n-1,1,4,7,\dots,3n-2,3,6,9,\dots,3n$;
6) $1,5,\dots,4n-3,3,7,\dots,4n-1,2,6,\dots,4n-2,4,8,\dots,4n$.

3. Nustatykite, ar keitinys lyginis, ar nelyginis:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix};\ 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 9 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix};$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$4)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \dots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix};$$

5) $(1,5)(2,4,3)$; 6)$(1,3)(2,5)(4)$; 6) $(7,5,3,1)(2,4,6)(8)(9)$;

4. Atlikite veiksmus:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 1 & 5 & 3 & 8 & 2 & 7 \end{pmatrix};$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}^5;\ 3)\ A^{100}, \text{ kai } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 9 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Išspręskite lygtį $AXB = C$, kai:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 2 & 5 & 1 & 9 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 5 & 2 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 9 & 1 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Raskite visus 5-ojo laipsnio keitinius, su kuriais keitinys $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ yra komutatyvus.

7. Ar sandauga yra determinanto narys - jeigu narys, tai su kokiu ženklu:
1) $a_{27}a_{36}a_{51}a_{74}a_{25}a_{43}a_{62}$; 2) $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$; 3) $a_{12}a_{23}a_{34}\dots a_{n-1,n}a_{n1}$;
4) $a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\dots a_{n-1,2}a_{n1}$; 5) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}\dots a_{3n-2,3n}a_{3n-1,3n-1}a_{3n,3n-2}$.

8. Apskaičiuokite determinantus:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -6 & 3 \\ -3 & -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$;

8) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$; 9) $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$;

10) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; 11) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 7 \end{vmatrix}$;

12) $\begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 6 \end{vmatrix}$; 13) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 4 \end{vmatrix}$;

14) $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 8 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 8 \end{vmatrix}$; 15) $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

3

Matricos

3.1. Matricos sąvoka, taikymo galimybės.

Ir matematikoje, ir fizikoje, ir ekonomikoje, ir kituose moksluose tenka nagrinėti ne tik skaičių, bet ir kitokių matematinių objektų aibes. Šiame skyrelyje panagrinėsime matricų – skaičių lentelių – teorijos elementus. Su matricomis susipažinome ankstesniuose skyriuose, tačiau ten jos buvo vartojamos tiesiog dėl pažymėjimų trumpumo. Pavyzdžiui, spręsdami tiesinių lygčių sistemas, skaičiavimus atlikdavome su koeficientų matricos elementais, apibrėžėme kvadratinės matricos determinantą.

Pasirinkime du natūraliuosius skaičius m ir n bei $k = m \cdot n$ realiųjų skaičių: a_{ij}; $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Iš šių skaičių sudaryta stačiakampė lentelė

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vadinama $m \times n$ matmenų matrica arba tiesiog matrica.

Kai matricos A eilučių skaičius m lygus stulpelių skaičiui n, ji vadinama ***n*-os eilės kvadratine matrica**. Pavyzdžiui,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

yra antros eilės kvadratinės matricos, o

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

trečios eilės kvadratinės matricos.

Kvadratinės matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

elementai $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sudaro jos pagrindinę įstrižainę (diagonalę), o kitus du kampus jungiantys elementai $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ – šalutinę įstrižainę.

Kvadratinė (n-os eilės) matrica

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

vadinama (n-os eilės) **vienetine matrica**. Matome, kad vienetinė matrica yra tokia kvadratinė matrica, kurios elementai (skaičiai a_{ij}) tenkina šią sąlygą:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad i = j; \\ 0, & \text{kai} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Jeigu visi $m \times n$ matmenų matricos A elementai (skaičiai a_{ij}) lygūs nuliui, ji vadinama **nuline matrica** ir paprastai žymima raide O. Taigi

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

yra bendrasis nulinės matricos užrašas. Jos matmenys arba nurodomi, arba savaime aiškūs (kai nėra praleistų eilučių ir stulpelių). Pavyzdžiui,

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

yra 3×5 matmenų nulinė matrica, o

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trečios eilės nulinė kvadratinė matrica.

$n \times m$ matmenų matrica

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

yra $m \times n$ matmenų matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

transponuotoji matrica. Transponavimo veiksmas (atitinkamų eilučių ir stulpelių sukeitimas) žymimas raide T prie matricą reiškiančios raidės arba prie pačios matricos. Rašoma taip: $B = A^T$ arba

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T .$$

Aišku, kad ir $A = B^T$. Be to, nesunku suvokti, jog

$$\left(A^T\right)^T = A.$$

Matricos, turinčios tik vieną stulpelį arba tik vieną eilutę, vadinamos **vektoriais**. Matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

yra ***m*-matis vektorius**, o matrica

$$B = (b_{11}; b_{12}; \ldots ; b_{1n})$$

yra ***n*-matis vektorius**. Paprastai vektoriai žymimi mažosiomis raidėmis, o jų komponentėms (matricų elementams) nurodyti naudojamas tik vienas indeksas. Pavyzdžiui,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad b = (b_1; b_2; \ldots ; b_n)$$

yra vektoriai. Vartojant transponavimo veiksmą stulpeliu parašytą vektorių a galima apibūdinti taip: $a = (a_1; a_2; \ldots ; a_m)^T$.

Siekiant sutrumpinti užrašus, kartais matricų elementai nevardijami, o rašoma $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ nurodant matmenis, sakykime, $m \times n$ ir $k \times l$.

Bet kurios vienodų matmenų, tarkime, $m \times n$, matricos $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij}), \ldots$ vadinamos **vienarūšėmis matricomis**.

Dvi vienarūšės matricos $A = (a_{ij})$ ir $B = (b_{ij})$ vadinamos **lygiomis** (rašoma $A = B$), jeigu atitinkami jų elementai vienodi: $a_{ij} = b_{ij}$. Pavyzdžiui, 2×3 matmenų matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

yra lygios: $A = B$.

Kaip matėme, tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

apibūdina jos **koeficientų matrica**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

nežinomųjų vektorius (matrica) x bei **laisvųjų narių vektorius** (matrica) b:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Imdami įvairias matricas A, x ir b, galime gauti įvairias tiesinių lygčių sistemas.

Matricos vartojamos ne tik tiriant ir sprendžiant tiesinių lygčių sistemas. Dar keli matricų pavyzdžiai.

3.1 pavyzdys. Sakykime, du lošėjai meta po vieną monetą. Jeigu abi monetos atsiverčia pinigu, tai pirmasis lošėjas moka antrajam vieną litą. Jei pasirodo abu herbai, tai antrasis lošėjas moka pirmajam du litus. Kitais dviem atvejais pinigai nemokami.

Remiantis lošimo aprašymu galima sudaryti tokią pirmojo lošėjo išlošių lentelę:

	P	H
P	-1	0
H	0	2

Pagal šią lentelę galima sudaryti pirmojo lošėjo išlošių matricą

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aišku, antrojo lošėjo išlošių matrica (pažymėkime ją B) tokia:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.2 pavyzdys. Dvi degalinės, D_1 ir D_2, prekiauja trijų rūšių: A, B ir C benzinu. Pirmoji degalinė vieną litrą A benzino parduoda už 1,98 Lt, o antroji – už 2,03 Lt. Vieno litro B rūšies benzino kaina yra atitinkamai 2,27 Lt ir 2,23 Lt, o C rūšies – atitinkamai 2,45 Lt ir 2,49 Lt.

Pagal šią informaciją sudarykime benzino kainų lentelę

	A	B	C
D_1	1,98	2,27	2,45
D_2	2,03	2,23	2,49

bei benzino kainų matricą

$$K = \begin{pmatrix} 1,98 & 2,27 & 2,45 \\ 2,03 & 2,23 & 2,49 \end{pmatrix}.$$

3.3 pavyzdys. Trys bankai B_1, B_2 ir B_3, priima pinigus mokėdami tokias palūkanas. Pirmasis bankas už 60 dienų moka 4%, už 120 dienų – 6%, už 180 dienų – 7%, o už metus – 8%. Antrasis moka atitinkamai 3%, 5%, 7%, 9%, o trečiasis – 3,5%, 7%, 8%, 9%.

Visų trijų bankų palūkanų procentus galima surašyti į lentelę:

	60 d.	120 d.	180 d.	1 m.
B_1	4	6	7	8
B_2	3	5	7	9
B_3	3,5	7	8	9

Matematiniams skaičiavimams atlikti kartais patogiau vietoj šios lentelės vartoti palūkanų procentų matricą

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3,5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

3.2. Tiesiniai veiksmai su matricomis.

Tiesiniais veiksmais vadinami šie: matricos daugyba iš skaičiaus, matricų sudėtis ir matricų atimtis.

1) *$m \times n$ matmenų matricos $A = (a_{ij})$ ir skaičiaus λ sandauga (rašoma λA) yra $m \times n$ matmenų matrica $B = (b_{ij})$, kurios elementai skaičiuojami pagal formulę $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.*

Pavyzdžiui, matricos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ir skaičiaus $\lambda = 0,4$ sandauga yra matrica B:

$$B = 0,4 \cdot A = 0,4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 2 & 2,8 \\ 1,2 & 0,4 & 0,8 \\ -1,6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) *Vienarūšių, sakykime, $m \times n$ matmenų matricų $A = (a_{ij})$ ir $B = (b_{ij})$ suma* (rašoma $A+B$) *yra $m \times n$ matmenų matrica $C = (c_{ij})$, kurios elementai skaičiuojami pagal formulę $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.*

Pavyzdžiui, matricų

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

suma yra matrica C:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 & -2+3 & 3+1 \\ 3+0 & 0+2 & -2+3 \\ 0+1 & 4+1 & 1+4 \\ -3+0 & 5+3 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ -3 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beje, matricos

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

nesumuojamos (nesudedamos), nes yra nevienarūšės.

Trijų vienarūšių matricų $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ ir $C = (c_{ij})$ sumą (rašoma $A + B + C$) suvokiame kaip matricų $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ ir $C = (c_{ij})$ sumą. Taigi

$$A + B + C = (A + B) + C = \Big((a_{ij}) + (b_{ij})\Big) + (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}).$$

Analogiškai apibūdinama ir didesnio skaičiaus vienarūšių matricų sudėtis.

Tokie tiesinių veiksmų su matricomis apibrėžimai paremti tiesinių atvaizdžių veiksmais, kurie turi gana aiškią prasmę. Akivaizdu, kad kiekviena matrica $A_{m\times n}$ vienareikšmiškai nusako tiesinį atvaizdį

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & y_2, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array}\right.$$

ir atvirkščiai, kiekvieną atvaizdį atitinka tam tikra matrica. Šitoks tiesinis atvaizdis kiekvienam vektoriui $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ priskiria vektorių $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$. Tuomet matricą $\lambda A_{m\times n}$ atitinkantis atvaizdis vektoriui $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ priskiria vektorių $(\lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_m)$. Panašiai tiesiniais atvaizdžiais interpretuojama ir matricų sudėtis.

Nesunku įsitikinti, kad minėtiems veiksmams galioja tokios savybės:

1) $A + B = B + A$;

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3) kiekvienai matricai A egzistuoja priešinga matrica $-A$, t. y. tokia, jog $A + (-A) = O$;

Kai a, b – realieji skaičiai, tai

4) $a(bA) = (ab)A$;

5) $a(A + B) = aA + aB$;

6) $(a + b)A = aA + bA$;

7) $1A = A$.

3.3. Matricų daugyba.

Sakykime, $A = (a_{ij})$ yra $m \times k$ matmenų matrica, o $B = (b_{ij})$ yra $k \times n$ matmenų matrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix}.$$

šių matricų sandauga (žym. $A \cdot B$) yra $m \times n$ matmenų matrica $C = (c_{ij})$, kurios elementai apskaičiuojami pagal šią formulę:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{ik} \cdot b_{kj}; \tag{3.1}$$

$i = 1, 2, \cdots, m,\;\; j = 1, 2, \cdots, n.$

Atkreipkime dėmesį, kad dauginant matricas labai svarbus yra jų matmenų suderintumas: antroji matrica turi turėti tiek eilučių, kiek pirmoji matrica turi stulpelių. Nesuderintų matmenų matricos nedauginamos.

3.4 pavyzdys. Sudauginkime matricas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matome, jog poros (A, B) matmenys yra suderinti, o priešingos poros (B, A) matmenys nesuderinti. Taigi galima tik sandauga $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 7 \cdot 5 & 2 \cdot (-7) + 7 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 4 \cdot (-7) + 3 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 & 2 \cdot (-7) + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & -14 \\ 23 & -28 \\ 4 & -14 \end{pmatrix}.$$

3.5 pavyzdys. Apskaičiuokime matricų sandaugas $A \cdot B$ ir $B \cdot A$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Galimos abi matricų sandaugos: $A \cdot B$ ir $B \cdot A$:

$$1) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 1 & 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + (-3) \cdot 2 \\ -4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 1 & -4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-4) & 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 & 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -12 & 10 & 14 \\ -6 & 5 & 7 \\ -6 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Matricų matmenų suderintumo problemų nekyla, kai dauginame tos pačios eilės kvadratines matricas.

3.6 pavyzdys. Apskaičiuokime trečios eilės kvadratinių matricų

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sandaugas $A \cdot E$ ir $E \cdot A$:

$$1)\quad A\cdot E=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=A;$$

$$2)\quad E\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=A.$$

Taigi $A\cdot E=E\cdot A=A$.
Žinoma, analogišką rezultatą

$$A\cdot E=E\cdot A=A$$

gautume daugindami bet kurią n-tos eilės kvadratinę matricą

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \hdotsfor{4}\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

su n-tos eilės vienetine matrica

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \hdotsfor{4}\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

Pačiam skaitytojui paliekame įrodyti, kad matricų daugyba turi tokias savybes:

- $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ (asociatyvumas);
- $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ (distributyvumas);
- $A\cdot B\neq B\cdot A$ (komutatyvumas negalioja);
- $r\cdot(A\cdot B)=(r\cdot A)\cdot B=A\cdot(r\cdot B),\quad r\in\mathbb{R}$;
- $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

3.1 teorema. Dviejų tos pačios eilės kvadratinių matricų sandaugos determinantas yra lygus tų matricų determinantų sandaugai, t. y. $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

Įrodymas. Tegu $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \hdotsfor{4}\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \hdotsfor{4}\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$.

Nagrinėkime determinantą

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \hdotsfor{8}\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ \hdotsfor{8}\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix}.$$

Pagal Laplaso teoremą šio determinanto reikšmė lygi: $d=|A|(-1)^{2\sum_{i=1}^{n}i}|B|=|A||B|$.

Determinantą d galime apskaičiuoti ir kitaip - naudodamiesi determinanto savybėmis jį pertvarkykime taip, kad viršutinis kairysis kampas (ten, kur išdėstyti matricos A elementai) būtų sudarytas vien tik iš nulių. Tai galima pasiekti keliais žingsniais.

Pirmiausia prie pirmos eilutės pridėkime $(n+1)$-ąją, padaugintą iš a_{11}, $(n+2)$-ąją, padaugintą iš a_{12} ir t.t., $(2n)$-ąją eilutę, padaugintą iš a_{1n}. Tuomet pirmoji eilutė bus tokia: $0\ 0 \dots 0\ c_{11}\ c_{12} \dots\ c_{1n}$; $\quad c_{1j} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots n.$

Po to prie antros eilutės pridėkime $(n+1)$-ąją, padaugintą iš a_{21}, $(n+2)$-ąją, padaugintą iš a_{22} ir t.t., $(2n)$-ąją eilutę, padaugintą iš a_{2n}. Tuomet antroji eilutė bus tokia: $0\ 0 \dots 0\ c_{21}\ c_{22} \dots\ c_{2n}$; $\quad c_{2j} = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots n.$

Šitokį procesą tęskime kol gausime tokią n-ąją eilutę: $0\ 0 \dots 0\ c_{n1}\ c_{n2} \dots\ c_{nn}$; $\quad c_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots n.$

Po šių veiksmų determinanto dešiniame viršutiniame kampe stovės matricų A ir B sandauga AB, t. y. gausime determinantą

$$d = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Šį determinantą vėl apskaičiuokine pagal Laplaso teoremą:

$$d = |AB| \cdot (-1)^{\sum_{i=1}^{2n} i} \cdot (-1)^n = (-1)^{2n(n+1)}|AB| = |AB|.$$

Taigi $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. $\quad \nabla$

Išvada. Kvadratinių matricų sandaugos determinantas nelygus nuliui tik tuomet, kai dauginamųjų determinantai nelygūs nuliui.

3.4. Atvirkštinė matrica.

Skaičiuodami dviejų matricų sandaugas, matėme, kad ne bet kurias dvi matricas galima sudauginti, – tik suderintų matmenų. Be to, nevisada abi sandaugos, $A \cdot B$ ir $B \cdot A$, sutampa. Čia nagrinėsime tokias matricų A ir B poras, kurios turi šias savybes: 1) galimos abi sandaugos, $A \cdot B$ ir $B \cdot A$, ir 2) abi sandaugos yra tos pačios eilės vienetinės matricos: $A \cdot B = B \cdot A = E$.

Apibrėžimas. *Matrica B vadinama atvirkštine matricai A, jeigu*

$$A \cdot B = B \cdot A = E. \tag{3.2}$$

Pavyzdžiui, matrica

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

yra atvirkštinė matricai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

nes $A \cdot B = B \cdot A = E$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricos A atvirkštinė matrica žymima A^{-1}.

Ar bet kokių matmenų matrica turi atvirkštinę matricą? Sakykime, kad matricos A matmenys yra $m \times n$. Kad būtų galimos sandaugos $A \cdot A^{-1}$ ir $A^{-1} \cdot A$, matricos A^{-1} matmenys turėtų būti $n \times m$. Bet tada $A \cdot A^{-1}$ matmenys būtų $m \times m$, o $A^{-1} \cdot A$ matmenys būtų $n \times n$. Pagal apibrėžimą turi galioti lygybė $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$. Taigi būtinai $m = n$.

Išvada. Tik kvadratinė matrica A gali turėti atvirkštinę matricą A^{-1}.

Kaip surasti atvirkštinę matricą? Paprasčiausias atsakymas būtų toks - pažymėkime nežinomaisiais atvirkštinės matricos elementus ir išspręskime atitinkamą tiesinių lygčių sistemą (kad galiotų atvirkštinės matricos apibrėžimo lygybė). Tačiau nesunku matyti, kad šis kelias atvestų prie didelio lygčių skaičiaus sistemos sprendimo. Jei, pavyzdžiui, ieškotume trečios eilės matricos atvirkštinės matricos, tektų spręsti devynių tiesinių lygčių sistemą. Todėl ieškokime kitų atvirkštinės matricos apskaičiavimo būdų. Be to, ne kiekviena kvadratinė matrica turi atvirkštinę.

3.2 teorema. Kvadratinė matrica A gali turėti tik vieną atvirkštinę matricą.

Įrodymas. Tarkime, kad egzistuoja dvi matricos A atvirkštinės matricos B ir B'. Pagal apibrėžimą $AB = BA = E$ ir $AB' = B'A = E$. Tuomet $B = BE = B(AB') = (BA)B' = EB' = B'$. ∇

3.3 teorema. Matrica, kurios determinantas lygus nuliui (tokios matricos vadinamos *išsigimusiomis*), atvirkštinės matricos neturi.

Įrodymas. Tarę, kad išsigimusi matrica turi atvirkštinę, iš 3.1 teoremos gautume prieštaravimą. ∇

3.4 teorema. Atvirkštinė matrica visuomet yra neišsigimusi matrica.

Įrodymas taip pat išplaukia iš 3.1 teoremos. ∇

3.5 teorema. Kiekviena neišsigimusi ($|A| \neq 0$) matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

turi atvirkštinę

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}; \tag{3.3}$$

čia A_{ij} – matricos A elementų a_{ij} adjunktai.

Įrodymas. Pirmiausia įrodykime lygybę

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} |A|, & \text{kai} \quad i = j; \\ 0, & \text{kai} \quad i \neq j. \end{cases} \tag{3.4}$$

Viršutinioji lygybė (atveju $i = j$) jau įrodyta Laplaso teoremoje – tai determinanto skleidinys i-ąja eilute.

Apatinei lygybei gauti nagrinėkime determinantą D, kurio i-oji eilutė yra $b_1\ b_2\ \dots b_n$, o visos kitos eilutės tokios pat kaip matricos A. Išskleidę šį determinantą i-ąja eilute, gausime

$$D = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{jk}.$$

Tačiau, kai vietoje $b_1\ b_2\ \dots b_n$ įrašysime kurią nors (ne i-ąją) matricos A eilutę, determinantas D bus lygus nuliui, nes turės dvi vienodas eilutes. Taigi ir apatinioji formulės (3.4) lygybė įrodyta.

Teoremos įrodymui apskaičiuokime sandaugas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \hdotsfor{4} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

ir

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \hdotsfor{4} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Iš (3.4) lygybės išplaukia, kad šios abi sandaugos lygios vienetinei matricai E. ∇

3.7 pavyzdys. Apskaičiuokime (jei egzistuoja) matricos

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

atvirkštinę matricą.

Sprendimas. Pirmiausia apskaičiuokime matricos A determinantą $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot A_{12} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Kadangi $|A| \neq 0$, tai atvirkštinė matrica A^{-1} egzistuoja.

Matricos A elementų adjunktai tokie:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8,\ A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 12,\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4,\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7,\ A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

Pagal (3.3) formulę

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 \\ -1 & 12 & 7 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0,25 & -3 & -1,75 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricos A atvirkštinę matricą galima apskaičiuoti ir kitaip - nevartojant adjunktų. Kadangi matrica A vienareikšmiškai nusako tiesinį atvaizdį, kuris kiekvienam vektoriui $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ priskiria vektorių $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Tokį atvaizdį galime užrašyti lygybių sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & y_2, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & y_n \end{array} \right. \tag{3.5}$$

arba matriciniu pavidalu

$$AX = Y; \tag{3.6}$$

čia

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Kai matricos $|A| \neq 0$, tai (3.6) lygybės abi puses iš kairės padauginę iš atvirkštinės matricos A^{-1}, gausime

$$X = A^{-1}Y. \tag{3.8}$$

Vadinasi, išsprendę (3.5) lygčių sistemą kintamųjų $y_1, y_2, \ldots, y_n$ atžvilgiu, matrica prie kintamųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bus matricos A atvirkštinė matrica. Tačiau tiesinių lygčių sistemą mokame išspręsti vartodami elementariuosius pertvarkius. Patogiausia tai daryti taip: šalia matricos A parašyti vienetinę matricą E ir elemetariaisiais pertvarkiais matricą A "paversti" vienetine matrica – tuomet vienetinė matrica E "taps" atvirkštine matrica A^{-1}. Pademonstruosime tai aukščiau nagrinėtu pavyzdžiu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0,25 & -3 & -1,75 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

3.5. Kramerio formulės.

Šiame skyrelyje išvesime Kramerio formules n tiesinių lygčių sistemai su n nežinomųjų ir nelygiu nuliui koeficientų matricos determinantu. Kad tokios formulės teisingos dviejų bei trijų tiesinių lygčių sistemoms jau žinome.

Tiesinių lygčių sistemą

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right. \tag{3.9}$$

galime užrašyti matriciniu pavidalu (kaip ir (3.5) sistemą): $AX = B$; čia $|A| \neq 0$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Iš čia

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \ldots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots + b_nA_{n2} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \ldots + b_nA_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Nesunku suvokti, kad (3.11) stulpelio elementai yra determinantų D_i, $\;i = 1, 2, \ldots, n$, (kurie skiriasi nuo determinanto $|A|$ tik i-uoju stulpeliu – jo vietoje įrašytas laisvųjų narių stulpelis) skleidiniai pagal šį stulpelį. Vadinasi,

$$x_i = \frac{D_i}{|A|} \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

t. y. gavome Kramerio formules.

3.6. Uždaviniai.

1. Tegu

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kurios iš šių matricų apibrėžtos: $A+B$, $A+C$, AB, BA, CD, DC, D^2? Raskite jas.

2. Apskaičiuokite matricų sandaugas:

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; 2) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Apskaičiuokite:

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2; \; 2) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5; \; 3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n; \; 4) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n;$$

$$5) \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}^n; \; 6) \begin{pmatrix} 2a & -a^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n; \; 7) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}^3.$$

4. Raskite visas matricas, kurios yra komutatyvios su matrica A, kai$A =$:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};\ 2)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ 3)\ \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix};\ 4)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Raskite matricos A atvirkštinę matricą, kai $A =$:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ 2)\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix},\ 3)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ 4)\ \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$5)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ 6)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix},\ 7)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$8)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},\ 9)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Išspręskite lygtį (X yra nežinomoji matrica):

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ 2)\ X \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ 4)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$5)\ \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ 6)\ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Tegu A ir B – neišsigimusios matricos. Įrodykite, kad visos šios lygybės yra ekvivalenčios:

$$AB = BA, \quad AB^{-1} = B^{-1}A, \quad A^{-1}B = BA^{-1}, \quad A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

8. Įrodykite, kad lygybė

$$AB - BA = E$$

negalima.

9. Raskite visas antros eilės kvadratines matricas, kurių kvadratas yra nulinė matrica.

10. Raskite visas antros eilės kvadratines matricas, kurių kubas yra nulinė matrica.

11. Raskite visas antros eilės kvadratines matricas, kurių kvadratas yra vienetinė matrica.

4

Analizinės geometrijos elementai

Analizinė geometrija yra matematikos šaka, kuri vartodama koordinačių metodą geometrinių objektų savybes nagrinėja algebros metodais. Reikia atkreipti dėmesį, kad tiek koordinčių metodas, tiek pagrindiniai algebros metodai buvo žinomi seniai, tačiau analizinei geometrijai pradžią davė jų susijungimas.

4.1. Vektoriai.

Vektorių galima apibrėžti kaip grynai geometrinį objektą: *vektoriumi* vadiname atkarpą, kuriai priskirta kuri nors kryptis. Vektoriais patogu reikšti dydžius, kuriems apibūdinti reikalingas ne tik jo didumas, bet ir kryptis. Būdingas vektorių pritaikymo pavyzdys galėtų būti kūną veikiančios jėgos vaizdavimas. Jėga, veikianti kūną, yra tam tikro dydžio ir veikia tam tikra kryptimi. Geometriniai vektoriai paprastai žymimi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir t.t, arba, kai nurodomi vektoriaus pradžios ir galo taškai – $\vec{AB}$, $\vec{MN}$, o jų ilgiai – $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$, $|\vec{AB}|$, $|\vec{MN}|$.

Du vektoriai vadinami *lygiais*, jeigu jų ilgiai ir kryptys sutampa.

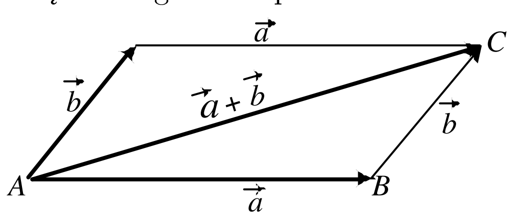
Vektoriai, esantys vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse, vadinami *kolineariaisiais vektoriais*.

Iš vektorių lygumo apibrėžimo išplaukia, kad visai nesvarbu kokiame erdvės taške yra vektoriaus pradžia. Vadinasi, vektorių galima suvokti, kaip visų erdvės taškų lygiagretų postūmį tam tikra kryptimi ir tam tikru atstumu.

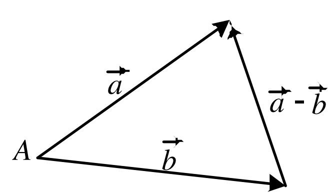
Iš vidurinės mokyklos kurso žinome, kad su geometriniais vektoriais galimi tokie *tiesiniai veiksmai*:

• *dviejų vektorių* $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *suma* vadinamas vektorius $\vec{a}+\vec{b}$, kuris yra lygiagretainio su kraštinėmis $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, įstrižainės vektorius (žr. 5 pav.).

Pastaba. Kadangi $\vec{BC}=\vec{b}$, tai sumą $\vec{a}+\vec{b}=\vec{AC}$ galime gauti prie vektoriaus $\vec{a}$ galo pridėję vektorių $\vec{b}$ ir po to sujungę pirmojo pradžią su antrojo galu. Tą patį rezultatą – vektorių $\vec{AC}$ – gausime prie vektoriaus $\vec{b}$ galo pridėję vektorių $\vec{a}$.



5 pav.



6 pav.

• $k\vec{a}$ yra vektorius, kurio ilgis $k|\vec{a}|$, o kryptis, kai $k>0$, tokia pat kaip ir vektoriaus $\vec{a}$, ir, jeigu $k<0$, priešinga; jeigu $k=0$, gausime vadinamąjį *nulinį vektorių* $\vec{0}$, kurio ilgis lygus nuliui, o kryptis neapibrėžta;

nulinio vektoriaus – ir pradžia, ir galas yra viename taške, todėl jis gali būti laikomas kolineariu su bet kuriuo vektoriumi; vadinasi vektoriai $\vec{a}$ ir $k\vec{a}$ visuomet kolinearieji; jei nenuliniai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra kolinearieji, tai egzistuoja toks skaičius k, su kuriuo $\vec{b} = k\vec{a}$.

Vektorių skirtumas yra išvestinis veiksmas, apibrėžiamas naudojantis sumos apibrėžimu: vektoriaus $\vec{a}$ ir vektoriaus $\vec{b}$ *skirtumu* vadinamas vektorius, kurį sudėjus su vektoriumi $\vec{b}$, gaunamas $\vec{a}$ (šis skirtumas žymimas $\vec{a} - \vec{b}$, žr. 6 pav.).

Pastaba. Nesunku pastebėti, kad $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$.

Vektorių tiesinių veiksmų savybės.

• $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (sudėties komutatyvumas).

Savybė išplaukia tiesiog iš vektorių sumos apibrėžimo (žr. pastabą).

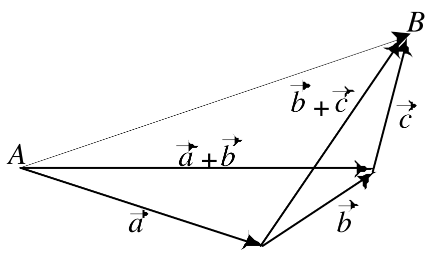
• $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (sudėties asociatyvumas).

Įrodymas. Iš 7 paveikslo matome, kad ir suma $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, ir suma $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ lygi tam pačiam vektoriui $\vec{AB}$. Taigi jos lygios.

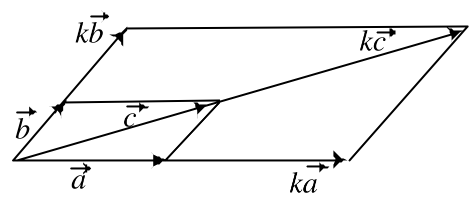
• $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (distributyvumas).

Įrodymas. Kai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ nekolinearūs, ši savybė išplaukia iš 8 paveiksle pavaizduotų lygiagretainių panašumo: $k\vec{c} = k\vec{a} + k\vec{b}$. Čia $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Kai vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs, ši savybė taip pat nesunkiai įrodoma geometriškai.



7 pav.



8 pav.

Vektorių projekcijos.

Taikant vektorius labai svarbu mokėti juos užrašyti analiziškai – formulėmis. Taigi kaip pereiti nuo geometrinės vektoriaus sampratos prie algebrinės? Pirmasis žingsnis šia kryptimi – vektoriaus projekcijos kryptinėje tiesėje sąvokos įvedimas.

Kryptine tiese (projekcijų ašimi) vadinsime tiesę, kurioje pasirinktas ilgio vienetas ir nurodyta tiesės kryptis, pavyzdžiui, kuriuo nors šios tiesės vektoriumi (9 pav. tiesės Ot kryptis yra tokia pat kaip ir vektoriaus $\vec{OA}$ kryptis, o ilgio vienetas – vektoriaus $\vec{OA}$ ilgis).

Iš vektoriaus $\vec{a}$ pradžios ir galo taškų į tiesę Ot nuleiskime statmenis, kurie su tiese kertasi taškuose M ir N (žr. 9 pav.). Vektoriaus $\vec{MN}$ ilgį pažymėkime l.

Vektoriaus $\vec{a}$ projekcija $a_t = pr_{Ot}\vec{a}$ tiesėje Ot vadinsime skaičių l, kai vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{MN}$ kryptys sutampa, skaičių $-l$, kai jų kryptys priešingos, ir projekciją laikome lygia nuliui, kai vektorius $\vec{a}$ statmenas tiesei Ot.

Lengva pastebėti, kad visų vektorių, lygių vektoriui $\vec{a}$ (pavyzdžiui, $\vec{MB}$, $\vec{CD}$), projekcijos tiesėje Ot yra lygios. Todėl projektuojamą vektorių visada galima perkelti kad jo pradžios taškas priklausytų projekcijų ašiai.

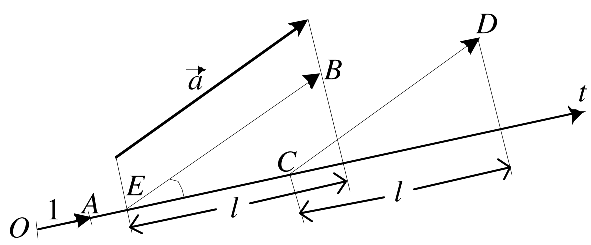
Jeigu pažymėsime $\beta = \angle BEt$ (9 pav.), tuomet $a_t = |\vec{a}| \cos \beta$. Čia β – kampas tarp vektoriaus $\vec{a}$ ir projekcijų ašies Ot, $0 \leq \beta \leq \pi$.

Dabar tarkime, kad projekcijų ašis Ot yra tiesė erdvėje, projektuojamas vektorius $\vec{a}$ – taip pat erdvės vektorius. Tuomet, norėdami gauti šio vektoriaus projekciją tiesėje Ot, per vektoriaus pradžios ir pabaigos taškus išveskime plokštumas, statmenas projekcijų ašiai (10 pav.). Taškai M ir N yra išvestų plokštumų susikirtimo su projekcijų ašimi taškai. Tuomet lieka pakartoti "plokštuminį" projekcijos apibrėžimą – ir turėsime erdvės vektoriaus projekcijų ašyje sąvoką.

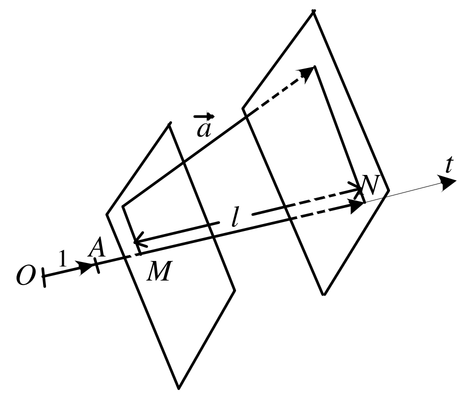
Dviejų vektorių sumos projekcija kurioje nors ašyje Ot lygi tų vektorių projekcijų sumai: jeigu $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, tai $c_t = a_t + b_t$.

Vektorių padauginus iš skaičiaus, jo projekcija ašyje Ot taip pat padauginama iš šio skaičiaus: jeigu $\vec{c} = k\vec{a}$, tai $c_t = ka_t$.

Šie teiginiai nesunkiai išplaukia iš vektoriaus projekcijos ašyje apibrėžimo.

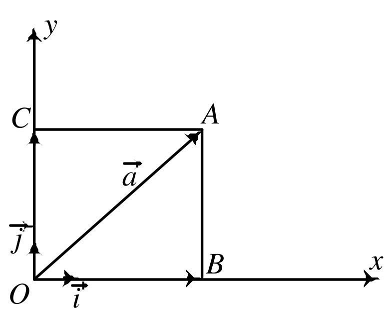


9 pav.

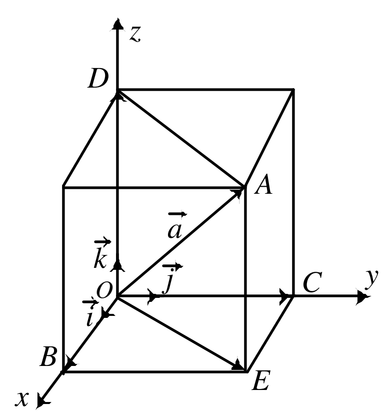


10 pav.

Tarkime, turime plokštumos stačiakampę koordinačių sistemą xOy, kurios ašyje Ox atidėtas vienetinio ilgio vektorius $\vec{i}$, o ašyje Oy atidėtas vienetinio ilgio vektorius $\vec{j}$ (žr. 11 pav.).



11 pav.



12 pav.

Tuomet, pavyzdžiui, jeigu $\vec{a}$ yra plokštumos vektorius ir jo pradžia yra koordinačių pradžios taške $O(0;0)$, o galas – taške $A(a_x;a_y)$, tai iš veiksmų su vektoriais apibrėžimų ir kolineariųjų vektorių savybės išplaukia, kad $\vec{a} = \vec{OB} + \vec{OC} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$. Žinoma, tokią pat išraišką turi ir kiekvienas jam lygus plokštumos vektorius. Taigi, įvedus koordinačių sistemą, kiekvienas plokštumos vektorius gali būti sutapatintas su dviejų skaičių (šio vektoriaus *projekcijų* koordinačių ašyse) rinkiniu $(a_x;a_y)$. Atkreipkime dėmesį, kad būtent šiuo momentu nuo geometrinio vektoriaus pereiname prie algebrinės jo išraiškos. Vėliau vektoriumi pavadinsime tiesiog n skaičių rinkinį.

Jeigu $\vec{a}$ yra erdvės vektorius ir jo pradžia yra koordinačių pradžios taške $O(0;0;0)$, o galas – taške $A(a_x;a_y;a_z)$ (12 pav.), tai $\vec{a} = \vec{OE} + \vec{OD} = \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} =$

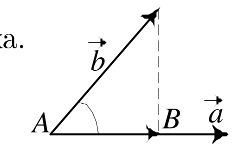
$(a_x; a_y; a_z)$. Čia $\vec{i}$ yra Ox ašies vienetinis vektorius, $\vec{j}$ – Oy ašies vienetinis vektorius, o $\vec{k}$ – Oz ašies vienetinis vektorius.

Dabar ir geometriniai veiksmai su vektoriais (daugyba iš skaičiaus bei sudėtis) gali būti išreikšti "algebriškai": vektorių padauginti iš skaičiaus reiškia jo projekcijas padauginti iš šio skaičiaus, sudėti du vektorius – tai reiškia sudėti jų atitinkamas projekcijas. Skaitytojas tuo nesunkiai įsitikins pats.

Iš vektorių sudėties gauname: jei vektoriaus $\vec{AB}$ pradžios taškas yra $A(x_1; y_1)$, o galas – taškas $B(x_2; y_2)$, tai $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Skaliarinė sandauga.

Analizinėje geometrijoje svarbi vektorių skaliarinės sandaugos sąvoka.



13 pav.

Apibrėžimas. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *skaliarine sandauga* vadinamas skaičius $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$; čia φ yra kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ (13 pav.).

Jei vektoriaus $\vec{b}$ projekciją vektoriuje $\vec{a}$ pažymėsime $\vec{b}_{\vec{a}}$, o vektoriaus $\vec{a}$ projekciją vektoriuje $\vec{b}$ pažymėsime $\vec{a}_{\vec{b}}$, tai iš skaliarinės sandaugos apibrėžimo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \vec{b}_{\vec{a}} = |\vec{b}| \cdot \vec{a}_{\vec{b}}. \tag{4.1}$$

Šios lygybės kartais naudingos geometrijoje.

Pastaba. Kai $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x; a_y; a_z)$, tai iš tikrųjų $a_x = \vec{a}_{\vec{i}}$, $a_y = \vec{a}_{\vec{j}}$, $a_z = \vec{a}_{\vec{k}}$.

Skaliarinės sandaugos savybės:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (išplaukia iš (4.1) lygybės);
- $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Paskutiniosios dvi savybės nesunkiai įrodomos pasinaudojus (4.1) lygybe ir vektorių projekcijų savybėmis.

Iš apibrėžimo išplaukia, kad *du nenuliniai vektoriai statmeni tik tuomet, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui.*

Dabar tarkime, kad vektoriai duoti projekcijomis ašyse: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = (b_x; b_y; b_z)$. Naudodamiesi skaliarinės sandaugos savybėmis apskaičiuokime jų skaliarinę sandaugą:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x(\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_xb_y(\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_xb_z(\vec{i} \cdot \vec{k}) +$$

$$+ a_yb_x(\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_yb_y(\vec{j} \cdot \vec{j}) + a_yb_z(\vec{j} \cdot \vec{k}) + a_zb_x(\vec{k} \cdot \vec{i}) + a_zb_y(\vec{k} \cdot \vec{j}) + a_zb_z(\vec{k} \cdot \vec{k}).$$

Kadangi

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \cdot \vec{i} = 1, & \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, & \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0, & \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0, & \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = 0, \end{array}$$

tai $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$.

Kai $\vec{a} = \vec{b}$, gauname vektoriaus skaliarinį kvadratą $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$. Kita vertus, $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$. Todėl $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Kampą tarp vektorių galima apskaičiuoti pasinaudojus formule:

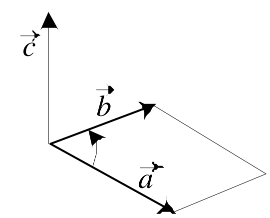
$$\cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{4.2}$$

Tegu $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $|\vec{a}| = 1$, o šio vektoriaus kampai su koordinačių ašių Ox, Oy, Oz teigiamosiomis kryptimis atitinkamai yra α, β, γ. Tuomet $a_x = \cos\alpha$, $a_y = \cos\beta$, $a_z = \cos\gamma$. – Įrodykite. Šie kosinusai vadinami vektoriaus *krypties kosinusais*.

Vektorinė sandauga.

Tarkime, kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra lygus φ.

Apibrėžimas. Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *vektorine sandauga* vadinamas vektorius $\vec{c}$, kurio ilgis lygus vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaryto lygiagretainio ploto vienetų skaičiui (t. y. $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$) ir yra statmenas lygiagretainio plokštumai; vektorius $\vec{c}$ nukreiptas taip, kad sistema $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ būtų *dešininė* (žiūrint iš vektoriaus $\vec{c}$ viršūnės, vektorių $\vec{a}$ iki vektoriaus $\vec{b}$ kampu φ reikia sukti prieš laikrodžio rodyklę) (14 pav.).



14 pav.

Vektorinę sandaugą žymėsime $\vec{a} \times \vec{b}$.

Vektorinės sandaugos savybės:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$;
- $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (k\vec{b})$;
- $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$.

Pirmosios dvi savybės gaunamos tiesiogiai iš apibrėžimo, o trečią įrodyti kiek sunkiau – reikia nagrinėti abiejų lygybės pusių vektorius atskirai ir įsitikinti, kad jie lygūs.

Vektorinė sandauga gali būti nulinis vektorius ir kai nė vienas iš daugiklių nėra nulinis: jei vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ kolinearūs (priklauso lygiagrečioms tiesėms), tai $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ir atvirkščiai – jei $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, tai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ – kolinearūs. Atskiru atveju, žinoma, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Jeigu $\vec{i}$, $\vec{j}$ ir $\vec{k}$ yra koordinačių ašių vienetiniai vektoriai, tai:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}, \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}. \end{array} \tag{4.3}$$

Sudauginkime "vektoriškai" vektorius, kai jie duoti projekcijomis koordinačių ašyse: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = (b_x; b_y; b_z)$. Tuomet

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_xb_y(\vec{i} \times \vec{j}) + a_xb_z(\vec{i} \times \vec{k})+$$

$$+a_yb_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_yb_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_yb_z(\vec{j} \times \vec{k}) + a_zb_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_zb_y(\vec{k} \times \vec{j}) + a_zb_z(\vec{k} \times \vec{k}).$$

Įrašykime (4.3) vektorinių sandaugų išraiškas ir sugrupuokime narius taip:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}. \tag{4.4}$$

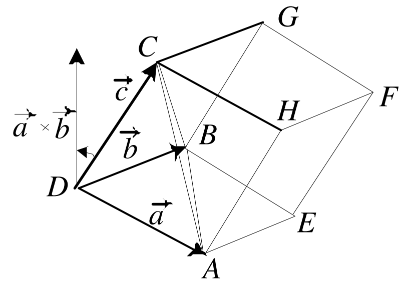
O pastarąjį reiškinį galima užrašyti determinantu. Taigi

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \tag{4.5}$$

Mišrioji trijų vektorių sandauga.

Tris vektorius galima sudauginti įvairiai, pavyzdžiui, pirmuosius du – "skaliariškai" (gausime skaičių) ir rezultatą padauginti iš trečiojo vektoriaus arba pirmuosius du sudauginti "vektoriškai", o gautą vektorių padauginti "vektoriškai" iš trečiojo. Mes nagrinėsime mišriąją sandaugą – kai pirmieji du sudauginami "vektoriškai", o po to gautasis vektorius dauginamas iš trečiojo vektoriaus skaliariškai (rezultatas - realusis skaičius).

Apibrėžimas. Trijų vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ *mišriąja sandauga* vadiname: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.
Šitokia sandauga turi labai aiškią geometrinę prasmę – jos modulis yra lygus gretasienio, nusakyto trimis vektoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, išeinančiais iš vienos viršūnės (15 pav.), tūriui:



15 pav.

$$V_{DAEBCHFG} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Iš tikrųjų sandaugos $\vec{a} \times \vec{b}$ ilgis lygus gretasienio pagrindo plotui, skaliarinė sandauga $|\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cdot \cos\beta$ yra pagrindo ploto ir gretasienio aukštinės sandauga, t. y. tūris; čia β yra kampas tarp gretasienio briaunos $\vec{c}$ ir aukštinės vektoriaus $\vec{a} \times \vec{b}$.

Trimis vektoriais $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ nusakoma ir piramidė $DABC$ (žr. 15 pav.). Nesunku susivokti, kad jos tūris lygus vienam šeštadaliui gretasienio tūrio. Taigi

$$V_{DABC} = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Suraskime trijų vektorių mišriąją sandaugą, kai vektoriai duoti projekcijomis koordinačių ašyse: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k} = (c_x; c_y; c_z)$. Iš mišriosios sandaugos apibrėžimo, pasinaudoję (4.4) lygybe ir apskaičiavę skaliarinę sandaugą, gauname

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ((a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} - (a_xb_z - a_zb_x)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k}) \cdot (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

$$c_x(a_yb_z - a_zb_y) - c_y(a_xb_z - a_zb_x) + c_z(a_xb_y - a_yb_x).$$

Pastaroji suma (prisiminkime determinanto skleidinį eilute) yra determinantas

$$\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Sukeitę šio determinanto pirmąsias dvi eilutes vietomis, o po to – antrąją su trečiąja, gauname, kad

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

Trys vektoriai vadinami *komplanariais*, jeigu juos galima patalpinti vienoje plokštumoje. Ar duotieji trys vektoriai komplanarūs, galima nustatyti pagal jų mišriosios sandaugos reikšmę.

Trys vektoriai $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$, *tarp kurių nėra nulinio, yra komplanarūs tik tuomet, kai* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.

Platesniuose analizinės geometrijos kursuose nagrinėjami ir kitokie vektorių taikymai.

4.2. Uždaviniai.

1. Vektorius su Ox ašimi sudaro $\alpha = 45^0$ kampą, su Oz ašimi – kampą $\gamma = 45^0$. Kokį kampą vektorius sudaro su Oy ašimi?

Ats. 60^0 arba 120^0.

2. Duota: $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a}+\vec{b}| = 24$. Apskaičiuokite $|\vec{a}-\vec{b}|$.

Ats. 22.

3. Įrodykite, kad keturi taškai $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$, $D(3;-5;3)$ yra trapecijos viršūnės.

4. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a} = (3;-5;8)$ ir $\vec{b} = (-1;1;-4)$ sumos ir skirtumo ilgius.

Ats. $|\vec{a}+\vec{b}| = 6$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 14$.

5. Vektoriai $\vec{a} = (2;-3;6)$ ir $\vec{b} = (-1;2;-2)$ išeina iš vieno taško. Apskaičiuokite vektoriaus $\vec{c}$, nukreipto pusiaukampinės kryptimi, koordinates, jeigu $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$.

Ats. $\vec{c} = (-3;15;12)$.

6. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaro kampą $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ir $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$. Apskaičiuokite: 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; 5) $(3\vec{a}+2\vec{b})^2$; 6) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; 7) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

Ats. 1) -6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) 73; 6) -61; 7) 37.

7. Apskaičiuokite $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$, jeigu $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ ir $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$.

Ats.$-\frac{3}{2}$.

8. Apskaičiuokite trikampio ABC kampus ir įrodykite, kad trikampis lygiašonis, jeigu jo viršūnių koordinarės yra $A(1;2;1)$, $B(3;-1;7)$, $C(7;4;-2)$.

9. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaro kampą $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ ir $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$. Apskaičiuokite: 1) $(\vec{a}\times\vec{b})^2$; 2) $((2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b}))^2$; 3) $((\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b}))^2$.

Ats. 1) 3; 2) 27; 3) 300.

10. Lygiagretainio dvi kraštinės yra vektoriai $\vec{a} = \vec{k}-\vec{j}$ ir $\vec{b} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$. Apskaičiuokite lygiagretainio įstrižainių ilgius ir lygiagretainio plotą.

Ats. $\sqrt{5}$, $S = \sqrt{6}$.

11. Apskaičiuokite trikampio su viršūnėmis $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$ plotą.

Ats. 14.

12. Apskaičiukite vektorių $\vec{a} = (1;-1;3)$, $\vec{b} = (-2;2;1)$ ir $\vec{c} = (3;-2;5)$ mišriąją sandaugą.

Ats. -7.

13. Ar taškai $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ ir $D(2;1;3)$ priklauso vienai plokštumai?

Ats. Taip.

14. Apskaičiuokite tetraedro, kurio viršūnės yra taškai $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$ ir $D(4;1;3)$ tūrį.

Ats. 3.

15. Ar vektoriai $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\vec{b} = (1;-1;3)$ ir $\vec{c} = (1;9;-11)$ komplanarūs?

Ats. Taip.

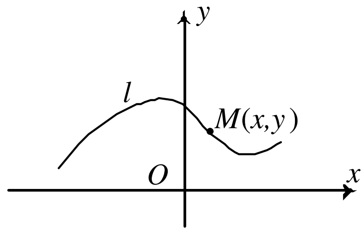
4.3. Tiesė plokštumoje.

Bendroji tiesės lygtis.

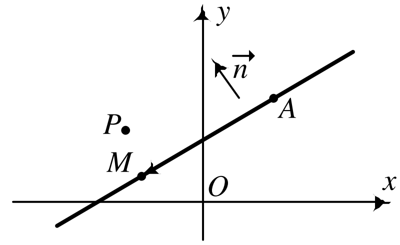
Tarkime, plokštumoje duota stačiakampė koordinačių sistema xOy ir nubrėžta kuri nors kreivė l (16 pav.). Tegu $M(x;y)$ bet kuris šios kreivės taškas. Jeigu kreivės taškų koordinatės x ir y susietos lygtimi $F(x,y) = 0$, kurios netenkina jokie kiti plokštumos taškai, tai ši lygtis vadinama *kreivės l lygtimi*.

Paprasčiausia plokštumos kreivė yra tiesė. Kokia bebūtų tiesė, ją galima nusakyti pasirinktuoju tiesės tašku $A(x_0;y_0)$ ir nenuliniu vektoriumi $\vec{n}=(a;b)$, statmenu tiesei (17 pav.). Šis vektorius vadinamas *tiesės normalės vektoriumi.*

Pastaba. Tiesę plokštumoje galima nusakyti ir kitaip, pavyzdžiui, dviem jos taškais arba vienu jos tašku ir kampu, kurį tiesė sudaro su abscisių ašimi, ir pan.



16 pav.



17 pav.

Tegu $M(x;y)$ – bet kuris tiesės taškas. Tuomet vektoriai $\vec{n}=(a;b)$ ir $\vec{AM}=(x-x_0;y-y_0)$ yra statmeni ir todėl $\vec{n}\cdot\vec{AM}=0$, t.y. $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$. Pažymėję $c=-ax_0-by_0$, gausime lygtį

$$ax+by+c=0. \tag{4.7}$$

Šios lygties netenkina jokie kiti plokštumos taškai. Iš tikrųjų, jeigu $P(x_1;y_1)$ nebūtų tiesės taškas, o jis tenkintų (4.7) lygtį, tai gautume, kad $\vec{AP}\perp\vec{n}$ (prieštara teiginiui "du nenuliniai vektoriai statmeni tik tuomet, kai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui". Vadinasi, (4.7) yra tiesės, nusakytos tašku $A(x_0;y_0)$ ir normalės vektoriumi $\vec{n}=(a;b)$, lygtis.

Kita vertus, *kai bent vienas iš koeficientų a ir b nelygus nuliui, tai*(4.7) *lygties sprendiniai yra taškai, sudarantys tiesę.* Įrodysime tai.

Pasirinkime tis skirtingus (4.7) lygties sprendinius $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ ir $C(x_3;y_3)$ (ši lygtis turi be galo daug sprendinių). Taigi galioja:

$ax_1+by_1+c=0,\quad ax_2+by_2+c=0,\quad ax_3+by_3+c=0\ \Rightarrow$

$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0,\quad a(x_3-x_1)+b(y_3-y_1)=0\ \Rightarrow \vec{AB}\perp\vec{n},\quad \vec{AC}\perp\vec{n}\ \Rightarrow$ vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$ kolinearūs $\Rightarrow$ taškai A, B ir C priklauso vienai tiesei.

Kadangi kiekvieną realiąją kintamojo x (arba y) reikšmę atitinka lygties (4.7) sprendinys, tai galima teigti, kad šios lygties sprendiniai užpildo tiesę ištisai.

Įrodėme, kad *bet kuri tiesė užrašoma* (4.7) *lygtimi ir, atvirkščiai,* (4.7) *lygtis, kai bent vienas iš koeficientų a ir b nelygus nuliui, reiškia tiesę.* Todėl ši lygtis *vadinama bendrąja tiesės lygtimi.*

Kryptinė tiesės lygtis.

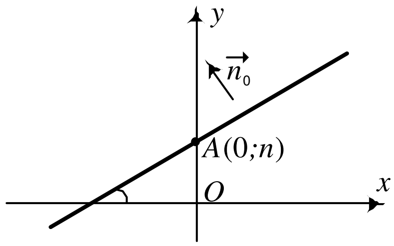
Jau iš vidurinės mokyklos kurso pažįstamas tiesės lygties kryptinis pavidalas

$$y=mx+n \tag{4.8}$$

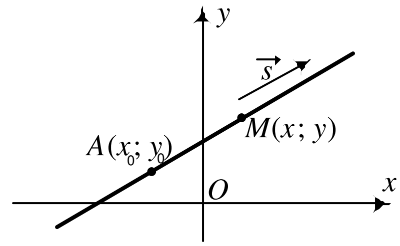
(kai tiesė nėra lygiagreti su ordinačių ašimi).

Šitokia tiesės lygtis gali būti gauta, kai duotas taškas $A(0;n)$, kuriame tiesė kerta Oy ašį ir kampas α, kurį ji sudaro su koordinačių ašies Ox teigiamąja kryptimi; čia $m=tg\alpha$ yra tiesės krypties koeficientas (18 pav.).

Iš tikrųjų, pagal tokius tiesės duomenis jos padėtį galima apibūdinti tašku $A(0;n)$ ir vienetinio ilgio normale, sudarančia su Ox ašimi kampą $\frac{\pi}{2}+\alpha$. Tuomet normalės vektorius yra $\vec{n}_0=(\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha);\cos\alpha)=(-\sin\alpha;\cos\alpha)$, o tiesės lygtis $-\sin\alpha\cdot(x-0)+\cos\alpha\cdot(y-n)=0$. Iš šios lygties išreiškę kintamąjį y, gausime kryptinę tiesės lygtį (4.8).



18 pav.



19 pav.

Tiesės, išvestos per tašką duotąja kryptimi, lygtis.

Tarkime, duotas taškas $A(x_0; y_0)$, per kurį eina tiesė, ir vektorius $\vec{s} = (l; m)$ (*tiesės krypties vektorius*), kolinearus su tiese (19 pav.)

Pasirinkime bet kurį tiesės tašką $M(x; y)$. Tuomet vektoriai $\vec{s} = (l; m)$ ir $\vec{AM} = (x - x_0; y - y_0)$ kolinearūs, t.y. egzistuoja skaičius $\lambda \neq 0$, jog $\vec{AM} = \lambda\vec{s}$ arba $x - x_0 = \lambda l$, $y - y_0 = \lambda m$. Kai tiesės krypties vektorius nėra lygiagretus nė su viena iš koordinačių ašių, gauname lygtį

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{4.9}$$

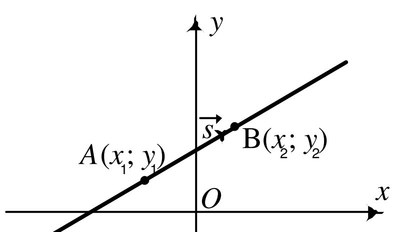
Kai tiesės krypties vektorius yra lygiagretus su viena iš koordinačių ašių, pavyzdžiui, su Oy ašimi ($\vec{s} = (0; 1)$), tai, kad būtų patogiau, (4.9) lygtyje tiesiog rašoma

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{1}$$

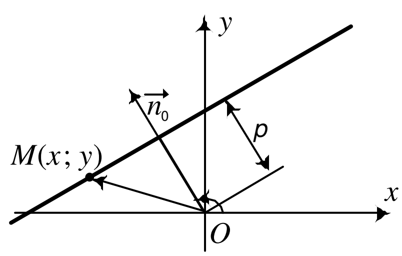
(nors trupmenos vardiklyje matyti nulį ir neįprasta).

Jeigu duoti du tiesės taškai $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$, tai krypties vektoriumi galime laikyti vektorių $\vec{AB}$ (20 pav.). Tuomet pagal (4.9) tiesės, einančios per šiuos taškus, lygtis tokia:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4.10}$$



20 pav.



21 pav.

Tiesės normalinė lygtis.

Dabar tiesę nusakysime jos atstumu p ($p \geq 0$) nuo koordinačių pradžios taško ir kampu α, kurį sudaro statmuo į tiesę su Ox ašies teigiamąja kryptimi (21 pav., kampas α pažymėtas lankeliu su rodykle).

Tegu $M(x; y)$ bet kuris tiesės taškas. Nubrėžkime vienetinio ilgio normalės vektorių $\vec{n}_0 = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ ir nagrinėkime skaliarinę sandaugą $\vec{OM} \cdot \vec{n}_0$. Pagal (4.1) $\vec{OM} \cdot \vec{n}_0 = |\vec{n}_0| \cdot \vec{OM}_{\vec{n}_0} = p$. Kita vertus $\vec{OM} \cdot \vec{n}_0 = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha$. Taigi $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$. Gautoji lygtis

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{4.11}$$

vadinama *tiesės normaline lygtimi*.

Kartais naudinga bendrąją tiesės lygtį suvesti į normalinę. Išsiaiškinsime kaip tai padaryti.

Lygtį $ax+by+c=0$ padauginkime iš tokio daugiklio M, kad lygtis įgytų (4.11) lygties pavidalą:

$$Max + Mby + Mc = 0; \quad Ma = \cos\alpha,\ Mb = \sin\alpha,\ Mc = -p.$$

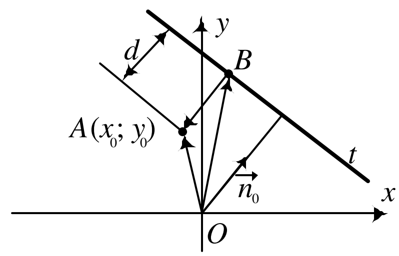
Apskaičiuokime daugiklį M:

$$Ma = \cos\alpha,\ Mb = \sin\alpha \Rightarrow M^2(a^2+b^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow M = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Kadangi $Mc = -p$, o $p > 0$, tai $Mc < 0$. Vadinasi, daugiklio M ženklas yra priešingas koeficiento c ženklui. Kai $c = 0$, M ženklas lieka nenustatytas.

Taško atstumas nuo tiesės.

Apskaičiuokime taško $A(x_o; y_0)$ atstumą d nuo tiesės t, duotos normaline lygtimi $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ (22 pav.). Tegu taškas B yra taško A projekcija tiesėje t, $\vec{n}_0 = (\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ – ilgio 1 tiesės normalė. Tuomet $d = |\vec{BA}| = |\vec{BA}\cdot\vec{n}_0| = |(\vec{OA} - \vec{OB})\cdot\vec{n}_0| = |\vec{OA}\cdot\vec{n}_0 - \vec{OB}\cdot\vec{n}_0|$. Apskaičiuojame: $\vec{OA}\cdot\vec{n}_0 = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha$, $\vec{OB}\cdot\vec{n}_0 = p$.



22 pav.

Taigi gavome, kad

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \tag{4.12}$$

Kampas tarp dviejų tiesių.

Apibrėžimas. *Kampu tarp tiesių* vadiname kampą tarp šių tiesių normalių vektorių arba tarp šių tiesių krypčių vektorių.

Jei tiesės užrašytos bendrosiomis lygtimis $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, tai kampo tarp jų kosinusą $\cos\varphi$ apskaičiuosime pagal (4.2) formulę:

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2}}. \tag{4.13}$$

Jei žinotume tų tiesių krypčių vektorius, tai kampą tarp tiesių apskaičiuotume suradę kampą tarp jų krypčių vektorių.

Atkreipkime dėmesį, kad suradę kampo tarp tiesių kosinusą, pats kampas nėra vienareikšmiškai apibrėžtas – rasime du kampus φ ir $\pi - \varphi$, iš kurių vienas smailusis, kitas – bukasis (arba abu statieji).

Dar užrašykime dažnai vartojamus dviejų tiesių lygiagretumo ir statmenumo požymius.

Jeigu tiesių normalės kolinearios, t.y., jeigu normalių vektorių koordinatės proporcingos ($a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, \lambda \neq 0$), *tai tiesės yra lygiagrečios*, ir atvirkščiai – *jei tiesės lygiagrečios, tai normalių vektorių koordinatės proporcingos.*

Jeigu tiesių normalės statmenos, t.y., jeigu galioja lygybė $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$, *tai tiesės yra statmenos*, ir atvirkščiai – *jei tiesės statmenos, tai galioja* $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

4.4. Uždaviniai.

1. Duota tiesė $t: 2x+3y+4=0$. Parašykite lygtį tiesės, einančios per tašką $M(2;1)$ ir

1) lygiagrečios tiesei t;

2) statmenos tiese t.

Ats. 1) $2x+3y-7=0$; 2) $3x-2y-4=0$.

2. Duotos dvi priešingos kvadrato viršūnės $A(-1;3)$ ir $C(6;2)$. Parašykite jo kraštinių lygtis.

Ats. $3x-4y+15=0,\ 4x+3y-30=0;\quad 3x-4y-10=0,\ 4x+3y-5=0.$

3. Trikampio kraštinių lygtys yra $3x+4y-1=0,\ x-7y-17=0,\ 7x+y+31=0$. Įrodykite, kad trikampis lygiašonis.

4. Parašykite trikampio ABC kraštinių lygtis, jei viena jo viršūnė $A(1;3)$, o dviejų pusiaukraštinių lygtys yra $x-2y+1=0$ ir $y-1=0$.

Ats. $x+2y-7=0,\ x-4y-1=0,\ x-y+2=0$.

5. Apskaičiuokite koeficientą k, jeigu tiesė $y=kx+5$ nutolusi nuo koordinačių pradžios taško atstumu $\sqrt{5}$.

Ats. $k=\pm 2$.

6. Apskaičiuokite atstumą tarp tiesių $2x-3y=6$ ir $4x-6y=25$.

Ats. $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

7. Parašykite tiesių, lygiagrečių tiesei $3x-4y-10=0$ ir nutolusių nuo jos atstumu 3.

Ats. $3x-4y-25=0,\ 3x-4y+5=0$.

8. Parašykite kvadrato kraštinių lygtis, jeigu dvi jo gretimos viršūnės yra $A(2;0)$ ir $B(-1;4)$.

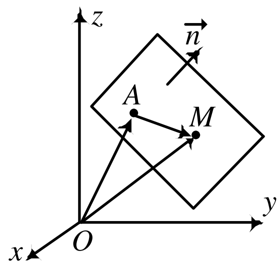
Ats. $4x+3y-8=0,\ 4x+3y+17=0,\ 3x-4y-6=0,\ 3x-4y+19=0$ arba
$4x+3y-8=0,\ 4x+3y-33=0,\ 3x-4y-6=0,\ 3x-4y+19=0$.

4.5. Plokštuma ir tiesė erdvėje.

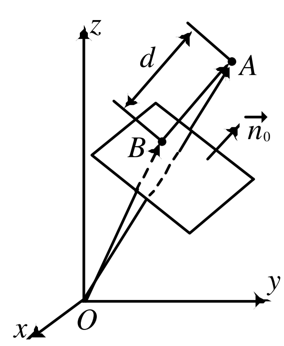
Plokštumos bendroji lygtis.

Plokštumą erdvėje, kaip ir tiesę plokštumoje, galima nusakyti keliais būdais. Vienas iš būdų yra išvesti plokštumą per duotąjį erdvės tašką $A(x_0;y_0;z_0)$ statmenai pasirinktajam vektoriui $\vec{n}=(a;b;c)$, kuris vadimamas *plokštumos normale* (23 pav.). Kad sudarytume tokios plokštumos lygtį, pasirinkime bet kurį plokštumos tašką $M(x;y;z)$. Tuomet: $\vec{n}\perp\vec{AM},\ \vec{AM}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{AM}=0\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$. Pažymėję $d=-ax_0-by_0-cz_0)$, gauname bendrąją plokštumos lygtį

$$ax+by+cz+d=0. \tag{4.14}$$



23 pav.



24 pav.

Plokštumos normalinė lygtis.

Tarkime, plokštuma nusakyta taip: duoti plokštumos normalės vektoriaus krypties kosinusai $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ir p – plokštumos atstumas nuo koordinačių pradžios taško. Iš šių duomenų išvedama (analogiškai tiesės normalinei lygčiai) *plokštumos normalinė lygtis*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{4.15}$$

Norint iš bendrosios plokštumos lygties gauti jos normalinę lygtį, bendrąją lygtį reikia padauginti iš daugiklio

$$N = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Taško atstumas nuo plokštumos.

Tegu $A(x_o; y_0; z_0)$ erdvės taškas, o $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ kuri nors plokštuma (24 pav.). Tada $\vec{n}_0 = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ yra tos plokštumos vienetinis normalės vektorius. Suraskime taško A atstumą d nuo duotosios plokštumos:

$$d = |\vec{BA}| = |\vec{BA}\cdot\vec{n}_0| = |(\vec{OA}-\vec{OB})\cdot\vec{n}_0| = |\vec{OA}\cdot\vec{n}_0 - \vec{OB}\cdot\vec{n}_0|;$$

$$\vec{OA}\cdot\vec{n}_0 = x_o\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma,\ \vec{OB}\cdot\vec{n}_0 = p.$$

Vadinasi, taško $A(x_o; y_0; z_0)$ atstumas d nuo plokštumos $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ yra lygus:

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|. \tag{4.16}$$

Kampas tarp dviejų plokštumų.

Apibrėžimas. Tarkime, $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ir $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ – dvi plokštumos. *Kampu tarp šių plokštumų* vadiname kampą tarp jų normalių.

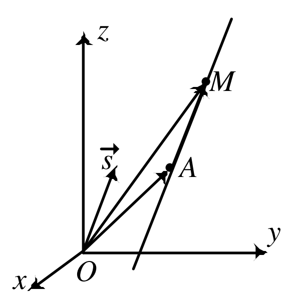
Kadangi plokštumų normalės yra $n_1 = (a_1; b_1; c_1)$ ir $n_2 = (a_2; b_2; c_2)$, tai kampo tarp dviejų plokštumų kosinusas yra:

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}. \tag{4.17}$$

Lygiagretumo ir statmenumo sąlygos. Dvi plokštumos yra lygiagrečios tik tuomet, kai jų normalės kolinearios, t.y. kai $a_1 = \lambda a_2, b_1 = \lambda b_2, c_1 = \lambda c_2, \lambda \neq 0$; dvi plokštumos statmenos tik tuomet, kai jų normalės statmenos, t.y. kai $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

Tiesė erdvėje.

Tiesę erdvėje galima nusakyti įvairiai: dviem susikertančiomis plokštumomis; vektoriumi, kuris lygiagretus su tiese, ir kuriuo nors tiesės tašku; dviem erdvės taškais, per kuriuos eina tiesė. Visi šie būdai naudingi sprendžiant analizinės geometrijos uždavinius.



25 pav.

Tarkime, kad žinomas tiesės taškas $A(x_0; y_0; z_0)$ ir duotas tiesės krypties vektorius $\vec{s} = (l, m, n)$ (vektorius, lygiagretus su tiese). Iš šių duomenų sudarykime tiesės lygtį.

Tegu $M(x; y; z)$ yra bet kuris tiesės taškas. Tuomet vektorius $\vec{AM} = (x-x_0; y-y_0; z-z_0)$ kolinearus su tiesės krypties vektoriumi $\vec{s} = (l, m, n)$, t.y. $\vec{AM} = \lambda\vec{s}$, $\lambda \neq 0$ arba

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda l, \\ y - y_0 = \lambda m, \\ z - z_0 = \lambda n. \end{cases} \tag{4.18}$$

Iš čia gauname *parametrines tiesės lygtis*:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l, \\ y = y_0 + \lambda m, \\ z = z_0 + \lambda n. \end{cases} \tag{4.19}$$

Iš (4.18) lygybių eliminavę parametrą λ, gausime tiesės erdvėje *kanonines lygtis*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{4.20}$$

Šios lygtys – tai dviejų lygčių sistema, kurios kiekviena lygtis gaunama sulyginus du (4.20) lygybių narius.

Kaip ir tiesei plokštumoje, tiesės erdvėje lygtis rašysime (4.20) pavidalu net ir tuomet, kai krypties vektoriaus viena arba dvi koordinatės lygios nuliui. Pavyzdžiui, jeigu $l \neq 0, \ m = 0, \ n \neq 0$ (tiesė statmena Oy ašiai), tai tiesė užrašyta lygtimi

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{n}$$

pagal (4.18) reiškia lygčių sistemą

$$\begin{cases} y - y_0 = 0, \\ \frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n}. \end{cases}$$

Jeigu $l = 0, \ m = 0, \ n \neq 0$ (tiesė statmena Ox ir Oy ašims, t.y. yra lygiagreti su Oz ašimi), tai jos kanonines lygtis rašysime taip:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Šios lygtys iš tikrųjų reiškia, kad

$$\begin{cases} x - x_0 = 0, \\ y - y_0 = 0, \\ z = t, \ t \in R. \end{cases}$$

Atkreipkime dėmesį, kad ta pati tiesė (4.20) lygtimis užrašoma nevienareikšmiškai: vietoje taško $A(x_0; y_0; z_0)$ gali būti įrašytas bet kuris kitas tiesės taškas, vietoje tiesės krypties vektoriaus (l, m, n) gali būti bet kuris jam kolinearus vektorius.

Kai duoti du tiesės taškai $A(x_1; y_1; z_1)$ ir $B(x_2; y_2; z_2)$, tai vektorių $\vec{AB}$ galime laikyti tiesės krypties vektoriumi, o vieną iš taškų, pavyzdžiui, $A(x_1; y_1; z_1)$– duotuoju tašku. Tuomet gauname tokias *tiesės, einančios per du taškus, lygtis*:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{4.21}$$

Tiesę erdvėje taip pat galima nusakyti ir dviem plokštumomis, einančiomis per šią tiesę. Kai tiesė erdvėje užrašyta dviem susikertančiomis plokštumomis (normalių vektoriai ne kolinearūs)

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

tai, norėdami sužinoti jos krypties vektorių, turime parašyti šios tiesės kanonines lygtis. Kaip iš tiesės, užrašytos dviem plokštumomis, gauti jos kanonines lygtis? Panagrinėkime pavyzdį.

4.1 pavyzdys. Užrašykime tiesės

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 3x - 4y + z = 2 \end{cases}$$

kanonines lygtis.

Sprendimas. Pirmiau tiesę užrašykime dviem plokštumomis, kurių viena lygiagreti su viena iš koordinačių ašių, o kita – lygiagreti su kuria nors kita koordinačių ašimi. Padauginę pirmą lygtį iš skaičiaus λ ir sudėję su antrąja, gausime plokštumą

$$\lambda(x + 2y - 3z) + 3x - 4y + z = \lambda + 2,$$

einančią per duotąją tiesę arba, sutraukę panašius narius, turėsime:

$$(\lambda + 3)x + (2\lambda - 4)y + (-3\lambda + 1)z = \lambda + 2.$$

Ši plokštuma vadinama *plokštumų pluošto*, einančio per tiesę, lygtimi, nes ji reiškia bet kurią plokštumą (išskyrus pirmąją $x + 2y - 3z = 1$), einančią per tiesę. Su $\lambda = -3$ gausime plokštumą $-10x + 10y = -1$ lygiagrečią Ox ašiai. Su $\lambda = 2$ gausime plokštumą $5x - 5z = 4$, lygiagrečią Oy ašiai. Šių lygčių sistema

$$\begin{cases} \quad - 10y + 10z = -1, \\ 5x \qquad\quad - 5z = 4 \end{cases}$$

reiškia tą pačią tiesę, tačiau iš šios sistemos patogiau surasti kanonines tiesės lygtis. Iš kiekvienos lygties išreikškime kintamąjį z:

$$z = \frac{10y - 1}{10}, \quad z = \frac{5x - 4}{5}.$$

Taigi

$$\frac{5x - 4}{5} = \frac{10y - 1}{10} = z \Leftrightarrow \frac{x - 0,8}{1} = \frac{y - 0,1}{1} = \frac{z - 0}{1}.$$

Iš tiesių kanoninių lygčių nesunku nustatyti kuomet tiesės lygiagrečios – turi būti kolinearūs tiesių krypčių vektoriai.

Kampas tarp tiesių.

Kampu tarp tiesių vadinamas kampas tarp jų krypčių vektorių.

Vadinasi, kampo tarp tiesių $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ ir $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ kosinusas yra:

$$\cos\varphi = \frac{l_l l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\ \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{4.22}$$

Tiesės yra *statmenos* tik tuomet, kai jų krypčių vektoriai statmeni, t.y. kai $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Tiesės yra *lygiagrečios* tik tuomet, kai jų krypčių vektoriai kolinearūs, t.y. kai $l_1 = \lambda l_2,\ m_1 = \lambda m_2,\ n_1 = \lambda n_2,\ \lambda \neq 0$.

Dvi tiesės, jei jos nėra lygiagrečios, gali priklausyti vienai plokštumai (tuomet jos susikirs) arba gali būti prasilenkiančios.

Pritaikius vektorių mišriosios sandaugos savybes, nesunku įrodyti, kad: *tiesės priklauso tai pačiai plokštumai tik tuomet, kai tiesių krypčių vektorių ir vektoriaus, jungiančio bet kurį vienos tiesės tašką ir kitos tiesės tašką, mišrioji sandauga lygi nuliui.*

Kampas tarp tiesės ir plokštumos.

Kampas tarp tiesės ir plokštumos yra smailusis kampas tarp tiesės ir jos projekcijos plokštumoje.

Raskime kampą φ tarp tiesės $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ ir plokštumos $ax + by + cz + d = 0$. Plokštumos normalė su tiesės krypties vektoriumi sudaro kampą $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Todėl

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi = \frac{la + mb + nc}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{4.23}$$

4.6. Uždaviniai.

1. Parašykite lygtį plokštumos, einančios per tašką $M(2;1;-1)$ ir statmenos vektoriui $\vec{n} = (1;-2;3)$.

Ats. $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

2. Parašykite lygtį plokštumos, einančios per tašką $M_1(3;-1;2)$ ir statmenos vektoriui $\overrightarrow{M_1M_2}$, kai $M_2(4;-2;-1)$.

Ats. $x - y - 3z + 2 = 0$.

3. Parašykite lygtį plokštumos, einančios per tris taškus $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$ ir $M_3(2;0;2)$.

Ats. $3x + 3y + z - 8 = 0$.

4. Kokį dvisienį kampą sudaro plokštumos $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0$ ir $x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$?

Ats. $\frac{\pi}{3}$.

5. Parašykite lygtį plokštumos, kuri eina per koordinačių pradžią statmenai plokštumoms $2x - y + 3z - 1 = 0$ ir $x + 2y + z = 0$.

Ats. $7x - y - 5z = 0$.

6. Įrodykite, kad plokštumos $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$ ir $x - 3y + 2z - 11 = 0$ kertasi viename taške ir raskite šį tašką.

Ats. $(1;-2;2)$.

7. Apskaičiuokite taško $P(-1;1;-2)$ atstumą nuo plokštumos, einančios per taškus $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$ ir $M_3(4;-5;-2)$.

Ats. 4.

8. Apskaičiuokite atstumą tarp plokštumų $x - 2y - 2z - 12 = 0$ ir $x - 2y - 2z - 6 = 0$.

Ats. 2.

9. Dvi kubo sienos priklauso plokštumoms $2x - 2y + z - 1 = 0$ ir $2x - 2y + z + 5 = 0$. Apskaičiuokite šio kubo tūrį.

Ats. 8.

10. Plokštuma eina per koordinačių ašį Ox ir tašką $E(3;2;-5)$. Parašykite lygtį tiesės, kuria kertasi ši plokštuma su plokštuma $3x - y - 7z + 9 = 0$.

Ats. $\begin{cases} 3x - y - 7z + 9 = 0, \\ 5y + 2z = 0. \end{cases}$

11. Ar šios tiesės yra lygiagrečios?

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1},$$

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z=8. \end{cases}$$

Ats. Taip.

12. Parašykite tiesės

$$\begin{cases} x-2y+3z=4, \\ 3x+2y-5z=4 \end{cases}$$

kanonines lygtis.

Ats.

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}.$$

13. Apskaičiuokite taško $M(2;-1;3)$ atstumą nuo tiesės

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{5}.$$

Ats. $0,3\sqrt{38}$.

14. Apskaičiuokite atstumą tarp lygiagrečių tiesių:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2},$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

Ats. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

15. Parašykite lygtį plokštumos, einančios per tašką $M(1;-1;-1)$ ir statmenos tiesei

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}.$$

Ats. $2x-3y+4z-1=0$.

16. Su kuria m reikšme tiesė

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$$

lygiagreti plokštumai?

Ats. -3.

4.7. Antros eilės kreivės.

Apibrėžimas. *Antros eilės kreive* vadinama kreivė, kuri užrašoma lygtimi

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \tag{4.24}$$

kai bent vienas iš koeficientų a, b, c yra nelygus nuliui.

Pastaba. Kartais antros eilės kreivės koeficientams žymėti patogiau naudoti tą pačią raidę su dviem indeksais, pavyzdžiui, a_{ij}. Tuomet antros eilės kreivę užrašysime lygtimi

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{4.25}$$

kurioje bent vienas iš koeficientų $a_{11},\ a_{12},\ a_{22}$ yra nelygus nuliui.
Puikus tokios kreivės pavyzdys yra apskritimo su centru taške $(x_0; y_0)$ ir spinduliu r lygtis:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2. \tag{4.26}$$

Kairėje lygties pusėje atlikę veiksmus, galėtume rasti koeficientų $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ išraiškas.

Jei (4.24) *lygtyje* $a=c,\ b=0$ *ir* $d^2+e^2>af$, *tai tokia lygtis reiškia apskritimą.* Įrodykime tai.

Nagrinėkime lygtį

$$ax^2+ay^2+2dx+2ey+f=0 \quad (a\neq 0). \tag{4.27}$$

Lygtį padalykime iš a ir užrašykime (4.26) pavidalu:

$$x^2+y^2+2\frac{d}{a}x+2\frac{e}{a}y+\frac{f}{a}=0 \quad (a\neq 0),$$

$$\left(x+\frac{d}{a}\right)^2+\left(y+\frac{e}{a}\right)^2=\frac{d^2+e^2-af}{a^2}.$$

Matome, jog tai apskritimo su centru $(-\frac{d}{a}; -\frac{e}{a})$ ir spinduliu $r=\frac{\sqrt{d^2+e^2-af}}{a}$ lygtis.

Kai $d^2+e^2=af$, tai ši lygtis reiškia vienintelį tašką $(-\frac{d}{a}; -\frac{e}{a})$, o kai $d^2+e^2<af$, tai lygties netenkina joks plokštumos taškas.

Kokias kreives dar gali reikšti (4.24) lygtis? Įsitikinsime, kad šia lygtimi užrašomos: elipsė (apskritimas yra atskiras elipsės atvejis), hiperbolė, parabolė. Kai kuriais atvejais, kaip matėme, (4.24) lygtis gali turėti tik vieną sprendinį – tašką, gali visai neturėti sprendinių. Be to, (4.24) lygtis gali reikšti ir tiesių porą. Panagrinėkime šį atvejį išsamiau.

Lygtis (4.24) reikš dvi tieses tik tuomet, kai jos kairioji pusė bus dviejų pirmojo laipsnio trinarių sandauga, t. y.

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2). \tag{4.28}$$

Išsiaiškinsime kokias sąlygas turi tenkinti (4.24) lygties koeficientai, kad galiotų (4.28) skaidinys. Tuo tikslu perrašykime (4.24) lygtį kvadratinės lygties pavidalu ir išspręskime ją kintamojo ax atžvilgiu:

$$\begin{aligned}
&ax^2+2(by+d)x+cy^2+2ey+f=0;\\
&ax=-(by+d)\pm\sqrt{(by+d)^2-a(cy^2+2ey+f)}=\\
&-(by+d)\pm\sqrt{(b^2-ac)y^2+2(bd-ae)y+d^2-af}.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Kad (4.24) lygties kairiąją pusę būtų galima išskaidyti dviem tiesiniais dauginamaisiais, (4.29) formulės pošaknio reiškinys turi būti kvadratas; todėl pastarojo kvadratinio trinario (y atžvilgiu) diskriminantas turi būti lygus nuliui:

$$\begin{aligned}
&(bd-ae)^2-(b^2-ac)(d^2-af)=0\Rightarrow\\
&acf+2bde-cd^2-ae^2-b^2f=0\Rightarrow\\
&\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}=0.
\end{aligned}$$

Taigi (4.24) *lygtis reiškia dvi tieses tik tuomet, kai determinantas* Δ, *sudarytas iš lygties koeficientų lygus nuliu*i.

Invariantai.

Turint konkrečią antros eilės kreivės (4.24) lygtį iš karto nustatyti kokia tai kreivė – nelengva. Tačiau tinkamai parinkus koordinačių sistemą, kreivės lygčiai galima suteikti pavidalą, iš kurio kreivė atpažįstama.

Nagrinėsime koordinačių sistemos dviejų tipų transformacijas – lygiagretų postūmį ir posūkį. Pavyzdžiui, jeigu apskritimo lygtyje $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$ pažymėsime $x-x_0 = x'$, $y - y_0 = y'$, tai apskritimo lygtis tampa $x'^2 + y'^2 = r^2$. Šiuo pažymėjimu iš tikrųjų nuo koordinačių sistemos xOy perėjome prie kitos lygiagrečiai pastumtos koordinačių sistemos $x'Oy'$. Formulės $x - x_0 = x'$, $y - y_0 = y'$ yra koordinačių sistemos keitimo formulės. Kaip matome, šitoks koordinačių sistemos keitimas nepakeičia kreivės formos, o tik supaprastina jos lygtį.

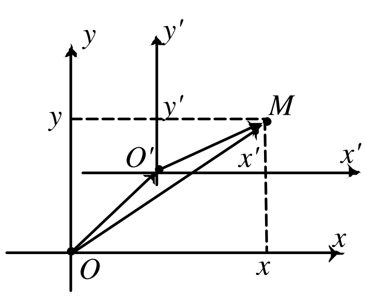
Pasirodo, kad atliekant minėtas transformacijas nesikeičia ne tik kreivės forma, bet ir kai kurios skaitinės antros eilės kreivės charakteristikos. Dydžiai, kurie nekinta lygiagrečiai pastūmus ir pasukus koordinačių sistemą, vadinami *invariantais*. Antros eilės kreivių invariantai yra

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \quad S = a + c. \tag{4.30}$$

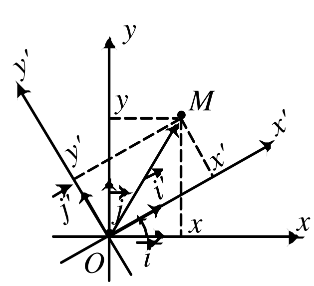
Koordinačių sistemos lygiagretus postūmis.

Tarkime, plokštumoje pasirinktos dvi koordinačių sistemos xOy ("senoji") ir $x'O'y'$ ("naujoji"), kurių ašys yra atitinkamai lygiagrečios, o naujosios sistemos koordinačių pradžia nusakyta vektoriumi $OO' = (x_0; y_o)$. Kitaip tariant, norėdami iš senosios sistemos gauti naująją, turime atlikti senosios koordinačių sistemos lygiagretų postūmį vektoriumi $OO' = (x_0; y_o)$ (26 pav.). Tuomet, jeigu plokštumos taškas M senojoje koordinačių sistemoje turi koordinates $M(x; y)$, tai naujojoje sistemoje jo koordinatės bus $M(x'; y')$, $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$ (nes $\vec{O'M} = \vec{OM} - \vec{OO'}$). Vadinasi, transformavus koordinačių sistemą lygiagrečiu postūmiu, plokštumos taškų koordinačių senojoje ir naujojoje sistemose sąryšiai nusakomi formulėmis

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0. \end{cases} \tag{4.31}$$



26 pav.



27 pav.

Įrašykime į (4.24) lygtį $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$:

$$\begin{aligned} &ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + 2(ax_0 + by_0 + d)x' + 2(bx_0 + cy_0 + e)y' + \\ &f + ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 = 0. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Iš karto matome, kad atlikus lygiagretųjį postūmį, kreivės lygties kvadratinių narių koeficientai liko tie patys. Taigi dydžiai δ ir S yra invariantai lygiagretaus postūmio atžvilgiu.

Įrodysime, kad determinantas Δ taip pat yra invariantas lygiagretaus postūmio atžvilgiu.

Sudarykime šios lygties koeficientų atitinkamą determinantą

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a & b & ax_0 + by_0 + d \\ b & c & bx_0 + cy_0 + e \\ ax_0 + by_0 + d & bx_0 + cy_0 + e & f + ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 \end{vmatrix}$$

ir apskaičiuokime jį pasinaudoję determinanto savybėmis: iš paskutiniosios eilutės atimkime pirmąją, padaugintą iš x_0, ir antrąją, padaugintą iš y_0. Gausime:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a & b & ax_0 + by_0 + d \\ b & c & bx_0 + cy_0 + e \\ d & e & dx_0 + ey_0 + f \end{vmatrix}.$$

Dabar iš paskutiniojo stulpelio atimkime pirmąjį, padaugintą iš x_0, ir antrąjį, padaugintą iš y_0. Gausime, kad $\Delta' = \Delta$ – įrodyta.

Koordinačių sistemos posūkis.

Dabar koordinačių sistemą xOy pasukime kampu α prieš laikrodžio rodyklę (27 pav. posūkio kampas pažymėtas lankeliu) – turėsime sistemą $x'Oy'$. Įrodysime, kad atliekant koordinačių sistemos posūkį, "senosios" taško M koordinatės $(x; y)$ susietos su "naujosiomis" $(x'; y')$ formulėmis:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \tag{4.33}$$

Koordinačių ašių Ox ir Oy vienetinius vektorius pažymėkime atitinkamai $\vec{i}$ ir $\vec{j}$, ašių Ox' ir Oy' – $\vec{i'}$ ir $\vec{j'}$. Tuomet naujojoje koordinačių sistemoje

$$\vec{OM} = (x'; y') = x'\vec{i'} + y'\vec{j'}. \tag{4.34}$$

Apskaičiuokime $\vec{i'} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha$, $\vec{j'} = \vec{i}\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) + \vec{j}\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha$ ir įrašykime šias išraiškas į (4.34) formulę. Gausime, jog

$$\begin{aligned} &\vec{OM} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} = x'(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha) + y'(-\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha) = \\ &= \vec{i}(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + \vec{j}(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Paskutinioji vektoriaus $\vec{OM}$ išraiška yra koordinačių sistemoje xOy, taigi (4.33) formulės teisingos.

Įrodykime, kad dydžiai (4.30) yra antros eilės kreivės invariantai koordinačių sistemos posūkio atžvilgiu. Tuo tikslu transformacijos (4.33) išraiškas įrašykime į (4.24) lygtį. Gausime lygtį

$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0, \tag{4.36}$$

kurioje

$$\begin{aligned} &a' = a\cos^2\alpha + c\sin^2\alpha + 2b\sin\alpha\cos\alpha, \\ &c' = a\sin^2\alpha + c\cos^2\alpha - 2b\sin\alpha\cos\alpha, \\ &b' = -(a-c)\sin\alpha\cos\alpha + b(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha), \\ &d' = d\cos\alpha + e\sin\alpha, \\ &e' = -d\sin\alpha + e\cos\alpha, \\ &f' = f. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Sudėję šios lygybių sistemos pirmąją ir antrąją lygybes, iš karto gauname, kad $a+c = a'+c'$, t.y. dydis $S = a+c$ yra invariantas posūkio atžvilgiu.

Dar įrodykime, kad $\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ posūkio atžvilgiu yra invariantas. Tuo tikslu naudodamiesi trigonometrijos formulėmis

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

pertvarkykime (4.37) sistemos pirmąsias tris lygybes. Gausime:

$$\begin{array}{l} a' = \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos 2\alpha + b\sin 2\alpha, \\ c' = \frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2}\cos 2\alpha - b\sin 2\alpha, \\ b' = -\frac{a-e}{2}\sin 2\alpha + b\cos 2\alpha. \end{array} \tag{4.38}$$

Iš pirmosios lygybės atimkime antrąją:

$$a' - c' = (a-c)\cos 2\alpha + 2b\sin 2\alpha. \tag{4.39}$$

Pastarosios lygybės kvadrato ir dvigubos trečiosios lygybės iš (4.38) kvadrato suma yra:

$$(a'-c')^2 + 4b'^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \Rightarrow (a'+c')^2 - 4(a'c' - b'^2) = (a+c)^2 - 4(ac-b^2).$$

Kadangi $a+c = a'+c'$, tai $a'c' - b'^2 = ac - b^2$, t.y. dydis $\delta = ac - b^2$ yra invariantas.

Užduotis. Nustatykite kokią formą įgis lygtis

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$$

pasukus koordinačių sistemą kampu $\frac{\pi}{4}$ prieš laikrodžio rodyklę. (Ats. $x'^2 + 4y'^2 = 4$).

Išvardinsime antros eilės kreives, kurias gali reikšti (4.24) lygtis, ir užrašysime šių kreivių paprasčiausias (*kanonines*) lygtis.

Elipsė. *Elipse* vadinama kreivė, sudaryta iš plokštumos taškų, kurių atstumų nuo dviejų pasirinktųjų taškų F_1, F_2, (vadinamų *židiniais*) suma yra pastovi (tegu ji lygi $2a$).

Jei atstumą tarp židinių pažymėsime $2c$, $b^2 = a^2 - c^2$, o stačiakampės koordinačių sistemos pradžios tašku O paimsime atkarpos F_1F_2, jungiančios židinius, vidurio tašką, Ox ašį nukreipsime vektoriaus $\vec{F_2F_1}$ kryptimi (28 pav.), tai tokios elipsės lygtis yra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.40}$$

Ši lygtis vadinama *elipsės kanonine lygtimi.*

Jeigu $a = b$, tai elipsė yra apskritimas su spinduliu $r = a = b$, o jo lygtis

$$x^2 + y^2 = r^2$$

vadinama *apskritimo kanonine lygtimi.*

Skaičius $\varepsilon = \frac{c}{a}$ vadinamas *elipsės ekscentricitetu.* Ši charakteristika apibūdina elipsės ištempimo laipsnį. Apskritimo ekscentricitetas $\varepsilon = 0$, nes $c = 0$.

Išveskime elipsės kanoninę lygtį. Tegu $M(x;y)$ – bet kuris elipsės taškas. Pagal apibrėžimą $|\vec{F_1M}| + |\vec{F_2M}| = 2a$. Įrašę vektorių ilgių išraiškas, gausime lygtį

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a,$$

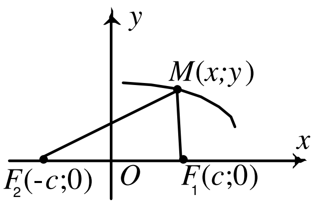
kuri ir yra elipsės lygtis. Tačiau suprastinkime ją – perkelkime antrąją šaknį į dešiniąją lygties pusę, pakelkime abi lygties puses kvadratu ir padalykime ją iš 4. Gausime lygtį

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2 + cx,$$

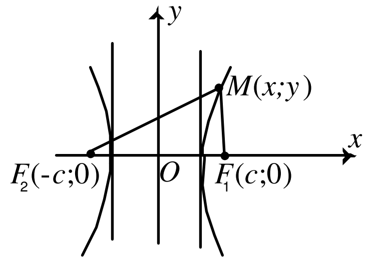
kurią vėl pakėlę kvadratu ir pertvarkę turėsime

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2),$$

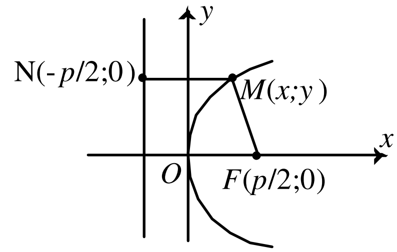
o įvedę žymenį $b^2 = a^2 - c^2$ ir lygtį padalinę iš a^2b^2, gausime kanoninę elipsės lygtį.



28 pav.



29 pav.



30 pav.

Hiperbolė. *Hiperbole* vadinama kreivė, sudaryta iš plokštumos taškų, kurių atstumų nuo dviejų pasirintųjų taškų F_1, F_2, (vadinamų *židiniais*) skirtumas yra pastovus (tegu jis lygus $2a$).

Jei atstumą tarp židinių pažymėsime $2c$, $b^2 = c^2 - a^2$, o stačiakampės koordinačių sistemos pradžios tašku O paimsime atkarpos F_1F_2, jungiančios židinius, vidurio tašką, Ox ašį išvesime vektoriaus $\overrightarrow{F_2F_1}$ kryptimi (29 pav.), tai tokios hiperbolės lygtis yra

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4.41}$$

Ši lygtis vadinama *hiperbolės kanonine lygtimi.*

Hiperbolės kanoninę lygtį gausime apskaičiavę minėtus atstumus ir atlikę analogiškus pertvarkymus, kaip ir elipsės aveju.

Užduotis. Išveskite hiperbolės kanoninę lygtį.

Skaičius $\varepsilon = \frac{c}{a}$ vadinamas *hiperbolės ekscentricitetu* ($\varepsilon > 1$).

Tiesės $y = \frac{b}{a}x$ ir $y = -\frac{b}{a}x$ vadinamos *hiperbolės asimptotėmis.* Asimptotės yra tiesės, prie kurių neribotai artėja hiperbolės taškai, kai kintamasis x neribotai didinamas (į $+\infty$ arba į $-\infty$).

Parabolė. *Parabole* vadinama kreivė, sudaryta iš plokštumos taškų, kurių atstumas nuo pasirintojo taško F (vadinamo *židiniu*) ir atstumas nuo pasirinktosios tiesės (vadinamos *direktrise*) yra lygūs (tegu jis lygus $2p$).

Jeigu iš židinio nuleisime statmenį į direktrisę, tai jo ilgis yra $2p$. Šio statmens vidurio tašką (per kurį eina parabolė), paimkime koordinačių sistemos pradžios tašku, Ox ašį sutapdinkime su šiuo statmeniu ir nukreipkime parabolės šakų kryptimi (30 pav.). Tuomet gausime parabolės lygtį

$$y^2 = 2px, \tag{4.42}$$

vadinamą *kanonine parabolės lygtimi.*

Jos išvedimas taip pat nesudėtingas – užtenka apskaičiuoti minėtus atstumus, juos sulyginti ir gautąją lygtį pervarkyti. Išveskite!

Antros eilės kreivės atpažinimas. Kai kreivė užrašyta (4.24) lygtimi, tai ji gali reikšti bet kurią iš minėtų antros eilės kreivių, ir ne tik – kaip matėme, ji kartais gali neturėti sprendinių, gali turėti tik vieną, jos sprendiniais gali būti tiesių pora. Atpažinti visus šiuos atvejus padeda invariantai, kurie nekinta keičiant koordinačių sistemą (lygiagrečiai perkeliant ir pasukant) – parinkus koordinačių sistemą taip, kad kreivės lygtis įgytų kanoninį pavidalą, iš kurio kreivė jau atpažįstama lengvai.

Pateiksime antros eilės kreivių atpažinimo kriterijus:

kai $\delta > 0,\ \Delta \neq 0,\ \Delta \cdot S < 0$ – **elipsė**;

kai $\delta > 0,\ \Delta \neq 0,\ \Delta \cdot S > 0$ – sprendinių nėra;

kai $\delta > 0,\ \Delta = 0$ – taškas;

kai $\delta < 0,\ \Delta \neq 0$ – **hiperbolė**;

kai $\delta < 0,\ \Delta = 0$ – tiesių pora;

kai $\delta = 0,\ \Delta \neq 0$ – **parabolė**;

kai $\delta = 0,\ \Delta = 0,\ d^2 - af \geq 0$ – tiesių pora;

kai $\delta = 0,\ \Delta = 0,\ d^2 - af < 0$ – sprendinių nėra.

4.8. Uždaviniai.

1. Apskritimo centras $C(1;-1)$, o tiesė $5x - 12y + 9 = 0$ yra jo liestinė. Kokia apskririmo lygtis?

Ats. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$.

2. Parašykite lygtį apskritimo, kurio spindulys $R = \sqrt{5}$, o lietimosi su tiese $x - 2y - 1 = 0$ taškas yra $M(3;1)$.

Ats. $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$, $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$.

3. Parašykite lygtis apskritimų, einančių per tašką $O(0;0)$ ir liečiančių dvi susikertančias tieses $x + 2y - 9 = 0$ ir $2x - y + 2 = 0$.

Ats. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$, $(x - \frac{22}{5})^2 + (y + \frac{31}{5})^2 = \frac{289}{5}$.

4. Parašykite lygtis apskritimų, einančių per tašką $A(1;0)$ ir liečiančių tieses $2x + y + 2 = 0$ ir $2x + y - 18 = 0$.

Ats. $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 20$, $(x - \frac{9}{5})^2 + (y - \frac{22}{5})^2 = 20$.

5. Parašykite elipsės lygtį, jei jos didžioji pusašė lygi 26, o židiniai $F_1(-10;0)$, $F_2(14;0)$.

Ats. $\frac{(x-4)^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$.

6. Parašykite hiperbolės lygtį, jei atstumas tarp jos viršūnių lygus 2ė, o židiniai yra $F_1(-10;),\ \ F_2(16;2)$.

Ats. $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$.

7. Parašykite parabolės lygtį, jei jos židinys yra $F(-7;0)$, o direktrisė - tiesė $x - 7 = 0$.

Ats. $y^2 = -28x$.

8. Parašykite parabolės lygtį, jei jos židinys yra $F(2;-1)$, o direktrisė - tiesė $x - y - 1 = 0$.

Ats. $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$.

5

Algebrinės struktūros

5.1. Kompleksiniai skaičiai.

Apibrėžimas. *Kompleksiniais skaičiais* vadinami reiškiniai $a+bi$, $a, b \in R$, $i^2 = -1$, su kuriais atliekami sudėties ir daugybos veiksmai, apibrėžiami kaip ir su įprastiniais algebriniais reiškiniais.

Kompleksinių skaičių $z_1 = a_1 + b_1 i$ ir $z_2 = a_2 + b_2 i$ *suma* vadinamas skaičius $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Kompleksinių skaičių $z_1 = a_1 + b_1 i$ ir $z_2 = a_2 + b_2 i$ *sandauga* vadinamas skaičius $z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i$.

Skaičius a vadinamas kompleksinio skaičiaus $z = a + bi$ *realiąja dalimi* (žymima Rez), o bi - menamąja dalimi (žymima Imz).

Atimtis ir dalyba su kompleksiniais skaičiais yra išvestiniai sudėties ir daugybos veiksmai: komleksinių skaičių $z_1 = a_1 + b_1 i$ ir $z_2 = a_2 + b_2 i$ *skirtumu* vadinamas skaičius s, tenkinantis lygybę $s + z_2 = z_1$. Taigi $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Panašiai kompleksinių skaičių *dalmeniu* $\frac{z_1}{z_2}$ vadiname skaičių d, su kuriuo galioja lygybė $d \cdot z_2 = z_1$. Toks kompleksinis skaičius yra:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Kompleksinio skaičiaus užrašas $z = a + bi$ vadinamas *algebrine* kompleksinio skaičiaus forma.

Atliekant veiksmus su kompleksiniais skaičiais algebrine forma svarbu žinoti, kad $i^2 = -1$, $i^3 = -i, i^4 = 1$.

Tolesni nagrinėjami kurso klausimai:

Kompleksinio skaičiaus *trigonometrinė forma.* Veiksmai su kompleksiniais skaičiais trigonometrine forma: daugyba, dalyba, kėlimas laipsniu, šaknies traukimas.

Kompleksinių skaičių taikymas išvedant kai kurias trigonometrijos formules.

Uždaviniai.

1. Apskaičiuokite: 1) $(1+i)^{25}$; 2) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; 3) $\left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; 4) $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.
Ats. 1) $2^{12}(1+i)$; 2) $2^9(1-i\sqrt{3})$; 3) $(2-\sqrt{3})^{12}$; 4) -64.

2. Išreikškite funkcijomis $\cos x$ ir $\sin x$: 1) $\cos 5x$; 2) $\sin 6x$.
Ats. 1) $\cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$; 2) $6\cos^5 x \sin x - 20\cos^3 x \sin^3 x + 6\cos x \sin^5 x$.

3. Funkcijas 1) $\cos^5 x$; 2) $\sin^4 x$ išreikškite kartotinių kampų sinusais ir kosinusais.
Ats. 1) $\frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$; 2) $\frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$.

4. Apskaičiukite $(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n$.

Ats. $2^n \cos^n \frac{\alpha}{2}(\cos\frac{n\alpha}{2} + i\sin\frac{n\alpha}{2})$.

5.2. Algebrinės struktūros.

Jei kokioje nors aibėje apibrėžtas veiksmas (algebrinė operacija), tai sakoma, kad aibė yra *uždara šios operacijos atžvilgiu.* Pažymėkime tokią operaciją $*$.

Algebrinė operacija $*$ vadinama *asociatyvia*, jeigu su visais aibės elementais a, b, c galioja lygybė

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Algebrinė operacija $*$ vadinama *komutatyvia*, jeigu su visais aibės elementais a, b galioja lygybė

$$a * b = b * a.$$

Pusgrupė. Kai aibė uždara kokios nors operacijos $*$ atžvilgiu ir ši operacija yra asociatyvi, tai ši aibė vadinama *pusgrupe.* Pavyzdžiai.

Grupė. Pavyzdžiai.

Žiedas. Pavyzdžiai.

Kūnas. Pavyzdžiai.

6

Vektorinės erdvės

6.1.Vektorinės erdvės apibrėžimas.

Nagrinėjami klausimai:

Apibrėžimas. Pavyzdžiai.

Vektorių tiesinis priklausomumas. Savybės.

Vektorių tiesinis darinys.

Vektorių sistemos rangas.

Matricos rangas. Matricos rango teorema.

Vektorinės erdvės bazė. Erdvės dimensija. Vektorinės erdės poerdvis (tiesinis poerdvis).

Bazės keitimas.

Euklido erdvė. Vektorių ortogonalumas. Ortogonalioji bazė.

Koši-Buniakovskio nelygybė, trikampio nelygybė.