ALGIRDAS AMBRAZEVIČIUS

# VARIACINIS SKAIČIAVIMAS

Vilnius
2000

# TURINYS

# 1 SKYRIUS

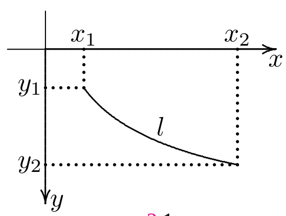
# Variacinio skaičiavimo lygtys

## 1.1 PAPRASČIAUSI VARIACINIO SKAIČIAVIMO UŽDAVINIŲ PAVYZDŽIAI

Vienas iš pirmųjų variacinio skaičiavimo uždavinių yra 1696 m. J. Bernulio suformuluotas uždavinys apie brachistochronę:

1 uždavinys. *Plokštumoje $Oxy$ yra du taškai, nesantys vienoje vertikalioje tiesėje. Tegu $x_1, y_1$ ir $x_2, y_2$ yra šių taškų koordinatės. Iš taško $(x_1, y_1)$ į tašką $(x_2, y_2)$ kreive $l$ be trinties slenka materialus taškas. Pradiniu laiko momentu jo greitis $\mathbf{v}$ lygus nuliui. Aibėje tokių kreivių reikia rasti tą, kuria slinkdamas materialus taškas pasiektų tašką $(x_2, y_2)$ per trumpiausią laiką. Ieškomoji kreivė $l$ yra vadinama brachistochrone.*

Tarkime, koordinačių ašys $x, y$ parinktos taip, kaip nurodyta 2.1 paveikslėlyje,




2.1 pav.

o kreivė $l$ apibrėžta lygtimi

$$y = y(x),\ x \in [x_1, x_2]. \tag{1.1}$$

Tada

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \tag{1.2}$$

Pagal energijos tvermės dėsnį

$$\frac{m\mathbf{v}^2}{2} = mg(y - y_1);$$

čia: $m$ – slenkančio taško masė, $g$ – laisvojo kritimo pagreitis. Kadangi

$$|\mathbf{v}| = \frac{dl}{dt} = \sqrt{1 + y'^2}\,\frac{dx}{dt},$$

tai

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2g(y - y_1)}}\,dx.$$

Suintegravę šią lygybę nuo $x_1$ iki $x_2$, gausime

$$T \equiv I(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y-y_1)}}\,dx; \tag{1.3}$$

čia $T$ – laikas, kurį sugaišta materialus taškas, judėdamas kreive $l$ iš taško $(x_1, y_1)$ į tašką $(x_2, y_2)$

Kiekvienai pakankamai glodžiai kreivei $l$, apibrėžtai (1.1) lygtimi ir tenkinančiai (1.2) sąlygas, (1.3) integralas įgyja konkrečią skaitinę reikšmę. Todėl į jį galima žiūrėti kaip į funkcionalą[1] ir nagrinėjamą uždavinį performuluoti taip:

Tegu $y = y(x), x \in (a, b)$ yra diferencijuojama funkcija, tenkinanti (1.2) sąlygą. Aibėje tokių funkcijų reikia rasti tą, kuriai (1.3) funkcionalas įgyja mažiausią reikšmę.

2 u ž d a v i n y s. *Tegu* $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ *yra šviesos sklidimo nehomogeninėje medžiagoje greitis. Rasti šviesos sklidimo trajektoriją* $l$*, jungiančią taškus* $(x_1, y_1, z_1)$ *ir* $(x_2, y_2, z_2)$.

Tarkime, šviesos sklidimo trajektorija yra apibrėžiama lygtimis:

$$y = y(x), \quad z = z(x), \quad x \in [x_1, x_2]. \tag{1.4}$$

Tada

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad z(x_1) = z_1, \quad z(x_2) = z_2. \tag{1.5}$$

Kadangi

$$|\mathbf{v}| = \frac{dl}{dt} = \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,\frac{dx}{dt},$$

tai šviesos spindulys, išeinantis iš taško $(x_1, y_1, z_1)$, pasieks tašką $(x_2, y_2, z_2)$ per laiką

$$T \equiv I(y, z) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{|\mathbf{v}(x, y, z)|}\,dx. \tag{1.6}$$

Pagal Ferma dėsnį šviesa sklinda ta trajektorija, kuria laikas $T$ yra minimalus.

Kiekvienai pakankamai glodžiai trajektorijai $l$, apibrėžtai (1.4) lygtimis ir tenkinančiai (1.5) sąlygas, (1.6) integralas įgyja konkrečią skaitinę reikšmę. Todėl į integralą $I$ galime žiūrėti kaip į funkcionalą ir (1.3) uždavinį galime performuluoti taip:

[1] Tegu $X$ yra normuota erdvė su norma $\|\cdot\|$. Tada funkcija $\rho(x, y) = \|x - y\|, x, y \in X$ apibrėžia atstumą tarp taškų $x$ ir $y$ erdvėje $X$. Tegu $\mathfrak{M}$ yra kokia nors aibė elementų $x$ erdvėje $X$. Tada atvaizdis $f : \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$ vadinamas funkcionalu su apibrėžimo sritimi $\mathfrak{M}$. Pavyzdžiui, integralas

$$I(y) = \int\limits_0^1 y(x)\,dx,$$

nagrinėjmas funkcijų aibėje

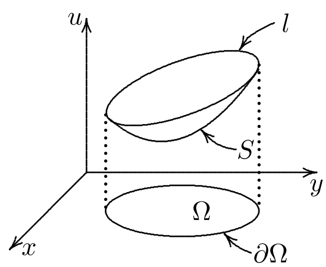
$$\mathfrak{M} = \{y \in \mathrm{C}[0, 1] : y(0) = a, y(1) = b\}$$

yra funkcionalas su apibrėžimo sritimi $\mathfrak{M}$ erdvėje $\mathrm{C}[0, 1]$ .

Tegu $y = y(x),\ z = z(x),\ x \in [x_1, x_2]$, yra diferencijuojamos funkcijos, tenkinančios (1.5) sąlygas. Tokių funkcijų aibėje reikia rasti tas, kurioms (1.6) funkcionalas įgyja mažiausią reikšmę.

3 u ž d a v i n y s. *Tegu $l$ yra uždaras kontūras erdvėje $\mathbb{R}^3$, o $S$ – paviršius, užtemptas ant kontūro $l$. Tokių paviršių aibėje reikia rasti tą, kurio plotas yra mažiausias.*

Tarkime, ortogonalioje koordinačių sistemoje $Oxyz$ paviršius $S$ apibrėžiamas lygtimi $u = u(x, y),\ x, y \in \Omega,\ \partial\Omega$ – kontūro $l$ projekcija į plokštumą $Oxy$ (žr. 2.2 pav.).




2.2 pav.

Tada paviršiaus $S$ plotas

$$|S| \equiv I(u) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dxdy. \tag{1.7}$$

Jeigu taškas $(x, y) \in \partial\Omega$, tai taškas $(x, y, u(x, y)) \in l$. Tai reiškia, kad funkcija $u(x, y)$ taškuose $(x, y) \in \partial\Omega$ įgyja žinomą reikšmę. Šią sąlygą galima užrašyti taip:

$$u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y); \tag{1.8}$$

čia $\varphi$ – žinoma funkcija.

Kiekvienai diferencijuojamai funkcijai $u$, tenkinančiai (1.8) sąlygą, (1.7) integralas įgyja konkrečią skaitinę reikšmę. Vadinasi, į integralą $I$ galime žiūrėti kaip į funkcionalą. Tai leidžia 3 uždavinį performuluoti taip:

Tegu $u = u(x, y)$ yra diferencijuojama srityje $\Omega$ funkcija, tenkinanti (1.8) sąlygą. Tokių funkcijų aibėje reikia rasti tą, kuriai (1.7) funkcionalas įgyja mažiausią reikšmę.

4 u ž d a v i n y s. *Plokštumoje $Oxy$ yra du taškai, sujungti atkarpa ir kreive $l$, kurios ilgis $a$. Tokių kreivių aibėje reikia rasti tą, kuri kartu su atkarpa apriboja didžiausio ploto figūrą.*

Tarkime, kad tie taškai yra $x$ ašyje ir turi koordinates $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, o kreivę $l$ galima apibrėžti lygtimi $y = y(x), x \in [x_1, x_2]$. Tada

$$y(x_1) = 0, \quad y(x_2) = 0. \tag{1.9}$$

Figūros, apribotos kreive $l$ ir atkarpa $[x_1, x_2]$, plotas lygus

$$|S| = I(y) = \int\limits_{x_1}^{x_2} y\, dx. \tag{1.10}$$

Kreivės $l$ ilgis

$$|l| = G(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{1.11}$$

Kiekvienai diferencijuojamai funkcijai $y = y(x),\ x \in [x_1, x_2]$, tenkinančiai (1.9) sąlygą, (1.10) ir (1.11) integralai įgyja konkrečias skaitines reikšmes. Todėl į juos galima žiūrėti kaip į funkcionalus ir 4 uždavinį performuluoti taip:

Tegu $y = y(x),\ x \in [x_1, x_2]$, yra diferencijuojama funkcija, tenkinanti (1.9) sąlygą. Tokių funkcijų aibėje reikia rasti tą, kuriai (1.10) funkcionalas įgyja didžiausią reikšmę, o (1.11) funkcionalas įgyja reikšmę $a$.

Visuose šiuose uždaviniuose ieškome funkcijos (arba kelių funkcijų), kuri tenkina tam tikras papildomas sąlygas ir suteikia funkcionalui ekstremalią, t.y. minimalią arba maksimalią, reikšmę. Tiesa, 4 uždavinyje ieškomoji funkcija kartu su (1.9) turi tenkinti dar ir (1.11) sąlygą, kuri yra visai kitokio pobūdžio. Apibendrindami šiuos uždavinius sakysime, kad *pagrindinis variacinio skaičiavimo uždavinys* yra rasti tokią funkciją, kuriai nagrinėjamas funkcionalas įgyja ekstremalią reikšmę. Šis uždavinys yra analogiškas elementariems analizės uždaviniams, kai yra ieškomi vienos arba kelių kintamųjų funkcijos ekstremumo taškai. Vieno kintamojo diferencijuojamos funkcijos $f$ atveju sąlyga $f'(x) = 0$ yra būtina lokalaus ekstremumo egzistavimo sąlyga. Funkcionalo atveju taip pat yra išvedama būtina ekstremumo egzistavimo sąlyga. Dažniausiai tai yra dalinių išvestinių lygtis. Ją turi tenkinti ieškomoji funkcija, jeigu tik ji egzistuoja. Išvesdami būtiną ekstremumo egzistavimo sąlygą, naudosime kelis teiginius. Jie yra vadinami pagrindinėmis variacinio skaičiavimo lemomis.

## 1.2 PAGRINDINĖS VARIACINIO SKAIČIAVIMO LEMOS

1.1 **lema.** *Tegu* $f$ *yra tolydi segmente* $[a,b]$ *funkcija ir*

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(a,b)\,.$$

*Tada* $f(x) \equiv 0,\ \forall x \in [a,b]$.

◁ Tarkime priešingai, kad lemos sąlygos yra patenkintos, tačiau funkcija $f(x) \not\equiv 0$. Tada egzistuoja taškas $x_0 \in [a,b] : f(x_0) \neq 0$. Tegu $f(x_0) > 0$. Kadangi funkcija $f$ yra tolydi, tai egzistuoja taško $x_0$ aplinka $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ tokia, kad $f(x) > 0,\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Jeigu taškas $x_0$ yra segmento $[a,b]$ kraštinis taškas, pavyzdžiui, $x_0 = b$, tai reikia imti vienpusę šio taško aplinką. Aibėje $\mathrm{C}_0^\infty(a,b)$ imkime kokią nors funkciją $\eta$, kuri yra teigiama $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ir lygi nuliui, kai $x \in [a,b] \setminus [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Tada

$$0 = \int_a^b f(x)\eta(x)\,dx = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(x)\eta(x)\,dx > 0.$$

Gauta prieštara įrodo, kad padaryta prielaida yra neteisinga. Taigi $f(x) = 0,\ \forall x \in [a,b]$. Atvejis, kai $f(x_0) < 0$, nagrinėjamas analogiškai. ▷

Toks pats teiginys yra teisingas dvilypių, trilypių ir apskritai $n$-lypių integralų atveju.

1.2 **lema.** *Tegu* $\Omega$ *yra aprėžta erdvėje* $\mathbb{R}^n$ *sritis,* $f \in \mathrm{C}(\overline{\Omega})$ *ir*

$$\int_\Omega f(x)\eta(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(\Omega)\,.$$

*Tada* $f(x) \equiv 0,\ \forall x \in \overline{\Omega}$.

P a s t a b a . Šios lemos įrodymas yra analogiškas 1.12 lemos įrodymui. Be to, 1.2 lema išlieka teisinga ir tuo atveju, jeigu joje sritį $\Omega$ pakeisime glodžiu $n$-mačiu paviršiumi $S$.

Kitų trijų lemų įrodymas yra visiškai kitokio pobūdžio.

1.3 **lema.** *Tegu* $f$ *yra tolydi segmente* $[a,b]$ *funkcija ir*

$$\int_a^b f(x)\eta'(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}^1(a,b) : \eta(a) = \eta(b) = 0.$$

*Tada funkcija* $f$ *yra konstanta.*

$\triangleleft$ Pažymėkime

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx = C.$$

Tada

$$\int\limits_a^b (f(x) - C)\,dx = 0. \tag{1.12}$$

Tegu

$$\eta(x) = \int\limits_a^x (f(t) - C)\,dt.$$

Akivaizdu, kad taip apibrėžta funkcija $\eta$ tenkina lemos sąlygas, o jos išvestinė $\eta'(x) = f(x) - C$. Todėl

$$\int\limits_a^b (f(x) - C)f(x)\,dx = 0. \tag{1.13}$$

Padauginę (1.12) lygybę iš $-C$ ir pridėję prie (1.13), rezultatą užrašysime taip:

$$\int\limits_a^b (f(x) - C)^2\,dx = 0.$$

Tačiau ši lygybė yra galima tik tuo atveju, kai $f(x) = C,\ \forall x \in [a,b]$. $\triangleright$

Šį teiginį galima apibendrinti.

1.4 **lema.** *Tegu $f$ yra tolydi intervale $[a,b]$ funkcija ir*

$$\int\limits_a^b f(x)\eta^{(n)}(x)\,dx = 0,$$

$\forall \eta \in \mathrm{C}^{\mathrm{n}}(a,b) : \eta(a) = \cdots = \eta^{(n-1)}(a) = 0$, $\eta(b) = \cdots = \eta^{(n-1)}(b) = 0.$

*Tada*

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_{n-1}(x-a)^{n-1};$$

*čia $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ yra tam tikros konstantos.*

Šio teiginio įrodymą galima rasti [3] knygoje.

1.5 **lema.** *Tegu $f$ ir $g$ yra tolydžios segmente $[a,b]$ funkcijos ir*

$$\int\limits_a^b (g(x)\eta(x) + f(x)\eta'(x))\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}^1(a,b) : \eta(a) = \eta(b) = 0. \tag{1.14}$$

*Tada $f \in \mathrm{C}^1(a,b)$ ir $f'(x) = g(x),\ \forall x \in [a,b]$.*

◁ Tegu
$$w(x) = \int\limits_a^x g(t)\, dt.$$
Tada
$$\int\limits_a^b w(x)\eta'(x)\, dx = -\int\limits_a^b g(x)\eta(x)\, dx$$
ir (1.14) tapatybę galime perrašyti taip:
$$\int\limits_a^b (f(x) - w(x))\eta'(x)\, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a, b)\,.$$
Funkcija $f - w$ tenkina 1.3 lemos sąlygas. Todėl ji yra konstanta, t.y.
$$f(x) = \int\limits_a^x g(t)\, dt + C.$$
Akivaizdu, kad taip apibrėžta funkcija yra tolydi ir turi tolydžią išvestinę $f' = g$. ▷

## 1.3 BŪTINA EKSTREMUMO EGZISTAVIMO SĄLYGA. OILERIO LYGTIS.

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $F \in \mathrm{C}(\Omega \times \mathbb{R})$; $l$ – glodi kreivė, gulinti srityje $\Omega$ ir jungianti du taškus. Tarkime, kreivę $l$ galima apibrėžti lygtimi $y = y(x)$, $x \in [a,b]$ ir $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$. Tada $\forall x \in [a,b]$ taškas $(x, y(x)) \in \Omega$. Aibę diferencijuojamų funkcijų, tenkinančių šias sąlygas, pažymėkime raide $\mathfrak{M}$.

Apibrėžkime funkcionalą

$$I(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')\,dx, \quad y \in \mathfrak{M}. \tag{1.15}$$

Tada pagrindinis variacinio skaičiavimo uždavinys formuluojamas taip: *rasti funkciją $y \in \mathfrak{M}$ tokią, kad funkcionalas $I$ įgytų ekstremalią, t.y. minimalią arba maksimalią, reikšmę.* Čia yra kalbama apie *absoliutųjį* ekstremumą, t.y. ieškoma funkcija turi būti tokia, kad

$$I(y) \le I(\tilde{y}), \quad \forall \tilde{y} \in \mathfrak{M}$$

arba

$$I(y) \ge I(\tilde{y}), \quad \forall \tilde{y} \in \mathfrak{M}.$$

Norint apibrėžti lokalaus ekstremumo sąvoką, reikia apibrėžti funkcijos (kreivės) aplinkos sąvoką.

Tegu $\varepsilon > 0$ yra fiksuotas skaičius ir $y \in \mathfrak{M}$. Funkcijos $y$ nulinės eilės (arba stipriąja) $\varepsilon$ aplinka vadinsime aibę

$$\mathfrak{M}_0 = \{\widetilde{y} \in \mathfrak{M} : \max_{x \in [a,b]} |\widetilde{y}(x) - y(x)| \le \varepsilon\}.$$

Funkcijos $y$ pirmosios eilės (arba silpnąja) $\varepsilon$ aplinka vadinsime aibę

$$\mathfrak{M}_1 = \{\widetilde{y} \in \mathfrak{M} : \max_{x \in [a,b]} |\widetilde{y}(x) - y(x)| + \max_{x \in [a,b]} |\widetilde{y}\,'(x) - y'(x)| \le \varepsilon\}.$$

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, kad funkcija $y \in \mathfrak{M}$ suteikia funkcionalui $I$ *stiprųjį* (*silpnąjį*) lokalų ekstremumą, jeigu kokioje nors stipriojoje $\varepsilon$ aplinkoje $\mathfrak{M}_0$ (silpnojoje $\varepsilon$ aplinkoje $\mathfrak{M}_1$)

$$I(y) \le I(\widetilde{y}), \quad \forall\, \widetilde{y} \in \mathfrak{M}_0 \quad (\forall\, \widetilde{y} \in \mathfrak{M}_1)$$

arba

$$I(y) \ge I(\widetilde{y}\,), \quad \forall\, \widetilde{y} \in \mathfrak{M}_0 \quad (\forall\, \widetilde{y} \in \mathfrak{M}_1).$$

Jeigu kokia nors funkcija $y$ suteikia funkcionalui $I$ absoliutųjį ekstremumą, tai ji suteikia ir stiprųjį lokalų ekstremumą, tuo labiau ir silpnąjį lokalų ekstremumą. Todėl, jeigu kokia nors sąlyga yra būtina tam, kad funkcija $y$ suteiktų funkcionalui $I$ silpnąjį lokalų ekstremumą, tai ši sąlygą yra būtina ir tam, kad funkcija $y$ suteiktų funkcionalui $I$ stiprųjį lokalų ekstremumą, tuo labiau ir absoliutųjį ekstremumą. Taigi išvedant būtiną ekstremumo sąlygą, reikia išnagrinėti silpnojo lokalaus ekstremumo atvejį.

P a s t a b a. Integralas $I$ turi prasmę ir tuo atveju, kai funkcija $y$ nėra tolydžiai diferencijuojama intervale $[a, b]$. Tiksliau integralas $I$ turi prasmę, kai funkcija $y$ tolydi intervale $[a, b]$ ir turi tolydžią dalinę išvestinę visame intervale, išskyrus, baigtinį taškų skaičių, kuriuose turi pirmos rūšies trūkį (tokios funkcijos vadinamos *dalimis glodžiomis funkcijomis*). Todėl aibės $\mathfrak{M}$ apibrėžime vietoje tolydžiai diferencijuojamų intervale $[a, b]$ funkcijų, galime imti dalimis glodžias funkcijas.

Toliau vietoje natūralios tolydumo sąlygos reikalausime, kad funkcija $F$ turėtų tolydžias dalines išvestines iki antrosios eilės imtinai pagal visus savo argumentus. Atkreipsime dėmesį į tai, kad, įrodant kai kuriuos teiginius, pakanka reikalauti tik pirmųjų išvestinių tolydumo.

Tarkime, funkcija $y \in \mathfrak{M}$ suteikia (1.15) funkcionalui silpnąjį lokalų ekstremumą, o funkcija $\eta \in \mathrm{C}_0^1(a, b)$. Funkcija $y + \varepsilon\eta$ priklauso kokiai nors silpnai funkcijos $y$ aplinkai, jeigu skaičiaus $\varepsilon$ modulis yra pakankamai mažas. Todėl tokioms $\varepsilon$ reikšmėms yra teisinga viena iš nelygybių

$$I(y) \le I(y + \varepsilon\eta) \quad \text{arba} \quad I(y) \ge I(y + \varepsilon\eta).$$

Tegu $\Phi(\varepsilon) = I(y + \varepsilon\eta)$. Pagal apibrėžimą

$$\Phi'(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(y + \varepsilon\eta) - I(y)}{\varepsilon} = \int_a^b \Big[ F_y(x, y, y')\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\eta'(x) \Big]\, dx.$$

Taškas $\varepsilon = 0$ yra funkcijos $\Phi$ lokalaus ekstremumo taškas. Todėl $\Phi'(0) = 0$. Šią sąlygą galima perrašyti taip:

$$\int_a^b \Big[ F_y(x, y, y')\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\eta'(x) \Big]\, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a, b)\,. \tag{1.16}$$

Taigi funkcija $y$ turi tenkinti (1.16) integralinę tapatybę.

Atvirkštinis teiginys yra neteisingas. Jeigu funkcija $y \in \mathfrak{M}$ tenkina (1.16) integralinę tapatybę, tai nebūtinai ji suteikia funkcionalui silpnąjį lokalų ekstremumą. Šiuo atveju sakysime, kad funkcionalas $I$ įgyja *stacionariąją* reikšmę, o funkcija $y$ yra *stacionarusis* funkcionalo $I$ taškas.

Panaudoję integravimo dalimis formulę, perrašysime (1.16) integralinę tapatybę taip:

$$\int_a^b \Big[ F_{y'}(x, y, y') - \int_a^x F_y(t, y(t), y'(t))\, dt \Big] \eta'(x)\, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a, b)\,.$$

Pagal 1.3 lemą funkcija $y$ turi tenkinti lygtį

$$F_{y'}(x, y, y') - \int_a^x F_y(t, y(t), y'(t))\, dt = C. \tag{1.17}$$

Ši lygtis vadinama *Oilerio* lygtimi (integraline forma).

Įrodytą teiginį galima suformuluoti taip: *jeigu funkcija* $y \in \mathfrak{M}$ *suteikia funkcionalui I silpnąjį lokalų ekstremumą, tai egzistuoja konstanta* C *tokia, kad funkcija* $y$ *yra* (1.17) *integralinės lygties sprendinys.*

P a s t a b a. Išvesdami (1.17) lygtį, nesinaudojome tuo, kad funkcija $F$ turi tolydžią išvestinę $F_x$. Galima įrodyti (žr. [3]), kad funkcija $y$ tenkina taip pat integralinę lygtį

$$F(x,y,y') - y'F_{y'}(x,y,y') - \int\limits_a^x F_x(t,y(t),y'(t))\,dt = C, \quad x \in [a,b]. \tag{1.18}$$

Grįžkime dabar prie (1.16) integralinės tapatybės. Pagal 1.5 lemą koeficientas prie $\eta'$ turi tolydžią kintamojo $x$ atžvilgiu išvestinę. Todėl (1.16) integralinę tapatybę galima perrašyti taip:

$$F_{y'}(x,y,y')\eta\Big|_{x=a}^{x=b} + \int\limits_a^b \Big[F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}(x,y,y')\big)\Big]\eta(x)\,dx = 0,$$

$\forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a,b)$ . Kadangi $\eta(a) = \eta(b) = 0$, tai

$$\int\limits_a^b \Big[F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}(x,y,y')\big)\Big]\eta(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(a,b)\,.$$

Šioje integralinėje tapatybėje reiškinys, esantis laužtiniuose skliaustuose, tenkina 1.1 lemos sąlygas. Todėl funkcija $y$ yra diferencialinės lygties

$$F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}(x,y,y')\big) = 0 \tag{1.19}$$

sprendinys. Ši lygtis vadinama *Oilerio* lygtimi (diferencialine forma). Padauginę Oilerio lygtį iš $y'$, ją kartais patogu perrašyti taip:

$$\frac{d}{dx}\big(F(x,y,y') - y'F_{y'}(x,y,y')\big) - F_x(x,y,y') = 0 \tag{1.20}$$

Suformuluosime įrodytą teiginį. *Jeigu funkcija* $y \in \mathfrak{M}$ *suteikia funkcionalui* $I$ *silpnąjį lokalų ekstremumą, tai ji turi tenkinti* (1.19) ir (1.20) *lygtį.*

P a s t a b a. Funkcija $F_{y'}(x,y,y')$ turi pilnąją tolydžią kintamojo $x$ atžvilgiu išvestinę. Tačiau jos negalima skleisti pagal žinomą sudėtinės funkcijos diferencijavimo formulę, t.y. negalima panauduoti formulės

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) = F_{xy'} + F_{yy'}y' + F_{y'y'}y'',$$

nes funkcija $y$ turi tik pirmosios eilės tolydžią išvestinę $y'$.

Įrodysime, kad išvestinė $y''$ egzistuoja ir yra tolydi, jeigu $F_{y'y'} \neq 0$. Šis teiginys kartais yra vadinamas Hilberto teorema. Funkcijos $F$ antros eilės išvestinės $F_{xy'}$, $F_{yy'}$, $F_{y'y'}$ yra tolydžios. Todėl

$$\frac{F_{y'}(x+\Delta x, y(x+\Delta x), y'(x+\Delta x)) - F_{y'}(x, y(x), y'(x))}{\Delta x} =$$

$$= [F_{xy'}] + [F_{yy'}]\frac{\Delta y}{\Delta x} + [F_{y'y'}]\frac{\Delta y'}{\Delta x}.$$

Čia reiškiniai laužtiniuose skliaustuose yra atitinkamų išvestinių reikšmės tarpiniuose taškuose. Be to, kai $\Delta x \to 0$, reiškinys kairėje šios lygybės pusėje turi ribą $\dfrac{d}{dx}(F_{y'})$, o reiškiniai $[F_{xy'}]$, $[F_{yy'}]$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ir $[F_{y'y'}]$ artėja atitinkamai prie $F_{xy'}$, $F_{yy'}$, $y'$, ir $F_{y'y'}$. Todėl, jeigu $F_{y'y'} \neq 0$, tai reiškinys $\frac{\Delta y'}{\Delta x}$ turi ribą ir

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta x} := y'' = \frac{\frac{d}{dx}(F_{y'}) - F_{xy'} - F_{yy'}y'}{F_{y'y'}}.$$

Taigi, jeigu $F_{y'y'} \neq 0$, išvestinė $y''$ yra tolydi ir (1.19) Oilerio lygtį galima perrašyti taip:

$$F_{y'y'}y'' + F_{yy'}y' + F_{xy'} - F_y = 0. \tag{1.21}$$

Ši lygtis yra diferencialinė antros eilės lygtis, o jos bendrasis integralas turi dvi laisvąsias konstantas. Jas galima surasti iš šių sąlygų:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{1.22}$$

P a s t a b a. Jeigu $F_{y'y'} = 0$ tik kai kuriuose taškuose, tai šiuose taškuose išvestinė $y''$ arba neegzistuoja, arba turi trūkį.

Antros eilės lygtims, iš kurių galima išreikšti išvestinę $y''$, yra teisinga tokia teorema.

1.1 **teorema. (Bernšteino)** *Lygtis*

$$y'' = \Phi(x, y, y')$$

*turi vienintelį sprendinį, tenkinantį (1.22) sąlygas, jeigu funkcija $\Phi$ ir jos išvestinės $\Phi_y$, $\Phi_{y'}$ yra tolydžios ir egzistuoja konstanta $k$ bei aprėžtos neneigiamos funkcijos $\nu(x,y)$, $\mu(x,y)$ tokios, kad*

$$|\Phi(x, y, y')| \leq \nu(x,y){y'}^2 + \mu(x,y), \quad \Phi_y(x, y, y') > k.$$

Šios teoremos įrodymą galima rasti [3] knygoje.

P a v y z d ž i a i:

1. Pateiksime pavyzdį funkcionalo, kurio ekstremalė suteikia jam silpną lokalų ekstremumą, tačiau nesuteikia stipraus lokalaus ekstremumo. Tegu

$$I(y) = \int_0^1 {y'}^3\, dx.$$

Iš pradžių tarkime, kad

$$\mathfrak{M} = \{y \in \mathrm{C}^1[0,1] : y(0) = 0,\ y(1) = 1\}.$$

Oilerio lygties

$$\frac{d}{dx}\left(3{y'}^2\right) = 0$$

bendrasis sprendinys $y = C_1x + C_2$. Taigi nagrinėjamo funkcionalo ekstremalės yra tiesės. Pareikalavę, kad jos priklausytų aibei $\mathfrak{M}$, gausime vienintelę leistiną ekstremalę

$$y = x.$$

Kiekvienai funkcijai $\eta \in \mathrm{C}_0^1(0,1)$ yra teisinga nelygybė

$$I(y+\eta) - I(y) = \int\limits_0^1 {\eta'}^2(3+\eta')\,dx \geq 0,$$

jeigu tik

$$\|\eta'\|_{\mathrm{C}[a,b]} < 3.$$

Todėl rasta ekstremalė $y = x$ suteikia funkcionalui $I$ silpną lokalų ekstremumą. Parodysime, kad ji nesuteikia stipraus lokalaus ekstremumo.

Tegu $\mathfrak{M}$ yra aibė dalimis glodžių funkcijų, tenkinančių kraštines sąlygas $y(0) = 0,\ y(1) = 1$. Kiekvienam $n \geq 2$, apibrėžkime funkciją

$$\eta_n(x) = \begin{cases} -\sqrt{n}x, & x \in [0, 1/n]; \\ -1/\sqrt{n}, & x \in [1/n, 1/2]; \\ -1/\sqrt{n} + (2x-1)/\sqrt{n}, & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Akivaizdu, kad ji yra tolydi intervale $0, 1$ ir turi tolydžią išvestinę visame intervale, išskyrus taškus $1/n$ ir $1/2$. Be to, kraštiniuose taškuose $\eta(0) = 0, \eta(1) = 0$ ir jos norma

$$\|\eta\|_{\mathrm{C}[0,1]} = 1/\sqrt{n} \to 0,$$

kai $n \to \infty$. Todėl funkcija $y + \eta_n$ priklauso bet kokiai stipriai funkcijos $y$ aplinkai, jeigu tik $n$ yra pakankamai didelis skaičius. Tačiau

$$I(y+\eta_n) = \int\limits_0^1 (1+\eta_n')^3\,dx =$$

$$= 1 + \int\limits_0^{1/n} (3n - n^{3/2})\,dx + \int\limits_{1/2}^1 (12/n + 8/n\sqrt{n})\,dx = -\sqrt{n} + o(1) \to -\infty,$$

kai $n \to \infty$. Taigi funkcija $y = x$ nesuteikia funkcionalui $I$ stiprų lokalų minimumą.

2. Tegu
$$\mathfrak{M} = \{y \in \mathrm{C}^1[-1,1] : y(-1) = 0, y(1) = 2e^2 \operatorname{sh} 5\}.$$
Reikia rasti funkcija $y \in \mathfrak{M}$, kuri funkcionalui
$$I(y) = \int\limits_{-1}^{1} e^x({y'}^2 + 6y^2)\,dx$$
suteiktų ekstremalią reikšmę.

Šio funkcionalo ekstremales rasime iš Oilerio lygties
$$12e^x y - \frac{d}{dx}\big(2e^x y'\big) = 0.$$
Suprastinę ją gausime lygtį
$$y'' + y' - 6y = 0,$$
kurios sprendiniai
$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$$
yra nagrinėjamo funkcionalo ekstremalės. Tarp šių ekstremalių randame tą, kuri tenkina nurodytas sąlygas. Po elementarių skaičiavimų gauname
$$y = -e^{-3x} + e^{2x+5}.$$
Įrodysime, kad rasta ekstremalė suteikia funkcionalui $I$ absoliutų minimumą. Laisvai pasirenkame funkciją $\eta \in \mathrm{C}_0^1(-1,1)$ . Tada
$$I(y+\eta) - I(y) = \int\limits_{-1}^{1} \{e^x[(y'+\eta')^2 + 6(y+\eta)^2] - e^x[{y'}^2 + 6y^2]\}\,dx =$$
$$\int\limits_{-1}^{1} e^x[2y'\eta' + 12y\eta + {\eta'}^2 + 6\eta^2]\,dx =$$
$$\int\limits_{-1}^{1} e^x[{\eta'}^2 + 6\eta^2]\,dx + 2e^x y\eta|_{x=-1}^{x=1} + \int\limits_{-1}^{1} \Big[12e^x y - \frac{d}{dx}(2e^x y')\Big]\eta\,dx.$$
Kadangi $\eta(-1) = \eta(1) = 0$ ir ekstremalė $y$ tenkina Oilerio lygtį, tai skirtumas
$$I(y+\eta) - I(y) = \int\limits_{-1}^{1} e^x[{\eta'}^2 + 6\eta^2]\,dx \geq 0.$$
Pagal apibrėžimą tai ir reiškia, kad ekstremalė $y$ suteikia funkcionalui $I$ absoliutų minimumą.

Šiame pavyzdyje Oilerio lygties ekstremales radome gana lengvai. Bendru atveju Oilerio lygtis integruojama gana retai. Išskirsime kelis paprasčiausius Oilerio lygties integravimo atvejus.

1. Tarkime, funkcija $F = F(x, y)$, t.y. funkcija $F$ tiesiogiai nepriklauso nuo kintamojo $y'$. Tada Oilerio lygtis
$$F_y(x, y) = 0$$
nėra diferencialinė lygtis. Jos sprendinys $y = y(x)$ arba $x = x(y)$, bendru atveju, nėra leistina ekstremalė (ji netenkina papildomų sąlygų). Todėl dažniausiai toks variacinis uždavinys sprendinių neturi.

2. Tarkime, funkcija $F = M(x, y) + N(x, y)y'$, $M, N \in \mathrm{C}^1([a, b] \times \mathbb{R}^1)$ . Tada Oilerio lygtis
$$M_y(x, y) - N_x(x, y) = 0$$
taip pat nėra diferencialinė lygtis ir bendru atveju variacinis uždavinys sprendinio neturi. Jeigu
$$M_y(x, y) - N_x(x, y) \equiv 0,$$
tai reiškinys $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ yra pilnas diferencialas ir integralas
$$I(y) = \int_a^b \big(M(x, y) + N(x, y)y'\big)\, dx = \int_a^b \big(M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy\big)$$
nepriklauso nuo integravimo kelio. Tai reiškia, kad su kiekviena leistina funkcija $y$ integralas $I(y)$ yra pastovus ir variacinis uždavinys neturi prasmės.

3. Tarkime, funkcija $F = F(x, y')$, t.y. $F$ tiesiogiai nepriklauso nuo kintamojo $y$. Tada Oilerio lygtis
$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0$$
turi pirmąjį integralą $F_{y'}(x, y') = C$. Gauta lygtis yra pirmos eilės diferencialinė lygtis. Išsprendę ją rasime ekstremales.

4. Tarkime, funkcija $F = F(y, y')$, t.y. $F$ tiesiogiai nepriklauso nuo kintamojo $x$. Tada Oilerio lygtis
$$\frac{d}{dx}\big(F(y, y') - y' F_{y'}(y, y')\big) = 0$$
turi pirmąjį integralą $F(y, y') - y' F_{y'}(y, y') = C$. Gauta lygtis taip pat yra pirmos eilės diferencialinė lygtis. Išsprendę ją rasime ekstremales.

P a v y z d y s (uždavinys apie brachistochrone). Plokštumoje $Oxy$ yra du taškai, nesantys vienoje vertikalioje tiesėje. Tegu $x_1, y_1$ ir $x_2, y_2$ yra šių taškų koordinatės. Iš taško $(x_1, y_1)$ į tašką $(x_2, y_2)$ kreive $l$ be trinties slenka materialus taškas. Pradiniu laiko momentu jo greitis $\mathbf{v}$ lygus nuliui. Aibėje tokių kreivių reikia rasti tą, kuria slinkdamas materialus taškas pasiektų tašką $(x_2, y_2)$ per trumpiausią laiką.

Tarkime, taškas $(x_1, y_1)$ yra koordinačių pradžios taškas $(0,0)$. Tada (žr. 1.1 skyrelį) laikas $T$, kurį sugaišta materialus taškas, judėdamas kreive $l$ iš taško $(0,0)$ į tašką $(x_2, y_2)$ lygus

$$T(y) = \int_0^{x_2} \frac{\sqrt{1+{y'}^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx; \quad y(0) = 0,\ y(x_2) = y_2.$$

Šiame integrale pointegralinė funkcija tiesiogiai nepriklauso nuo kintamojo $x$. Todėl jį atitinkanti Oilerio lygtis turi pirmąjį integralą

$$\sqrt{\frac{1+{y'}^2}{y}} - \frac{{y'}^2}{\sqrt{y(1+{y'}^2)}} = C.$$

Suprastinę šį reiškinį gausime pirmos eilės paprastąją diferencialinę lygtį

$$y(1+{y'}^2) = C_1.$$

Tegu $y' = \operatorname{ctg} t$. Tada

$$y = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t).$$

Kadangi

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t\,dt}{\operatorname{ctg} t} = C_1(1-\cos 2t)\,dt,$$

tai

$$x = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2.$$

Tarkime, kai $t = 0$ taškas $x(0), y(0) = (0,0)$. Tada konstanta $C_2 = 0$ ir gauname ieškomos ekstremalės parametrines lygtys:

$$x = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t), \quad y = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2t).$$

Šios lygtys apibrėžia vienparametrinę cikloidžių šeimą. Konstanta $C_1$ randama iš sąlygos $y(x_2) = y_2$. Taigi brachistochronė yra cikloidė.

Parodysime, kad būtina lokalaus ekstremumo egzistavimo sąlyga nėra pakankama. Tarkime funkcija $y$, tenkinanti sąlygas $y(0) = 1, y(\pi) = 2$ yra stacionari funkcionalo

$$I(y) = \int_0^{\pi} [4{y'}^2(x) - 25y^2(x)]\,dx$$

reikšmė. Tada ji tenkina Oilerio lygtį

$$4y'' + 25y = 0.$$

Šios lygties bendrasis sprendinys

$$y = C_1 \cos\frac{5x}{2} + C_2 \sin\frac{5x}{2}.$$

Pareikalavę, kad taip apibrėžta funkcija $y$ tenkintų nurodytas sąlygas, gausime

$$y = \cos\frac{5x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}.$$

Kiekvienai funkcijai $\eta \in \mathrm{C}_0^1(0,\pi)$ skirtumas

$$I(y+\eta) - I(y) = \int_0^\pi [4\eta'^2 - 25\eta^2]\, dx.$$

Imkime čia

$$\eta(x) = \frac{1}{n}\sin mx, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Tada

$$I(y+\eta) - I(y) = \pi(4m^2 - 25)/2n^2.$$

Kartu galime tvirtinti, kad $I(y+\eta) < I(y)$, kai $m < 5/2$ ir $I(y+\eta) \geq I(y)$, kai $m \geq 5/2$. Taigi stacionarus funkcionalo taškas nebūtinai yra ekstremumo taškas.

## 1.4 KELIŲ FUNKCIJŲ ATVEJIS

Tegu $y = (y_1, \ldots, y_n)$ yra tolydžiai diferencijuojama vektorinė funkcija, tenkinanti sąlygas

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n). \tag{1.23}$$

Tokių funkcijų aibėje nagrinėsime funkcionalą

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx. \tag{1.24}$$

Pagrindinis variacinio skaičiavimo uždavinys, taip pat stipriojo ir silpnojo lokalaus ekstremumo sąvokos šiam funkcionalui formuluojamos taip kaip ir vienos funkcijos atveju.

Tarkime, funkcija $y$, tenkinanti aukščiau nurodytas sąlygas, suteikia (1.24) funkcionalui silpną lokalų ekstremumą. Tada kiekvienai fiksuotai vektorinei funkcijai $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\eta_i \in \overset{\circ}{\mathrm{C}}{}^1_0(a, b)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ir vektoriui $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i$ – neneigiami realūs skaičiai, yra teisinga viena iš nelygybių

$$I(y) \le I(y + \varepsilon\eta), \quad I(y) \ge I(y + \varepsilon\eta), \quad \varepsilon\eta = (\varepsilon_1\eta_1, \ldots, \varepsilon_n\eta_n),$$

jeigu tik skaičius $|\varepsilon| = \Big(\sum\limits_{i=1}^n \varepsilon_i^2\Big)^{1/2}$ yra pakankamai mažas. Tegu

$$\Phi(\varepsilon) = I(y + \varepsilon\eta).$$

Pagal apibrėžimą

$$\Phi_{\varepsilon_k}(0) = \int_a^b \Big[F_{y_k}(x, y, y')\eta_k(x) + F_{y'_k}(x, y, y')\eta'_k(x)\Big]\, dx, \ \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

Taškas $\varepsilon = 0$ yra funkcijos $\Phi$ lokalaus ekstremumo taškas. Todėl $\Phi'_{\varepsilon_k}(0) = 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$. Taigi $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ funkcija $y_k$ turi tenkinti integralinę tapatybę

$$\int_a^b \Big[F_{y_k}(x, y, y')\eta_k(x) + F_{y'_k}(x, y, y')\eta'_k(x)\Big]\, dx = 0.$$

Toliau, kaip ir vienos funkcijos atveju, galima įrodyti, kad $\forall k = 1, 2, \ldots, n$ funkcija $y_k$ tenkina Oilerio lygtį integraline forma:

$$F_{y'_k}(x, y, y') - \int_a^x F_{y_k}(t, y(t), y'(t))\, dt = C_k \tag{1.25}$$

ir Oilerio lygtį diferencialine forma:

$$F_{y_k}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'_k}(x, y, y')\big) = 0. \tag{1.26}$$

P a s t a b a. Jeigu funkcija $y$ suteikia (1.24) funkcionalui silpną lokalų ekstremumą ir determinantas

$$\det|F_{y'_k y'_l}(x, y, y')| \neq 0,$$

tai galima įrodyti (žr. [3]), kad $\forall k = 1, 2, \dots, n$ funkcija $y_k$ turi antros eilės tolydžias išvestines. Šiuo atveju (1.26) Oilerio lygtys yra antros eilės lygtys ir jų bendrieji integralai turi $2n$ laisvųjų konstantų. Ieškomoji vektorinė funkcija $y$ turi tenkinti (1.23) sąlygas. Į jas įeina lygiai $2n$ skaliarinių sąlygų. Taigi laisvųjų konstantų yra lygiai tiek pat, kiek ir sąlygų joms rasti.

P a v y z d y s. Rasti funkcionalo

$$I(y) = \int_0^{\pi/2} ({y'_1}^2 + {y'_2}^2 + 2y_1 y_2 + 2xy_1)\, dx, \quad y = (y_1, y_2)$$

ekstremales, tenkinančias kraštines sąlygas

$$y_1(0) = -1,\ y_2(0) = 1, \quad y_1(\pi/2) = 0,\ y_2(\pi/2) = -\pi/2.$$

Iš Oilerio lygčių

$$y''_1 - y_2 = x, \quad y''_2 - y_1 = 0,$$

eliminavę ieškomą funkciją $y_1$, gausime lygtį

$$y_2^4 - y_2 = x.$$

Jos bendrasis sprendinys

$$y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x;$$

čia $C_1, C_2, C_3, C_4$ – laisvosios konstantos. Iš antrosios Oilerio lygties randame

$$y_1 = y''_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x.$$

Pareikalavę, kad funkcijos $y_1, y_2$ tenkintų kraštines sąlygas, gausime

$$C_1 = C_2 = C_4 = 0, \quad C_3 = 1.$$

Taigi leistina ekstremalė yra kreivė, apibrėžiama dviem skaliarinėm funkcijom:

$$y_1 = -\cos x, \quad y_2 = \cos x - x.$$

## 1.5 AUKŠTESNĖS EILĖS IŠVESTINIŲ ATVEJIS

Nagrinėsime funkcionalą

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)})\, dx. \tag{1.27}$$

Tarkime, funkcija $y$ yra $n$ kartų tolydžiai diferencijuojama ir tenkina sąlygas

$$y(a) = \alpha,\ y'(a) = \alpha_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1}, \tag{1.28}$$

$$y(b) = \beta,\ y'(b) = \beta_1, \dots, y^{(n-1)}(b) = \beta_{n-1}, \tag{1.29}$$

o funkcija $F$ turi pirmos eiles tolydžias dalines išvestines pagal visus argumentus.

Absoliutaus ekstremumo uždavinys (1.27) funkcionalui formuluojamas taip kaip ir (1.15) funkcionalui. Lokalaus ekstremumo uždavinį galima apibrėžti įvairiai. Tai priklauso nuo to, kaip apibrėšime kreivės aplinkos sąvoką. Nagrinėjamu atveju kreivės aplinkos sąvoką natūraliai galima apibrėžti nuo nulinės iki $n$-osios eilės. Nulinės eilės aplinka yra vadinama stipriąja, o $n$-osios eilės aplinka – silpnąja.

Tegu funkcija $y$, tenkinanti išvardytas sąlygas, suteikia (1.27) funkcionalui lokalų ekstremumą (nesvarbu kokį), o funkcija $\eta \in \mathrm{C}_0^{\mathrm{n}}(a, b)$. Tada realaus kintamojo funkcija $\Phi(\varepsilon) = I(y + \varepsilon\eta)$ taške $\varepsilon = 0$ turi lokalų ekstremumą ir

$$\Phi'(0) = \int_a^b \Big[F_y(x, y, y')\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\eta'(x) + \cdots$$

$$+F_{y^{(n)}}(x, y, y')\eta^{(n)}(x)\Big]\, dx = 0.$$

Kelis kartus pritaikę integravimo dalimis formulę, perrašysime šią tapatybę taip:

$$\int_a^b \Big\{F_{y^{(n)}} - \int_a^x F_{y^{(n-1)}}\, dx + \int_a^x \int_a^x F_{y^{(n-2)}}\, dx dx - \cdots$$

$$+ (-1)^n \int_a^x \cdots \int_a^x F_y\, dx \cdots dx\Big\} \cdot \eta^{(n)}(x)\, dx = 0. \tag{1.30}$$

Kadangi reiškinys figūriniuose skliaustuose tenkina 1.4 lemos sąlygas, tai funcija $y$ turi tenkinti integralinę Oilerio lygtį:

$$F_{y^{(n)}} - \int_a^x F_{y^{(n-1)}}\, dx + \int_a^x \int_a^x F_{y^{(n-2)}}\, dx dx - \cdots \tag{1.31}$$

$$+(-1)^n \int_a^x \cdots \int_a^x F_y\, dx \cdots dx = C_0 + C_1(x - a) + \cdots + C_{n-1}(x - a)^{n-1}.$$

Diferencijuodami ją $n$ kartų, gausime diferencialinę *Oilerio* lygtį:

$$\frac{d}{dx}\Big(\cdots\frac{d}{dx}\Big\{\frac{d}{dx}\Big[\frac{d}{dx}F_{y^{(n)}}-F_{y^{(n-1)}}\Big]+F_{y^{(n-2)}}\Big\}-\cdots \tag{1.32}$$
$$+(-1)^{n-1}F_{y'}\Big)+(-1)^nF_y=0.$$

Jeigu funkcija $F$ turi tolydžias dalines išvestines pagal visus savo argumentus iki $(n+1)$-os eilės imtinai, o funkcija $y$ – tolydžias išvestines iki $2n$-os eilės imtinai, tai (1.32) lygtį galima perrašyti taip:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\cdots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0. \tag{1.33}$$

P a v y z d y s. Rasti funkcionalo

$$I(y)=\int_0^1(y''^2+y'^2-24xy)\,dx$$

ekstremales, tenkinančias kraštines sąlygas

$$y(0)=y(1)=0;\quad y'(0)=2,y'(1)=-4.$$

Oilerio lygties

$$y^{(4)}-y''=12x$$

bendrasis sprendinys

$$y=C_1+C_2x+C_3e^{-x}+C_4e^x-2x^3;$$

čia $C_1,C_2,C_3,C_4$ – laisvosios konstantos. Iš kraštinių sąlygų randame

$$C_1=C_3=C_4=0,\quad C_2=2.$$

Taigi leistina ekstremalė yra kreivė, apibrėžiama lygtimi

$$y=2x(1-x^2).$$

## 1.6 DAUGIALYPIO INTEGRALO ATVEJIS

Nagrinėsime funkcionalą

$$I(u)=\int\limits_{\Omega} F(x,u,u_x)\,dx. \tag{1.34}$$

Čia: $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – aprėžta sritis; $S=\partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius; $F$ – funkcija, turinti tolydžias dalines išvestines iki antros eilės imtinai pagal visus savo argumentus; $u$ – tolydžiai diferencijuojama srityje $\Omega$ funkcija, tenkinanti sąlygą

$$u\big|_S=\varphi(x),\quad x\in S,\quad \varphi\in \mathrm{C}(S)\,. \tag{1.35}$$

Tokių funkcijų $u$ aibėje reikia rasti tą, kuri (1.34) funkcionalui suteikia absoliutų ekstremumą. Lokalaus (silpnojo ir stipriojo) ekstremumo sąvokos (1.34) funkcionalui apibrėžiamos visiškai taip pat kaip ir vienmačiu atveju. Reikia tik apibrėžti funkcijos $u$ silpnąją ir stipriąją aplinkas.

Tarkime, aibėje funkcijų, tenkinančių nurodytas sąlygas, egzistuoja tokios, kurioms (1.34) funkcionalas įgyja baigtinę reikšmę. Daugiamačiu atveju, skirtingai nuo vienmačio, gali nebūti nė vienos diferencijuojamos funkcijos, tenkinančios (1.35) sąlygą, kuriai (1.34) funkcionalas įgytų baigtinę reikšmę. Smulkiau apie tai žr. [3] knygoje.

Tegu funkcija $u$, tenkinanti (1.35) sąlygą, suteikia (1.34) funkcionalui silpną lokalų ekstremumą, o funkcija $\eta\in \mathrm{C}_0^1(\Omega)$. Be to, tegu srityje $\Omega$ funkcija $u$ yra dukart diferencijuojama. Funkcija $u+\varepsilon\eta$ yra kokioje nors silpnoje funkcijos $u$ aplinkoje, jeigu skaičiaus $\varepsilon$ modulis yra pakankamai mažas. Todėl tokiems $\varepsilon$ yra teisinga viena iš nelygybių

$$I(u)\le I(u+\varepsilon\eta),\quad I(u)\ge I(u+\varepsilon\eta).$$

Tegu $\Phi(\varepsilon)=I(u+\varepsilon\eta)$. Pagal apibrėžimą

$$\Phi'(0)=\int\limits_{\Omega}\Big[F_u(x,u,u_x)\eta(x)+\sum_{k=1}^n F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\eta_{x_k}(x)\Big]\,dx.$$

Taškas $\varepsilon=0$ yra realaus kintamojo funkcijos $\Phi$ lokalaus ekstremumo taškas. Todėl $\Phi'(0)=0$ ir $\forall\eta\in \mathrm{C}_0^1(\Omega)$ yra teisinga integralinė tapatybė:

$$\int\limits_{\Omega}\Big[F_u(x,u,u_x)\eta(x)+\sum_{k=1}^n F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\eta_{x_k}(x)\Big]\,dx=0. \tag{1.36}$$

Pritaikę integravimo dalimis formulę, šią tapatybę perrašysime taip:

$$\int\limits_{\Omega}\Big[F_u(x,u,u_x)-\sum_{k=1}^n\frac{d}{dx_k}\Big(F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\Big)\Big]\eta(x)\,dx+$$

$$+\int\limits_{S}\sum_{k=1}^n F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\cos(\mathbf{n},x_k)\eta(x)\,dS=0,\quad \forall\eta\in \mathrm{C}_0^1(\Omega)\,.$$

Funkcija $\eta(x) = 0$, kai $x \in S$. Todėl integralas paviršiumi $S$ yra lygus nuliui ir yra teisinga integralinė tapatybė

$$\int\limits_{\Omega} \Big[F_u(x,u,u_x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\Big(F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\Big)\Big]\eta(x)\,dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^1(\Omega)\,.$$

Reiškinys, esantis laužtiniuose skliaustuose, tenkina 1.2 lemos sąlygą. Todėl jis yra lygus nuliui, t.y.

$$F_u(x,u,u_x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\Big(F_{u_{x_k}}(x,u,u_x)\Big) = 0. \tag{1.37}$$

Įrodytą teiginį suformuluosime taip: *jeigu dukart tolydžiai diferencijuojama funkcija* $u$ *suteikia* (1.34) *funkcionalui bent silpną lokalų ekstremumą, tai ji turi tenkinti* (1.37) *Oilerio lygtį*.

Glodus Oilerio lygties sprendinys vadinamas ją atitinkančio funkcionalo *ekstremale*. Aišku, ekstremalė ne visada suteikia funkcionalui silpną lokalų ekstremumą. Nagrinėjamu atveju, kaip ir vieno realaus kintamojo funkcijai, reikalingas papildomas tyrimas.

P a s t a b a. Išvesdami (1.37) lygtį reikalavome, kad funkcija $u$ būtų dukart diferencijuojama. Priminsime, kad vienmačiu atveju reikalavome tik pirmos išvestinės tolydumo, o antros eilės išvestinės tolydumą įrodėme. Be to, vienmačiu atveju iš pradžių išvedėme integralinę Oilerio lygtį (į kurią įeina tik pirmosios išvestinės), o po to diferencialinę (į kurią jau įeina ir antrosios išvestinės). Analogiška teorija yra galima ir daugiamačiu atveju. Tačiau ji jau nėra tokia paprasta.

P a v y z d y s. Tegu $\Omega$ yra aprėžta sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, $\varphi$ – tolydi paviršiuje $S$ funkcija. Ieškoma dukart diferencijuojama srityje $\Omega$ funkciją, kuri paviršiuje $S$ įgyja žinomą reikšmę $\varphi$ ir funkcionalui

$$I(u) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1+u_x^2}\,dx$$

suteikia minimalią reikšmę. Šis variacinis uždavinys susiveda į kraštinio uždavinio

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{1+u_x^2}}\right) = 0, \quad x \in \Omega; \quad u|_S = \varphi(x), \quad x \in S$$

sprendimą. Gauta lygtis yra netiesinė antrosios eilės dalinių išvestinių lygtis ir vadinama *minimalių paviršių* lygtimi. Gerai žinoma, kad šis uždavinys, dvimačiu atveju, bet kokiai tolydžiai funkcijai $\varphi$ turi vienintelį sprendinį tada ir tik tada, kai sritis $\Omega$ yra iškila. Jeigu srities dimensija yra didesnė už du, tai srities iškilumas nėra natūralus dvimatės situacijos apibendrinimas. Tačiau šis uždavinys turi vienintelį sprendinį, jeigu paviršius $S$ yra klasės $\mathrm{C}^2$ ir jo vidutinis kreivumas yra neneigiamas (žr. [7]). Analogiškas teiginys yra teisingas ir prie mažesnių glodumo sąlygų (žr. [9], [4]).

## 1.7 BENDRESNI FUNKCIONALAI. NATŪRALIOSIOS KRAŠTINĖS SĄLYGOS

Įrodyti šiame skyriuje teiginiai išlieka teisingi ir bendresnių pavidalų funkcionalams. Dažniausiai tai funkcionalai, į kuriuos, be įprasto integralo, įeina papildomi nariai, priklausantys nuo žinomų funkcijų reikšmių integravimo rėžių taškuose arba integravimo srities kraštiniuose taškuose. Įrodysime, kad tokiems fukcionalams Oilerio lygtis išlieka ta pati, o papildomi nariai turi įtakos tik kraštinėms sąlygoms. Be to, skirtingai nuo ankščiau išnagrinėtų uždavinių, nereikalausime, kad ieškomoji funkcija tenkintų kokias nors išankstines sąlygas.

Vienmačiu atveju nagrinėsime funkcionalą

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx + \varphi(y(a)) + \psi(y(b)); \tag{1.38}$$

čia: $F$ – funkcija, turinti tolydžias dalines išvestines pagal visus argumentus iki antros eilės imtinai, o $\varphi$ ir $\psi$ – diferencijuojamos funkcijos.

Tarkime, dukart diferencijuojama funkcija $y$ suteikia (1.38) funkcionalui bent silpną lokalų ekstremumą. Laisvai pasirenkame funkciją $\eta \in \mathrm{C}^1[a, b]$. Funkcija $y + \varepsilon\eta$ priklauso kokiai nors silpnai funkcijos $y$ aplinkai, jeigu tik skaičiaus $\varepsilon$ modulis yra pakankamai mažas. Priminsime, kad taškuose $a$ ir $b$ funkcijai $y$ nekeliame jokių išankstinių sąlygų. Todėl funkcija $\eta$ taškuose $a$ ir $b$ gali įgyti bet kokias reikšmes.

Tegu $\Phi(\varepsilon) = I(y + \varepsilon\eta)$. Tada

$$\Phi'(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I(y + \varepsilon\eta) - I(y)}{\varepsilon} =$$

$$= \int_a^b \left[F_y(x, y, y')\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\eta'(x)\right] dx + \varphi'(y(a))\eta(a) + \psi'(y(b))\eta(b).$$

Taškas $\varepsilon = 0$ yra lokalaus ekstremumo taškas. Todėl $\Phi'(0) = 0$. Taigi funkcija $y$ turi tenkinti integralinę tapatybę

$$\int_a^b \left[F_y(x, y, y')\eta(x) + F_{y'}(x, y, y')\eta'(x)\right] dx + \varphi'(y(a))\eta(a) + \psi'(y(b))\eta(b) = 0.$$

Panaudoję integravimo dalimis formulę, ją perrašysime taip:

$$\int_a^b \Big[F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}(x, y, y')\big)\Big]\eta(x)\, dx +$$

$$+ F_{y'}(x, y, y')\eta(x)\Big|_{x=a}^{x=b} + \varphi'(y(a))\eta(a) + \psi'(y(b))\eta(b) = 0. \tag{1.39}$$

Imdami $\eta \in \mathrm{C}_0^1(a,b)$, gausime, kad funcija $y$ turi tenkinti Oilerio lygtį:

$$F_y - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big) = 0. \tag{1.40}$$

Grįžkime dabar prie (1.39) integralinės tapatybės. Kadangi funkcija $y$ tenkina (1.40) Oilerio lygtį, tai (1.39) tapatybę galima perrašyti taip:

$$F_{y'}(x,y,y')\eta(x)\Big|_{x=a}^{x=b} + \varphi'(y(a))\eta(a) + \psi'(y(b))\eta(b) = 0.$$

Priminsime, kad funkcija $\eta$ taškuose $a$ ir $b$ gali įgyti bet kokias reikšmes. Todėl paskutinėje tapatybėje koeficientai prie $\eta(a)$ ir prie $\eta(b)$ turi būti lygus nuliui, t.y. taškuose $a$ ir $b$ turi būti patenkintos tokios sąlygos:

$$F_{y'}\big|_{x=a} = \varphi'(y(a)), \tag{1.41}$$

$$F_{y'}\big|_{x=b} = -\psi'(y(b)). \tag{1.42}$$

Šios kraštinės sąlygos yra vadinamos *natūraliosiomis* kraštinėmis sąlygomis.

P a s t a b a. Nagrinėjant (1.38) funkcionalą ieškomai funkcijai nekėlėme intervalo $(a,b)$ taškuose jokių išankstinių sąlygų. Visiškai taip pat nagrinėjamas funkcionalas, kai viename kraštiniame taške ieškoma funkcija tenkina nurodytas sąlygas, o kitame kraštiniame taške nekeliame jokių išankstynių sąlygų. Pavyzdžiui, jeigu taške $x = a$ nekeliame jokių išankstynių sąlygų, o taške $x = b$ reikalausime, kad ieškoma funkcija tenkintų kraštinę sąlygą $y(b) = \beta$, tai Oilerio lygtis išlieka ta pati, o kraštinės sąlygos bus tokios:

$$F_{y'}|_{x=a} = \varphi'(y(a)), \quad y(b) = \beta.$$

P a v y z d y s. Raskime funkcionalo

$$I(y) = \int\limits_0^1 e^x({y'}^2 + 6y^2 + 12y)\,dx$$

ekstremales, tenkinančias natūralias kraštines sąlygas.

Funkcionalą $I$ atitinka Oilerio lygtis

$$y'' + y' - 6y - 6 = 0,$$

o natūralias kraštines sąlygas galima užrašyti taip:

$$y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Išsprendę šį uždavinį randame leistiną ekstremalę $y = -1$. Parodysime, kad funkcionalui $I$ ji suteikia absoliūtų minimumą. Kiekvienai funkcijai $\eta \in \mathrm{C}^1[0,1]$ skirtumas

$$I(y+\eta) - I(y) = \int\limits_0^1 e^x[{\eta'}^2 + 6\eta^2 + 2y'\eta' + 12y\eta + 12\eta]\,dx.$$

Pritaikę integravimo dalimis formulę, po to pasinaudoję Oilerio lygtimi bei natūraliosiomis kraštinėmis sąlygomis, gausime

$$I(y+\eta) - I(y) = \int_0^1 \Big[12e^x + 12e^x y - \frac{d}{dx}(2e^x y')\Big]\eta\, dx +$$

$$+2e^x y'\eta\big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 e^x({\eta'}^2 + 6\eta^2)\, dx = \int_0^1 e^x({\eta'}^2 + 6\eta^2)\, dx \geq 0.$$

Taigi rasta ekstremalė $y = -1$ suteikia funkcionalui $I$ absoliūtų minimumą.

P a v y z d y s. Raskime funkcionalo

$$I(y) = \int_1^2 x^2 {y'}^2\, dx - 2y(1) + y^2(2)$$

ekstremales, tenkinančias natūralias kraštines sąlygas.

Išsprendę Oilerio lygtį

$$\frac{d}{dx}(2x^2 y') = 0,$$

randame ekstremalių šeimą

$$y = C_1 + C_2/x.$$

Natūraliasias kraštines sąlygas galima užrašyti taip:

$$y'(1) = -1, \quad 4y'(2) = -y(2).$$

Pareikalavę, kad rastos ekstremalės tenkintų šias sąlygas, gausime

$$y = 1/2 + 1/x.$$

Patikrinsime, kad ši ekstremalė suteikia funkcionalui $I$ absoliūtų minimumą. Kiekvienai funkcijai $\eta \in \mathrm{C}^1[1,2]$ skirtumas

$$I(y+\eta) - I(y) = \int_1^2 x^2({\eta'}^2 + 2y'\eta')\, dx - 2\eta(1) + 2y(2)\eta(2) + \eta^2(2).$$

Panaudoję integravimo dalimis formulę, Oilerio lygtį bei natūralias kraštines sąlygas, šį skirtumą perrašysime taip:

$$I(y+\eta) - I(y) = \int_1^2 x^2 {\eta'}^2\, dx + \eta^2(2) \geq 0.$$

Taigi rasta ekstremalė $y = 1/2 + 1/x$ suteikia funkcionalui $I$ absoliūtų minimumą.

Daugiamačiu atveju nagrinėsime funkcionalą

$$I(u) = \int\limits_{\Omega} F(x, u, u_x)\, dx + \int\limits_{S} \varphi(x, u)\, dS; \tag{1.43}$$

čia: $\Omega$ yra aprėžta sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, $F$ ir $\varphi$ – pakankamai glodžios funkcijos.

Tarkime, dukart diferencijuojama srityje $\Omega$ funkcija $u$ suteikia (1.43) funkcionalui bent silpną lokalų ekstremumą. Laisvai pasirenkame funkciją $\eta \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ ir skaičių $\varepsilon$, kurio modulis yra pakankamai mažas. Tada funkcija $u + \varepsilon\eta$ priklauso kokiai nors silpnai funkcijos $u$ aplinkai, o realaus kintamojo funkcija $\Phi(\varepsilon) = I(u + \varepsilon\eta)$ taške $\varepsilon = 0$ įgyja ekstremalią reikšmę. Todėl jos išvestinė taške $\varepsilon = 0$ yra lygi nuliui. Šią sąlygą galima užrašyti taip:

$$\int\limits_{\Omega} \Big[ F_u(x, u, u_x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\Big( F_{u_{x_k}}(x, u, u_x) \Big) \Big] \eta(x)\, dx +$$

$$+ \int\limits_{S} \Big[ \sum_{k=1}^{n} F_{u_{x_k}}(x, u, u_x) \cos(\mathbf{n}, x_k) \eta(x) + \varphi_u(x, u) \Big] \eta(x)\, dS = 0, \tag{1.44}$$

$\forall \eta \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})$ . Imkime $\eta \in \mathrm{C}_0^1(\Omega)$ . Tada integralas paviršiumi $S$ paskutinėje tapatybėje bus lygus nuliui. Atmetę jį, gausime tapatybę

$$\int\limits_{\Omega} \Big[ F_u(x, u, u_x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\Big( F_{u_{x_k}}(x, u, u_x) \Big) \Big] \eta(x)\, dx = 0.$$

Pagal 1.2 lemą ši tapatybė yra galima tik tuo atveju, kai funkcija $u$ tenkina Oilerio lygtį:

$$F_u - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\Big( F_{u_{x_k}} \Big) = 0. \tag{1.45}$$

Grįžkime dabar prie (1.44) integralinės tapatybės. Kadangi funkcija $u$ tenkina (1.45) lygtį, tai (1.44) tapatybėje integralas sritimi $\Omega$ lygus nuliui ir yra teisinga tapatybė

$$\int\limits_{S} \Big[ \sum_{k=1}^{n} F_{u_{x_k}}(x, u, u_x) \cos(\mathbf{n}, x_k) + \varphi_u(x, u) \Big] \eta(x)\, dS = 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega})\, .$$

Kadangi funkcija $\eta$ paviršiaus $S$ taškuose gali įgyti bet kokias reikšmes, tai ši tapatybė yra galima tik tuo atveju, kai reiškinys laužtiniuose skliaustuose yra lygus nuliui, t.y. paviršiaus $S$ taškuose funkcija $u$ turi tenkinti sąlygą

$$\sum_{k=1}^{n} F_{u_{x_k}}(x, u, u_x) \cos(\mathbf{n}, x_k) + \varphi_u(x, u) = 0, \quad x \in S.$$

Ši kraštinė sąlyga taip pat yra vadinama *natūraliąja* kraštine sąlyga.

P a v y z d y s. Tegu $\Omega$ yra aprėžta sritis erdvėje $\mathbb{R}^n$, $S = \partial\Omega$ – dalimis glodus paviršius, $\kappa$ – tolydi paviršiuje $S$ funkcija, $|\kappa(x)| < 1, \forall x \in S$, $k$ – žinoma teigiama konstanta. Reikia rasti dukart diferencijuojamą srityje $\Omega$ funkciją, kuri funkcionalui

$$I(u) = \int\limits_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2}\, dx + \int\limits_{S} \kappa u\, dS + \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2} k u^2\, dx$$

suteikia minimalią reikšmę[2]. Šis variacinis uždavinys susiveda į kraštinio uždavinio

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \left( \frac{u_{x_i}}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right) = ku, \quad x \in \Omega,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_{x_i}}{\sqrt{1 + {u_x}^2}} \gamma_i = \kappa, \quad x \in S$$

sprendimą. Čia $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ – vienetinis normalės vektorius paviršiui $S$, išorinis srities $\Omega$ atžvilgiu. Kai $k = 0$, gauta lygtis yra minimalių paviršių lygtis. Ji turi sprendinį, tenkinantį pirmąją kraštinę sąlygą, tik prie tam tikrų papildomų sąlygų. Šios sąlygos yra susijusios su srities $\Omega$ iškilumu (žr. 1.6 skyrelį). Jų galima atsisakyti, jeigu pirmąją kraštinę sąlygą (priminsime, kad ji yra tiesinė) pakeisime natūraliaja (netiesine) kraštine sąlyga. Tiksliau yra žinoma, kad, bet kokiai tolydžiai funkcijai $\kappa$, moduliu mažesnei už vienetą, suformuluotas kraštinis uždavinys turi vienintelį sprendinį, nepriklausomai nuo srities $\Omega$ geometrinių savybių (žr. [12], [13], [14]).

[2] Kai $n = 2$ ieškoma funkcija aprašo skysčio, esančio cilindriniame kapiliare, laisvąjį paviršių.

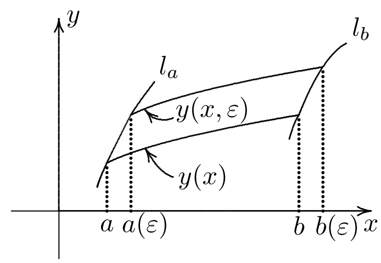
## 1.8 KINTAMŲ INTEGRAVIMO RĖŽIŲ ATVEJIS

Tegu $l_a$ ir $l_b$ yra kokios nors glodžžios kreivės plokštumoje $\mathbb{R}^2$, o $l$ – glodi kreivė, kurios vienas galas yra kreivėje $l_a$, o kitas – kreivėje $l_b$. Tokių kreivių aibę pažymėkime raide $\mathfrak{M}$. Tarkime, kreives $l,\ l_a$ ir $l_b$ galima apibrėžti atitinkamai lygtimis: $y = y(x),\ y = \alpha(x)$ ir $y = \beta(x)$. Aibėje $\mathfrak{M}$ ieškosime kreivės $l : y = y(x)$, kuri funkcionalui

$$I(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{1.46}$$

suteikia ekstremumą.

Tarkime, kreivė $l : y = y(x)$ suteikia (1.46) funkcionalui silpną lokalų ekstremumą, o kreivės $l(\varepsilon) : y = y(x, \varepsilon)$ yra "artimos" kreivei $l$ ir $y(x, 0) = y(x)$. Kadangi "artimas" kreives turime imti iš aibės $\mathfrak{M}$, tai jų galai turi gulėti kreivėse $l_a$ ir $l_b$ (žr. 2.3 pav.).




2.3 pav.

Tarkime, kreivės $l(\varepsilon)$ taškai, esantys kreivėse $l_a$ ir $l_b$, turi koordinates $a(\varepsilon),\ y\big(a(\varepsilon), \varepsilon\big)$ ir $b(\varepsilon),\ y\big(b(\varepsilon), \varepsilon\big)$. Akivaizdu, kad $a(0) = a,\ b(0) = b$.

Įstatykime į (1.46) integralą vietoje funkcijos $y$ funkciją $y(x, \varepsilon)$, o integravimo rėžius $a$ ir $b$ pakeiskime rėžiais $a(\varepsilon)$ ir $b(\varepsilon)$. Taškas $\varepsilon = 0$ yra funkcijos

$$\Phi(\varepsilon) = \int\limits_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} F(x, y(x, \varepsilon), y'(x, \varepsilon))\, dx$$

lokalaus ekstremumo taškas. Todėl $\Phi'(0) = 0$. Kadangi

$$\Phi'(0) = b'(0) \cdot F(x, y, y')\big|_{x=b} - a'(0) \cdot F(x, y, y')\big|_{x=a} +$$

$$+ \int\limits_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \Big[F_y(x, y, y') \frac{\partial y(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + F_{y'}(x, y, y') \frac{\partial y'(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Big]\, dx\Big|_{\varepsilon=0},$$

tai funkcija $y$ turi tenkinti integralinę tapatybę

$$b'(0) \cdot F(x, y, y')\big|_{x=b} - a'(0) \cdot F(x, y, y')\big|_{x=a} +$$

$$+\int\limits_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)}\Big[F_y(x,y,y')\frac{\partial y(x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}+F_{y'}(x,y,y')\frac{\partial y'(x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big]\,dx\Big|_{\varepsilon=0}=0. \tag{1.47}$$

Pastebėsime, kad

$$\int\limits_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)}F_{y'}(x,y,y')\frac{\partial y'(x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\,dx\Big|_{\varepsilon=0}=\int\limits_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)}F_{y'}(x,y,y')\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial y(x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big)\,dx\Big|_{\varepsilon=0}=$$

$$=F_{y'}(x,y,y')\Big|_{x=b}\frac{\partial y(b(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}-F_{y'}(x,y,y')\Big|_{x=a}\frac{\partial y(a(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}-$$

$$-\int\limits_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)}\frac{d}{dx}\Big(F_{y'}(x,y,y')\Big)\frac{\partial y(x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\,dx\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Be to,

$$\frac{d}{d\varepsilon}y(a(\varepsilon),\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}=y'(a)\cdot a'(0)+\frac{\partial y(a(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0},$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}y(b(\varepsilon),\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}=y'(b)\cdot b'(0)+\frac{\partial y(b(\varepsilon),\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Todėl (1.47) tapatybę galima perrašyti taip:

$$b'(0)\big(F(x,y,y')-F_{y'}(x,y,y')y'\big)\big|_{x=b}-$$

$$-a'(0)\big(F(x,y,y')-F_{y'}(x,y,y')y'\big)\big|_{x=a}+$$

$$+F_{y'}(x,y,y')\Big|_{x=b}\frac{dy(b(\varepsilon),\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}-F_{y'}(x,y,y')\Big|_{x=a}\frac{dy(a(\varepsilon),\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}+$$

$$+\int\limits_a^b\Big[F_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}\Big(F_{y'}(x,y,y')\Big)\Big]\frac{\partial y(x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\,dx=0. \tag{1.48}$$

Iš pradžių imkime "artimas" kreives $l(\varepsilon)$ taip, kad jų galai sutaptų su ekstremalės $l$ galais, t.y.

$$y(a(\varepsilon),\varepsilon)=y(a),\quad y(b(\varepsilon),\varepsilon)=y(b) \tag{1.49}$$

visoms galimoms parametro $\varepsilon$ reikšmėms. Tada (1.48) integralinėje tapatybėje visi neintegraliniai nariai yra lygūs nuliui ir ją galima perrašyti taip:

$$\int\limits_a^b\Big[F_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}\Big(F_{y'}(x,y,y')\Big)\Big]\frac{\partial y(x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\,dx=0.$$

Pagal 1.1 lemą ši tapatybė yra galima tik tada, kai funkcija $y$ tenkina Oilerio lygtį:

$$F_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}\Big(F_{y'}(x,y,y')\Big)=0. \tag{1.50}$$

Grįžkime prie (1.48) tapatybės. Kadangi funkcija $y$ tenkina (1.50) Oilerio lygtį, tai (1.48) tapatybę galima perrašyti taip:

$$b'(0)\cdot\big(F(x,y,y')-F_{y'}(x,y,y')y'\big)\big|_{x=b}-$$
$$-a'(0)\cdot\big(F(x,y,y')-F_{y'}(x,y,y')y'\big)\big|_{x=a}+$$
$$+F_{y'}(x,y,y')\Big|_{x=b}\frac{dy(b(\varepsilon),\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}-F_{y'}(x,y,y')\Big|_{x=a}\frac{dy(a(\varepsilon),\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=0.$$

Imdami šioje tapatybėje funkcijas $y(x,\varepsilon)$ taip, kad jos tenkintų antrąją iš (1.49) sąlygų, gausime, kad taške $x=a$ funkcija $y$ tenkina sąlygą

$$a'(0)\cdot\big(F(x,y,y')-F_{y'}(x,y,y')y'\big)\Big|_{x=a}+F_{y'}(x,y,y')\Big|_{x=a}\frac{dy(a(\varepsilon),\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=0.$$

Reikalaudami, kad funkcijos $y(x,\varepsilon)$ tenkintų pirmąją iš (1.49) sąlygų, gausime, kad taške $x=b$ funkcija $y$ tenkina sąlygą

$$b'(0)\cdot\big(F(x,y,y')-F_{y'}(x,y,y')y'\big)\Big|_{x=b}+F_{y'}(x,y,y')\Big|_{x=b}\frac{dy(b(\varepsilon),\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=0.$$

Šios sąlygos vadinamos *transversalumo* sąlygomis. Kadangi taškai

$$\big(a(\varepsilon),y(a(\varepsilon),\varepsilon)\big)\quad\text{ir}\quad\big(b(\varepsilon),y(b(\varepsilon),\varepsilon)\big)$$

guli kreivėse $l_a$ ir $l_b$, tai išvestinės

$$\frac{dy(a(\varepsilon),\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\alpha'(a)\cdot a'(0),\qquad \frac{dy(b(\varepsilon),\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\beta'(b)\cdot b'(0),$$

Todėl transversalumo sąlygas galima perrašyti taip:

$$\begin{aligned} F(x,y,y')\big|_{x=a}+(\alpha'(x)-y'(x))F_{y'}(x,y,y')\big|_{x=a} &= 0,\\ F(x,y,y')\big|_{x=b}+(\beta'(x)-y'(x))F_{y'}(x,y,y')\big|_{x=b} &= 0.\end{aligned}\tag{1.51}$$

Taigi transversalumo sąlygos apibrėžia ryšį tarp ekstremalės $l$ krypties koeficiento $y'$ ir kreivių $l_a$, $l_b$ krypties koeficientų $\alpha'$, $\beta'$ kiekviename kreivių $l_a$, $l_b$ taške.

P a s t a b o s:

1. Jeigu tik vienas ekstremalės $l$ galas yra įtvirtintas, tai transversalumo sąlyga turi būti patenkinta neįtvirtintame gale.

2. Tarkime, $F(x,y,y')=Q(x,y)\sqrt{1+y'^2}$. Tada pirmąją iš (1.51) transversalumo sąlygų galima perrašyti taip:

$$Q\sqrt{1+y'^2}\Big|_{x=a}+Q(\alpha'-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\Big|_{x=a}=0.$$

   Suprastinę čia panašius narius, gausime

$$Q(1+\alpha'y')|_{x=a}=0.$$

Jeigu pirmasis daugiklis šioje sąlygoje nelygus nuliui, tai antrasis daugiklis yra lygus nuliui ir galime tvirtinti, kad ekstremalės ir kreivės, kuria ji slenka, krypties vektoriai yra ortogonalūs. Šiuo atveju transversalumo sąlyga susiveda į ortogonalumo sąlygą.

3. Jeigu kreivė $l_a$ yra apibrėžta lygtimi $\alpha(x,y) = 0$, tai transversalumo sąlygą galima užrašyti taip:

$$\frac{F(x,y,y') - y'(x)F_{y'}(x,y,y')}{\alpha_x(x,y)} = \frac{F_{y'}(x,y,y')}{\alpha_y(x,y)}. \tag{1.52}$$

4. Funkcionalo

$$I(y) = \int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx, \quad y = (y_1,\dots,y_n)$$

atveju, kai taškas $a$ laisvai gali judėti paviršiumi $\alpha(x,y) = 0$, transversalumo sąlyga yra tokia:

$$\frac{F(x,y,y') - y_1'(x)F_{y_1'}(x,y,y') - \cdot \ldots \cdot - y_n'(x)F_{y_n'}(x,y,y')}{\alpha_x(x,y)} =$$

$$= \frac{F_{y_1'}(x,y,y')}{\alpha_{y_1}(x,y)} = \ldots = \frac{F_{y_n'}(x,y,y')}{\alpha_{y_n}(x,y)}.$$

P a v y z d ž i a i:

1. Rasti atstumą nuo taško $(-2, 3\sqrt{3})$ iki pusapskritimio

$$l_b : y = \sqrt{1-(x-1)^2} := \beta(x), \quad x \in [0,2].$$

Šio uždavinio sprendimas susiveda į tokį variacinį uždavinį. Aibėje glodžių kreivių $l : y = y(x)$, kurios vienas galas įtvirtintas taške $(-2, 3\sqrt{3})$, o kitas galas guli pusapskritime $y = \beta(x)$, $x \in [0,2]$, reikia rasti tą, su kuria funkcionalas

$$I(y) = \int\limits_{-2}^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

įgyją minimalią reikšmę.

Šį funkcionalą atitinka Oilerio lygtis

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0.$$

Jos bendrasis sprendinys $y = C_1x + C_2$ priklauso nuo dviejų laisvų konstantų. Be to, yra nežinoma ir $b$ reikšmė. Taigi yra tris nežinomos konstantas $C_1, C_2$ ir $b$. Joms rasti turime dvi kraštines ir vieną transversalumo sąlygas:

$$-2C_1 + C_2 = 3\sqrt{3},$$

$$bC_1 + C_2 = \sqrt{1-(b-1)^2},$$
$$\sqrt{1+C_1^2} + \Big(\frac{1-b}{\sqrt{1-(b-1)^2}} - C_1\Big)\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0.$$

Iš pirmųjų dviejų kraštinių sąlygų ir trečiosios transversalumo sąlygos randame: $C_1 = -C_2 = -\sqrt{3}, b = 1/2$. Todėl ekstremalė $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$, o ieškomas atstumas

$$d = \int\limits_{-2}^{1/2} \sqrt{1+(\sqrt{3})^2}\,dx = 5.$$

2. Aibėje glodžių kreivių, kurių vienas galas yra įtvirtintas koordinačių pradžioje, o kitas galas yra tiesėje $l_b : y = mx + n$ rasti tą, kuri suteikia ekstremumą funkcionalui

$$I(y) = \int\limits_0^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx.$$

Kadangi pointegralinė funkcija tiesiogiai nepriklauso nuo kintamojo $x$, tai nagrinėjamo funkcionalo Oilerio lygtis turi pirmąjį bendrąjį integralą

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{1}{y}\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Atskirę šioje lygtyje kintamuosius ir suintegravę, gausime Oilerio lygties bendrąjį sprendinį

$$(x+C_2)^2 + y^2 = \frac{1}{C_1^2}.$$

Taigi ekstremalės yra apskritimai. Kadangi ieškoma ekstremalė turi eiti per koordinačių pradžią, tai $C_2^2 = 1/C_1^2$ ir ekstremalės lygtį galima perrašyti taip:

$$x^2 - 2C_2x + y^2 = 0.$$

Ekstremalės ir kreivės $l_b$ sankirtos taške turi būti patenkinta transversalumo sąlyga

$$-\frac{1}{m} = \frac{C_2 - b}{y(b)}.$$

Be to, jų sankirtos taškas turi gulėti tiesėje

$$y = mx + n.$$

Iš pastarųjų dviejų lygčių randame $C_2 = -n/m$. Todėl ieškomą ekstremalės lygtį galima perrašyti taip:

$$\Big(x + \frac{m}{n}\Big)^2 + y^2 = \Big(\frac{m}{n}\Big)^2.$$

## 1.9 TRŪKIŲ SPRENDINIŲ ATVEJIS

Iš pradžių išnagrinėsime vieną pavyzdį. Akivaizdu, kad

$$I(y) = \int_{-1}^{1} y^2(1-y')^2\,dx > 0, \quad \forall y : y \in \mathrm{C}^1[-1,1],\ y(-1)=0,\ y(1)=1.$$

Funkcija

$$\widehat{y}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 0, & x \in [-1,0] \end{cases}$$

taške $x = -1$ lygi nuliui, o taške $x = 1$ lygi vienetui. Jos išvestinė $\widehat{y}\,'$ taške $x = 0$ turi trūkį. Todėl funkcija $\widehat{y}$ nėra tolydžiai diferencijuojama intervale $[-1,1]$. Vis dėlto integralas $I(\widehat{y})$ turi prasmę ir

$$I(\widehat{y}) = \int_{-1}^{1} \widehat{y}^2(1-\widehat{y}\,')^2\,dx = 0.$$

Taigi minimumą funkcionalui $I$ suteikia funkcija, kuri nepriklauso $\mathrm{C}^1[-1,1]$ erdvei.

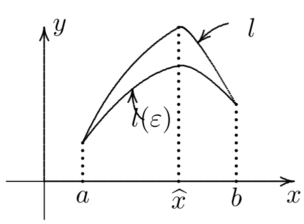
Apibendrindami šį pavyzdį, matome, kad kartais funkcionalo ekstremumo reikia ieškoti platesnėje funkcijų klasėje. Šiame skyrelyje tokia klase laikysime visumą dalimis glodžių kreivių.

Tarkime, dalimis glodi kreivė $l : y = y(x)$ suteikia ekstremumą funkcionalui

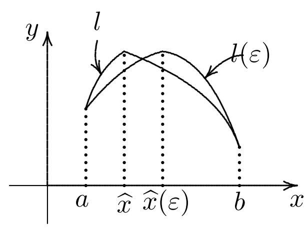
$$I(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,dx. \tag{1.53}$$

Be to, tegu funkcijos $y$ išvestinė $y'$ turi trūkį tik viename taške $\widehat{x} \in (a,b)$.

Artimas kreives pažymėkime $l(\varepsilon)$. Atskirai išnagrinėsime du atvejus. Tegu $l(\varepsilon)$ : $y = y(x) + \varepsilon\eta(x),\ \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(a,b)$ (žr. 2.4 pav.).



2.4 pav.



2.5 pav.

Funkcija

$$\Phi(\varepsilon) = I(y+\varepsilon\eta) = \int_a^{\widehat{x}} F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\,dx + \int_{\widehat{x}}^{b} F(x, y+\varepsilon\eta, y'+\varepsilon\eta')\,dx$$

turi ekstremumą taške $\varepsilon = 0$. Todėl

$$\Phi'(0) = \int_a^{\widehat{x}} (F_y \eta + F_{y'} \eta')\, dx + \int_{\widehat{x}}^{b} (F_y \eta + F_{y'} \eta')\, dx =$$

$$= \int_a^{\widehat{x}} \Big(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\Big) \eta\, dx + \int_{\widehat{x}}^{b} \Big(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\Big) \eta\, dx + F_{y'} \eta\Big|_{x=\widehat{x}-0} - F_{y'} \eta\Big|_{x=\widehat{x}+0} = 0.$$

Iš šios integralinės tapatybės gauname, kad funkcija $y$ tenkina Oilerio lygtį

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \tag{1.54}$$

o reiškinys $F_{y'}(x, y, y')$ taške $x = \widehat{x}$ yra tolydus, t.y.

$$F_{y'}\big|_{x=\widehat{x}-0} = F_{y'}\big|_{x=\widehat{x}+0}. \tag{1.55}$$

Tegu $l(\varepsilon) : y = y(x, \varepsilon),\ y(\widehat{x}(\varepsilon), \varepsilon) = y(\widehat{x})$ (žr. 2.5 pav.) ir

$$\Phi(\varepsilon) = I(y(x, \varepsilon)) = \int_a^{\widehat{x}(\varepsilon)} F(x, y(x, \varepsilon), y'(x, \varepsilon))\, dx +$$

$$+ \int_{\widehat{x}(\varepsilon)}^{b} F(x, y(x, \varepsilon), y'(x, \varepsilon))\, dx.$$

Tada

$$\Phi'(0) = \widehat{x}\,'(0) F\Big|_{x=\widehat{x}+0}^{x=\widehat{x}-0} +$$

$$+ \int_a^{\widehat{x}(\varepsilon)} \Big(F_y \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + F_{y'} \frac{\partial y'}{\partial \varepsilon}\Big)\, dx\Big|_{\varepsilon=0} + \int_{\widehat{x}(\varepsilon)}^{b} \Big(F_y \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + F_{y'} \frac{\partial y'}{\partial \varepsilon}\Big)\, dx\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Taškas $\varepsilon = 0$ yra funkcijos $\Phi$ lokalaus ekstremumo taškas. Todėl $\Phi'(0) = 0$. Kadangi taškuose $x = \widehat{x} \pm 0$ išvestinė

$$\frac{d}{d\varepsilon} y(\widehat{x}(\varepsilon), \varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \widehat{x}\,'(0) \cdot y'(x)\Big|_{x=\widehat{x}\pm 0} + \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

tai šią sąlygą galime perrašyti taip:

$$\widehat{x}\,'(0)\big(F - y' F_{y'}\big)\big|_{x=\widehat{x}-0} - \widehat{x}\,'(0)\big(F - y' F_{y'}\big)\big|_{x=\widehat{x}+0} +$$

$$+ \int_a^{\widehat{x}(\varepsilon)} \Big(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\Big) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\, dx\Big|_{\varepsilon=0} + \int_{\widehat{x}(\varepsilon)}^{b} \Big(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\Big) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}\, dx\Big|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Iš šios tapatybės gauname, kad funkcija $y$ tenkina (1.54) Oilerio lygtį, o reiškinys $F(x,y,y') - y'F_{y'}(x,y,y')$ taške $x = \widehat{x}$ yra tolydus, t.y.

$$\big(F - y'F_{y'}\big)\big|_{x=\widehat{x}-0} = \big(F - y'F_{y'}\big)\big|_{x=\widehat{x}+0}. \tag{1.56}$$

Taigi taške $\widehat{x}$ funkcija $y$ turi tenkinti (1.55) ir (1.56) sąlygas. Šios sąlygos yra vadinamos *Erdmano–Vejerštraso* sąlygomis.

Tarkime, yra žinomas bendrasis Oilerio lygties integralas. Kadangi Oilerio lygtis yra antros eilės lygtis, tai jis priklauso nuo dviejų laisvųjų konstantų. Be to, intervalams $(a, \widehat{x})$ ir $(\widehat{x}, b)$ jos apskritai yra skirtingos. Tiksliau, tegu

$$y = \omega_1(x, C_1, C_2)$$

yra bendrasis integralas intervale $(a, \widehat{x})$, o

$$y = \omega_2(x, C_3, C_4)$$

yra bendrasis integralas intervale $(\widehat{x}, b)$. Šiuo atveju turime 5 laisvąsias konstantas $C_1, C_2, C_3, C_4$ ir $y(\widehat{x})$. Joms apibrėžti taip pat yra 5 sąlygos: dvi kraštinės sąlygos

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

dvi Erdmano–Vejerštraso sąlygos ir funkcijos $y$ tolydumo sąlyga taške $\widehat{x}$.

P a s t a b a. Analogiškas Erdmano–Vejerštraso sąlygas galima išvesti ir daugialypio integralo atveju.

## 1.10 IZOPERIMETRINIS UŽDAVINYS

Kokioje nors uždarų, gulinčių plokštumoje, tam tikro ilgio kreivių aibėje ieškosime tokios, kuri apriboja didžiausio ploto figūrą. Toks uždavinys vadinamas izoperimetriniu uždaviniu siaurąja prasme (žr. 1.1 skyrelio 4 uždavinį). Jis susiveda į uždavinį, kai reikia rasti funkciją, kuri vienam funkcionalui suteikia ekstremumą, o kitas funkcionalas įgyja konkrečią reikšmę. Bendru atveju galima ieškoti funkcijos, kuri vienam funkcionalui suteikia ekstremumą, o kiti funkcionalai įgyja nurodytas reikšmes. Taip suformuluotas uždavinys vadinamas izoperimetriniu plačiąja prasme.

Nagrinėsime paprasčiausią izoperimetrinį uždavinį. Tegu $\mathfrak{M}$ yra aibė diferencijuojamų segmente $[a, b]$ funkcijų, tenkinančių kraštines sąlygas

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \tag{1.57}$$

ir tokių, kad funkcionalas

$$J(y) = \int_a^b \Psi(x, y, y')\, dx = d; \tag{1.58}$$

čia $d$ – tam tikras skaičius. Aibėje $\mathfrak{M}$ reikia rasti funkciją, kuriai funkcionalas

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{1.59}$$

įgyja ekstremalią reikšmę.

P a s t a b a . Suformuluotas uždavinys turi prasmę, jeigu *duota funkcionalo* $J$ *reikšmė* $d$ *yra griežtai tarp jo ekstremalių reikšmių, t.y. nėra jo ekstremali reikšmė.* Priešingu atveju egzistuoja tik viena arba kelios ekstremalės, kurioms funkcionalas $J$ įgyja duotą reikšmę. Šios ekstremalės ir sudaro visą leistinų kreivių aibę. Taigi, nagrinėjant tokį atvejį, bendra teorija netenka prasmės. Kartu galime tvirtinti, kad tais atvejais, kai ekstremalė suteikia griežtą ekstremumą, ka tik išskirtas reikalavimas yra būtinas.

Tarkime, funkcijos $F$ ir $\Psi$ turi tolydžias dalines išvestines pagal visus argumentus iki antros eilės imtinai, o skaičių $d$ parinktas taip, kad aibė $\mathfrak{M}$ yra netuščia. Taikant Lagranžo daugiklių metodą, izoperimetrinis uždavinys susiveda į jau išnagrinėtą variacinio skaičiavimo uždavinį be papildomų funkcinių sąlygų. Įrodysime paprasčiausią Oilerio teoremos variantą.

1.2 **teorema. (Oilerio)** *Tarkime, funkcija* $y \in \mathfrak{M}$ *suteikia* (1.59) *funkcionalui ekstremumą ir nėra funkcionalo* $J$ *ekstremalė. Tada egzistuoja skaičius* $\lambda$ *toks, kad funkcija* $y$ *yra funkcionalo*

$$H(y) = I(y) + \lambda J(y) \tag{1.60}$$

*ekstremalė.*

◁ Tarkime, kad funkcija $y \in \mathfrak{M}$ suteikia (1.59) funkcionalui ekstremumą ir nėra funkcionalo $J$ ekstremalė. Laisvai pasirenkame funkcijas $\eta_1, \eta_2 \in \mathrm{C}_0^\infty(a,b)$ . Funkcija $y + \varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2$ priklauso kokiai nors silpnai funkcijos $y$ aplinkai, jeigu tik skaičių $\varepsilon_1$ ir $\varepsilon_2$ moduliai yra pakankamai maži. Apibrėžkime dviejų realių kintamųjų funkciją $\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = J(y + \varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2)$. Jos pirmos eilės išvestinės

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_i}\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \int\limits_a^b \Big[\Psi_y - \frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]\eta_i\,dx, \quad i = 1, 2.$$

Pagal teoremos sąlygą funkcija $y$ nėra funkcionalo $J$ ekstremalė. Todėl reiškinys

$$\Big[\Psi_y - \frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]$$

tapačiai nelygus nuliui ir funkciją $\eta_2$ galima parinkti taip, kad

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon_2}\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \int\limits_a^b \Big[\Psi_y - \frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]\eta_2\,dx \neq 0.$$

Kadangi $J(y) = d$, tai taškas $(0,0)$ yra lygties $\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d$ sprendinys. Remiantis neišreikštinių funkcijų teorema, lygtis $\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d$ apibrėžia $\varepsilon_2$ kaip kintamojo $\varepsilon_1$ funkciją, jeigu tik skaičiaus $\varepsilon_1$ modulis yra pakankamai mažas. Be to, išvestinė

$$\frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}\Big|_{\varepsilon_1=0} = -\frac{\Phi_{\varepsilon_1}}{\Phi_{\varepsilon_2}}\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = -\frac{\int_a^b \Big[\Psi_y - \frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]\eta_1\,dx}{\int_a^b \Big[\Psi_y - \frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]\eta_2\,dx}.$$

Taškas $\varepsilon_1 = 0$ yra funkcijos $\widetilde{\Phi}(\varepsilon_1) = I(y + \varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2(\varepsilon_1)\eta_2)$ lokalaus ekstremumo taškas. Todėl

$$\widetilde{\Phi}'(\varepsilon_1)\big|_{\varepsilon_1=0} = 0.$$

Šią sąlygą galima užrašyti taip:

$$\int\limits_a^b \Big[F_y - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big)\Big]\eta_1\,dx + \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1}\Big|_{\varepsilon_1=0} \cdot \int\limits_a^b \Big[F_y - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big)\Big]\eta_2\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b \Big[F_y - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big)\Big]\eta_1\,dx + \lambda \int\limits_a^b \Big[\Psi_y - \frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]\eta_1\,dx = 0; \tag{1.61}$$

čia

$$\lambda = -\frac{\int_a^b \Big[F_y - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big)\Big]\eta_2\,dx}{\int_a^b \Big[\Psi_y - \frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big)\Big]\eta_2\,dx}.$$

Tegu $F + \lambda\Psi = H$. Tada (1.61) tapatybę galima perrašyti taip:

$$\int_a^b \Big[H_y - \frac{d}{dx}\big(H_{y'}\big)\Big]\eta_1\,dx = 0, \quad \forall\eta \in \mathrm{C}_0^\infty(a,b)\,.$$

Pasinaudoję 1.1 lema, gausime, kad funkcija $y$ turi tenkinti Oilerio lygtį:

$$H_y - \frac{d}{dx}\big(H_{y'}\big) = 0. \tag{1.62}$$

Taigi $y$ yra funkcionalo

$$H(y) = \int_a^b H(x,y,y')\,dx$$

ekstremalė. $\triangleright$

Jeigu iš anksto yra žinoma, kad ekstremalė egzistuoja, tai remiantis Oilerio teorema ją galima rasti. Iš tikrųjų, integruodami (1.62) Oilerio lygtį rasime jos bendrąjį sprendinį $y = y(C_1, C_2, \lambda)$. Jis priklauso nuo trijų laisvų konstantų: dviejų integravimo konstantų $C_1, C_2$ ir parametro $\lambda$. Remiantis Oilerio teorema ieškomas sprendinys priklauso šiai ekstremalių šeimai. Todėl belieka tik apibrėžti parametrus $C_1$, $C_2$ ir $\lambda$. Jie randami iš dviejų (1.57) kraštinių sąlygų ir (1.58) funkcinės sąlygos.

P a s t a b o s:

1. Teorema išliks teisinga, jeigu joje funkciją $y$ pakeisime vektorine funkcija $y = (y_1, \dots, y_n)$. Be to, vietoje (1.58) funkcinės sąlygos galime imti bet kokį baigtinį skaičių tokių sąlygų.

2. Suformuluotas izoperimetrinis uždavinys susiveda į paprasčiausią variacinį uždavinį su funkcionalu $H = I + \lambda J$. Jeigu funkcionalą $H$ padauginsime iš kokios nors konstantos, tai gautą funkcionalą atitiks ta pati ekstremalių šeima kaip ir funkcionalą $H$. Todėl funkcionalą $H$ galime užrašyti simetrinėje formoje

$$H = \lambda_1 I + \lambda_2 J.$$

   Išskirkime atvejį, kai $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Tada aibė funkcinalo $I$ ekstremalių, kurioms funkcionalas $J$ įgyja pastovią reikšmę sutampa su aibe funkcinalo $J$ ekstremalių, kurioms funkcionalas $I$ įgyja pastovią reikšmę.

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu $\mathfrak{M}$ yra tokių funkcijų $\{y \in \mathrm{C}^1(0,\pi),\, y(0) = y(\pi) = 0\}$ aibė, kad funkcionalas

$$J(y) = \int_0^\pi y\sin x\,dx = 1.$$

   Aibėje $\mathfrak{M}$ reikia rasti funkciją, kuri funkcionalui

$$I(y) = \int_0^\pi {y'}^2(x)\,dx$$

suteikia bent silpną lokalų ekstremumą.

Sudarome funkcionalą

$$H(y) = I(y) + \lambda J(y).$$

Jį atitinka Oilerio lygtis

$$2y'' - \lambda \sin x = 0,$$

kurios bendrasis sprendinys

$$y = -\frac{\lambda}{2} \sin x + C_1 x + C_2.$$

Pareikalavę, kad ekstremalė $y \in \mathfrak{M}$ gausime $C_1 = C_2 = 0,\ \lambda = -4/\pi$. Todėl ieškoma ekstremalė

$$y = \frac{2}{\pi} \sin x.$$

Parodysime, kad ji suteikia funkcionalui $I$ absoliutų minimumą.

Tegu funkcija $\eta \in \mathrm{C}^1(0, \pi)$ ir tenkina sąlyga $J(\eta) = 0$. Tada funkcija $y + \eta \in \mathfrak{M}$ ir skirtumas

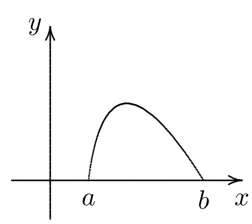
$$I(y+\eta) - I(y) = \int_0^{\pi} \left[(y' + \eta')^2 - {y'}^2\right] dx = 2 \int_0^{\pi} y'\eta'\, dx + \int_0^{\pi} {\eta'}^2\, dx =$$

$$= 2y'\eta\Big|_{x=0}^{x=\pi} - 2 \int_0^{\pi} y''\eta\, dx + \int_0^{\pi} {\eta'}^2\, dx =$$

$$= 2 \int_0^{\pi} y\eta\, dx + \int_0^{\pi} {\eta'}^2\, dx = \int_0^{\pi} {\eta'}^2\, dx \geq 0.$$

2. Aibėje glodžiu ilgio $d$ kreivių, jungiančių du dotus taškus $A$ ir $B$, rasti tą, kuri, kartu su atkarpa $AB$, apriboja didžiausio ploto figūrą.

   Tarkime, taškai $A$ ir $B$ yra $x$ ašyje ir turi koordinates $a, 0$ ir $b, 0$. Be to, tegu kreivė $l$, jungianti šiuos taškus, randasi virš $x$ ašies ir ją galima apibrėžti lygtimi $y = y(x),\ x \in (a, b)$. Figūros, esančios tarp $x$ ašies ir kreivės $l$ (žr. 2.6 pav.),



2.6 pav.

   plotas lygus

$$I(y) = \int_a^b y\, dx.$$

Kreivės $l$ ilgis

$$J(y) = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = d.$$

Taigi reikia rasti funkcija $y$, kuri suteikia funkcionalui $I$ didžiausią reikšmę ir tenkina papildomą sąlygą $J(y) = d$.

Apibrėžime funkcionalą

$$H(y) = \int_a^b H(y, y')\,dx; \quad H(y, y') = y + \lambda\sqrt{1+y'^2}.$$

Kadangi funkcija $H$ tiesiogiai nepriklauso nuo $x$, tai šį funkcionalą atitinkanti Oilerio lygtis tiri pirmąjį bendrąjį integralą

$$y + \lambda\sqrt{1+y'^2} - \lambda y' \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1.$$

Suprastinę jį, gausime

$$y = C_1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Tarkime $y' = \operatorname{tg}\varphi$. Tada

$$y = C_1 - \lambda\cos\varphi.$$

Diferencijuodami šį reiškinį pagal $x$, gausime

$$y' = \lambda\sin\varphi\frac{d\varphi}{dx} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Iš čia randame

$$x = \lambda\sin\varphi + C_2.$$

Kartu gauname Oilerio lygties ekstremalių šeimą

$$y = C_1 - \lambda\cos\varphi, \quad x = \lambda\sin\varphi + C_2.$$

Eliminavę iš šių lygčių parametrą $\varphi$, gausime lygtį

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2.$$

Akivaizdu, kad ši lygtis apibrėžia apskritimų šeimą. Taigi, jeigu ieškoma ekstremalė egzistuoja, tai ji apibrėžia apskritimą. Parametrus $C_1$, $C_2$ ir $\lambda$ vienareikšmiškai galima rasti iš dviejų kraštinių sąlygų ir papildomos funkcinės sąlygos.

## 1.11 SĄLYGINIO EKSTREMUMO UŽDAVINYS

Variacinio skaičiavimo uždaviniuose papildomos sąlygos gali būti įvairaus pavidalo. Kartais papildoma sąlyga susiveda į tai, kad ieškomoji ekstremalė turi gulėti tam tikrame paviršiuje. Šiame skyrelyje nagrinėsime paprasčiausią variacinio skaičiavimo uždavinį su tokia sąlyga. Tarkime, funkcijos $y, z \in \mathrm{C}^1[a,b]$ tenkina kraštines sąlygas

$$y(a) = \alpha_1, \quad y(b) = \beta_1, \quad z(a) = \alpha_2 \quad z(b) = \beta_2 \tag{1.63}$$

ir lygtį

$$\Phi(x, y, z) = 0. \tag{1.64}$$

Tokių funkcijų aibėje reika rasti tas, kurioms funkcionalas

$$I(y, z) = \int_a^b F(x, y, z, y', z')\, dx \tag{1.65}$$

įgyja ekstremalią reikšmę.

Geometrinė šio uždavinio interpretacija yra tokia. Reikia rasti kreivę, kuri yra (1.64) paviršiuje, eina per du taškus ir suteikia (1.65) funkcionalui ekstremumą.

Jeigu iš (1.64) sąlygos $z$ galėtume išreikšti kaip funkciją nuo $x$ ir $y$, tai įstatę gautą jos išraišką į (1.65) funkcionalą gautume uždavinį be jokios papildomos sąlygos. Panauduosime šią idėją išvesdami lygtis, kurias turi tenkinti ieškomosios funkcijos $y$ ir $z$.

Tarkime, funkcijos $y$ ir $z$ tenkina (1.64) lygtį, (1.63) kraštines sąlygas ir suteikia funkcionalui $I(y,z)$ bent silpną lokalų ekstremumą. Be to, tegu funkcijos $\Phi$ dalinė išvestinė

$$\Phi_z(x, y(x), z(x)) \neq 0, \quad \forall x \in [a,b]^3. \tag{1.66}$$

Tada iš (1.64) lygties $z$ galima išreikšti kaip kintamųjų $x$ ir $y$ funkciją. Vadinasi, (1.64) lygtį galima užrašyti taip: $z = \varphi(x,y)$ ir $z(x) \equiv \varphi(x, y(x))$. Įstatę į (1.65) vietoje $z$ funkciją $\varphi$, gausime funkcionalą:

$$\int_a^b F(x, y, \varphi(x,y), y', \varphi_x(x,y) + \varphi_y(x,y)y')\, dx \equiv \int_a^b \Psi(x, y, y')\, dx.$$

Funkcija $y$ suteikia šiam funkcionalui ekstremumą (tačiau dabar jau besąlyginį). Todėl ji turi tenkinti Oilerio lygtį:

$$\frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big) - \Psi_y = 0. \tag{1.67}$$

Kadangi

$$\Psi_y = F_y + F_z\varphi_y + F_{z'}(\varphi_{xy} + \varphi_{yy}y'), \quad \Psi_{y'} = F_{y'} + F_{z'}\varphi_y,$$

[3] Šią sąlygą galima pakeisti bendresne

$$\Phi_y^2(x, y(x), z(x)) + \Phi_z^2(x, y(x), z(x)) \neq 0, \quad \forall x \in [a,b].$$

$$\frac{d}{dx}\big(\Psi_{y'}\big) = \frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big) + \frac{d}{dx}\big(F_{z'}\big)\varphi_y + F_{z'}(\varphi_{yx} + \varphi_{yy}y'), \quad \varphi_y = -\frac{\Phi_y}{\Phi_z},$$

tai (1.67) lygtį galima perrašyti taip:

$$\frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big) - F_y - \Big(\frac{d}{dx}\big(F_{z'}\big) - F_z\Big)\frac{\Phi_y}{\Phi_z} = 0. \tag{1.68}$$

Išilgai kreivės $y = y(x),\ z = z(x)$ reiškinys

$$\frac{\frac{d}{dx}\big(F_{z'}\big) - F_z}{\Phi_z}$$

yra kintamojo $x$ funkcija. Pažymėkime jį $\lambda(x)$. Tada (1.68) lygtis išsiskaido į dviejų lygčių sistemą:

$$\frac{d}{dx}\big(F_{y'}\big) - F_y - \lambda(x)\Phi_y = 0,$$
$$\frac{d}{dx}\big(F_{z'}\big) - F_z - \lambda(x)\Phi_z = 0.$$

Šią sistemą galima užrašyti taip:

$$\frac{d}{dx}\big(F^*_{y'}\big) - F^*_y = 0, \tag{1.69}$$

$$\frac{d}{dx}\big(F^*_{z'}\big) - F^*_z = 0; \tag{1.70}$$

čia $F^* = F + \lambda\Phi$. Kartu įrodėme tokį teiginį: *Tarkime, diferencijuojamos funkcijos $y$ ir $z$ tenkina* (1.64) *lygtį,* (1.63) *kraštines sąlygas ir* (1.65) *funkcionalui suteikia ekstremumą. Tada jos turi tenkinti* (1.69) *ir* (1.70) *lygtis.*

Išvestos (1.69) ir (1.70) lygtys yra Oilerio lygtys funkcionalui

$$I^*(y,z) = \int\limits_a^b F^*(x,y,z,y',z')\,dx.$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad Lagranžo daugiklis $\lambda$ yra kintamojo $x$ funkcija. Eliminavę $\lambda$ ir $z$ iš (1.64), (1.69) ir (1.70) lygčių, gausime funkcijos $y$ atžvilgiu antrosios eilės diferencialinę lygtį. Jos bendrasis integralas priklauso nuo dviejų laisvųjų konstantų. Šioms konstantoms apibrėžti yra dvi kraštinės sąlygos: $y(a) = \alpha_1,\ y(b) = \beta_1$.

P a v y z d y s. Glodžių sferoje

$$S_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$

kreivių aibėje, jungiančiu du duotus sferos taškus, reikia rasti mažiausio ilgio kreivę (tokios kreivės vadinamos geodezinėmis kreivėmis).

Sferinėse koordinatėse sferos lygtis yra apibrėžiama taip:

$$x = R\cos\varphi\cos\theta,\ y = R\sin\varphi\cos\theta,\ z = R\sin\theta,$$

$\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Tarkime, $\varphi = \varphi(\theta)$ yra ieškomos kreivės sferoje $S_R$ lygtis. Be to, tegu duotus taškus sferoje atitinka parametro $\theta$ reikšmės $\theta_1,\ \theta_2$. Tada kreivės, jungiančios šiuos sferos taškus, ilgis

$$I(\varphi) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{E\varphi'^2 + 2F\varphi'\theta' + G\theta'^2}\, d\theta;$$

čia $E = r_\varphi^2 = R^2\cos^2\theta$, $F = r_\varphi r_\theta = 0$, $G = r_\theta^2 = R^2$ yra sferos pirmosios kvadratinės formos koeficientai, $\theta' = 1$. Nagrinėjamu atveju funkcionalas

$$I(\varphi) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \varphi'^2\cos^2\theta}\, d\theta.$$

Jį atitinka Qilerio lygtis

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\varphi'\cos^2\theta}{\sqrt{1+\varphi'^2\cos^2\theta}}\right) = 0.$$

Jos pirmasis integralas

$$\frac{\varphi'\cos^2\theta}{\sqrt{1+\varphi'^2\cos^2\theta}} = C_1.$$

Atskirę kintamuosius jį galima perrašyti taip:

$$d\varphi = \frac{d\frac{C_1}{\sqrt{1-C_1^2}}\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1-\frac{C_1^2}{1-C_1^2}\operatorname{tg}^2\theta}}$$

Integruodami abi šios lygties puses, gausime bendrąjį Oilerio lygties sprendinį

$$\varphi = -\arccos\frac{C_1}{\sqrt{1-C_1^2}}\operatorname{tg}\theta + C_2.$$

Jį galima perrašyti taip:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-C_1^2}}{C_1}\cos(C_2-\varphi) = \frac{\sqrt{1-C_1^2}}{C_1}(\cos C_2\cos\varphi + \sin C_2\sin\varphi).$$

Padauginę kairę ir dešinę šių lygybių puses iš $R\cos\theta$ ir grižę prie kintamųjų $x$, $y$ ir $z$, gausime

$$z = Ax + By, \quad A = R\frac{\sqrt{1-C_1^2}}{C_1}\cos C_2,\ B = R\frac{\sqrt{1-C_1^2}}{C_1}\sin C_2.$$

Iš čia išplaukia, kad ieškoma kreivė yra plokštumoje, einančioje per koordinačių pradžią. Tokios plokštumos iškerta sferoje didžiosius apskritimus. Todėl galime tvirtinti, kad geodezinė kreivė sferoje yra mažesnis didžiojo apskritimo lankas, jungiantis du duotus apskritimo taškus.

P a s t a b o s:

1. Jeigu (1.64) sąlygoje funkcija $\Phi$ nepriklauso nuo išvestinių $y'$ ir $z'$, tai tokia sąlyga yra vadinama *holonomine*, priešingu atveju *neholonomine*. Įrodytas teiginys išlieka teisingas ir neholonominės sąlygos

$$\Phi(x, y, z, y', z') = 0 \tag{1.71}$$

atveju (žr. [8], [3]).

2. Oilerio lygčių sistema holonominės ir neholonominės sąlygos atvejais iš esmės skiriasi. Tai susiję su tuo, kad neholonominių sąlygų atveju (1.69) ir (1.70) lygtys yra pirmos eilės lygtys funkcijos $\lambda$ atžvilgiu.

3. Nagrinėjant tokio tipo uždavinius, holonominių arba neholonominių sąlygų gali būti bet koks baigtinis skaičius (žr. [8]).

P a v y z d y s. Kokia uždara kreive $l$ turi skristi lėktuvas, kad per laiką $T$ apskrietų didžiausio ploto figūrą, jeigu lėktuvo greitis, kai nėra vėjo, lygus $v_0$, o vėjo greitis $a$ yra patovus ir turi pastovią kryptį.

Tarkime vėjo kryptis yra nukreipta $x$ ašies kryptimi ir lėktuvo padėtį laiko momentu $t$ galima apibrėžti lygtimis:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Be to, tegu

$$\alpha = \alpha(t)$$

yra kampas tarp $x$ ašies ir lėktuvo krypties. Lėktuvo greičio vektorius

$$v(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Antra vertus šis greičio vektorius

$$v(t) = (v_0 \cos\alpha + a, v_0 \sin\alpha).$$

Sulyginę šias reikšmes gausime

$$x' = v_0 \cos\alpha + a, \quad y' = v_0 \sin\alpha. \tag{1.72}$$

Plotas figūros, kurios konturu skrenda lėktuvas, išreiškiamas integralu

$$I(l) = \frac{1}{2}\int_0^T (xy' - yx')\, dt.$$

Taigi reikia rasti kreivę $l$, kuri tenkintų (1.72) sąlygas ir suteiktų funkcionalui $I(l)$ didžiausią reikšmę.

Apibrėžkime funkcionalą

$$I^*(l) = \int_0^T [xy' - yx' - \lambda_1(x' - v_0\cos\alpha - a) - \lambda_2(y' - a\sin\alpha)]\, dt.$$

Čia turime tris nežinomas funkcijos

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha = \alpha(t).$$

Jas atitinka trys Oilerio lygtys:

$$\frac{d}{dt}(F_{x'}) - F_x = 0 \quad \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(-y - \lambda_1) - y' = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(F_{y'}) - F_y = 0 \quad \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}(x - \lambda_2) + x' = 0,$$

$$\frac{d}{dt}(F_{\alpha'}) - F_\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow -\lambda_1 \sin\alpha + \lambda_2 \cos\alpha = 0.$$

Iš pirmųjų dviejų lygčių randame

$$2x + C_2 = \lambda_2, \quad 2y + C_1 = -\lambda_1.$$

Koordinačių pradžią perkelkime lygiagrečiai koordinačių ašims taip, kad konstantos $C_1$, $C_2$ būtų lygios nuliui. Tada, pažymėję naujas koordinates tomis pačiomis raidėmis, gausime

$$x = \lambda_2/2, \quad y = -\lambda_1/2.$$

Apibrėžkime polines koordinates

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Iš pastarųjų dviejų formulių išplaukia, kad

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Be to, reiškinys

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Todėl yra teisiga formulė

$$\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Iš jos randame

$$\alpha = \varphi + \pi/2.$$

Kartu galime tvirtinti, kad kiekvienu laiko momentu $t$ kampas tarp lėktuvo krypties ir padėties vektorių yra status.

Įstatę rasta $\alpha$ reikšmę į (1.72) formules, gausime sistemą

$$x' = -v_0 \sin\varphi + a, \quad y' = v_0 \cos\varphi.$$

Padauginę pirmąją lygytį iš $x$, antrąją iš $y$ ir abi gautas lygtis sudėję gausime lygtį

$$xx' + yy' = ax = ar\cos\varphi = ar\sin\alpha.$$

Ją galima perrašyti taip:

$$r\frac{dr}{dt} = ar\sin\alpha.$$

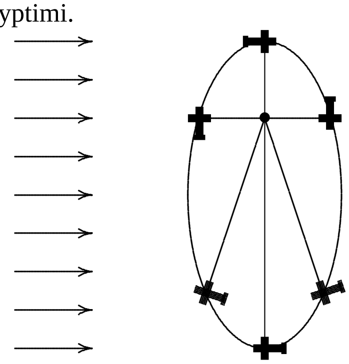
Kadangi $\sin\alpha = y'/v_0$, tai

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a}{v_0}\frac{dy}{dt}.$$

Suintegravę pastarąją lygtį, gausime

$$r = \frac{a}{v_0}y + C.$$

Tai yra elipsės lygtis, kurios vienas iš židiniu yra koordinačių pradžios taške. Jos ekscentricitetas $e = a/v_0 < 1$ (pagal uždavinio prasmę). Todėl elipsės didžioji ašis nukreipta $y$ ašies kryptimi.



2.7 pav.

Taigi didžiausio ploto figūra, kurią apibrėžia skrisdamas lėktuvas, yra elipsė. Šios elipsės didžioji ašis yra nukreipta statmenai vėjo krypčiai. Be to, lėktuvo kryptis kiekvienu laiko momentu yra ortogonali lėktuvo radiuso vektoriui (žr. 2.7 pav.).

# 1.12 VARIACINIO SKAIČIAVIMO UŽDAVINYS PARAMETRINE FORMA

Tegu $l$ yra kokia nors kreivė, esanti plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Šioje plokštumoje ne visada egzistuoja ortogonali koordinačių sistema $Oxy$, kurioje kreivę $l$ galima apibrėžti lygtimi $y = y(x)$. Todėl natūralu išnagrinėti bendrąjį atvejį, kai kreivė $l$ yra apibrėžta parametrinėmis lygtimis:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Tokių kreivės $l$ parametrizacijų egzistuoja be galo daug. Iš tikrųjų, jeigu

$$g : (\tau_1, \tau_2) \to (t_1, t_2)$$

yra kokia nors monotoniškai didėjanti diferencijuojama funkcija ir

$$\widetilde{\varphi}(\tau) = \varphi(g(\tau)), \quad \widetilde{\psi}(\tau) = \psi(g(\tau)),$$

tai

$$x = \widetilde{\varphi}(\tau), \quad y = \widetilde{\psi}(\tau), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2]$$

yra kita kreivės $l$ parametrizacija.

P a v y z d y s. Parametrinės lygtys:

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

plokštumoje $\mathbb{R}^2$ apibrėžia apskritimą. Tegu $\tau = \operatorname{tg} t/2$ Tada $t = 2\operatorname{arctg}\tau$ ir gauname kitas apskritimo parametrines lygtis:

$$x = a\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \quad y = \frac{2a\tau}{1+\tau^2}, \quad \tau \in (-\infty, \infty).$$

Tegu $l$ yra kokia nors kreivė, apibrėžta parametrinėmis lygtimis

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Apibrėžkime funkcionalą

$$I(l) = \int_{t_1}^{t_2} F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt. \tag{1.73}$$

Į šį integralą reikia žiūrėti kaip į funkcionalą priklausanti nuo kreivės $l$, o ne kaip į funkcionalą, priklausanti nuo dviejų funkcijų $x$ ir $y$. Paprasčiausias variacinio skaičiavimo uždavinys šiam funkcionalui formuluojamas taip:*Reikia rasti glodžią kreivę* $l$*, kuri šiam funkcionalui suteikia ekstremalią reikšmę.* Taip suformuluotas uždavinys turi prasmę, jeigu funkcionalo reikšmė nepriklauso nuo konkrečios kreivės $l$ parametrizacijos. Taigi formuluojant variacinio skaičiavimo uždavinį parametrine forma pointegralinės funkcijos negalima pasirinkti laisvai. Rasime sąlygas, kurias turi tenkinti funkcija $F$, kad (1.73) funkcionalas nepriklausytų nuo konkrečios kreivės $l$ parametrizacijos.

Tegu $x$ ir $y$ yra kokio nors parametro $t$ funkcijos ir $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$. Tada integralą

$$\int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

galima perrašyti taip:

$$\int_{t_1}^{t_2} F\big(x, y, \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\big)\dot{x}\,dt.$$

Atkreipsime dėmesį į tai, kad šio integralo pointegralinė funkcija tiesiogiai nepriklauso nuo kintamojo $t$ ir yra homogeninė pirmo laipsnio funkcija kintamųjų $\dot{x}$ ir $\dot{y}$ atžvilgiu.

Įrodysime, kad (1.73) funkcionalas nepriklauso nuo konkrečios kreivės $l$ parametrizacijos tada ir tik tada, kai pointegralinė funkcija $F$ tiesiogiai nepriklauso nuo kintamojo $t$ ir yra homogeninė pirmo laipsnio funkcija kintamųjų $\dot{x}$ ir $\dot{y}$ atžvilgiu.

Tegu

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

yra kokia nors kreivės $l$ parametrizacija ir

$$g : (\tau_1, \tau_2) \to (t_1, t_2)$$

yra monotoniškai didėjanti diferencijuojama funkcija. Tada

$$x = \widetilde{\varphi}(\tau) \equiv \varphi(g(\tau)), \quad y = \widetilde{\psi}(\tau) \equiv \psi(g(\tau)), \quad \tau \in [\tau_1, \tau_2],$$

yra kita kreivės $l$ parametrizacija. Jeigu (1.73) funkcionalas nepriklauso nuo konkrečios kreivės $l$ parametrizacijos, tai

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t, \varphi(t), \psi(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t))\,dt =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(\tau, \widetilde{\varphi}(\tau), \widetilde{\psi}(\tau), \dot{\widetilde{\varphi}}(\tau), \dot{\widetilde{\psi}}(\tau))\,d\tau. \tag{1.74}$$

Tegu

$$h : (t_1, t_2) \to (\tau_1, \tau_2)$$

yra funkcijos $g$ atvirkštinė funkcija. Tada

$$d\tau = \dot{h}(t)\,dt, \quad \dot{\varphi}(t) = \dot{\widetilde{\varphi}}(\tau)\dot{h}(t), \quad \dot{\psi}(t) = \dot{\widetilde{\psi}}(\tau)\dot{h}(t), \quad \dot{h}(t) > 0$$

ir (1.74) lygybę galima perrašyti taip:

$$\int_{t_1}^{t_2} F\big(t, \varphi(t), \psi(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)\big)\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F\big(h(t), \varphi(t), \psi(t), \dot{\varphi}(t)/\dot{h}(t), \dot{\psi}(t)/\dot{h}(t)\big)\dot{h}(t)\,dt.$$

Išvedant šią lygybę, vietoje visos kreivės $l$ galima imti bet kokį jos lanką. Todėl ji išliks teisinga, jeigu integravimo rėžius $t_1, t_2$ pakeisime bet kokiais kitais rėžiais $t_1', t_2' :\ t_1 \le t_1' < t_2' \le t_2$. Tačiau tai yra įmanoma tik tuo atveju, kai pointegralinės funkcijos sutampa, t.y. kai

$$F\big(t, \varphi(t), \psi(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)\big) =$$
$$= F\big(h(t), \varphi(t), \psi(t), \dot{\varphi}(t)/\dot{h}(t), \dot{\psi}(t)/\dot{h}(t)\big)\dot{h}(t). \tag{1.75}$$

Paėmę (1.75) formulėje funkciją $h(t) = t + C$, gausime

$$F\big(t, \varphi(t), \psi(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)\big) = F\big(t + C, \varphi(t), \psi(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)\big).$$

Ši lygybė yra teisinga tik tuo atveju, kai funkcija $F$ tiesiogiai nepriklauso nuo kintamojo $t$, t.y. kai

$$F = F(x, y, \dot{x}, \dot{y}).$$

Imkime (1.75) formulėje funkciją $h(t) = kt,\ k = Const > 0$. Tada

$$F\big(\varphi(t), \psi(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)\big) = F\big(\varphi(t), \psi(t), \dot{\varphi}(t)/k, \dot{\psi}(t)/k\big)k.$$

Pastaroji lygybė yra ekvivalenti tokiai:

$$F(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) = kF(x, y, \dot{x}, \dot{y}). \tag{1.76}$$

Pagal apibrėžimą tai reiškia, kad $F$ yra homogeninė pirmo laipsnio funkcija kintamųjų $\dot{x}$ ir $\dot{y}$ atžvilgiu. Tiksliau, funkcija $F$ yra teigiamai homogeninė pirmo laipsnio funkcija kintamųjų $\dot{x}$ ir $\dot{y}$ atžvilgiu, nes daugiklis $k > 0$.

Jeigu funkcija $F$ tiesiogiai nepriklauso nuo kintamojo $t$ ir teigiamoms daugiklio $k$ reikšmėms tenkina (1.76) sąlygą, tai yra teisinga (1.75) formulė. Savo ruožtu tai reiškia, kad (1.73) funkcionalas nepriklauso nuo konkrečios kreivės $l$ parametrizacijos.

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu $l$ yra uždara kreivė plokštumoje $\mathbb{R}^2$, apibrėžta parametrinėmis lygtimis:

   $$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2].$$

   Tada plotas figūros, apribotas kreive $l$, lygus

   $$I(l) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})\,dt.$$

2. Tegu $l$ yra kreivė plokštumoje $\mathbb{R}^2$, apibrėžta parametrinėmis lygtimis:

   $$x = x(t),\ y = y(t) \quad t \in [t_1, t_2].$$

Tada kreivės $l$ lanko ilgis

$$I(l) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Abiem atvejais pointegralinis reiškinys tiesiogiai nepriklauso nuo kintamojo $t$ ir yra homogeninė pirmojo laipsnio funkcija kintamųjų $\dot{x}$, $\dot{y}$ atžvilgiu.

Tarkime, funkcija $F$ tiesiogiai neprilauso nuo kintamojo $t$ ir teigiamoms daugiklio $k$ reikšmėms tenkina (1.76) sąlygą. Be to, tegu $\Omega$ yra kokia nors sritis plokštumoje $\mathbb{R}^2$; $\mathfrak{M}$ – aibė glodžių trajektorijų, esančių srityje $\Omega$ ir jungiančių du taškus (trajektorija – tai kreivė kartu su apėjimo kryptimi). Pagrindinis variacinio skaičiavimo uždavinys funkcionalui

$$I(l) = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt \tag{1.77}$$

formuluojamas taip: *aibėje $\mathfrak{M}$ reikia rasti kreivę, kuri* (1.77) *funkcionalui suteikia ekstremumą.* Čia turime omenyje absoliutųjį ekstremumą. Norint apibrėžti lokaliojo ekstremumo sąlygą, kaip ir neparametriniu atveju reikia apibrėžti kreivės aplinkos sąvoką.

Sakysime, kreivė $l_1$ yra kreivės $l$ stiprioje $\varepsilon$ aplinkoje, jeigu egzistuoja parametrizacijos

$$l:\ x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in (t_1, t_2),$$
$$l_1:\ x = \varphi_1(t), \quad y = \psi_1(t), \quad t \in (t_1, t_2),$$

tokios, kad

$$\big(\varphi_1(t) - \varphi(t)\big)^2 + \big(\psi_1(t) - \psi(t)\big)^2 \le \varepsilon^2, \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Jeigu kartu su šia nelygybe yra patenkinta dar ir nelygybė

$$\big(\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}(t)\big)^2 + \big(\dot{\psi}_1(t) - \dot{\psi}(t)\big)^2 \le$$
$$\le \varepsilon^2 \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)} \sqrt{\dot{\varphi}_1^2(t) + \dot{\psi}_1^2(t)}, \quad \forall t \in [t_1, t_2],$$

tai sakysime, kad kreivė $l_1$ yra kreivės $l$ silpnoje $\varepsilon$ aplinkoje.

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad šios nelygybės yra invariantinės galimų kreivės $l$ parametrizacijų atžvilgiu. Be to, jos turi paprastą geometrinę prasmę. Pirmoji nelygybė rodo, kad atstumas tarp atitinkamų kreivės $l$ ir kreivės $l_1$ taškų neviršija $\varepsilon$. Jeigu yra teisinga antroji nelygybė, tai galima įrodyti, kad kampas tarp liestinių atitinkamuose kreivės $l$ ir kreivės $l_1$ taškuose neviršija $\pi\varepsilon/2$ (smulkiau apie tai žr. [3] knygoje).

Tarkime, kreivė

$$l:\ x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2], \quad l \in \mathfrak{M}$$

suteikia (1.77) funkcionalui bent silpną lokalų ekstremumą. Be to, tegu $\eta_1, \eta_2 \in C_0^\infty(t_1, t_2)$ . Tada kreivė

$$l_1:\ x = x(t) + \varepsilon_1 \eta_1(t), \quad y = y(t) + \varepsilon_2 \eta_2(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

yra kokioje nors kreivės $l$ silpnoje aplinkoje, jeigu tik $\varepsilon_1$ ir $\varepsilon_2$ moduliai yra pakankamai maži skaičiai. Integralas

$$I(l_1) = \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

yra dviejų realių kintamųjų funkcija. Taškas $(0,0)$ yra funkcijos $\Phi$ lokalaus ekstremumo taškas. Todėl

$$\Phi_{\varepsilon_1}(0,0) = 0, \quad \Phi_{\varepsilon_2}(0,0) = 0.$$

Iš šių sąlygų, lygiai taip pat kaip ir neparametriniu atveju, gauname, kad funkcijos $x = x(t)$ ir $y = y(t)$ tenkina Oilerio lygtis:

$$\frac{d}{dt}(F_{\dot{x}}) - F_x = 0, \qquad \frac{d}{dt}(F_{\dot{y}}) - F_y = 0. \tag{1.78}$$

Jeigu funkcijos $x$ ir $y$ yra dukart tolydžiai diferencijuojamos, tai abi (1.78) lygtys yra antros eilės diferencialinės lygtys. Kadangi kreivės $l$ parametrizacijų yra be galo daug, tai šios lygtys turi būti priklausomos. Priešingu atveju jos apibrėžtų ne tik kreivę $l$, bet ir jos parametrizaciją. Įrodysime, kad abi (1.78) lygtis galima suvesti į vieną.

Kairę ir dešinę (1.76) formulės puses diferencijuokime parametro $k$ atžvilgiu, o po to imkime parametrą $k = 1$. Tada gausime formulę

$$F_{\dot{x}}\dot{x} + F_{\dot{y}}\dot{y} = F.$$

Diferencijuodami šią formulę kintamųjų $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ atžvilgiu, gausime atitinkamai tokias formules:

$$\begin{aligned} F_x &= \dot{x}F_{\dot{x}x} + \dot{y}F_{\dot{y}x}, \quad & F_y &= \dot{x}F_{\dot{x}y} + \dot{y}F_{\dot{y}y}, \\ 0 &= \dot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} + \dot{y}F_{\dot{x}\dot{y}}, \quad & 0 &= \dot{x}F_{\dot{x}\dot{y}} + \dot{y}F_{\dot{y}\dot{y}}. \end{aligned} \tag{1.79}$$

Paskutines dvi formules galima perrašyti taip:

$$\frac{F_{\dot{x}\dot{x}}}{\dot{y}^2} = \frac{F_{\dot{x}\dot{y}}}{-\dot{x}\dot{y}} = \frac{F_{\dot{y}\dot{y}}}{\dot{x}^2}.$$

Bendrą šių santykių reikšmę pažymėkime $F_1$. Pasinaudoję (1.79) formulėmis, (1.78) lygtis perrašysime taip:

$$\dot{x}F_{\dot{x}x} + \dot{y}F_{\dot{x}y} + \ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}} + \ddot{y}F_{\dot{x}\dot{y}} = \dot{x}F_{\dot{x}x} + \dot{y}F_{\dot{y}x},$$

$$\dot{x}F_{\dot{y}x} + \dot{y}F_{\dot{y}y} + \ddot{x}F_{\dot{y}\dot{x}} + \ddot{y}F_{\dot{y}\dot{y}} = \dot{x}F_{\dot{x}y} + \dot{y}F_{\dot{y}y}.$$

Suprastinę vienodus reiškinius ir $F_{\dot{x}\dot{x}}, F_{\dot{x}\dot{y}}, F_{\dot{y}\dot{y}}$ išreiškę $F_1$, gausime dvi lygtis:

$$\dot{y}\big[(F_{\dot{x}y} - F_{\dot{y}x}) + (\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y})F_1\big] = 0,$$

$$\dot{x}\big[(F_{\dot{y}x} - F_{\dot{x}y}) + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})F_1\big] = 0.$$

Kadangi $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$, tai reiškinys laužtiniuose skliaustuose turi būti lygus nuliui. Vadinasi, (1.78) lygtys susiveda į vieną Oilerio–Vejerštraso lygtį:

$$F_{\dot{x}y} - F_{\dot{y}x} + (\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y})F_1 = 0. \tag{1.80}$$

Prie šios lygties su dviem nežinomom funkcijom $x$ ir $y$ reikia prijungti dar vieną lygtį, kuri charkterizuoja konkretų parametro $t$ parinkimą. Pavyzdžiui, jeigu parametrą $t$ apibrėžtume kaip kreivės $l$ lanko ilgį $s$, tai iš formulės $ds^2 = dx^2 + dy^2$ išplauktų, kad funkcijos $x$ ir $y$ turi dar tenkinti lygtį $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$.

Jeigu (1.80) lygtyje $F_1 \neq 0$, tai ją galima perrašyti taip:

$$\frac{F_{\dot{x}y} - F_{\dot{y}x}}{F_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Kairė šios lygties pusė yra nulinės eilės homogeninė funkcija kintamųjų $\dot{x}$ ir $\dot{y}$ atžvilgiu, o dešinė pusė yra kreivės $l$ kreivis. Todėl paskutinė lygtis, kartu ir (1.80) nesikeičia, pakeitus kreivės $l$ parametrizaciją.

Išvesdami (1.78) Oilerio lygtis, reikalavome tik pirmųjų $\dot{x}$ ir $\dot{y}$ išvestinių tolydumo. Todėl šiose lygtyse išvestinių $\dfrac{d}{dt}\big(F_{\dot{x}}\big)$ ir $\dfrac{d}{dt}\big(F_{\dot{y}}\big)$ negalima skleisti pagal žinomą sudėtinės funkcijos išvestinės skaičiavimo formulę. Norint įrodyti antros eilės išvestinių $\ddot{x}$ ir $\ddot{y}$ tolydumą, reikia įrodyti Hilberto teoremos analogą parametriniu atveju. Tokia teorema yra teisinga. Reikia tik sąlygą $F_{yy} \neq 0$ pakeisti sąlyga $F_1 \neq 0$ (įrodymą žr. [3] knygoje).

Suformuluosime paprasčiausią izoperimetrinį uždavinį parametrine forma. Tegu $\mathfrak{M}$ yra aibė glodžių kreivių, apibrėžtų parametrinėmis lygtimis

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2]$$

ir jungiančių du duotus taškus $P_1$, $P_2$. Reikia rasti tokią kreivę $l \in \mathfrak{M}$, kad funkcionalas

$$I(l) = \int\limits_{t_1}^{t_2} F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt$$

igytų ekstremalią reikšmę, o funkcionalas

$$J(l) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Psi(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt = d = \mathrm{const};$$

čia $F$ ir $\Psi$ yra teigiamai homogeninės pirmo laipsnio funkcijos kintamųjų $\dot{x}$, $\dot{y}$ atžvilgiu.

Pagrindiniai teiginiai, įrodyti (1.10) skyrelyje izoperimetriniam uždaviniui, išlieka teisingi ir funkcionalams parametrinėje formoje. Tarkime, funkcijos $F$ ir $\Psi$ yra dukart diferencijuojamos visų savo kintamųjų atžvilgiu. Tada yra teisinga tokia teorema.

1.3 **teorema.** *Tarkime kreivė $l$, apibrėžta parametrinėmis lygtimis*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

*yra suformuluoto izoperimetrinio uždavinio sprendinys. Tada egzistuoja tokia konstanta $\lambda$, kad ji yra funkcionalo*

$$H(l) = \int\limits_{t_1}^{t_2} H(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt, \quad H = F + \lambda\Psi,$$

*ekstremalė, t.y. tenkina Oilerio lygtis:*

$$\frac{d}{dt}\big(H_{\dot{x}}\big) - H_x = 0, \qquad \frac{d}{dt}\big(H_{\dot{y}}\big) - H_y = 0.$$

P a v y z d y s. Aibėje uždarų kreivių, kurios apibrėžia figūrą ploto $S$, rasti tą, kurios lanko ilgis mažiausias.

Tarkime, $l$ yra uždara kreivė, apibrėžta parametrinėmis lygtimis

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Uždarumo sąlyga reiškia, kad jos abu galai sutampa, t.y

$$x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2).$$

Kreivės $l$ lanko ilgis

$$I(l) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt.$$

Figūros, apribotos kreive $l$, plotas

$$J(l) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt = S.$$

Taigi reikia rasti tokią uždarą kreivę $l$, kuriai funkcionalas $I$ įgyja ekstremalią reikšmę, o funkcionalas $J$ žinomą reikšmę $S$.

Apibrėžkime funkcionalą

$$H(l) = \int\limits_{t_1}^{t_2} H(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt;$$

čia funkcija

$$H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + \frac{\lambda}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Šį funkcionalą atitinka Oilerio lygtys:

$$\frac{d}{dt}H_{\dot{x}} - H_x = 0, \quad \frac{d}{dt}H_{\dot{y}} - H_y = 0.$$

Jos susiveda į Oilerio –Vejerštraso lygtį

$$\frac{H_{\dot{x}y} - H_{\dot{y}x}}{H_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad reiškiniai

$$(H_{x\dot{y}} - H_{y\dot{x}}) = \lambda, \quad H_1 = \frac{H_{\dot{x}\dot{y}}}{-\dot{x}\dot{y}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{-3/2}.$$

Todėl pastarąją lygtį galima perrašyti taip:

$$\lambda = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} := \frac{1}{r};$$

čia $1/r$ yra kreivės $l$ kreivis. Taigi kreivės $l$ kreivis yra pastovus. Vadinasi ieškoma kreivė yra apskritimas.

P a s t a b a. Šią teoriją galima apibendrinti, kai $l$ yra kreivė erdvėje $\mathbb{R}^3$ arba $\mathbb{R}^n$. Be to, ją taip pat galima apibendrinti ir kartotiniams integralams.

## 1.13 TRANSVERSALUMO SĄLYGA PARAMETRINĖJE FORMOJE

Tarkime, funkcija $F = F(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ tiesiogiai nepriklauso nuo kintamojo $t$ ir yra teigiamai homogeninė pirmojo laipsnio funkcija išvestinių $\dot{x}$, $\dot{y}$ atžvilgiu; $\mathfrak{M}$ – aibė glodžių kreivių, kurių vienas galas laisvai gali judėti kreive $l_1 : \alpha(x, y) = 0$, o kitas yra fiksuotas taške $P_2(x_2, y_2)$. Be to, tegu funkcija $\alpha$ turi tolydžias pirmos eilės dalines išvestines $\alpha_x$, $\alpha_y$, iš kurių bent viena nelygi nuliui.

Ieškosime kreivės $l \in \mathfrak{M}$, kuri funkcionalui

$$I(l) = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, \dot{x}, \dot{y})\, dt \tag{1.81}$$

suteiktų ekstremalią reikšmę.

Tarkime, kreivė $l \in \mathfrak{M}$, apibrėžta parametrinėmis lygtimis

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

suteikia (1.81) funkcionalui bent silpną lokalų ekstremumą. Be to, tegu kreivė $\tilde{l}$, apibrėžta parametrinėmis lygtimis,

$$\tilde{x} = x(t) + \varepsilon_1\eta_1(t), \quad \tilde{y} = y(t) + \varepsilon_2\eta_2(t), \quad t \in [t_1, t_2]$$

priklauso aibei $\mathfrak{M}$. Tada $\eta_1(t_2) = \eta_2(t_2) = 0$, taškas $(\tilde{x}(t_1), \tilde{y}(t_1)) \in l_1$ ir $\tilde{l}$ yra kokioje nors silpnoje ekstremalės $l$ aplinkoje, jeigu tik skaičių $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ moduliai yra pakankamai maži.

Apibrėžkime dviejų realių kintamųjų funkciją

$$\Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{t_1}^{t_2} F(x(t) + \varepsilon_1\eta_1(t), y(t) + \varepsilon_2\eta_2(t), \dot{x}(t) + \varepsilon_1\dot{\eta}_1(t), \dot{y}(t) + \varepsilon_2\dot{\eta}_2(t))\, dt.$$

Kreivė $\tilde{l} \in \mathfrak{M}$. Todėl taške $t = t_1$ turi būti patenkinta sąlyga

$$\Psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := \alpha(x(t_1) + \varepsilon_1\eta_1(t_1), y(t_1) + \varepsilon_2\eta_2(t_1)) = 0.$$

Taškas $(0, 0)$ yra funkcijos $\Phi$ lokalaus ekstremumo taškas ir $\Psi(0, 0) = 0$. Todėl egzistuoja tokia parametro $\lambda$ reikšmė, kad

$$\Phi_{\varepsilon_1} + \lambda\Psi_{\varepsilon_1}\big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = 0, \quad \Phi_{\varepsilon_2} + \lambda\Psi_{\varepsilon_2}\big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = 0.$$

Išvestinės

$$\Phi_{\varepsilon_1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \int_{t_1}^{t_2} \Big[F_x - \frac{d}{dt}\Big(F_{\dot{x}}\Big)\Big]\eta_1\, dt + F_{\dot{x}}\eta_1\big|_{t=t_1}^{t=t_2} = -F_{\dot{x}}\eta_1\big|_{t=t_1},$$

$$\Phi_{\varepsilon_2}(\varepsilon_1,\varepsilon_1)\big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\Big[F_y - \frac{d}{dt}\Big(F_{\dot y}\Big)\Big]\eta_2\,dt + F_{\dot y}\eta_2\big|_{t=t_1}^{t=t_2} = -F_{\dot y}\eta_2\big|_{t=t_1},$$

nes ekstremalė $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ tenkina (1.78) Oilerio lygtis ir $\eta_1(t_2) = \eta_2(t_2) = 0$. Išvestinės

$$\Psi_{\varepsilon_1}\big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \alpha_x(x(t),y(t))\eta_1(t)\big|_{t=t_1},$$

$$\Psi_{\varepsilon_2}\big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0} = \alpha_y(x(t),y(t))\eta_2(t)\big|_{t=t_1},$$

Todėl taške $t = t_1$ turi būti patenkintos tokios sąlygos:

$$(-F_{\dot x} + \lambda\alpha_x)\eta_1 = 0, \quad (-F_{\dot y} + \lambda\alpha_y)\eta_2 = 0.$$

Suprastinę šias lygybes iš $\eta_1(t_1)$ ir $\eta_2(t_1)$ ir eliminavę parametrą $\lambda$ gausime, kad taške $t = t_1$ turi būti patenkinta *transversalumo* sąlyga

$$F_{\dot x}\alpha_y - F_{\dot y}\alpha_x = 0. \tag{1.82}$$

Parodysime, kad (1.82) transversalumo sąlyga sutampa su (1.52) transversalumo sąlyga, kai parametras $t = x$. Iš tikrųjų, tegu $t = x$. Tada

$$F(x,y,\dot x,\dot y) = F(x,y,1,\dot y/\dot x)\dot x = \tilde F(x,y,y')\dot x,$$

$$F_{\dot x} = \tilde F + \dot x\cdot\tilde F_{y'}\cdot\Big(-\frac{\dot y}{\dot x^2}\Big) = \tilde F - y'\tilde F_{y'},$$

$$F_{\dot y} = \dot x\cdot\tilde F_{y'}\cdot\frac{1}{\dot x} = \tilde F_{y'}$$

ir (1.82) transversalumo sąlygą galima perrašyti taip:

$$(\tilde F - y'\tilde F_{y'})\alpha_y - \tilde F_{y'}\alpha_x = 0.$$

Akivaizdu, kad pastaroji sąlyga sutampa su (1.52) transversalumo sąlyga.

P a s t a b a. Jeigu kitas ekstremalės $l$ galas nėra įtvirtintas, o laisvai gali judėti kreive $l_2 : \beta(x,y) = 0$, tai šiame ekstremalės gale turi būti patenkinta transversalumo sąlyga

$$F_{\dot x}\beta_y - F_{\dot y}\beta_x = 0. \tag{1.83}$$

P a v y z d y s. Tegu $\mathfrak{M}$ yra aibė glodžių kreivių, kurių vienas galas yra tiesėje $l_1 : ax + by + c = 0$, o kitas taške $P_2(x_2, y_2)$. Aibėje $\mathfrak{M}$ reikia rasti kreivę $l$, kurios ilgis yra mažiausias.

Tarkime, kreivė $l \in \mathfrak{M}$, apibrėžta parametrinėmis lygtimis:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

turi mažiausią ilgį

$$I(l) = \int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}\,dt.$$

Tada funkcijos $x$ ir $y$ tenkina Oilerio lygtis:

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\Big)=0,\quad \frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\Big)=0.$$

Jų pirmieji integralai:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=C_1,\quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=C_2.$$

Šiose lygtyse konstantos $C_1, C_2$ yra priklausomos. Tiksliau jos tenkina sąlygą

$$C_1^2+C_2^2=1.$$

Be to,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{C_2}{C_1}.$$

Todėl galime tvirtinti, kad ieškoma ekstremalė yra tiesė. Taške $t=t_1$ ekstremalė yra tiesėje $l_1$. Todėl šiame taške turi būti patenkinta transversalumo sąlyga

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}b-\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}a=0$$

Ją galima perrašyti taip:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{b}{a}.$$

Taigi ekstremalė $l$ ir tiesė $l_1$ yra statmenos. Pareikalavę, kad ekstremalė $l$ eitų per tašką $P_2$, gausime ekstremalės lygtį

$$y-y_2=\frac{b}{a}(x-x_2).$$

Tiesiogiai galima įsitikinti, kad ekstremalės $l$ ir tiesės $l_1$ sankirtos taško koordinatės

$$x_1=\frac{b^2x_2-aby_2-ac}{a^2+b^2},\quad y_1=\frac{-abx_2+a^2y_2-bc}{a^2+b^2},$$

o atstumas tarp taškų $P_1, P_2$ lygus

$$d=\frac{|ax_2+by_2+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

# 2 SKYRIUS

# Geometrinė lauko teorija

Pirmame skyriuje buvo išvestos būtinos kai kurių funkcionalų ekstremumo egzistavimo sąlygos, t.y. Oilerio lygtys. Šios lygtys yra svarbi ir kartu išskirtinė diferencialinių lygčių klasė. Jų išskirtinumą nusako tai, kad Oilerio lygtį galima suvesti į visiškai simetrinę pirmosios eilės diferencialinių lygčių sistemą. Be to, Oilerio lygties sprendinių aibėje galima išskirti tam tikras sprendinių aibes (ekstremalių laukus). Geometrinė teorija, aprašanti šiuos laukus, yra svarbi tiek variaciniame skaičiavime, tiek artimose disciplinose, tokiose kaip optika, mechanika, kvantinė mechanika ir t.t.

## 2.1 KANONINĖ OILERIO LYGČIŲ FORMA

Tegu, $l : y = y(x), x \in [a, b]$ yra funkcionalo

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx, \tag{2.1}$$

ekstremalė, t.y. tenkina Oilerio lygtį. Be to, tegu kiekviename ekstremalės taške

$$F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0.$$

Oilerio lygtyse (1.17) ir (1.18) išskirkime neintegralinius reiškinius

$$p = F_{y'}(x, y, y') \quad \text{ir} \quad H = F(x, y, y') - y' F_{y'}(x, y, y').$$

Kadangi $F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0$, tai lygtį

$$p = F_{y'}(x, y, y')$$

galima išspręsti $y'$ atžvilgiu ir $y'$ išreikšti per $x, y$ ir $p$. Parodysime, kad Oilerio lygtį

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}\big(F_{y'}(x, y, y')\big) = 0 \tag{2.2}$$

galima perrašyti taip, kad į ją tiesiogiai įeitų funkcijos $p$ ir $H$. Tuo tikslu kartu su kintamaisiais $x, y$ ir $y'$ nagrinėsime kintamuosius $x, y$ ir $p$. Įrašykime į reiškinį $H$ vietoje $y'$ jo išraišką per $x, y$ ir $p$. Tada gausime reiškinį, priklausanti nuo šių trijų kintamųjų. Pažymėkime jį ta pačia raide $H$. Tuo atveju, kai funkcija $H = H(x, y, y')$, jos diferencialas

$$\begin{aligned} dH = dF - y'\, dp - p\, dy' = F_x\, dx + F_y\, dy + p\, dy' - y'\, dp - p\, dy' = \\ = F_x\, dx + F_y\, dy - y'\, dp. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Jeigu į $H$ žiūrėsime kaip į funkciją nuo kintamųjų $x, y$ ir $p$, tai jos diferencialas

$$dH = H_x\,dx + H_y\,dy + H_p\,dp. \tag{2.4}$$

Sulyginę jų išraiškas, gausime

$$H_x = F_x, \quad H_y = F_y, \quad H_p = -y'.$$

Todėl (2.2) Oilerio lygtį galima perrašyti taip:

$$H_y = \frac{dp}{dx}, \quad H_p = -\frac{dy}{dx}. \tag{2.5}$$

Gauta sistema vadinama *Hamiltono* arba *kanonine Oilerio lygčių sistema.* Taigi vieną antros eilės diferencialinę Oilerio lygtį su viena nežinoma funkcija $y$ suvedėme į dviejų pirmos eilės diferencialinių lygčių sistemą su dviem nežinomomis funkcijomis $y$ ir $p$. Be to, iš (2.2), (2.4) ir (2.5) formulių išplaukia, kad išilgai ekstremalės

$$\frac{dH}{dx} = H_x.$$

Jeigu funkcija $F$ tiesiogiai nepriklauso nuo $x$, tai ir funkcija $H$ taip pat tiesiogiai nepriklauso nuo $x$. Šiuo atveju išilgai ekstremalės

$$\frac{dH}{dx} = 0 \quad \text{ir} \quad H = \text{const}.$$

Analogiškai nagrinėjami kelių nežinomų funkcijų bei sąlyginio ekstremumo uždavinio atvejai. Išnagrinėsime sąlyginio ekstremumo uždavinį. Tegu vektorinė funkcija $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ tenkina neholonomines sąlygas

$$\psi_i(x, y, y') = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m, \ m < n$$

ir funkcionalui

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

suteikia ekstremalią reikšmę. Be to, tegu

$$\det\bigl|F_{y_i' y_j'}(x, y(x), y'(x))\bigr| \neq 0, \quad \forall x \in [a,b]$$

ir

$$F^*(x, y, y', \lambda) = F(x, y, y') + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x)\psi_i(x, y, y');$$

čia $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i$ – Lagranžo daugikliai, $i = 1, 2, \dots, n$. Išskirkime reiškinius:

$$p_i = F^*_{y_i'}(x, y, y', \lambda), \quad H = F^*(x, y, y', \lambda) - \sum_{i=1}^n y_i' F^*_{y_i'}(x, y, y', \lambda).$$

Kadangi $\det\left|F_{y_i' y_j'}\right| \neq 0$ ir ekstremalės taškuose yra patenkintos neholonominės sąlygos, tai iš lygčių

$$p_i = F^*_{y_i'}(x, y, y', \lambda), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

galima išreikšti $y_i'$ per $x, y_i, \lambda_i$ ir $p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Toliau kartu su kintamaisiais $x, y_i$ ir $y_i'$ nagrinėsime kintamuosius $x, y_i$ ir $p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Įrašykime į reiškinį $H$ vietoje $y'$ jo išraišką per $x, y, p$ ir gautą reiškinį pažymėkime ta pačia raide $H$. Tuo atveju, kai funkcija $H = H(x, y, y', \lambda)$, jos diferencialas

$$dH = dF^* - \sum_{i=1}^{n} d(y_i' p_i) = F^*_x\,dx + \sum_{i=1}^{n} F^*_{y_i}\,dy_i + \sum_{i=1}^{n} p_i\,dy_i' -$$

$$-\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i\,dy_i' + y_i'\,dp_i\Big) = F^*_x\,dx + \sum_{i=1}^{n} F^*_{y_i}\,dy_i - \sum_{i=1}^{n} y_i'\,dp_i.$$

Jeigu į $H$ žiūrėsime kaip į funkciją nuo $x, y_i$ ir $p_i$, tai

$$dH = H_x\,dx + \sum_{i=1}^{n} H_{y_i}\,dy_i + \sum_{i=1}^{n} H_{p_i}\,dp_i.$$

Sulyginę gautus reiškinius, turime

$$F^*_x = H_x, \quad H_{y_i} = F^*_{y_i}, \quad H_{p_i} = -y_i'.$$

Todėl antros eilės Oilerio lygčių sistema

$$F^*_{y_i} - \frac{d}{dx}\big(F^*_{y_i'}\big) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

susiveda į kanoninę pirmos eilės diferencialinių lygčių sistemą

$$\frac{dp_i}{dx} = H_{y_i}, \quad \frac{dy_i}{dx} = -H_{p_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pastaroji sistema vadinama *Hamiltono* arba *kanonine Oilerio lygčių* sistema.

## 2.2 EKSTREMALIŲ LAUKAI IR TRANSVERSALĖS

Tegu $\Omega$ yra jungioji sritis plokštumoje $\mathbb{R}^2$ ir $\{l\}$ – aibė kreivių klasės $C^1$ . Jeigu aibės $\{l\}$ kreivių galai priklauso srities $\Omega$ kraštiniams taškams ir per kiekvieną srities $\Omega$ tašką eina tik viena kreivė $l \in \{l\}$, tai sakysime, kad aibė $\{l\}$ yra *laukas*, dengiantis sritį $\Omega$. Be to, jeigu aibė $\{l\}$ yra kokio nors funkcionalo ekstremalės, tai sakysime, kad $\{l\}$ yra *ekstremalių laukas*.

Išskirsime kelis specialius ekstremalių laukus. Tarkime, funkcionalo

$$I(l) = \int_l F(x, y, y')\, dx \tag{2.6}$$

ekstremalių aibė $\{l\}$ yra vienparametrinė kreivių šeima, apibrėžta lygtimis[1]

$$y = \varphi(x, h), \quad h \in [h_1, h_2],\ x \in [a(h), b(h)];$$

čia funkcija $\varphi$ yra tolydi ir turi tolydžias dalines išvestines $\varphi_x$, $\varphi_h$, $\varphi_{xh}$. Be to, tegu ekstremalių $l$ galai yra $C^1$ klasės kreivėse $\gamma_1, \gamma_2$ ir funkcijos $\varphi$ išvestinė

$$\varphi_h(x, h) > 0.$$

Tada aibė $\{l\}$ yra ekstremalių laukas. Toks laukas vadinamas *nuosavu lauku*. Atkreipsime dėmesį į tai, kad lygtį $y = \varphi(x, h)$ galima išspręsti parametro $h$ atžvilgiu

$$h = h(x, y),$$

o rasta funkcija $h$ yra vienareikšmė ir turi tolydžias dalines išvestines iki antros eilės imtinai uždaroje srityje, apribotoje kreivėmis $\gamma_1, \gamma_2, y = \varphi(x, h_1)$ ir $y = \varphi(x, h_2)$.

Tarkime dabar, kad ekstremalių aibė $\{l\}$, apibrėžta lygtimis

$$y = \varphi(x, h), \quad h \in [h_1, h_2],\ x \in [a, b(h)],$$

išeina iš vieno taško $A(a, \alpha)$, t.y.

$$\varphi(a, h) = \alpha, \quad \forall h \in [h_1, h_2].$$

Be to, tegu $\forall a' > a$ ekstremalių aibė

$$y = \varphi(x, h), \quad h \in [h_1, h_2],\ x \in [a', b(h)]$$

[1] Jeigu nagrinėjamas funkcionalas parametrine forma ir jo ekstremalių aibė $\{l\}$ yra apibrėžta parametrinėmis lygtimis

$$x = \varphi(t, h),\ y = \psi(t, h), \quad t \in [t_1, t_2],\ h \in [h_1, h_2],$$

tai ekstremalių laukų apibrėžimas yra analogiškas. Čia tik iš funkcijų $\varphi$ ir $\psi$ reikalaujama, kad jos būtų dukart tolydžiai diferencijuojamos uždarame stačiakampyje $[t_1, t_2] \times [h_1, h_2]$ ir determinantas

$$\det \begin{matrix} \varphi_t & \varphi_h \\ \psi_t & \psi_h \end{matrix} \neq 0.$$

yra laukas. Tada aibę $\{l\}$ vadinsime *centriniu ekstremalių lauku.*

A p i b r ė ž i m a s. Tegu $\{l\}$ yra funkcionalo $I$ ekstremalių laukas. Sakysime, kreivė $\gamma$ yra lauko $\{l\}$ transversalė, jeigu bet kuri lauko ekstremalė, kertanti $\gamma$, kerta ją transversaliai.

Konkretumo dėlei nagrinėsime (2.6) funkcionalą. Tada ekstremalės $l : y = y(x)$ ir kreivės $\gamma : y = g(x)$ sankirtos taške transversalumo sąlyga yra tokia

$$F(x, y, y') - y' F_{y'}(x, y, y') + g' F_{y'}(x, y, y') = 0. \tag{2.7}$$

Ją galima perrašyti taip

$$H(x, y, y')\, dx + p(x, y, y')\, dg = 0.$$

Ši sąlyga nusako ryšį tarp ekstremalės ir transversalės krypties koeficientų jų sankirtos taške. Todėl kiekviename ekstremalės lauko taške yra žinoma lauko transversalės kryptis, jeigu tik

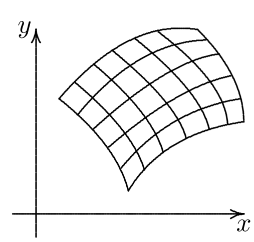
$$H^2(x, y, y') + p^2(x, y, y') \neq 0. \tag{2.8}$$

Tegu lauko ekstremalės yra apibrėžiamos lygtimis $y = \varphi(x, h)$. Tada visas lauko transversales rasime išsprendę pirmos eilės diferencialinę lygtį

$$F_{y'}(x, \varphi(x, h), \varphi'_x(x, h)) \frac{dy}{dx} = \varphi'_x(x, h) F_{y'}(x, \varphi(x, h), \varphi'_x(x, h)) -$$

$$- F(x, \varphi(x, h), \varphi'_x(x, h)) = 0; \tag{2.9}$$

čia $h = h(x, y)$. Kartu galime tvirtinti, kad per kiekvieną lauko tašką eina vienintelė transversalė. Taigi transversalių aibė yra vienparametrinis kreivių laukas, jeigu tik yra patenkinta (2.8) sąlyga. Toliau šį lauką vadinsime *transversalių lauku.* Ryšis tarp ekstremalės ir transversalės krypties koeficientų, jų sankirtos taške apibrėžiamas (2.9) formule. Iš jos matome, kad kampas tarp krypties vektorių yra nelygus nuliui, jeigu reiškinys $F \neq 0$. Šiuo atveju ekstremalių ir transversalių laukai apibrėžia srities $\Omega$ tinklą (žr. 3.1 pav.).




3.1 pav.

P a v y z d y s. Tegu $F(x, y, y') = Q(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$ ir $Q(x, y) \neq 0$. Tada transversalumo sąlyga reiškia ortogonalumą ir transversalių bei ekstremalių laukas apibrėžia ortogonalų tinklą.

P a s t a b a. Jeigu ekstremalės ir transversalės sankirtos taške $F = 0$, tai šiame taške ekstremalė liečia transversalę. Todėl ten, kur yra svarbus tinklo egzistavimas, reikalausime[2], kad reiškinys

$$F(x, \varphi(x, h), \varphi'_x(x, h)) \neq 0.$$

Turint lauko transversalę, galima išspręsti atvirkštinį uždavinį, t.y. rasti ekstremalių lauką. Iš tikrųjų, transversalumo sąlyga kiekviename transversalės taške vienareikšmiškai apibrėžia lauko ekstremalės kryptį. Tada galime rasti ekstremales (Oilerio lygties sprendinius), kurios eitų per laisvai pasirinktą transversalės tašką ir jame turėtų reikiamą kryptį. Iš bendros diferencialinių lygčių teorijos yra žinoma, kad toks uždavinys turi vienintelį sprendinį, jeigu transversalės taškuose kryptims, tenkinančioms transversalumo sąlygą, Oilerio lygties koeficientas prie antros eilės išvestinės $F_{y'y'} \neq 0$. Taigi, jeigu transversalumo sąlyga kiekviename transversalės taške vienareikšmiškai apibrėžia lauko ekstremalės kryptį ir yra patenkinta pastaroji sąlyga, tai lauko transversalė vienareikšmiškai apibrėžia patį lauką.

P a v y z d y s. Tegu $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$. Tada Oilerio lygties

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = 0$$

sprendiniai (ekstremalės) yra tiesės plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Šių ekstremalių aibėje išskirsime kelis skirtingus ekstremalių laukus.

1. Tegu $\{l\}$ yra aibė lygiagrečių tiesių, dengiančių visą plokštumą $\mathbb{R}^2$. Tada taip apibrėžta aibė yra ekstremalių laukas. Šio lauko transversalės yra tiesės, ortogonalios ekstremalių lauko $\{l\}$ tiesėms. Jeigu transversalė $\gamma$ yra tiesė, tai ją atitinkantis ekstremalių laukas yra aibė lygiagrečių tiesių, statmenų tiesei $\gamma$.

2. Tegu $\{l\}$ yra aibė spindulių, išeinančių iš koordinačių pradžios ir dengiančių visą plokštumą $\mathbb{R}^2$. Taip apibrėžta aibė yra ekstremalių laukas. Šio lauko transversalės yra apskritimai, su centru koordinačių pradžioje. Jeigu transversalė $\gamma$ yra apskritimas su centru koordinačių pradžioje, tai ją atitinkantis ekstremalių laukas yra išeinančių iš koordinačių pradžios spindulių aibė.

3. Tegu $\Omega$ yra iškila sritis, taškas $A \notin \Omega$, $\{l\}$ aibė atkarpų, kurios eina per tašką $A$ ir dengia sritį $\Omega$. Taip apibrėžta aibė yra ekstremalių laukas. Jeigu taškas $A \in \partial\Omega$, tai ekstremalių laukas yra centrinis su centru taške $A$. Jeigu taškas $A \notin \partial\Omega$, tai ekstremalių laukas yra nuosavas. Abiem atvejais lauko transversalės yra sritį $\Omega$ dengiantis lankai, kuriuos iškerta apskritimai su centru taške $A$. Jeigu transversalė $\gamma$ yra apskritimo, kurio centras taške $A$, lankas, kertantis sritį $\Omega$, tai ją atitinkantis ekstremalių laukas yra statmenų transversalei $\gamma$ ir esančių srityje $\Omega$ atkarpų aibė.

4. Tegu $\gamma$ yra $\mathrm{C}^2$ klasės kreivė. Iš kiekvieno kreivės $\gamma$ taško, ta pačia kryptimi, keliame jai ilgio $h$ statmenį. Aibė tokių atkarpų yra ekstremalių laukas, jeigu tik skaičius $h < h_0$, $h_0$ yra pakankamai mažas teigiamas skaičius. Kreivė $\gamma$ yra šio lauko transversalė. Kiti atkarpų galai apbrėžia kreivę, kuri statmena kiekvienai lauko ekstremalei. Todėl ji yra ekstremalių lauko transversalė. Imdami $h \in [0, h_0]$ gausime transversalių lauką.

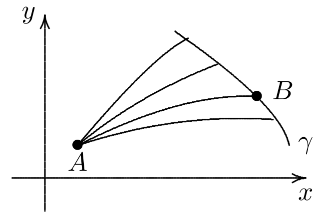
[2] Įvairiose lauko teorijos taikymuose šio reikalavimo galima atsisakyti. Taip pat galima atsisakyti (2.8) sąlygos. Smulkiau apie tai žr. [8] knygoje.

Kreivės $l : y = y(x),\ x \in [a, b]$ lanko $I$*-ilgiu* vadinsime integralo

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx$$

reikšmę[3]. Jeigu $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$, tai kreivės $l$ lanko $I$-ilgis sutampa su kreivės $l$ lanko ilgiu.

Tegu $\{l\}$ yra centrinis ekstremalių laukas su centru taške $A(a, \alpha)$. Kiekvienoje lauko ekstremalėje $l$ atidėkime vienodą $I$-ilgio lanką, kurio pradžia yra taške $A(a, \alpha)$, o galas – taške $B$. Lankų galai apibrėžia kreivę $\gamma$ (žr. 3.2 pav.).




3.2 pav.

2.1 **teorema.** *Kreivė $\gamma$ yra ekstremalių lauko $\{l\}$ transversalė tada ir tik tada, kai kiekvienos ekstremalės $l$ lanko, kurio pradžia yra taške $A$, o galas kreivėje $\gamma$, $I$-ilgis yra pastovus.*

$\triangleleft$ Tarkime, ekstremalė $l$ ir kreivė $\gamma$ kertasi taške $B(b, \beta)$. Be to, tegu ekstremalės $l$ lanką $AB$ ir kreivę $\gamma$ galima apibrėžti lygtimis

$$y = \varphi(x, b, \beta), \quad y = g(x).$$

Tada jų sankirtos taške

$$g(b) = \varphi(b, b, g(b)).$$

Kiekvienam taškui $B(b, \beta) \in \gamma$ ekstremalės $l$, jungiančios taškus $A$ ir $B(b, \beta)$ lanko $I$-ilgis

$$I(b) = \int_a^b F(x, \varphi(x, b, g(b)), \varphi'(x, b, g(b)))\,dx$$

yra pastovus. Todėl jo išvestinė, kintamojo $b$ atžvilgiu, lygi nuliui, t.y.

$$F(x, \varphi, \varphi')\big|_{x=b} +$$

[3] Analogiškai apibrėžiamas kreivės $l$, apibrėžtos parametrinėmis lygtimis

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_1, t_2],$$

lanko $I$-ilgis. Reikia tik iš pointegralinės funkcijos $F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ pareikalauti, kad ji tiesiogiai nepriklausytų nuo kintamojo $t$ ir būtų teigiamai homogeninė pirmojo laipsnio funkcija kintamųjų $\dot{x}$, $\dot{y}$ atžvilgiu.

$$+\int_a^b F_y(x,\varphi,\varphi')\big(\varphi_b+\varphi_\beta g'(b)\big)+F_{y'}(x,\varphi,\varphi')\big(\varphi'_b+\varphi'_\beta g'(b)\big)\,dx=0.$$

Kadangi kreivė $l : y = \varphi(x,b,\beta)$ yra funkcionalo $I$ ekstremalė, tai pastarąją sąlygą galima perrašyti taip:

$$F(x,\varphi,\varphi')\big|_{x=b}+F_{y'}(x,\varphi,\varphi')\big(\varphi_b+\varphi_\beta g'(b)\big)\big|_{x=b}=0.$$

Ekstremalės $l$ ir kreivės $\gamma$ sankirtos taške $g(b)=\varphi(b,b,g(b))$. Todėl

$$g'(b)=\varphi'(b,b,g(b))+\varphi_b(b,b,g(b))+\varphi_\beta(b,b,g(b))g'(b).$$

ir

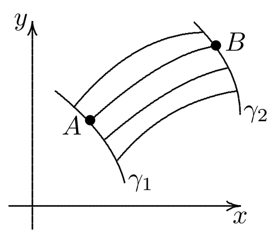
$$F(x,\varphi,\varphi')\big|_{x=b}-\big(\varphi'(x,b,g(b))-g'(b)\big)F_{y'}(x,\varphi,\varphi')\big|_{x=b}=0.$$

Taigi kreivė $\gamma : y = g(x)$ yra ekstremalių lauko $\{l\}$ transversalė.

Tegu kreivė $\gamma : y = g(x)$ yra transversalė. Tada kiekviename jos taške $B(b,g(b))$ integralo $I(b)$ išvestinė lygi nuliui. Todėl integralas $I(b) = const$. Taigi kiekvieno ekstremalės $l$ lanko $AB$, kurio pradžia yra taške $A$, o galas taške $B \in \gamma$, $I$-ilgis yra pastovus. ▷

P a v y z d y s. Tegu $F(x,y,y')=\sqrt{1+y'^2}$. Tada ekstremalės yra tiesės, išeinančios iš taško $A$. Kreivė $\gamma$ yra apskritimas su centru taške $A$.

Tegu $\{l\}$ yra ekstremalių laukas ir $\gamma_1$ yra šio lauko transversalė. Kiekvienoje lauko ekstremalėje ta pačia kryptimi atidėkime vienodą $I$-ilgio lanką, kurio pradžia yra transversalėje $\gamma_1$. Tada kiti lanko galai plokštumoje $\mathbb{R}^2$ apibrėžia kreivę $\gamma_2$ (žr. 3.3 pav.).




3.3 pav.

2.2 **teorema.** *Kreivė $\gamma_2$ yra ekstremalių lauko $\{l\}$ transversalė.*

◁ Tarkime, ekstremalė $l$ kerta kreives $\gamma_1$, $\gamma_2$ taškuose $A(a,\alpha)$, $B(b,\beta)$. Be to, tegu

$$l : y=\varphi(x,a,\alpha,b,\beta),\quad \gamma_1 : y=g_1(x),\quad \gamma_2 : y=g_2(x).$$

Ekstremalės $l$ ir kreivių $\gamma_1,\gamma_2$ sankirtos taškuose

$$g_1(a)=\varphi(a,a,h(a),b,\beta),\quad g_2(b)=\varphi(b,a,\alpha,b,g_2(b)).$$

Ekstremalės $l$ lanko, jungiančio taškus $A(a,\alpha)\in\gamma_1$ ir $B(b,\beta)\in\gamma_2$, $I$-ilgis

$$I(a,b)=\int_a^b F\big(x,\varphi(x,a,g_1(a),b,g_2(b)),\varphi'(x,a,g_1(a),b,g_2(b))\big)\,dx$$

yra pastovus. Todėl jo išvestinės kintamųjų $a$ ir $b$ atžvilgiu lygios nuliui. Prilyginę nuliui išvestinę kintamojo $b$ atžvilgiu, gausime (žr. 2.1 teoremos įrodymą), kad kreivė $\gamma_2 : y = g_2(x)$ yra transversalė, t.y. tenkina sąlygą

$$F(x, \varphi, \varphi')\big|_{x=b} - \big(\varphi' - g_2'\big) F_{y'}(x, \varphi, \varphi')\big|_{x=b} = 0.$$

Taigi kreivė $\gamma : y = g_2(x)$ yra funkcionalo transversalė. $\triangleright$

Per kiekvieną lauko $\{l\}$ tašką eina lygiai viena transversalė. Todėl yra teisinga atvirkštinė teorema.

2.3 **teorema.** *Tegu* $\gamma_1, \gamma_2$ *yra lauko* $\{l\}$ *transversalės. Tada visi ekstremalių* $l \in \{l\}$ *lankai, jungiantis transversales* $\gamma_1, \gamma_2$*, turi vienodą* $I$*-ilgį.*

P a v y z d y s. Tegu $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$ ir $\gamma_1, \gamma_2$ yra transversalės. Ekstremalės yra tiesės statmenos transversalėms. Todėl lankai, jungiantis šias transversales, yra to paties ilgio atkarpos, esančios abiejų transversalių normalėse.

P a s t a b a. Šios teoremos išlieka teisingos ir funkcionalui parametrine forma.

## 2.3 JUNGTINIAI TAŠKAI

Tegu, $l_0 : y = \varphi(x, h_0), x \in [a, b]$ yra ekstremalė, einanti per tašką $A(a, \alpha)$ ir turinti šiame taške krypties koeficientą $h_0$, t.y. $\varphi'(a, h_0) = h_0$. Be to, tegu

$$F_{y'y'}(a, \alpha, h_0) \neq 0.$$

Tada $F_{y'y'}(a, \alpha, h) \neq 0$, jeigu tik $h$ yra pakankamai arti $h_0$. Todėl tokioms $h$ reikšmėms Oilerio lygtis

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

turi vienintelį sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas

$$y|_{x=a} = \alpha, \quad y'|_{x=a} = h.$$

Visų šių sprendinių aibė apibrėžia pluoštą ekstremalių $\{l\}$, išeinančių iš taško $A(a, \alpha)$. Aibė $\{l\}$ yra vienparametrinė kreivių šeima. Kiekvieną ekstremalę $l$ galima apibrėžti lygtimi

$$y = \varphi(x, h), \quad h \in [h_1, h_2];$$

čia $h$ yra ekstremalės $l$ krypties koeficientas taške $a$, t.y.

$$y'(a, h) = h.$$

Kai $h = h_0$, gauname ekstremalę $l_0$.

A p i b r ė ž i m a s. Jeigu pluošto $\{l\}$ gaubiamoji turi su ekstremale $l_0$ bendrą tašką $B(b, \beta)$ ir $B(b, \beta) \neq A(a, \alpha)$, tai taškas $B(b, \beta)$ vadinamas *jungtiniu tašku*[4] taškui $A(a, \alpha)$, o reikšmė $b$ – *jungtine reikšme* reikšmei $a$, ekstremalės $l_0$ atžvilgiu.

Tarkime, taškas $B(b, \beta)$ yra jungtinis taškui $A(a, \alpha)$. Tada jis priklauso ekstremalių pluošto, išeinančio iš taško $A(a, \alpha)$, gaubiamajai $\gamma$. Kiekviename gaubiamosios taške turi būti patenkinta sąlyga

$$\frac{\partial y(x, h)}{\partial h} = 0. \tag{2.10}$$

Kadangi taškas $B(b, \beta)$ priklauso gaubiamajai $\gamma$ ir ekstremalei $l_0$, tai

$$\frac{\partial y(b, h_0)}{\partial h} = 0. \tag{2.11}$$

Taigi kiekvieną reikšmę $b$, jungtinę reikšmei $a$, galima rasti iš (2.11) lygties. Atkreipsime dėmesį į tai, kad (2.11) sąlyga yra tik būtina gaubiamosios egzistavimo sąlyga. Todėl norint įsitikinti, ar (2.11) lygties sprendiniai iš tikrųjų yra jungtinės reikšmės, reikia atlikti papildomą tyrimą. Be to, norint iš šios lygties rasti jungtinius taškus, reikia iš anksto turėti visą pluoštą ekstremalių. Todėl pateiksime kitą, tiesioginį, jungtinių taškų radimo metodą.

Kiekvienam $h \in [h_1, h_2]$ ekstremalė $l : y = \varphi(x, h)$ tenkina Oilerio lygtį

$$F_y(x, \varphi(x, h), \varphi'(x, h)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, \varphi(x, h), \varphi'(x, h)) = 0.$$

[4]Taip suformuluotas jungtinio taško apibrėžimas funkcionalui neparametrine forma yra teisingas ir funkcionalui parametrine forma.

Diferencijuodami ją parametro $h$ atžvilgiu, gausime lygtį

$$F_{yy}\varphi_h(x,h) + F_{yy'}\varphi_h'(x,h) - \frac{d}{dx}\Big(F_{y'y}\varphi_h(x,h) + F_{y'y'}\varphi_h'(x,h)\Big) = 0.$$

Imkime čia $h = h_0$ ir pažymėkime reiškinį

$$\frac{\partial\varphi(x,h_0)}{\partial h} = u(x).$$

Tada pastarąją lygtį galima perrašyti taip:

$$Su - \frac{d}{dx}\big(Ru'\big) = 0;$$

čia

$$R(x) = F_{y'y'}\big(x, \varphi(x,h_0), \varphi'(x,h_0)\big),$$

$$S(x) = F_{yy}\big(x, \varphi(x,h_0), \varphi'(x,h_0)\big) - \frac{d}{dx}F_{y'y}\big(x, \varphi(x,h_0), \varphi'(x,h_0)\big).$$

Pastaroji lygtis yra tiesinė antros eilės diferencialinė lygtis. Ji vadinama *Jakobio lygtimi.*

Tegu $u_0$ yra Jakobio lygties sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas

$$u_0|_{x=a} = 0, \quad u_0'|_{x=a} = 1.$$

Įrodysime teoremą.

2.4 **teorema.** *Tarkime, išilgai ekstremalės $l_0$ reiškinys $R \neq 0$. Tada*

1. *Jeigu reikšmė $b$ yra jungtinė reikšmei $a$ ekstremalės $l_0$ atžvilgiu, tai $b$ yra lygties $u_0(x) = 0$ sprendinys.*

2. *Jeigu $b$ yra lygties $u_0(x) = 0$ sprendinys, tai reikšmė $b$ yra jungtinė reikšmei $a$.*

$\triangleleft$ Tegu reikšmė $b$ yra jungtinė reikšmei $a$ ekstremalės $l_0$ atžvilgiu. Tada ji tenkina (2.11) lygtį, t.y.

$$\frac{\partial\varphi(b,h_0)}{\partial h} = 0.$$

Funkcijos $u_0$ ir $\partial\varphi/\partial h$ tenkina Jakobio lygtį ir tas pačias pradines sąlygas

$$u_0(a) = 0, \quad \frac{\partial\varphi(a,h_0)}{\partial h} = 0;$$

$$u_0'(a) = 1, \quad \frac{\partial\varphi'(a,h_0)}{\partial h} = 1.$$

Todėl jos sutampa, t.y.

$$u_0(x) = \frac{\partial\varphi(x,h_0)}{\partial h}$$

ir galime tvirtinti, kad $u_0(b) = 0$.

Įrodysime atvirkštinį teiginį. Tegu $u_0(b) = 0$, $b > a$. Apibrėžkime funkciją

$$\psi(x,h) = \begin{cases} \frac{\varphi(x,h)-\varphi(x,h_0)}{h-h_0}, & \text{kai } h \neq h_0; \\ \frac{\partial}{\partial h}\varphi(x,h_0) = u_0(x), & \text{kai } h = h_0. \end{cases}$$

Funkcija $\psi$ yra tolydi pagal abu kintamuosius ir turi pirmos eilės tolydžias dalines išvestines. Be to,

$$\psi(b,h_0) = u_0(b) = 0.$$

Funkcijos $\psi$ dalinė išvestinė

$$\psi_x(b,h_0) = u_0'(b) \neq 0.$$

Iš tikrųjų, jeigu tiesinės homogeninės antros eilės lygties sprendinys kokiame nors taške yra lygus nuliui kartu su savo išvestine, tai jis yra tapatingai lygus nuliui. Tačiau $u_0'(a) = 1 \neq 0$. Gauta prieštara įrodo, kad taškas $(b, h_0)$ yra lygties

$$\psi(x,h) = 0$$

sprendinys ir šios lygties $x$ galima išreikšti kaip tolydžią $h$ funkciją. Be to, kai $h \to h_0$, $x \geq b$. Todėl egzistuoja tokia tolydi funkcija $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ ($\varepsilon \to 0$, kai $\delta \to 0$), kad

$$\psi(b + \varepsilon(\delta), h_0 + \delta) = 0,$$

jeigu tik $\delta$ yra pakankamai mažas teigiamas skaičius. Remiantis funkcijos $\psi$ apibrėžimu, galime tvirtinti, kad tokioms $\delta$ reikšmėms yra teisinga lygybė

$$\varphi(b + \varepsilon(\delta), h_0 + \delta) = \varphi(b + \varepsilon(\delta), h_0).$$

Tai reiškia, kad pakankamai mažoms teigiamoms $\delta$ reikšmėms kreivės

$$y = \varphi(x, h_0 + \delta), \quad y = \varphi(x, h_0)$$

kertasi taške $B_\delta(b + \varepsilon(\delta), \varphi(b + \varepsilon(\delta), h_0 + \delta))$ ir taškas

$$B_\delta(b + \varepsilon(\delta), \varphi(b + \varepsilon(\delta), h_0 + \delta)) \to B(b, \varphi(b, h_0),$$

kai $\delta \to 0$. Vadinasi reikšmė $b$ yra jungtinė reikšmei $a$ ekstremalės $l_0$ atžvilgiu. $\triangleright$

I š v a d o s:

1. Jeigu reikšmė $b$ yra jungtinė reikšmei $a$, tai reikšmė $a$ yra jungtinė reikšmei $b$.

2. Tarkime, jungtinės reikšmės $b$, $b > a$ ir $b'$, $b' > a'$ yra mažiausios reikšmėms $a$ ir $a'$. Tada, jeigu $a' > a$, tai $b' > b$.

3. Tegu jungtinė reikšmė $b$, $b > a$ yra mažiausia reikšmei $a$. Tada $b$ yra tolydi $a$, o taip pat kitų parametrų, apibrėžiančių ekstremalę $l_0$, funkcija.

A p i b r ė ž i m a s. Sakysime, ekstremalė $l_0 : y = \varphi(x, h_0)$, $x \in [a, b]$ tenkina *Jakobio sąlygą,* jeigu

$$u_0(x) \neq 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Jeigu pastaroji nelygybė yra teisinga $\forall x \in (a, b]$, tai sakysime, kad ekstremalė $l_0$ tenkina *sustiprintą Jakobio sąlygą.*

Tegu $\{l\}$ yra ekstremalių laukas, dengiantis sritį $\Omega$. Sakysime ekstremalė $l \in \{l\}$ yra apsupta ekstremalių lauko $\{l\}$, jeigu kiekvienas jos taškas yra srities $\Omega$ vidinis taškas.

2.5 **teorema.** *Tarkime, ekstremalėje $l$ (įskaitant ir kurį nors vieną jos galą) nėra taškų, jungtinių kitam ekstremalės galui ir išilgai jos (įskaitant abu jos galus) reiškinys*

$$F_{y'y'} > 0 \quad (F_{y'y'} < 0).$$

*Tada ekstremalę $l$ galima apsupti ekstremalių lauku.*

$\lhd$ Tarkime, ekstremalė $l$ jungia taškus $A(a, \alpha)$ ir $B(b, \beta)$. Be to, tegu nei taškas $B(b, \beta)$, nei bet kuris kitas ekstremalės $l$ taškas nėra jungtinis taškui $A(a, \alpha)$ ir išilgai ekstremalės $l$ (įskaitant abu jos galus) reiškinys $F_{y'y'} > 0$. Tada egzistuoja toks ekstremalės $l$ tęsinys $l'$, jungiantis taškus $A'(a', \alpha')$ ir $B(b, \beta)$, $\alpha' < \alpha$, kad ekstremalėje $l$ (įskaitant ir tašką $B(b, \beta)$) nėra taškų jungtinių taškui $A'(a', \alpha'.)$

Iš taško $A'(a', \alpha')$ brėžiame ekstremalių pluoštą, apibrėžtą lygtimi

$$y = \varphi(x, h).$$

Čia $h$ yra ekstremalės liestinės krypties koeficientas taške $A'(a', \alpha')$, t.y.

$$\varphi'_x(\alpha', h) = h.$$

Parametro reikšmę $h = h'$ atitinka ekstremalė $l'$.

Pagal teoremos sąlygą išilgai ekstremalės $l$ išvestinė

$$\frac{\partial \varphi(x, h)}{\partial h}\Big|_{h=h'} > 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Kadangi ji yra tolydi, tai egzistuoja tokia $h'$ aplinka $[h' - \varepsilon, h' + \varepsilon]$, kad

$$\frac{\partial \varphi(x, h)}{\partial h} > 0, \quad \forall x \in [a, b], \ h \in [h' - \varepsilon, h' + \varepsilon].$$

Remiantis teorema apie diferencialinių lygčių sprendinių diferencijavimą pagal parametrą, funkcija $\varphi$ turi tolydžias dalines išvestines $\varphi_h$, $\varphi_x$ ir $\varphi_{xh}$. Todėl (žr. 2.2 skyrelį) taip apibrėžtas ekstremalių pluoštas yra ekstremalių laukas, supantis ekstremalę $l$. $\rhd$

P a s t a b a. Analogiška teorema yra teisinga ir funkcionalui parametrine forma. Čia tik vietoje sąlygos $F_{y'y'} \neq 0$ reikia pareikalauti (žr. 1.12 skyrelį), kad $F_1 \neq 0$.

## 2.4 OILERIO LYGTIES INTEGRAVIMAS

Tegu $\gamma_1$, $\gamma_2$ yra dvi glodžios kreivės plokštumoje $\mathbb{R}^2$. Iš skirtingų plokštumos taškų iki kreivių $\gamma_1, \gamma_2$ brėžiame ekstremalių lankus $l_1, l_2$, kertančius jas transversaliai. Geometrinę vietą taškų plokštumoje vadinsime $I$-hiperbole, jeigu iš kiekvieno jos taško išeinančių ekstremalių $l_1, l_2$ lankų $I$-ilgių skirtumas yra pastovus, t.y.

$$I(l_1) - I(l_2) = const.$$

Tegu $\{l_i\}$ yra visuma ekstremalių, kurių vienas galas yra $I$-hiperbolėje, o kitas kreivėje $\gamma_i$, $i = 1, 2$. Be to, tegu ekstremalių $l_i$ lankai, jungiantis $I$-hiperbolę ir kreivę $\gamma_i$, nesikerta (i = 1,2). Tada ekstremalių $l_i$ lankų $I$-ilgiai $I(l_i)$, kaip lanko galų funkcijos, turi pilną diferencialą.

Šiame skyrelyje reikalausime, kad kiekviename nagrinėjamame taške

$$F_{y'y'} \neq 0$$

ir kiekviename nagrinėjamos ekstremalės taške reiškinys

$$F(x, y, y') \neq 0.$$

Iš laisvai pasirinkto $I$-hiperbolės taško išeinančių ekstremalių $l_1$, $l_2$ lankų $I$-ilgių skirtumas yra pastovus. Todėl išilgai $I$-hiperbolės diferencialas

$$dI(l_1) - dI(l_2) = 0.$$

Kadangi ekstremalės $l_1$, $l_2$ tenkina Oilerio lygtį ir kerta kreives $\gamma_1$, $\gamma_2$ transversaliai, tai iš pastarosios sąlygos gauname, kad išilgai pasirinktos $I$-hiperbolės šakos

$$H(x, y, y_1')\,dx + p(x, y, y_1')\,dy - H(x, y, y_2')\,dx - p(x, y, y_2')\,dy = 0;$$

čia $y_1'$, $y_2'$ yra ekstremalių $l_1$, $l_2$ liestinių krypties vektoriai, jų sankirtos taške $A(x, y)$ su $I$-hiperbole. Perrašykime šią sąlygą taip:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{H(x, y, y_1') - H(x, y, y_2')}{p(x, y, y_1') - p(x, y, y_2')};$$

čia $dy/dx$ yra $I$-hiperbolės liestinės krypties vektorius taške $A(x, y)$. Vietoje $x$, $y$, $y'$ įveskime naujus kintamuosius $x, y, p$ (žr. 3.1 skyrelį). Tada gausime lygtį

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{H(x, y, p_1) - H(x, y, p_2)}{p_1 - p_2}. \tag{2.12}$$

Tarkime dabar, kad $l(\gamma_1, \gamma_2)$ yra $I$-hiperbolės lankas, einantis per fiksuotą tašką $A(x, y)$. Artinkime kreivę $\gamma_1$ prie kreivės $\gamma_2$ taip, kad ji būtų kiek norima mažoje kreivės $\gamma_2$ silpnojoje (pirmos eilės) aplinkoje. Parodysime, kad lankas $l(\gamma_1, \gamma_2)$ artėja prie ekstremalės, kuri eina per tašką $A(x, y)$ ir kerta kreivę $\gamma_1$ transversaliai. Tiksliau parodysime, kad kreivėms $\gamma_1, \gamma_2$ susiliejant, $I$-hiperbolė išsigimsta į ekstremalę.

2.6 **teorema.** *Jeigu kreivės* $\gamma_1, \gamma_2$ *susilieja, tai* $I$*-hiperbolės šaka, einanti per tašką* $A(x, y)$, *tampa ekstremale, kuri eina per tašką* $A(x, y)$ *ir kerta susiliejusias kreives* $\gamma_1$ $\gamma_2$ *transversaliai.*

◁ Artinant kreivę $\gamma_1$ į kreivę $\gamma_2$, ekstremalė $l_1$ artėja į ekstremalę $l_2$. Todėl $p_1 \to p_2$ ir (2.12) lygtis pereina į lygtį

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial p};$$

čia $p = F_{y'}(x, y, y')$, $x, y$ – taško $A(x, y)$ koordinatės, $y'$ ekstremalės $l_1$ liestinės krypties vektorius taške $A(x, y)$. Tai yra viena iš kanoninių Oilerio lygčių. Parodysime, kad yra patenkinta ir kita Oilerio lygtis.

Tegu $\{l\}$ yra pluoštas ekstremalių, kurios kerta kreivę $\gamma_1$ transversaliai. Ekstremalė $l_1$ priklauso šiam plouštui. Kiekviena ekstremalė $l \in \{l\}$ kerta kreivę $\gamma$ transversaliai. Todėl ekstremalės $l$, einančios per tašką $A(x, y)$ ir kertančios kreivę $\gamma$ transversaliai, lanko $I$-ilgio pilnas diferencialas

$$dI(l) = H\,dx + p\,dy;$$

čia $H = H(x, y, p)$, $p = F_{y'}(x, y, y')$, $y'$ yra ekstremalės $l \in \{l\}$ liestinės krypties kooeficientas taške $A(x, y)$. Remiantis būtina pilnojo diferencialo sąlyga, turime

$$\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Kadangi $H_p = -dy/dx$, tai pastarąją sąlygą galima perrašyti taip:

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Pakeitę reiškinį dešinėje šios lygties pusėje pilna išvestinę $dp/dx$, gausime Oilerio lygtį

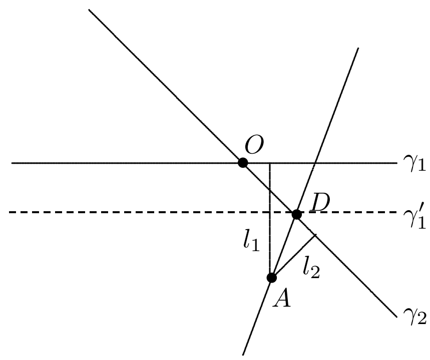
$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial H}{\partial y}.$$

Taigi funkcijos $y$ ir $p$ tenkina Hamiltono lygčių sistemą. ▷

P a v y z d y s. Tegu $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$. Išnagrinėsime kelis paprasčiausius atvejus.

1. Tarkime, kreivės $\gamma_1, \gamma_2$ išsigimsta į du taškus $O_1$, $O_2$. Tada ekstremalės yra tiesės, o $I$-hiperbolė yra viena įprastos hiperbolės šakų, kuri eina per tašką $A$ ir kurios židiniai yra $O_1$, $O_2$. Jeigu tašką $O_2 \to O_1$, tai hiperbolė išsigimsta į porą tiesių, viena iš kurių eina per taškus $O_1$ ir $A$. Pastaroji tiesė yra ekstremalė, apibrėžianti atstumą tarp taškų $O_1$ ir $A$.

2. Tarkime, $\gamma_1, \gamma_2$ yra dvi nelygiagrečios tiesės ir $A$ duotas taškas. Tegu $l_i$ yra ekstremalės lankas, kurio vienas galas yra taške $A$, o kitas tiesėje $\gamma_i$ ir $|l_i|$ yra šio lanko ilgis ($i = 1, 2$). Be to, tegu $\gamma_1'$ yra tiesė lygiagreti tiesei $\gamma_1$ ir nutolusi nuo jos atstumu $|l_1| - |l_2|$. Tada $I$-hiperbolė yra tiesė, einanti per tašką $A$ ir tiesių $\gamma_2$, $\gamma_1'$ sankirtos tašką (žr. 3.4 pav.). Jeigu tiesę $\gamma_2$ suksime apie tašką $O$ taip, kad ji susilietų su tiese $\gamma_1$, tai $I$-hiperbolė pereis į tiesę, einančią per tašką $A$, statmenai tiesei $\gamma_1$.




3.4 pav.

I š v a d a. Tarkime, kreivė $\gamma_h$ yra apibrėžta lygtimi $y = \varphi(x, h)$, o funkcija $\varphi$ yra tolydi ir turi tolydžias pirmos eilės dalines išvestines. Be to, tegu $I(x, y, \gamma_h)$ yra $I$-atstumas nuo taško $A(x, y)$ iki kreivės $\gamma_h$. Tada kiekvienai fiksuotai $c$ reikšmei

$$\frac{\partial I(x, y, \gamma_h)}{\partial h} = c$$

yra ekstremalės lygtis. Iš tikrųjų, lygtis

$$I(x, y, \gamma_{h'}) - I(x, y, \gamma_h) = c(h' - h)$$

apibrėžia $I$-hiperbolę. Jeigu $h' \to h$, tai kreivė $\gamma_{h'} \to \gamma_h$ ir $I$-hiperbolė pereina į ekstremalę, išilgai kurios

$$\frac{\partial I(x, y, \gamma_h)}{\partial h} = c.$$

Parodysime, kad Oilerio lygties sprendimas yra ekvivalentus vienos pirmos eilės dalinių išvestinių lygties sprendimui. Iš pradžių įrodysime, kad $I$-atstumas nuo taško $A(x, y)$ iki kreivės $\gamma$ tenkina vieną pirmos eilės dalinių išvestinių lygtį.

2.7 **teorema.** *Tegu $\gamma$ yra $\mathrm{C}^1$ klasės kreivė ir $I(x, y, \gamma)$ yra $I$-atstumas nuo taško $A(x, y)$ iki kreivės $\gamma$. Tada funkcija $I$ tenkina dalinių išvestinių lygtį*

$$\frac{\partial I}{\partial x} = H\Big(x, y, \frac{\partial I}{\partial y}\Big); \tag{2.13}$$

*čia funkcija $H = H(x, y, p)$ (žr. 3.1 skyrelį).*

◃ Tegu $l$ yra ekstremalė, einanti per tašką $A(x, y)$ ir kertanti kreivę $\gamma$ taške $B(u, v)$ transversaliai. Tada ekstremalės, jungiančios taškus $A(x, y)$ ir $B(u, v)$, lanko $I$-ilgio diferencialas

$$dI = H(x, y, p(x, y))\, dx + p(x, y)\, dy - H(u, v, p(u, v))\, du - p(u, v)\, dv.$$

Ekstremalė $l$ kerta kreivę $\gamma$ transversaliai. Todėl ekstremalės $l$ ir kreivės $\gamma$ sankirtos taške $B(u, v)$ reiškinys

$$H(u, v, p(u, v))\, du + p(u, v)\, dv = 0$$

ir diferencialas

$$dI = H(x, y, p(x, y))\, dx + p(x, y)\, dy.$$

Iš čia gauname, kad

$$H = \frac{\partial I}{\partial x}, \quad p = \frac{\partial I}{\partial y}.$$

Kadangi $H = H(x, y, p)$, tai funkcija $I$ tenkina lygtį

$$\frac{\partial I}{\partial x} = H\Big(x, y, \frac{\partial I}{\partial y}\Big).$$

Teorema įrodyta. $\triangleright$

Įrodysime atvirkštinį teiginį.

2.8 **teorema.** *Tegu $I = I(x, y)$ yra tolydi funkcija, turinti pirmos eilės tolydžias dalines išvestines. Jeigu funkcija $I$ tenkina (2.13) lygtį, tai fiksuotai $c$ reikšmei $I(x, y) - c$ yra $I$-atstumas nuo taško $A(x, y)$ iki kreivės $I(x, y) = c$.*

$\triangleleft$ Tegu funkcija $I$ yra (2.13) lygties sprendinys. Ši lygtis tiesiogiai nepriklauso nuo funkcijos $I$. Todėl $I(x, y) - c$ taip pat yra (2.13) lygties sprendinys. Remiantis 2.7 teorema $I$-ilgis $I(x, y, \gamma)$ nuo taško $A(x, y)$ iki kreivės $\gamma$ tenkina (2.13) lygtį. Kreivės $\gamma$ taškuose

$$I(x, y, \gamma) = I(x, y) - c = 0.$$

Tačiau (žr. pirmos eilės diferencialinių dalinių išvestinių lygčių teoriją), jeigu pirmos eilės dalinių išvestinių lygties integralai sutampa kokioje nors kreivėje, tai jie sutampa. Taigi

$$I(x, y, \gamma) = I(x, y) - c$$

ir teorema įrodyta. $\triangleright$

Dalinių išvestinių lygtis

$$\frac{\partial I}{\partial x} = H\Big(x, y, \frac{\partial I}{\partial y}\Big)$$

vadinama *Hamiltono* lygtimi. Parodysime, kad šios lygties integravimas yra ekvivalentus Oilerio lygties integravimui.

2.9 **teorema.** *Oilerio lygties sprendimas yra ekvibvalentus Hamiltono lygties sprendimui.*

$\triangleleft$ Tegu $y = \varphi(x, u, v)$ yra Oilerio lygties bendrasis sprendinys, priklausantys nuo dviejų parametrų $u, v$. Laisvai pasirenkame glodžią kreivę $\gamma$. Per kiekvieną jos taško galima nubrėžti ekstremalę, kuri kirstų $\gamma$ transversaliai. Todėl galima apibrėžti $I$-atstumą nuo laisvai pasirinkto taško $A(x, y)$ iki kreivės $\gamma$. Atstumas $I(x, y, \gamma)$ tenkina Hamiltono lygtį

$$\frac{\partial I}{\partial x} = H\Big(x, y, \frac{\partial I}{\partial y}\Big).$$

Fiksuotai $c$ reikšmei šią lygtį tenkina ir funkcija $I + c$.

Tegu $\{\gamma_h\}$ yra vienparametrinė kreivių šeima, nesudaranti transversalių lauko nei vienoje nagrinėjamos plokštumos dalyje ir $I(x, y, \gamma_h)$ yra $I$-atstumas nuo taško $A(x, y)$ iki kreivės $\gamma_h$. Pridėję konstantą $c$, gausime (2.13) lygties sprendinį $I(x, y, \gamma_h) + c$, priklausantį nuo dviejų parametrų $c$ ir $h$. Kadangi $\{\gamma_h\}$ nėra transversalių laukas, tai konstantų $c$ ir $h$ negalima pakeisti viena. Iš tikrųjų, konstanta $c$ nepriklauso nuo $h$. Todėl šias konstantas galima pakeisti viena tik tuo atveju, kai

$$I(x, y, \gamma_{h+h'}) = I(x, y, \gamma_h) + h'.$$

Tačiau tada

$$I(x, y, \gamma_{h+h'}) - I(x, y, \gamma_h) = h',$$

t.y. $I$-atstumas tarp kreivių $\gamma_{h+h'}$ ir $\gamma_h$ yra pastovus. Todėl aibė $\{\gamma_h\}$ yra transversalių šeima. Gauta prieštara įrodo, kad kostantų $c$ ir $h$ negalima sujungti į vieną.

Tarkime, yra žinomas (2.13) lygties bendras integralas $I(x, y, h)$, $h$ – laisva konstanta. Kadangi (2.13) lygtis tiesiogiai nepriklauso nuo $I$, tai jos bendrąjį integralą galima užrašyti taip:

$$I = I(x, y, h) + c.$$

Remiantis 2.8 teorema kiekvienai fiksuotai $h$ reikšmei funkcija $I(x, y, h) - d$ apibrėžia $I$-atstumą nuo taško $A(x, y)$ iki kreivės $I(x, y, h) = d$, $d$ – kostanta. Pagal 2.6 teoremos išvadą

$$\frac{\partial I}{\partial h} = c \tag{2.14}$$

yra ekstremalės lygtis. Taip apibrėžta ekstremalė priklauso nuo dviejų laisvų konstantų $h$ ir $c$. Todėl (2.14) formulė apibrėžia bendrą Oilerio lygties sprendinį. ▷

P a v y z d ž i a i:

1. Tegu $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$. Tada

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{1 - p^2}, \quad p = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

ir Hamiltono lygtį galima užrašyti taip:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

Tegu $\gamma_h$ yra tiesė

$$x \cos h + y \sin h = 0,$$

einanti per koordinačių pradžią. Tada $I$-atstumas nuo taško $A(x, y)$ iki kreivės $\gamma_h$ yra įprastas atstumas nuo taško $A(x, y)$ iki tiesės $\gamma_h$, t.y.

$$I(x, y, h) = x \cos h + y \sin h.$$

Remiantis 2.9 teorema Hamiltono lygties bendrasis integralas

$$I = x \cos h + y \sin h + c;$$

čia $h$ ir $c$ – laisvosios konstantos.

2. Tegu

$$F(x,y,y') = \frac{\sqrt{1+{y'}^2}}{v(x,y)}.$$

Tada

$$p = \frac{y'}{v\sqrt{1+{y'}^2}}, \quad H^2 + p^2 = \frac{1}{v^2}$$

ir Hamiltono lygtį galima užrašyti taip:

$$\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{v^2}.$$

Šiuo atveju $I$-atstumas yra optinis atstumas (ekstremalės, jungiančios kreivę $\gamma$ ir tašką $A(x,y)$, lanko $I$-ilgis). Konkrečiu atveju, kai

$$v(x,y) = y$$

ekstremalės yra apskritimai, kertantis $x$ ašį stačiu kampu. Jeigu $\gamma_h$ yra tiesė

$$x\cos h + y\sin h = 0,$$

tai optinis atstumas nuo taško $A(x,y)$ iki tiesės $\gamma_h$ lygus

$$I(x,y,\gamma_h) = \sqrt{x^2+y^2}\Big(h + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big),$$

o bendrasis Hamiltono lygties sprendinys

$$I = \sqrt{x^2+y^2}\Big(h + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\Big) + c.$$

# 3 SKYRIUS

# Pakankamos silpno ir stipraus ekstremumo sąlygos

## 3.1 LEŽANDRO IR VEJERŠTRASO SĄLYGOS

Tarkime, funkcija $y$, tenkinanti kraštines sąlygas

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \tag{3.1}$$

suteikia funkcionalui

$$I(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')\, dx \tag{3.2}$$

bent silpną lokalų ekstremumą.

Laisvai pasirenkame kokią nors funkciją $\eta \in \mathrm{C}_0^\infty(a, b)$. Tada funkcija $y + \varepsilon\eta$ yra kokioje nors silpnoje funkcijos $y$ aplinkoje, jeigu tik $\varepsilon$ modulis yra pakankamai mažas skaičius. Apibrėžkime realaus kintamojo funkciją

$$\Phi(\varepsilon) = I(y + \varepsilon\eta).$$

Tarkime, šią funkciją galima skleisti Teiloro eilute $\varepsilon$ laipsniais. Tada funkcijos $\Phi$ pokytis

$$\Phi(\varepsilon) - \Phi(0) = \varepsilon\Phi'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Phi''(0) + \ldots;$$

čia

$$\varepsilon\Phi'(0) = \varepsilon \int\limits_a^b (F_y\eta + F_{y'}\eta')\, dx,$$

$$\varepsilon^2\Phi''(0) = \varepsilon^2 \int\limits_a^b \left(F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}{\eta'}^2\right) dx$$

$$\vdots$$

yra pirmasis, antrasis ir t.t. funkcijos $\Phi$ diferencialai, atitinkantys argumento pokytį $\varepsilon$. Paėmę šiame skleidinyje $\varepsilon = 1$, gausime funkcionalo $I$ pokytį

$$I(y + \eta) - I(y) = \Phi'(0) + \frac{1}{2}\Phi''(0) + \ldots.$$

Reiškiniai

$$\delta I(y, \eta) = \Phi'(0) = \left[\frac{d}{d\varepsilon} I(y + \varepsilon\eta)\right]_{\varepsilon=0},$$

$$\delta I^2(y,\eta) = \Phi''(0) = \left[\frac{d^2}{d\varepsilon^2} I(y+\varepsilon\eta)\right]_{\varepsilon=0},$$

$$\vdots$$

yra vadinami pirmąja, antrąja ir t.t. funkcionalo $I$ *variacijomis*.

Pagal prielaidą funkcija $y$ suteikia funkcionalui $I$ silpnąjį lokalų ekstremumą. Todėl pirmoji variacija $\delta I(y,\eta) = 0$, o funkcionalo $I$ pokytis

$$I(y+\varepsilon\eta) - I(y) = \frac{\varepsilon^2}{2}\delta^2 I(y,\eta) + \dots .$$

Sąlyga

$$\delta^2 I(y,\eta) = \int_a^b \left(F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}{\eta'}^2\right) dx \ge 0 \quad (\le 0), \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(a,b),$$

yra būtina, kad ekstremalė $y$ suteiktų funkcionalui $I$ minimumą (maksimumą). Pastebėję, kad $2\eta\eta' = (\eta^2)'$, antrąją variaciją perrašysime taip:

$$\delta^2 I(y,\eta) = \int_a^b \left[\left(F_{yy} - \frac{d}{dx}(F_{yy'})\right)\eta^2 + F_{y'y'}{\eta'}^2\right] dx. \tag{3.3}$$

Pažymėkime $S = F_{yy} - \dfrac{d}{dx}F_{yy'}$, $R = F_{y'y'}$. Tarkime, ekstremalė $y$ suteikia (3.2) funkcionalui minimumą. Tada

$$\int_a^b \left(S\eta^2 + R{\eta'}^2\right) dx \ge 0, \quad \forall \eta \in \mathrm{C}_0^\infty(a,b)\,. \tag{3.4}$$

Įrodysime, kad koeficientas

$$R(x) = F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \ge 0,\ \forall x \in [a,b].$$

Tarkime, priešingai, kad egzistuoja taškas $\hat{x} \in [a,b]$ toks, kad $R(\hat{x}) < 0$. Tačiau tada egzistuoja taško $\hat{x}$ aplinka $(\hat{x}-\varepsilon, \hat{x}+\varepsilon)$, kurioje $R(x) < 0$.

Imkime (3.4) nelygybėje $\eta(x) = 0$, kai $x \notin (\hat{x}-\varepsilon, \hat{x}+\varepsilon)$. Tada (3.4) nelygybę galima perrašyti taip:

$$\int_{\hat{x}-\varepsilon}^{\hat{x}+\varepsilon} \left(S\eta^2 + R{\eta'}^2\right) dx \ge 0.$$

Parinkime funkciją $\eta$ taip, kad ji smarkiai osciliuotų ir jos modulis būtų pakankamai mažas. Tada[1]

$$\int_{\hat{x}-\varepsilon}^{\hat{x}+\varepsilon} \left(S\eta^2 + R{\eta'}^2\right) dx < 0.$$

Taigi tarę, kad $R(x) < 0$, gavome prieštarą. Kartu įrodėme tokį teiginį.

3.1 **teorema.** *Tegu $y$ yra (3.2) funkcionalo ekstremalė. Tada sąlyga*

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0, \quad \forall x \in [a, b], \tag{3.5}$$

*yra būtina, kad ekstremalė $y$ suteiktų (3.2) funkcionalui silpną lokalų minimumą.*

Analogiškai galima įrodyti, kad sąlyga

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \leq 0, \quad \forall x \in [a, b], \tag{3.6}$$

yra būtina, kad ekstremalė $y$ suteiktų (3.2) funkcionalui silpną lokalų maksimumą.

Šios sąlygos pirmą kartą buvo išvestos A. M. Ležandro ir yra vadinamos *Ležandro sąlygomis.*

P a s t a b a. Tegu (3.2) formulėje funkcija $y = y(x)$, $x \in [a, b]$ yra vektorinė, t.y. $y = (y_1, \dots, y_n)$. Tada 3.1 teorema išlieka teisinga. Reikia tik atitinkamai apibrėžti Lagranžo sąlygą. Lokalaus minimumo atveju ji apibrėžiama taip:

$$\sum_{i,j=1}^{n} F_{y'_i y'_j}(x, y(x), y'(x))\xi_i\xi_j \geq 0, \quad \forall x \in [a, b],\ \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Maksimumo atveju nelygybės ženklas yra priešingas.

Apibrėžkime keturių kintamųjų funkciją

$$E(x, y, p, q) = F(x, y, q) - F(x, y, p) - (q - p)F_{y'}(x, y, p).$$

Taip apibrėžta funkcija vadinama *Vejerštraso funkcija.*

3.2 **teorema.** *Jeigu visuose ekstremalės $y = y(x), x \in [a, b]$ taškuose yra teisinga nelygybė*

$$E(x, y, y', q) \geq 0, \quad (\leq 0)$$

*bet kokiai baigtinei $q$ reikšmei, tai ekstremalė $y = y(x)$ suteikia funkcionalui $I$ stiprų lokalų minimumą (maksimumą).*

[1] Ši išvada yra intuityvi. Tačiau ją galima įrodyti ir griežtai. Reikia tik pasinaudoti Frydrichso nelygybe

$$\int_a^b \eta^2(x)\, dx \leq (b-a)^2 \int_a^b {\eta'}^2(x)\, dx, \quad \forall \eta \in C_0^\infty(a, b)\,.$$

Jos įrodymą galima rasti [2] knygoje.

Šios teoremos įrodymą galima rasti [3] knygoje. Be to, ji išlieka teisinga ir tuo atveju, kai funkcija $y = y(x)$ yra vektorinė. Čia tik į $p$ ir $q$ reikia žiūrėti kaip į vektorius erdvėje $\mathbb{R}^n$, o Vejerštraso funkciją apibrėžti taip:

$$E(x, y, p, q) = F(x, y, q) - F(x, y, p) - \sum_{i=1}^{n} (q_i - p_i) F_{y_i'}(x, y, p).$$

## 3.2 JAKOBIO SĄLYGA

Šiame skyrelyje toliau nagrinėsime antrąją variaciją. Tarkime, $y$ yra funkcionalo

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,dx \tag{3.7}$$

ekstremalė, tenkinanti sąlygas:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \tag{3.8}$$

Be to, tegu ekstremalėje yra patenkinta *sustiprinta Ležandro* sąlyga:

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) > 0, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{3.9}$$

Priminsime, kad antroji funkcionalo $I$ variacija

$$\delta^2 I(y, \eta) = \int_a^b \left(S\eta^2 + R\eta'^2\right) dx, \quad S = F_{yy} - \frac{d}{dx}F_{yy'}, \quad R = F_{y'y'}.$$

Pakeiskime $\eta$ funkcija $u$ ir apibrėžkime funkcionalą

$$K(u) = \int_a^b \left(Su^2 + Ru'^2\right) dx.$$

Funkcionalą $K$ atitinka Oilerio lygtis:

$$\frac{d}{dx}\left(Ru'\right) - Su = 0. \tag{3.10}$$

Ši lygtis dar yra vadinama *Jakobio* lygtimi. Kadangi $R > 0$, tai Jakobio lygtį galima perrašyti taip:

$$u'' + pu' + qu = 0, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{3.11}$$

Tai yra antros eilės tiesinė diferencialinė lygtis. Priminsime kai kuriuos žinomus faktus iš paprastų diferencialinių lygčių teorijos (jų įrodymus galima rasti [10] knygoje). Tarkime, funkcijos $p$, $q \in \mathrm{C}[a, b]$ ir $c \in [a, b]$. Tada bet kokiems $\sigma, \sigma_1 \in \mathbb{R}$ egzistuoja vienintelis (3.11) lygties sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas

$$u(c) = \sigma, \quad u'(c) = \sigma_1.$$

Be to, šis sprendinys yra apibrėžtas visame intervale $[a, b]$. Jeigu $\widehat{x} \in (a, b)$ ir $u \not\equiv 0$ yra (3.11) lygties sprendinys, tenkinantis sąlygą $u(\widehat{x}) = 0$, tai $u'(\widehat{x}) \neq 0$. Todėl taške $x = \widehat{x}$ funkcija $u$ keičia ženklą. Jeigu $u_1$ ir $u_2$ yra kokie nors du (3.11) lygties sprendiniai ir turi bendrą šaknį, tai jie yra tiesiškai priklausomi. Tarkime, $u_1$ ir $u_2$ yra du tiesiškai nepriklausomi (3.11) lygties sprendiniai. Tada tarp bet kurių dviejų gretimų vieno sprendinio šaknų yra lygiai viena kito sprendinio šaknis.

Tarkime, funkcija $u_0$ yra (3.11) lygties sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas

$$u_0(a) = 0, \quad u_0'(a) = 1.$$

Be to, tegu $u_0(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b]$. Tada bet kuris kitas sprendinys intervale $[a, b]$ negali turėti daugiau kaip vieną šaknį. Įrodysime, kad egzistuoja toks sprendinys, kuris intervale $[a, b]$ neturi nė vienos šaknies.

Tegu $u_\mu$ yra (3.11) lygties sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas

$$u_\mu(a) = \mu, \quad u_\mu'(a) = 1;$$

čia $\mu$ – mažas teigiamas parametras. Iš bendros diferencialinių lygčių teorijos yra žinoma, kad sprendinys $u_\mu$ parametro $\mu$ atžvilgiu yra tolydi funkcija. Kai $\mu = 0$, sprendinys $u_\mu$ sutampa su $u_0$. Pagal prielaidą $u_0(b) > 0$. Akivaizdu, kad pakankamai mažoms parametro $\mu$ reikšmėms $u_\mu(b) > 0$. Be to, $u_\mu(a) > 0$. Todėl, jeigu intervale $[a, b]$ sprendinys $u_\mu$ turi šaknis, jų turi būti ne mažiau kaip dvi. Tačiau intervale $[a, b]$ sprendinys $u_\mu$ negali turėti daugiau kaip vieną šaknį. Norint tuo įsitikinti, pakanka prisiminti, kad sprendinys $u_0$ intervale $[a, b]$ turi tiktai vieną šaknį. Taigi galima rasti parametro $\mu$ reikšmę tokią, kad intervale $[a, b]$ sprendinys $u_\mu$ šaknų neturėtų.

Tarkime, $u_0$ yra (3.10) lygties sprendinys, tenkinantis pradines sąlygas

$$u_0(a) = 0, \quad u_0'(a) = 1.$$

Jeigu sprendinys $u_0(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, tai sakysime, kad ekstremalė $y$ tenkina *Jakobio* sąlygą, o jeigu $u_0(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b]$, tai sakysime, kad ekstremalė $y$ tenkina *sustiprintą Jakobio* sąlygą.

Tegu $w \in \mathrm{C}^1[a, b]$. Tada

$$(\eta^2 w)' = 2\eta\eta' w + \eta^2 w'$$

ir

$$\int_a^b (2\eta\eta' w + \eta^2 w')\, dx = 0, \quad \forall \eta \in \mathbf{C}_0^\infty(a, b).$$

Panaudoję šią integralinę tapatybę, antrąją funkcionalo $I$ variaciją perrašysime taip:

$$\delta^2 I(y, \eta) = \int_a^b \left[(S + w')\eta^2 + 2\eta\eta' w + R{\eta'}^2\right] dx.$$

Pointegralinis reiškinys laužtininiuose skliaustuose yra pilnas kvadratas

$$(S + w')\eta^2 + 2\eta\eta' w + R{\eta'}^2 = R\Big(\eta' + \frac{w}{R}\eta\Big)^2,$$

kai

$$S + w' - \frac{w^2}{R} = 0.$$

Įstatę $w = -R\dfrac{u'}{u}$, gausime lygtį

$$S - \Big(R\frac{u'}{u}\Big)' - R\frac{u'^2}{u^2} = 0,$$

kuri lengvai susiveda į (3.10) Jakobio lygtį.

Tarkime, patenkintos sustiprintos Ležandro ir Jakobio sąlygos. Tada egzistuoja (3.10) lygties sprendinys $u_1 : u_1(x) \neq 0, \ \forall x \in [a, b]$. Tegu $w = -R\dfrac{u_1'}{u_1}$. Tada antrąją funkcionalo $I$ variaciją galima perrašyti taip:

$$\delta^2 I(y, \eta) = \int\limits_a^b R\Big(\eta' + \frac{w}{R}\eta\Big)^2 dx.$$

Akivaizdu, kad

$$\delta^2 I(y, \eta) \geq 0.$$

Be to,

$$\delta^2 I(y, \eta) = 0$$

tada ir tik tada, kai

$$\eta' + \frac{w}{R}\eta = 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Ši lygtis yra tiesinė pirmos eilės lygtis. Jos sprendinys

$$\eta(x) = \eta(a) \exp\Big\{-\int\limits_a^x \frac{w(s)}{R(s)}\, ds\Big\} = 0, \quad \forall x \in [a, b],$$

nes $\eta(a) = 0$. Taigi antroji funkcionalo $I$ variacija

$$\delta^2 I(y, \eta) \geq 0$$

ir lygybė yra galima tik tuo atveju, kai $\eta = 0$. Suformuluosime įrodytą teiginį.

3.3 **teorema.** *Tarkime, ekstremalė $y$ tenkina sustiprintas Ležandro ir Jakobio sąlygas. Tada funkcionalo $I$ antroji variacija*

$$\delta^2 I(y, \eta) \geq 0$$

*ir lygybė yra galima tik tuo atveju, kai $\eta = 0$.*

## 3.3 PAKANKAMA SILPNOJO EKSTREMUMO SĄLYGA

Pagal apibrėžimą funkcija $y$ suteikia funkcionalui

$$I(y) = \int\limits_a^b F(x, y, y')\, dx \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

silpną lokalų ekstremumą, jeigu ji suteikia ekstremumą kokioje nors funkcijos $y$ silpnoje $\varepsilon$ aplinkoje, t.y. jeigu

$$I(y) \geq I(\widetilde{y}), \quad \forall \widetilde{y}: \ |y(x) - \widetilde{y}(x)| + |y'(x) - \widetilde{y}\,'(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b],$$

arba

$$I(y) \leq I(\widetilde{y}), \quad \forall \widetilde{y}: \ |y(x) - \widetilde{y}(x)| + |y'(x) - \widetilde{y}\,'(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Priminsime, kad $F = F(x, y, y')$ yra dukart tolydžiai diferencijuojama funkcija pagal visus argumentus, kai $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, o $y' \in \mathbb{R}$. Įrodysime teoremą.

3.4 **teorema.** *Jeigu funkcionalo $I$ ekstremalė $y$ tenkina sustiprintas Ležandro ir Jakobio sąlygas, tai ji suteikia funkcionalui $I$ silpną lokalų ekstremumą.*

◁ Tegu $y$ yra funkcionalo $I$ ekstremalė; taškai $(x, y(x)) \in \Omega, \quad \forall x \in [a, b]$; $\rho$ – pakankamai mažas teigiamas skaičius; $\eta \in \mathrm{C}_0^1(a, b)$ . Funkcija $y + \eta$ priklauso funkcijos $y$ silpnai $\rho$ aplinkai, jeigu

$$|\eta(x)| \leq \frac{\rho}{2}, \quad |\eta'(x)| \leq \frac{\rho}{2}.$$

Pagal Teiloro formulę

$$I(y + \eta) - I(y) = \delta I(y, \eta) + \frac{1}{2}\delta^2 I(y, \eta) + \delta;$$

čia

$$\delta I(y, \eta) = \int\limits_a^b (F_y \eta + F_{y'} \eta')\, dx,$$

$$\delta^2 I(y, \eta) = \int\limits_a^b (F_{yy}\eta^2 + 2F_{yy'}\eta\eta' + F_{y'y'}{\eta'}^2)\, dx,$$

$$\delta = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \big[(\widetilde{F}_{yy} - F_{yy})\eta^2 + 2(\widetilde{F}_{yy'} - F_{yy'})\eta\eta' + (\widetilde{F}_{y'y'} - F_{y'y'}){\eta'}^2\big]\, dx,$$

o funkcijos $\widetilde{F}_{yy}$, $\widetilde{F}_{yy'}$, $\widetilde{F}_{y'y'}$ yra atitinkamų išvestinių reikšmės tarpiniame taške

$$(x,\, y(x) + \theta_1(x)\eta(x),\, y'(x) + \theta_2(x)\eta'(x)), \quad \theta_i(x) \in [0, 1], \quad i = 1, 2.$$

Pažymėkime

$$\widetilde{F}_{yy} - F_{yy} = \varepsilon_1, \quad \widetilde{F}_{yy'} - F_{yy'} = \varepsilon_2, \quad \widetilde{F}_{y'y'} - F_{y'y'} = \varepsilon_3.$$

Kadangi $F$ yra dukart tolydžiai diferencijuojama funkcija, tai

$$|\varepsilon_1|,\ |\varepsilon_2|,\ |\varepsilon_3|\ \to 0, \quad \text{kai} \quad |\eta|,\ |\eta'|\ \to 0.$$

Laisvai pasirenkame skaičių $\varepsilon > 0$. Imkime skaičių $\rho > 0$ tiek mažą, kad

$$|\varepsilon_i| \le \varepsilon, \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Pagal teoremos sąlygą $y$ yra funkcionalo $I$ ekstremalė. Todėl

$$\delta I(y, \eta) = \int_a^b (F_y \eta + F_{y'} \eta')\, dx = 0,$$

o skirtumas

$$I(y + \eta) - I(y) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(S\eta^2 + R{\eta'}^2\right) dx + \delta,$$

$$\delta = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\varepsilon_1 \eta^2 + 2\varepsilon_2 \eta\eta' + \varepsilon_3 {\eta'}^2\right) dx.$$

Be to, yra teisingi tokie įverčiai:

$$\int_a^b \eta^2(x)\, dx \le (b-a)^2 \int_a^b {\eta'}^2(x)\, dx, \quad |2\eta\eta'| \le \eta^2 + {\eta'}^2.$$

Todėl

$$|\delta| \le \frac{1}{2} \int_a^b \left[(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|)\eta^2 + (|\varepsilon_2| + |\varepsilon_3|){\eta'}^2\right] dx \le \varepsilon \left(1 + (b-a)^2\right) \int_a^b {\eta'}^2\, dx.$$

Pagal teoremos sąlygą ekstremalė $y$ tenkina sustiprintas Ležandro ir Jakobio sąlygas. Todėl egzistuoja skaičius $k > 0 :\ R(x) - k > 0,\ \forall x \in [a, b]$, ir lygties

$$\frac{d}{dx}\left((R-k)u'\right) - Su = 0$$

sprendinys, tenkinantis sąlygas

$$u(a) = 0, \quad u'(a) = 1,$$

yra nelygus nuliui $\forall x \in (a, b]$. Jeigu 3.3 teoremos įrodyme $R$ pakeisime $R - k$, tai gausime

$$\int_a^b \left(S\eta^2 + R{\eta'}^2\right) dx \ge k \int_a^b {\eta'}^2\, dx.$$

Be to, lygybė yra galima tik tuo atveju, kai $\eta = 0$. Tačiau tada

$$I(y+\eta) - I(y) > \frac{1}{2}\Big[k - 2\varepsilon\big(1 + (b-a)^2\big)\Big] \int\limits_a^b {\eta'}^2 \, dx > 0,$$

jeigu tik skaičius $\varepsilon > 0$ yra pakankamai mažas, o $\eta \not\equiv 0$ ir tenkina nurodytas sąlygas. Taigi ekstremalė $y$ suteikia funkcionalui $I$ silpną lokalų ekstremumą. $\triangleright$

Galima įrodyti, kad Jakobio sąlyga yra būtina lokalaus ekstremumo egzistavimo sąlyga. Tiksliau yra teisunga tokia teorema.

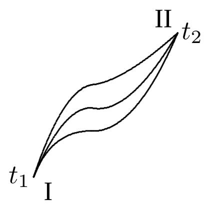
3.5 **teorema.** *Tarkime, funkcionalo $I$ ekstremalė $y$ tenkina sustiprintą Ležandro sąlygą ir funkcija $u_0(x)$ intervalo $(a, b)$ viduje turi šaknį. Tada ekstremalė $y$ nesuteikia funkcionalui $I$ silpno lokalaus ekstremumo.*

Šios teoremos įrodymą galima rasti [8] knygoje.

P a s t a b a. Jeigu yra patenkintos sustiprintos Ležandro ir Jakobio sąlygos ir, be to, Ležandro sąlyga yra patenkinta kokioje nors ekstremalės $y$ aplinkoje, tai ekstremalė $y$ suteikia funkcionalui $I$ stiprų lokalų ekstremumą. Šio teiginio įrodymą galima rasti [11] knygoje.

## 3.4 HAMILTONO PRINCIPAS

Variacinis skaičiavimas yra naudojamas fizikos ir mechanikos uždavinių matematiniams modeliams sudaryti, tiksliau išvesti lygtims, aprašančioms įvairius fizikos ir mechanikos uždavinius. Šias lygtis galima išvesti tuo pačiu variaciniu principu. Jo esmė yra tokia.




3.1 pav.

Tarkime, laiko momentu $t_1$ nagrinėjamas kūnas yra **I** padėtyje, o laiko momentu $t_2$ – **II** padėtyje. Perėjimas iš **I** padėties į **II** galimas skirtingais keliais (žr. 3.1 pav.).

Pažymėsime raidėmis $T$ ir $P$ kūno kinetinę ir potencinę energijas. Tada realiame procese, veikiant potencinėms jėgoms, integralas

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (T - P)dt$$

įgyja stacionarią reikšmę. Šis variacinis principas vadinamas *Hamiltono* principu. Kartais stacionari reikšmė yra mažiausia integralo reikšmė. Todėl Hamiltono principas dar yra vadinamas *mažiausio veiksmo* principu.

Išnagrinėsime kelis pavyzdžius.

1. Materialus taškas metamas vertikaliai aukštyn. Rasti taško trajektoriją, jeigu yra žinoma taško koordinatė ir greitis pradiniu laiko momentu. Tarkime, taško trajektoriją galima apibrėžti lygtimi $y = y(t)$. Be to, tegu pradiniu laiko momentu $t = 0$ aukštis $y(0) = 0$, o greitis $v = c$. Taško kinetinė energija

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{y}^2}{2}.$$

Taško potencinė energija

$$P = mgh = mgy.$$

Remdamiesi Hamiltono principu, sudarome funkcionalą

$$I(y) = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{m\dot{y}^2}{2} - mgy \right) dt.$$

Šį funkcionalą atitinka Oilerio lygtis

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) + mg = 0.$$

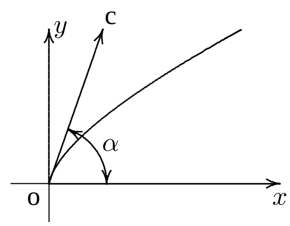
Jos bendrasis sprendinys

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2.$$

Pagal prielaidą $y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = c$. Todėl $C_2 = 0$, o $C_1 = c$. Vadinasi, vertikaliai aukštyn mesto materialaus taško trajektorija yra aprašoma lygtimi

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + ct.$$

2. Materialus taškas metamas kampu $\alpha$ (žr. 2.7 pav.) pradiniu greičiu $\mathbf{c}$. Rasti šio taško trajektoriją.




3.2 pav.

Tarkime, taško trajektoriją galima apibrėžti lygtimis

$$y = y(t), \quad x = x(t).$$

Tada taško kinetinė energija

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

o potencinė energija

$$P = mgh = mgy.$$

Remdamiesi Hamiltono principu, sudarome funkcionalą

$$I(x, y) = \int_{t_1}^{t_2} \Big( \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \Big)\, dt.$$

Šį funkcionalą atitinka Oilerio lygtys:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0, \qquad \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + mg = 0.$$

Perrašysime jas taip:

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = -g.$$

Bendrieji šių lygčių integralai:

$$x = C_1 t + C_2, \qquad y = -\frac{g}{2}t^2 + C_3 t + C_4.$$

Pagal prielaidą $x(0) = 0,\ y(0) = 0$. Todėl $C_2 = C_4 = 0$. Be to,

$$\dot{x}(0) = c\cos\alpha, \quad \dot{y}(0) = c\sin\alpha, \quad c = |\mathbf{c}|.$$

Todėl
$$C_1 = c\cos\alpha, \qquad C_2 = c\sin\alpha.$$
Taigi nagrinėjamojo taško trajektoriją galima aprašyti lygtimis:
$$x = ct\cos\alpha, \qquad y = -\frac{g}{2}t^2 + ct\sin\alpha.$$

3. Išvesti planetų judėjimo dėsnius. Tegu $M$ yra Saulės masė, $m$ – planetos masė. Pagal visuotinį traukos dėsnį abi masės veikia viena kitą jėga, kurios dydis
$$F = -\gamma\frac{Mm}{r^2}.$$
Veikiant šiai jėgai, potencinė energija
$$P = -\gamma\frac{Mm}{r}, \qquad F = -\frac{dP}{dr}.$$
Pažymėkime $\gamma M = k$ . Tada $P = -\dfrac{km}{r}$. Planetos kinetinė energija
$$T = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$
Nagrinėjant šį uždavinį, patogu įvesti polines koordinates:
$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$
Polinėse koordinatėse
$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$
Remdamiesi Hamiltono principu, sudarome funkcionalą
$$I(r,\varphi) = \int\limits_{t_1}^{t_2}\Big[\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{km}{r}\Big]\,dt.$$
Šį funkcionalą atitinka Oilerio lygtys:
$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) + \frac{km}{r^2} - mr\dot{\varphi}^2 = 0, \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0.$$
Antrosios lygties bendrasis integralas
$$r^2\dot{\varphi} = C.$$
Rasime pirmosios lygties bendrąjį integralą. Padauginę pirmąją lygtį iš $\dot{r}$, o antrąją iš $\dot{\varphi}$, perrašysime jas taip:
$$\dot{r}\ddot{r} - r\dot{r}\dot{\varphi}^2 + \frac{k}{r^2}\dot{r} = 0.$$
$$2r\dot{r}\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} = 0.$$

Sudėję šias lygtys gausime,

$$\dot{r}\ddot{r} + r\dot{r}\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + \frac{k}{r^2}\dot{r} = 0.$$

Pastebėsime, kad kairioji pastarosios lygties pusė yra pilnasis diferencialas. Todėl ją galima perrašyti taip:

$$\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{k}{r}\Big] = 0.$$

Suintegravę šią lygtį, gausime antrąjį Oilerio lygčių integralą

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{k}{r} = C_1.$$

Suintegravę pirmąjį integralą nuo $t_1$ iki $t_2$, gausime

$$\frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} r^2\dot{\varphi}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} r^2\,d\varphi = \frac{1}{2}C(t_2 - t_1).$$

Tai yra antrasis Keplerio dėsnis. Jis teigia, kad planetos skrieja aplink Saulę taip, kad spindulys, jungiantis planetą su Saule, per vienodą laiko tarpą apibrėžią vienodą plotą.

Išreiškę iš pirmojo integralo $\dot{\varphi}$ ir įstatę į antrąjį, gausime

$$\frac{1}{2}\Big(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\Big) - \frac{k}{r} = C_1.$$

Perrašysime šią lygtį taip:

$$\frac{dr}{\sqrt{2C_1 + \frac{2k}{r} - \frac{C^2}{r^2}}} = dt = \frac{r^2}{C}d\varphi.$$

Šios lygties bendrasis integralas

$$\arccos\Big\{\frac{C^2 - kr}{r\sqrt{k^2 + 2C_1C^2}}\Big\} = \varphi - C_2.$$

Perrašysime jį taip:

$$r = \frac{C^2}{k + \sqrt{k^2 + 2C_1C^2}\cos(\varphi - C_2)}.$$

Tai yra elipsės lygtis polinėse koordinatėse. Kai $C_2 = 0$, gausime, kad elipsės ašis yra tiesėje $\varphi = 0$. Pažymėkime

$$p = \frac{C^2}{k}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + 2\frac{C_1C^2}{k^2}}.$$

Tada elipsės lygtį galima užrašyti taip:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Tai yra pirmasis Keplerio dėsnis. Jis teigia, kad planeta skrieja aplink Saulę elipse, kurios viename iš židinių yra Saulė.

Elipsės pusašės

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = -\frac{k}{2C_1}, \quad C_1 < 0, \quad b = \sqrt{pa} = \frac{C}{\sqrt{-2C_1}}.$$

Tegu $T$ yra laikas, per kurį planeta apskrieja aplink Saulę. Tada elipsės plotas

$$\pi ab = \frac{1}{2}CT.$$

Iš šių formulių lengvai galima išvesti, kad

$$T^2 = 4\pi^2 a^3 \frac{1}{k}.$$

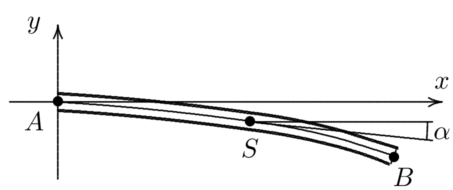
Tai yra trečiasis Keplerio dėsnis. Jis teigia, kad laiko kvadratas, per kurį planeta apskrieja aplink Saulę, yra proporcingas didžiosios pusašės kubui.

4. Strypas $AB$, ilgio $l$, yra įtvirtintas gale $A$. Kitas jo galas $B$ yra laisvas ir prie jo pritvirtintas svoris masės $m$. Nustatyti strypo pusiausvyros forma, nekreipiant dėmesio į jo paties svorį.

Tarkime, $x$ ašis yra horizontali tiesė, einanti per tašką $A$. Laisvai pasirenkame tašką $S \in AB$. Pažymėkime raide $s$ lanko $AS$ ilgį. Tada sunkio jėgu potencinė energija

$$P_{sj} = mgh = \int_0^l mg \sin\alpha \, ds;$$

čia $h$ yra atstumas nuo taško $B$ iki $x$ ašies, o $\alpha$ – kampas tarp $x$ ašies ir stypo liestinės taške $S$ (žr. 2.8 pav.).




3.3 pav.

Tarkime, kampas $\alpha$ yra parametro $s$ funkcija, t.y. $\alpha = \alpha(s)$. Tada strypo tamprumo jėgų potencinė energija

$$P_{tj} = \int_0^l J\alpha'^2(s) \, ds;$$

čia $\alpha' = d\alpha/ds$ – strypo kreivis, $J$ – tamprumo modulis. Todėl bendra strypo potencinė energija

$$P = \int_0^l \left(J\alpha'^2 + mg\sin\alpha\right) ds$$

Tarkime, funkcija $\alpha = \alpha(s), s \in [0, l]$, aprašo realų strypo išlinkimą. Tada ji turi tenkinti Oilerio lygtį

$$2J\alpha'' - mg\cos\alpha = 0.$$

Be to, įtvirtintame strypo gale $A$ turi būti patenkinta kraštinė sąlyga $\alpha(0) = \alpha_0$, o laisvame gale transversalumo sąlyga $\alpha'(l) = 0$.

Tarkime, strypas yra mažai išlinkęs (t.y. artimas $x$ ašei) ir funkcija $y = y(x), x \in [0, b]$, aprašo jo išlinkimą. Tada

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} \approx \alpha.$$

Dėl tos pačios priežasties

$$\frac{d\alpha}{ds} \approx \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{d}{ds}\Big(\frac{d^2y}{dx^2}\Big) \approx \frac{d^3y}{dx^3},$$

$$\cos\alpha \approx 1, \quad l = \int\limits_0^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx \approx b.$$

Be to, tegu $\alpha_0 = 0$. Tada Oilerio lygtį ir kraštines sąlygas galima užrašyti taip:

$$2J\frac{d^3y}{dx^3} - mg = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(b) = 0.$$

Šios Oilerio lygties bendrasis sprendinys

$$y = \frac{mg}{12J}x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

Iš kraštinių sąlygų randame

$$C_1 = -\frac{mgb}{4J}, \quad C_2 = C_3 = 0.$$

Taigi mažai išlenkto strypo pusiausvyros padėtį aprašo funkcija

$$y = \frac{mg}{12J}(x^3 - 3lx^2).$$

1. Rasti funkcionalo $I$ ekstremales:

   (a) $I(y) = \int\limits_0^1 \left(xy' + {y'}^2\right)\,dx$,

   (b) $I(y) = \int\limits_0^1 \left({y'}^2 + 12xy\right)\,dx$,

   (c) $I(y) = \int\limits_0^1 \left({y'}^2 + y^2 - 2y\sin x\right)\,dx$,

   (d) $I(y) = \int\limits_0^1 \left(y^2 + 2xyy'\right)\,dx$,

   (e) $I(y) = \int\limits_0^1 \sqrt{1+{y'}^2}\,dx$,

   (f) $I(y) = \int\limits_0^1 x^{-1}\sqrt{1+{y'}^2}\,dx$,

   (g) $I(y,z) = \int\limits_0^1 ({y'}^2 + {z'}^2 + 2yz)\,dx$,

   (h) $I(y,z) = \int\limits_0^1 ({y'}^2 + 2yz' + {z'}^2 + 2zy')\,dx$,

   (i) $I(y) = \int\limits_0^1 (1 + {y''}^2)\,dx, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y(1) = 1, y'(1) = 1,$

   (j) $I(y) = \int\limits_{-1}^1 (\frac{1}{2}{y''}^2 + y)\,dx$,
   $y(-1) = 0, y'(-1) = 0, y(1) = 0, y'(1) = 0,$

   (k) $I(y) = \int\limits_0^1 ({y'''}^2 + y^2 - 2yx^3)\,dx$.

2. Įrodykite, kad aibėje tolydžiai diferencijuojamų funkcijų, tenkinančių kraštines sąlygas $y(0) = 0$, $y(2) = 1$, nėra tokios, kuri suteiktų silpną lokalų minimumą funkcionalui $I(y) = \int\limits_0^2 {y'}^2(1-y')^2\,dx$. Tačiau aibėje dalimis glodžių funkcijų, tenkinančių tas pačias kraštines sąlygas, yra tokia, kuri suteikia stiprų lokalų minimumą.

3. Aibėje kreivių, kurias vienareikšmiškai galima projektuoti į $x$ ašį ir kurios jungia du fiksuotus taškus, rasti tą, kurią sukdami apie $x$ ašį gautume mažiausio ploto paviršių.

4. Tarkime, taškai $a$ ir $b$ gali laisvai judėti kreivėmis $y = \alpha(x)$ ir $y = \beta(x)$, o funkcionalas $I(y) = \int\limits_a^b \varphi(x,y)\sqrt{1+{y'}^2}\,dx$. Parašyti transversalumo sąlygas taškuose $a$ ir $b$.

5. Tegu $I(y) = \int\limits_a^b y'^2(1-y')^2\,dx$. Rasti dalimis glodžias ekstremales.

6. Tegu $I(y) = \int\limits_a^b (y'^4 - 6y'^2)\,dx, \quad y(0) = 0, y(b) = \beta$. Rasti dalimis glodžias ekstremales.

7. Patikrinti, ar funkcionalas $I(y) = \int\limits_0^b (y'^2 - y^2)\,dx, \quad y(0) = 0, y(b) = \beta$, tenkina Jakobio sąlygą.

8. Patikrinti, ar funkcionalas $I(y) = \int\limits_0^b (y'^2 + y^2 + x^2)\,dx, \quad y(0) = 0, y(b) = \beta$, tenkina Jakobio sąlygą.

9. Rasti izoperimetrinio uždavinio ekstremales:

   (a) $I(y) = \int\limits_a^b y'^2\,dx, \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta$, kai $\int\limits_a^b y\,dx = S$;

   (b) $I(y) = \int\limits_a^b y\,dx, \quad y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta$, kai $\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$;

   (c) $I(y) = \int\limits_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx,\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta$,

   kai $\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$.

1. (a) $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + C_1x + C_2$,
   (b) $y = x^3 + C_1x + C_2$,
   (c) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \dfrac{1}{2}\sin x$,
   (d) integralas nepriklauso nuo integravimo kelio,
   (e) $y = C_1x + C_2$,
   (f) $x^2 + (y - C_1)^2 = C_2^2$,
   (g) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$,
   $z = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3\cos x - C_4\sin x$,
   (h) $y = C_1x + C_2, z = C_3x + C_4$,
   (i) $y = x$,
   (j) $y = -\dfrac{1}{24}(x^2 - 1)^2$,
   (k) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$
   $+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_5\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_6\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x^3$.

2. N u r o d y m a s. Ištirti ekstremales $y = x/2$ ir $y = \begin{cases} x, & x \in [0,1]; \\ 1, & x \in [1,2]. \end{cases}$

3. $y = C_1\mathrm{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$ – grandininė kreivė. Sukant ją apie $x$ ašį, gaunamas paviršius, vadinamas katenoidu. Priklausomai nuo taškų išsidėstymo plokštumoje gali egzistuoti vienas sprendinys, du arba nė vieno.

4. $1 + \alpha'(a)y'(a) = 0, \quad 1 + \beta'(b)y'(b) = 0.$

5. Ekstremalės yra laužtinės linijos, kurių visos dalys priklauso tiesių $y = C_1$ ir $y = x + C_2$ šeimoms. ę

6. Ekstremalės yra laužtinės linijos, kurios jungia du fiksuotus taškus, ir kurių visos dalys yra atkarpos su krypties koeficientais $\sqrt{3}$ ir $-\sqrt{3}$.

7. Jeigu $0 < b < \pi$, tai Jakobio sąlyga yra patenkinta. Jeigu $b \geq \pi$, tai Jakobio sąlyga nėra patenkinta.

8. Jakobio sąlyga yra patenkinta $\forall b$.

9. (a) $y = \lambda x^2 + C_1x + C_2$; konstantos $C_1, C_2$ ir $\lambda$ randamos iš sąlygų: $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$ ir $\int\limits_a^b y\,dx = S$;
   (b) ekstremalės yra apskritimai $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2 = \lambda^2$; konstantos $C_1, C_2$ ir $\lambda$ randamos iš sąlygų: $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$ ir $\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \lambda$;
   (c) ekstremalės yra grandininės kreivės $y + \lambda = C_1\,\mathrm{ch}\,\frac{x-C_2}{C_1}$; konstantos $C_1$, $C_2$ ir $\lambda$ randamos iš sąlygų: $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$ ir $\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = \lambda$.

# LITERATŪRA


[1] A. Ambrazevičius. Matematinės fizikos lygtys. 1 D. – Vilnius: "Aldorija", 1996. – 380 p.

[2] A. Ambrazevičius, A. Domarkas. Matematinės fizikos lygtys. 2 D. – Vilnius: "Aldorija", 1999. – 384 p.

[3] N. I. Axiezeris. Variacinio skaičiavimo paskaitos. – M.: 1954. – 248 p. – Rus.

[4] R.C. Bassanezi, U. Massarri. The Dirichlet problem for the minimal surface equations in non-regular domains. – Ann. Univ. Ferrara, 1978, Sez.7, 24, p. 181–189.

[5] E. Giusti. Minimalūs paviršiai ir baigtinės variacijos funkcijos. – M.: Mir, 1989. – 240 p. – Rus.

[6] S. Fučikas, J. Nečas, V. Součekas. Įvadas į variacinį skaičiavimą (Einfürung in die Variationsrechnung). – Leipzig.: 1977. – 176 p. – Vok.

[7] H. Jenkins, J. Serrin. The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higer dimensions. J. reine und angew. math., 1968, 229, p. 170 – 187.

[8] M. A. Lavrentjevas, L. A. Liusternikas. Variacinio skaičiavimo kursas. – M., L.: 1950. – 296 p. – Rus.

[9] M. Miranda. Dirichlet problem with $L_1$ data for the non-homogeneous minimal surface equation. – Indiana Univ.Math.J, 1974, 24, N3, p. 227 – 241.

[10] M. M. Smirnovas. Aukštosios matematikos kursas. – M.: Nauka, 1981. – T.2 –

[11] M. M. Smirnovas Aukštosios matematikos kursas. M.: Nauka, 1981. – T.4. – D.1-2. – 552 p. – Rus.

[12] N.N. Uralceva Netiesiniai kraštiniai uždaviniai minimalių paviršių lygtims. – V.A. Steklovo vardo mat. instituto darbai, 1971, 116, p. 217 – 226.

[13] N.N. Uralceva Kapiliarinių uždavinių išsprendžiamumas. – Len. valst. universitetas, 1973, 19, p. 54 – 64.

[14] N.N. Uralceva Kapiliarinių uždavinių išsprendžiamumas. 2. – Len. valst. universitetas, 1975, 1, p. 143 – 149.