TIKIMYBIŲ TEORIJOS IR STATISTIKOS PAGRINDAI

KOMBINATORIKA

Uždaviniai, kur iš baigtinio elementų skaičiaus reikia sudarinėti įvairias kombinacijas ir rasti visų pagal tam tikrą taisyklę sudarytų kombinacijų skaičių, vadinami ***kombinatoriniais***, o juos nagrinėjančią matematikos šaką – *kombinatorika*.

Pavyzdžiai

1. Keliais būdais galime viena šalia kitos sustatyti lentynoje tris skirtingas knygas?

Sprendimas

Pažymėkime knygas raidėmis A, B ir C. Knygų išdėstymą galima pavaizduoti lentele:

Knyga pirmoje vietoje	Knyga antroje vietoje	Knyga trečioje vietoje	Išdėstymo būdai
A	B	C	ABC
	C	B	ACB
B	A	C	BAC
	C	A	BCA
C	A	B	CAB
	B	A	CBA

Iš lentelės matome, kad tris skirtingas knygas lentynoje galima išdėstyti šešiais skirtingais būdais.

2. Futbolo pirmenybėse dalyvauja 12 komandų. Keliais skirtingais būdais jos gali užimti pirmąsias dvi vietas.

Sprendimas

Pirmąją vietą gali užimti viena iš 12 komandų. Kiekvienu iš šių 12 atvejų yra 11 kandidatų į antrąją vietą. Taigi, pirmosios dvi vietos gali būti užimtos $12 \cdot 11\ 5\ 132$ būdais.

3. Mama sūnui gimimo dienos proga pažadėjo nupirkti skaičiuoklį arba laikrodį. Parduotuvėje buvo 5 rūšių skaičiuoklių ir 4 rūšių laikrodžių. Keliais būdais sūnus gali pasirinkti dovaną?

Sprendimas

Skaičiuoklį galima pasirinkti 5 būdais, o laikrodį – 4. Skaičiuoklį arba laikrodį galima pasirinkti $5+4\ 5\ 9$ būdais.

4. Grupėje 20 studentų. Reikia išrinkti seniūną ir jo pavaduotoją. Keliais būdais tai galima atlikti?

Sprendimas

Seniūnu gali būti išrinktas kiekvienas iš 20 studentų . Kiekvienam išrinktam seniūnui jo pavaduotojas gali būti renkamas iš 19 likusių studentų. Taigi, seniūną ir jo pavaduotoją galima išrinkti $20 \cdot 19 = 380$ būdų.

1. Pagrindinės kombinatorikos taisyklės

1. ***Sudėties taisyklė***. Jei kokį nors elementą A galima parinkti m skirtingų būdų, o elementą B – k skirtingų būdų, tai elementą A arba elementą B galima parinkti m+k skirtingų būdų.

Pavyzdys
Dėžėje yra 5 raudoni ir 24 balti rutuliai. Keliais būdais galima pasirinkti vieną rutulį?
Sprendimas
Dėžėje yra 5+24 5 29 rutuliai. Taigi, vieną rutulį galima pasirinkti 29 būdais.

2. ***Daugybos taisyklė***. Jei kokį nors elementą A galima parinkti m skirtingų būdų, o elementą B – k skirtingų būdų, tai elementų A ir B porą galima parinkti $m \cdot k$ skirtingais būdais.

Pavyzdys
Spaudos kioske yra 5 rūšių vokai be pašto ženklų ir 4 rūšių pašto ženklai. Keliais būdais galima pasirinkti voką su pašto ženklu?
Sprendimas
Voką galima pasirinkti 6 būdais, o pašto ženklą – 4 būdais. Vadinasi, voką su pašto ženklu galima pasirinkti $6 \cdot 4 = 24$ būdais.

2. Junginiai

Sakykime, turime tam tikros aibės n elementų. Suskirstykime juos į grupes pagal tam tikrą požymį po k elementų. Tokios grupės vadinamos junginiais.

Gretiniai. <u>*Gretiniais*</u> iš n elementų po k elementų vadinami tokie junginiai, kurių kiekvienas turi k elementų, pasirinktų iš n elementų, ir kurie vienas nuo kito skiriasi arba elementais, arba jų išdėstymo tvarka.

Gretinių iš n elementų po k skaičius žymimas A_n^k.

Apskaičiuosime visų galimų gretinių iš n elementų po k skaičių.

Pirmąjį elementą galima parinkti n būdų. Iš likusių n-1 elemento antrąjį elementą galima parinkti n-1 būdu. Trečiąjį elementą galima parinkti n-2 būdais. Paskutinįjį k-ąjį elementą reikia parinkti iš likusių n-(k-1) 5 n-k+1 elementų. Tai galima padaryti n-k+1 būdų. Taigi, pagal kombinatorikos daugybos taisyklę, turime:

$$\boxed{A_n^k = \overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}}$$

Formulės dešiniąją pusę padauginę ir padalinę iš $(n-k)!$, gauname:

$$A_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Vadinasi,

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}.$$

Pavyzdžiai
1. Sudarykite visus galimus gretinius iš elementų a, b ir c.
Sprendimas
Sudarome visus galimus junginius iš 3 elementų po 2, kurie vienas nuo kito skiriasi ir elementais ir jų išdėstymo tvarka: ab, ba, ac, ca, bc, cb. Jų bus $A_3^2 = 3 \cdot 2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1!} = 6.$

2. Krepšinio čempionate dalyvauja 8 komandos. Kovojama dėl aukso, sidabro ir bronzos medalių. Keliais būdais medaliai gali būti paskirstyti tarp komandų?

Sprendimas

Medalininkų trejetas vienas nuo kito skiriasi ir sudėtimi ir jų išdėstymo tvarka, todėl reikia skaičiuoti gretinius iš 8 elementų po 3:

6 7 8

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Šį uždavinį galima spręsti ir naudojantis kombinatorikos daugybos taisykle.

3. Kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 0, 1, 2, 3, 4, kad kiekviename skaičiuje skaitmenys būtų skirtingi?

Sprendimas

Iš 5 skaitmenų po 3 galima sudaryti A_5^3 skaičių. Iš jų reikia pašalinti tuos skaičius, kurių pirmasis skaitmuo yra 0. Tokių skaičių yra A_4^2. Vadinasi triženklių skaičių yra:

$$A_5^3 - A_4^2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 60 - 12 = 48.$$

4. Išspręskite lygtį $A_n^5 = 30A_{n-2}^4$.

Sprendimas

Pritaikę gretinių skaičiaus formulę, gausime:

n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) 5 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5). A_{n-2}^4 turi prasmę, kai $n - 2 \geq 4$, t.y. $n \geq 6$. Kai $n \geq 6$, tai $(n-2)(n-3)(n-4) \neq 0$ ir iš šio reiškinio galimą padalinti duotą lygtį: $n(n-1) = 30(n-5)$, $n^2 - 31n + 150 = 0$; $n_1 = 6, n_2 = 25$.

Kėliniai. Gretiniai iš n elementų po n vadinami ***<u>kėliniais</u>***. Kėliniai vienas nuo kito skiriasi tik elementų išdėstymo tvarka. Visų galimų kėlinių iš n elementų skaičius žymimas P_n.

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!.$$

Vadinasi,

$$\boxed{P_n = n!}.$$

Pavyzdžiai

1. Sudarykite visus galimus kėlinius iš elementų a, b ir c.

Sprendimas

Sudarome visus galimus junginius po 3 elementus, kurie vienas nuo kito skiriasi tik eilės tvarka: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Šių kėlinių skaičius $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

2. Kiek skirtingų penkiaženklių skaičių, nesidalijančių iš 5 ir neturinčių vienodų skaitmenų, galima sudaryti iš skaitmenų 1,2,3,4,5?

Sprendimas

Iš penkių skirtingų skaitmenų galima sudaryti P_5 penkiaženklių skaičių. Kadangi skaičiai neturi dalytis iš 5, tai paskutinis skaitmuo negali būti 5. Jeigu paskutinis skaitmuo būtų 5, tai likusieji 4 skaitmenys sudarytų P_4 keturženklius skaičius. Vadinasi, tokių skaičių yra : $P_5 - P_4 = 120 - 24 = 96$.

3. 10 knygų – 7 skirtingų autorių ir 3 vieno autoriaus – sustatytos vienoje knygų lentynoje. Kiek yra skirtingų būdų į lentyną jas sustatyti taip, kad to paties autoriaus knygos būtų greta?

Sprendimas

To paties autoriaus 3 knygas laikykime viena knyga. Tada turėsime 8 skirtingų autorių knygas, kurioms sustatyti į lentyną yra P_8 būdų. Tris to paties autoriaus knygas galima sustatyti P_3 būdais. Pagal daugybos taisyklę knygoms į lentyną sustatyti iš viso yra $P_8 \cdot P_3 = 8! \cdot 3!$ būdų.

4. Išspręskite lygtį $\frac{P_{n+2}}{P_n} = 72$.

Sprendimas

$$\frac{(n+2)!}{n!} = 72, \quad \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = 72, \quad (n+2)(n+1) = 72, \quad n^2 + 3n - 70 = 0;$$

$n_1 = -10$ (netinka), $n_2 = 7$.

Deriniai. Gretiniai, kurie vienas nuo kito skiriasi bent vienu elementu, vadinami ***deriniais***. Visų galimų derinių iš n elementų po k skaičius žymimas C_n^k.

Iš kiekvieno derinio, perstatant jo elementus, galima gauti $P_k = k!$ kėlinių, todėl

$$C_n^k \cdot P_k = A_n^k, \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}.$$ Taigi,

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}} \text{ arba } \boxed{C_n^k = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}}{k!}}.$$

Derinių skaičiavimui naudinga ir tokia formulė:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k \text{ arba } \boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}.$$

Pavyzdžiai

1. Sudarykite visus galimus derinius iš 4 elementų a, b, c ir d po 2 elementus.

Sprendimas

Sudarome visus galimus junginius iš 4 elementų po 2, kurie vienas nuo kito skiriasi bent vienu elementu: ab, ac, ad, bc, bd, cd. Gautų derinių skaičius $C_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!} = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1} = 6$.

2. Keliais būdais galima išrinkti 3 žmonių komisiją iš 10 žmonių?

Sprendimas

Tvarka, kuria renkami komisijos nariai, nesvarbi. Vadinasi yra tiek būdų išrinkti komisiją, kiek yra derinių iš 10 elementų po 3: $C_{10}^3 = \frac{\overbrace{10\cdot9\cdot8}}{3\cdot2\cdot1} = 120.$

3. Krepšinio komandoje yra 12 žaidėjų. Keliais būdais komandos treneris gali parinkti startinį penketuką?

Sprendimas

Eilės tvarka, kuria treneris išvardys 5 žaidėjus, nesvarbi. Vadinasi, reikia skaičiuoti derinius iš 12 elementų po 5: $C_{12}^5 = \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2} = 11\cdot9\cdot8 = 792$.

4. Išspręskite nelygybę $C_{13}^x < C_{13}^{x+2}$.

Sprendimas

$$\frac{13!}{(13-x)!x!} < \frac{13!}{(13-x-2)!(x+2)!}, \quad \frac{1}{(13-x)(12-x)(11-x)!x!} < \frac{1}{(11-x)!(x+2)(x+1)x!}.$$

C_{13}^{x+2} turi prasmę, kai $13 \geq x+2$, t.y. $x \leq 11$, o C_{13}^{x} turi prasmę, kai $x > 0$. Taigi, $0 < x \leq 11$.

Gauname: (x+2)(x+1)<(13-x)(12-x), 28x<156, x<5,6. Kadangi x turi tenkinti apibrėžimo sritį, tai nelygybės sprendiniais bus: 1;2;3;4;5.

Pratimai

1. Viename krepšelyje yra 10 obuolių, kitame 6 kriaušės. Keliais būdais galima pasirinkti vieną vaisių? Ats.: 16.
2. Berniukas turi 12 raudonų balionų, 10 žalių ir 8 mėlynus. Vieną balioną nori padovanoti draugui. Keliais būdais berniukas gali parinkti dovaną? Ats.: 30.
3. Andrius turi 20 pašto ženklų, Jonas 40% daugiau negu Andrius, o Petras 50% daugiau negu Jonas. Berniukai nutarė vieną ženklą parduoti. Keliais būdais jie gali išrinkti pardavimui skiriamą ženklą? Ats.: 90.
4. Duoti skaitmenys 1,2,3,4. Kiek iš jų galima sudaryti dviženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis? Ats.: 12.
5. Kiek skirtingų triženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš skaitmenų 0,1,2,3,4? `Ats.: 48.
6. Kiek skirtingų keturženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis ir dalių iš 5 galima sudaryti iš skaitmenų 1,2,3,5? Ats.: 6.
7. Grupėje yra 25 moksleiviai. Reikia išrinkti seniūną ir jo pavaduotoją. Kiek gali būti skirtingų rinkimų rezultatų? Ats.: 600.
8. Kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1,2,3,4,5 jų nekartojant? Ats.: 60.
9. Pirmadienio tvarkaraštyje yra 6 skirtingų dalykų paskaitos. Kiek galima sudaryti skirtingų tos dienos tvarkaraščių? Ats.: 720.
10. Futbolo pirmenybėse dalyvauja 16 komandų. Kiek yra būdų joms pasiskirstyti pirmąsias 3 vietas? Ats.: 3360.
11. Iš Vilniaus į Palangą norime nuvykti per Kauną. Iš Vilniaus į Kauną galima nuvykti traukiniu arba autobusu, o iš Kauno į Palangą – traukiniu, autobusu, laivu arba lėktuvu. Keliais skirtingais būdais galime nuvykti iš Vilniaus į Palangą? Ats.: 8.
12. 25 abiturientai apsikeitė nuotraukomis. Kiekvienas padovanojo savo nuotrauką kiekvienam klasės draugui. Kiek buvo padovanota nuotraukų? Ats.: 600.
13. 20 moksleivių iš ryto pasisveikino paspausdami vienas kitam ranką. Kiek buvo rankų paspaudimų? Ats.:190.
14. Keliais būdais galima sudaryti trispalvę vėliavą, turint trijų skirtingų spalvų audinius, jei visos spalvos turi būti skirtingos? Ats.: 6.
15. Kiek lyginių 4-ženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galima sudaryti iš skaitmenų 1,3,5,7,8? Ats.: 24.
16. Kiek skirtingų triženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 0,1,2,3 jų nekartojant? Ats.:18.
17. Kiek nelyginių keturženklių skaičių su skirtingais skaitmenimis galime sudaryti iš skaitmenų 1,8,9,4? Ats.: 12.
18. Ant 10 kortelių surašyti skaičiai 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Imamos 4 kortelės ir iš jų sudaromas 4-ženklis skaičius. Kiek 4-ženklių skaičių tokiu būdu galima sudaryti? Ats.: 4536.
19. Kiek galima sudaryti skirtingų penkiaženklių skaičių iš skaitmenų 0,1,2,3,4 jų nekartojant? Ats.: 96.
20. Į ekskursiją vyksta 10 moksleivių. Keliais būdais galima sudaryti ekskursantų sąrašą, jei tarp jų nėra bendrapavardžių? Ats.: 3628800.
21. Keliais būdais galima suole susodinti 7 moksleivius, kad du iš jų Jonas ir Andrius sėdėtų greta? Ats: 1440.

22. Knygų lentynoje yra 5 algebros ir 3 geometrijos vadovėliai. Keliais būdais jas galima sustatyti į eilę, kad vieno dalyko knygos būtų greta? Ats.; 1440.

23. Kiek įstrižainių turi iškilasis šešiakampis? Ats.: 9.

24. Jokios trys iškilojo dvylikakampio įstrižainės nesikerta viename taške. Raskite jo įstrižainių susikirtimo taškų skaičių. Ats.: 495.

25. Šaškių turnyre dalyvauja 12 moksleivių. Kiekvienas sužais su kiekvienu po 1 partiją. Kiek bus sužaista partijų? Ats.: 66.

26. Kiek įstrižainių turi iškilasis 10-kampis? Ats.: 35.

27. Dėžėje yra 20 detalių, iš kurių 3 – nestandartinės. Paimtos 5 detalės. Keliais atvejais tarp paimtųjų yra bent viena nestandartinė detalė? Ats.: 9316.

28. Keliais būdais galima sudaryti startinį ledo ritulio komandos šešetuką iš 9 puolėjų, 5 gynėjų ir3 vartininkų, jei į komandos sudėtį turi būti įtraukti 3 puolėjai, 2 gynėjai ir 1 vartininkas? Ats.: 2520.

29. Krepšinio čempionate dalyvauja 12 komandų. Kovojama dėl aukso, sidabro ir bronzos medalių. Keliais būdais medaliai gali būti paskirstyti tarp komandų? Ats.: 1320.

30. Treniruotes lanko 12 krepšininkų. Keliais būdas gali būti sudarytas pagrindinis penketukas? Ats.: 792.

31. Keliais būdais galima išdėstyti šachmatų lentoje 8 bokštus taip, kad vienas kito jie negalėtų kirsti? Ats.: 40320.

32. Kiek lyginių keturženklių skaičių galima parašyti skaitmenimis 2,3,5,7 jų nekartojant? Ats.: 6.

33. Kiek penkiaženklių skaičių, dalių iš 5, galima parašyti skaitmenimis 0,1,2,3,5 jų nekartojant? Ats.: 42.

34. 6 keleiviai sėda į traukinį, kuris turi 3 vagonus. Kiek skirtingų būdų gali būti jiems pasiskirstant vagonuose? Ats.: 729.

35. Keliais būdais galima padalinti 28 domino kauliukus 4 žaidėjams duodant po 7 kauliukus?

36. Plokštumoje duota 12 taškų, iš kurių nei vieni 3 neguli vienoje tiesėje. Kiek skirtingų tiesių galima pravesti sujungiant 2 taškus? Ats.: 66.

37. Keliais būdais galima susodinti 3 keleivius 4 vietų kupe? Ats.: 24.

38. Keliais būdais galima pažymėti keturkampio viršūnes raidėmis A, B, C ir D? Ats.: 24.

39. Keleiviniame traukinyje yra 5 vagonai. Kiek yra būdų paskirstyti po vagonus 5 palydovus? Ats.: 120.

40. Iš 26 moksleivių grupės reikia išrinkti 3 moksleivius dalyvauti matematikos olimpiadoje. Keliais būdais tai galima padaryti? Ats.: 2600.

41. Knygyne gauta 6 pavadinimų naujų knygų. Keliais būdais galima nusipirkti 3 naujas knygas? Ats.: 20.

42. Keliais būdais 26 moksleivius galima suskirstyti į 2 pogrupius po 13 moksleivių? Ats.: C_{26}^{13}.

43. Keliais būdais galima sustatyti į eilę 5 juodus ir 4 baltus rutulius taip, kad balti rutuliai negulėtų vienas šalia kito? Ats.: 15.

44. Matematikos kabinete 28 vietos. Keliais būdais gali užimti vietas 20 moksleivių? Ats.: A_{28}^{20}.

45. Futbolo pirmenybėse sužaistos 153 rungtynės. Kiekvienos 2 komandos susitiko po vieną kartą. Kiek komandų dalyvavo pirmenybėse? Ats.:18.

46. Seifui atidaryti reikia penkiuose diskuose surinkti atitinkamą skaičių kombinaciją. Kiekviename iš diskų gali būti surinktas vienas iš 10 skaitmenų. Ar užteks 10 dienų seifui atidaryti, jei “darbo diena” trunka 13 valandų, o vienos kombinacijos surinkimas užtrunka 5 sek.? Ats.: gali neužtekti.

47. Iš skaitmenų 1,2,3,4,5 sudaryti visi galimi penkiaženkliai skaičiai, kuriuose nėra vienodų skaitmenų. Kiek yra tokių, kurie: a) prasideda skaitmeniu 3; b) neprasideda skaitmeniu 5; c)prasideda skaičiumi 54; d)neprasideda skaičiumi 543? Ats.: a)24; b)96; c)6; d)118.

48. Kiek šachmatininkų dalyvavo turnyre, jei žinoma, kad kiekvienas dalyvis sužaidė su kiekvienu iš likusiųjų po vieną partiją, o iš viso sužaista 210 partijų? Ats.: 21.

49. Kiek egzistuoja dviženklių skaičių, kurių dešimčių ir vienetų skaitmenys nelyginiai ir skirtingi? Ats.:20.

50. Keliais būdais 7 skirtingas knygas galima sustatyti vienoje lentynoje? Ats.: 5040.

51. Iš skaitmenų 0,1,2,3,4,5 sudaryti keturženkliai skaičiai (skaitmenys nesikartoja). Keliuose skaičiuose yra skaitmuo 3? Ats.:204.

52. Liftas sustoja dešimtyje aukštų. Keliais būdais 4 lifte esantys žmonės gali išlipti šiuose aukštuose? Ats.: 10000.

53. Knygoje 20 puslapių. Trijuose puslapiuose reikia patalpinti po vieną skirtingą iliustraciją. Keliais būdais tai galima padaryti? Ats.: 6840.

54. Per 12 dienų reikia išlaikyti 5 egzaminus (ne daugiau 1 egzamino per dieną). Keliais būdais galima sudaryti egzaminų tvarkaraštį? Ats.: 95040.

55. 15 žmonių reikia paskirstyti į dvi grupes taip, kad vienoje jų būtų 6, o kitoje 9 žmonės. Keliais būdais tai galima padaryti? Ats.: 5005.

56. Į komandą turi būti atrinkti 4 sportininkai iš 10. Keliais būdais tai galima padaryti, jei 2 konkretūs sportininkai turi patekti į komandą? Ats.: 28.

Apskaičiuokite:

57. $C_{10}^3 + C_9^4$; Ats.: 246. 58. $C_{11}^2 + C_9^3$; Ats.: 139. 59. $C_{15}^{11} - C_{16}^{14}$; Ats.: 1245. 60. $\dfrac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^3}$; Ats.: 5,5. 61. $\dfrac{A_{13}^3}{A_{15}^3 + A_{14}^3}$; Ats.: $\dfrac{22}{63}$. 62. $\dfrac{A_{15}^4 + A_{14}^5}{A_{15}^3}$; Ats.: 100. 63. $\dfrac{P_6 - P_5}{5!}$; Ats.: 5.

64. $\dfrac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4}$; Ats.: 256. 65. $\dfrac{A_5^4 + A_5^3}{A_5^2}$; Ats.: 9. 66. $\dfrac{P_6\left(C_7^5 + C_7^4\right)}{A_{10}^7}$; Ats.: $\dfrac{1}{15}$.

Suprastinkite reiškinius:

67. $\dfrac{n!}{(n-1)!}$; Ats.: n. 68. $\dfrac{(n-2)!}{n!}$; Ats.: $\dfrac{1}{n(n-1)}$. 69. $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}$; Ats.: $(n-1)(n-2)$.

70. $\dfrac{2k(2k-1)!}{(2k)!}$; Ats.: 1. 71. $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$; Ats.: $\dfrac{n}{(n+1)!}$. 72. $\dfrac{1}{(k-1)!} - \dfrac{1}{k!}$; Ats.: $\dfrac{1}{(k-2)!}$.

73. $\dfrac{2}{n+1} \cdot C_{n+1}^{n-1}$; Ats.: n. 74. $\dfrac{3}{2(2n-1)} \cdot C_{2n}^{2n-3}$; Ats.: $n(n-1)$. 75. $\dfrac{5!}{m(m+1)} \cdot \dfrac{(m+1)!}{(m-1)! \cdot 3!}$; Ats.: 20.

76. $\dfrac{(k-2)!}{k!}$; Ats.: $\dfrac{1}{k^2 - k}$. 77. $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!\left(n^2-4\right)}$; Ats.: $\dfrac{n+3}{n-2}$. 78. $\dfrac{(n+2)!\left(n^2-9\right)}{(n+4)!}$; Ats.: $\dfrac{n-3}{n+4}$.

Išspręskite lygtis:

79. $A_n^2 = 182$; Ats.: 14. 80. $A_n^2 + C_n^1 = 256$; Ats.: 16. 81. $C_n^3 + C_n^2 = 15\left(n^2 - 1\right)$; Ats.: 90.

82. $C_{n+3}^3 = 3(n+1)(n+2)$; Ats.: 15. 83. $\dfrac{C_n^2 + C_n^3}{n-1} = 15$; Ats.: 9. 84. $5C_{n+1}^2 = 4C_n^3$; Ats.: 7.

85. $\dfrac{A_x^4 + A_x^2}{A_x^2} = 13$; Ats.: 6. 86. $A_{2x}^3 = 14A_x^3$; Ats.: 4. 87. $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$; Ats.: 7.

88. $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^{3} = 7(x-1)$; Ats.: 5. 89. $\dfrac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \dfrac{24}{23}$; Ats.: 5. 90. $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$; Ats.: 5

91. $A_x^3 - 2C_x^4 = 3A_x^2$; Ats.: 6;11. 92. $\dfrac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$; Ats.: 8. 93. $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$; Ats.: 7.

94. $A_{x+1}^{x-1} + 2P_{x-1} = \dfrac{30}{7}P_x$; Ats.: 7. 95. $\dfrac{m! - (m-1)!}{(m+1)!} = \dfrac{1}{6}$; Ats.: 2;3. 96. $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$; Ats.: 9;10.

97. $A_n^4 \cdot P_{n-4} = 42P_{n-2}$; Ats.: 7. 98. $P_{n+2} = 132A_n^k \cdot P_{n-k}$; Ats.: 10. 99. $5C_n^3 = C_{n+2}^4$; Ats.: 3;14.

100. $(n+5)! = 240(n-k)!A_{n+3}^{k+3}$; Ats.: 11. 101. $12C_{n+3}^{n-1} = 55A_{n+1}^2$; Ats.: 8. 102. $\dfrac{P_n}{P_{n+2}} = \dfrac{1}{30}$; Ats.: 4.

Išspręskite nelygybes:

103. $A_{x+1}^{x-2} < A_x^{x-1}$; Ats.: 2;3;4. 104. $A_{10}^{x-1} \geq \dfrac{2}{x}A_{10}^x$; Ats.: 8;9;10. 105. $C_{10}^{x-1} > 2C_{10}^x$; Ats.: 8;9;10.

106. $C_{13}^x < C_{13}^{x+2}$; Ats.: 1;2;...;5. 107. $C_{18}^{x+2} > C_{18}^x$; Ats.: 1;2;...;7. 108. $C_x^6 < C_x^4$; Ats.: 6;7;8;9.

109. $5C_x^3 < C_{x+2}^4$; Ats.: 15;16;.... 110. $C_{x+1}^{x-1} > \dfrac{3}{2}$; Ats.: 2;3;.... 111. $C_{x+1}^{x-1} < 21$; Ats.: 1;2;...;5.

112. $2C_x^5 > 11C_{x-2}^3$; Ats.: 12;13;.... 113. $\dfrac{A_{x+1}^4}{C_{x-1}^{x-3}} > 14P_3$; Ats.: 8;9;....

114. $A_{x+1}^{x-2} < A_x^{x-1}$; Ats.: 2;3;4.

3. Junginiai su pasikartojimais

Gretiniai su pasikartojimais. Gretiniais su pasikartojimais iš n lementų po k vadinami tokie gretiniai, kuriuose elementai gali kartotis iki k kartų. Gretinių su pasikartojimais iš n elementų po k skaičius žymimas $\overline{A}_n^k$ ir apskaičiuojamas pagal formulę

$$\boxed{\overline{A}_n^k = n^k}.$$

Įrodysime šią formulę. Sakykime, turime n elementų ir reikia sudaryti visus galimus junginius po k elementų, kuriuose elementai gali kartotis. Pirmąjį elementą galima pasirinkti n būdais. Antrąjį elementą irgi galima pasirinkti n būdais. n būdais galima pasirinkti ir k-ąjį elementą. Taigi, pagal kombinatorikos daugybos taisyklę gausime $\overline{A}_n^k = \overbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} = n^k$.

Pavyzdžiai

1. Sudaryti visus galimus gretinius su pasikartojimais iš elementų a ir b po 3 elementus.

Sprendimas

aaa, aab, aba, baa, abb, bab, bba, bbb. Jų skaičius $\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8$.

2. Saugojimo kameros užrakte įmontuoti 3 diskai, kurių kiekvienas turi po 10 fiksuojamų padėčių, pažymėtų skaitmenimis 0,1,2,...,9. Užraktas atsidaro, kai kiekvienas diskas atsukamas į tam tikrą padėtį. Kiek yra variantų užrakto užkodavimui?

Sprendimas

Užrašykime kelis skirtingus kodus: 012, 102, 112, 333 ir t.t. Matome, kad šie junginiai vienas nuo kito skiriasi bent vienu elementu arba jų išdėstymo tvarka. Be to, elementai gali kartotis. Vadinasi, čia yra gretiniai su pasikartojimais, o jų skaičius randamas pagal formulę $\overline{A}_{10}^3 = 10^3 = 1000$.

Kėliniai su pasikartojimais. Kėliniai sudaryti iš n elementų ir kuriuose pirmasis elementas a_1 pasikartoja k_1 kartų, antrasis elementas a_2 pasikartoja k_2 kartų, ..., elementas a_r pasikartoja k_r kartų yra vadinami *kėliniais su pasikartojimais*. Kėlinių su pasikartojimais skaičius žymimas $P(k_1, k_2, \mathbf{K}, k_r)$ ir apskaičiuojamas pagal formulę

$$\boxed{P(k_1, k_2, \mathbf{K}, k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \mathbf{K} \cdot k_r!}}, \text{ kur } k_1 + k_2 + \mathbf{K} + k_r = n.$$

Pavyzdžiai

1.Kiek skirtingų penkiaženklių skaičių galima parašyti perstatant skaitmenis skaičiuje 22333?

Sprendimas

Čia turime kėlinius iš 5 elementų, kur elementas “2” kartojasi 2 kartus, o elementas “3” kartojasi 3 kartus. Jų skaičius $P(2,3) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$

2. Kiek skirtingų žodžių galima sudaryti iš žodžio “kalakutas” raidžių?

Sprendimas

$$P(2,3,1,1,1,1) = \frac{9!}{2! \cdot 3!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2 = 30240.$$

Deriniai su pasikartojimais. *Deriniais su pasikartojimais* iš n elementų po k vadinami tokie deriniai po k elementų, kuriuose kiekvienas elementas gali kartotis iki k kartų. Derinių su pasikartojimais iš n elementų po k skaičius žymimas $\overline{C}_n^k$ apskaičiuojamas pagal formules:

$$\boxed{\overline{C}_n^k = \frac{(n-k+1)!}{k!(n-1)!}} \quad \text{arba} \quad \boxed{\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k}.$$

Pavyzdžiai

1. Sudaryti visus galimus derinius su pasikartojimais iš elementų a ir b po 3 elementus.

Sprendimas

aaa, aab, abb, bbb.

2. Parduotuvėje yra 5 skirtingų spalvų pieštukų. Keliais skirtingais būdais galima nusipirkti 8 pieštukų rinkinį?

Sprendimas

Perkant pieštukus visiškai nesvarbu jų išdėstymo tvarka, be to, tos pačios spalvos pieštukai gali kartotis. Vadinasi reikia rasti derinių su pasikartojimais iš 5 elementų po 8 elementus skaičių:

$$\overline{C}_5^8 = C_{5+8-1}^8 = C_{12}^8 = C_{12}^{12-8} = C_{12}^4 = \overbrace{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2}} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 495.$$

Pratimai

1. Kiek skirtingų dviženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 7,8,9? Ats.:9.
2. Reikia nudažyti 3 namus. Kiekvienam jų galima parinkti vieną iš 5 spalvų. Keliais skirtingais būdais galima tai padaryti? Ats.:125.
3. Kiek skirtingų keturženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 0,1,2? Ats.:54.
4. Kiek yra mažesnių už 1000 natūraliųjų skaičių, sudarytų naudojantis skaitmenimis 1,2,3,4,5? Ats.:155.

5. Keliais būdais galima eilutėje parašyti 6 pliusus ir 4 minusus? Ats.:210.
6. Kiek skirtingų skaičių galima gauti perstatant skaitmenis skaičiuje 2233344455? Ats.:25200.
7. Kiek galima sudaryti žodžių iš žodžio "kampas" raidžių? Ats.:360.
8. Gėlių kioske yra 4 skirtingų rūšių gėlių. Keliais skirtingais būdais galima nusipirkti 5 gėles puokštei sudaryti? Ats.:56.
9. Parduotuvėje yra 4 skirtingų vienodos vertės pašto ženklų. Keliais skirtingais būdais galima nusipirkti 6 pašto ženklus? Ats.:84.
10. Paukščių turguje parduodamos 8 skirtingų veislių vištos. Keliais skirtingais būdais galima nusipirkti 10 vištų? Ats.:19448.
11. Automobilio numerį sudaro šeši ženklai: pirmieji trys – lotynų abėcėlės raidės, kiti trys – skaitmenys. Kiek galima sudaryti skirtingų automobilių numerių, jei ženklinimui naudojamos 23 raidės ir atsisakoma skaitmenų rinkinio 000? Ats.:12154833.
12. Iš skaitmenų 1,3,5,7,9 sudarykite skaičius, kuriuose būtų ne daugiau kaip 3 skaitmenys. Kiek tokių skirtingų skaičių galima sudaryti? Ats.:155.
13. Pašte yra 10 rūšių atviručių. Keliais būdais galima nupirkti 8 atvirutes? Ats.:24310.
14. Riedantis rutulys būtinai įstringa viename iš 5 skirtingai pažymėtų, narvelių. Kiek yra galimų variantų, jei ridenami 3 sunumeruoti rutuliai ir kiekviename narvelyje gali įstrigti bet koks rutulių skaičius? Ats.:125.
15. Devynis studentus reikia suskirstyti į vieno, trijų ir penkių studentų grupes. Kiek yra tokio suskirstymo variantų? Ats.:504.
16. 10 studentų grupė išvyko talkininkauti rudens darbams soduose. 2 studentai turės skinti kriaušes, 3 – slyvas ir 5 – obuolius. Kiek yra variantų studentams paskirstyti nurodytiems darbams? Ats.:2520.
17. Kontrolinio darbo perrašymui sudaryti 2 užduočių variantai ir kiekvienos užduoties atspausdinta po 3 egzempliorius. Kiek yra skirtingų variantų šešiems studentams išdalinti lapelius su užduotimi? Ats.:20
18. Moneta metama 10 kartų. Kiek galima gauti skirtingų herbo ir skaičiaus iškritimo kombinacijų? Ats.:1024.
19. Buto viduje yra 8 durys. kiekvienos durys gali būti uždarytos arba atidarytos. kiek yra skirtingų padėčių, kuriose gali būti visos durys? Ats.:256.
20. Keliais būdais galima sudėti knygų lentynoje 4 algebros, 3 geometrijos ir 2 fizikos knygas, jei kiekvieno dalyko knygos yra vienodos? Ats.:1260.
21. Kiek galima gauti skirtingų žodžių perstačius raides žodyje "kakava"? Ats.:60.
22. 9 kortelėse surašyti skaitmenys 1,1,1,2,2,2,3,3,3. Kiek devynženklių skaičių galima sudaryti iš tų kortelių? Ats.: 1680.
23. Pašte yra 10 rūšių atviručių. Keliais būdais galima nusipirkti 8 atvirutes? Ats.: 24310.
24. Aludėje yra 4 rūšių alaus. Keliais būdais galima užsakyti 7 bokalus alaus, jei į bokalą pilamas tik vienos rūšies alus? Ats.: 120.
25. Petras turi 6 draugus. 20 dienų iš eilės jis nori kviesti į svečius po 3 iš jų taip, kad nė karto ta pati draugija nepasikartotų. Keliais būdais jis gali tai padaryti? Ats.: 20!.
26. 3 studentai laiko egzaminus. Keliais būdais jiems gali pasiskirstyti pažymiai, jei žinome, kad vienaip ar kitaip studentai egzaminus išlaikė? Ats.: 216.
27. Trys vaikinai ir dvi merginos nori įsidarbinti. Mieste yra 3 įmonės, kur gali įsidarbinti vyrai, 2 – kur reikalingos moterys, ir 2 – kur reikalingi ir tie, ir tie. Keliais būdais 5 jaunuoliai gali pasiskirstyti šiose įmonėse? Ats.: 2000.
28. Kiek yra keturženklių skaičių? Ats.: 9000.

29. Į kalną veda 5 takeliai. Kiek yra būdų pakilti ir nusileisti nuo kalno?
Ats.:25.

Įvairūs pratimai

1. Kalėdų proga klasės moksleiviai apsikeitė 132 dovanėlėmis. Kiekvienas moksleivis įteikė dovanėlę kiekvienam savo klasės draugui. Kiek moksleivių yra klasėje? Ats.: 12.
2. Studentas per 7 dienas turi išlaikyti 4 egzaminus. Per dieną jis laiko ne daugiau 1 egzamino. Keliais būdais galima sudaryti egzaminų tvarkaraštį? Ats.: 840.
3. Į muziejų buvo atvežti 4 skirtingi senoviški krėslai. Pastate yra 7 laisvos sienos. Keliais būdais muziejaus darbuotojai gali sustatyti prie šių sienų po vieną krėslą? Ats.: 840.
4. Traukinių stočiai priklauso 6 atsarginiai keliai. Keliais būdais galima paskirstyti juose 4 traukinius? Ats.:360.
5. Viešbutyje yra 8 kambariai. Keliais būdais galima juose apgyvendinti 8 žmones po vieną kambaryje? Ats.:8!.
6. Kiek skirtingų stygų galima nubrėžti per 6 apskritimo taškus? Ats.: 15.
7. 8 turistus reikia apgyvendinti dviejuose viešbučio kambariuose taip, kad kiekviename būtų ne mažiau kaip 3 žmonės. Keliais skirtingais būdais tai galima padaryti? Ats.:182.
8. Iš 20 dėžėje esančių bilietų 5 yra laimingi. Kiek galimybių traukiant 7 bilietus ištraukti 2 laimingus? Ats.: 30030.
9. Parduotuvėje yra 5 rūšių lietuviškų ir 3 rūšių importinių gaiviųjų gėrimų. Keliais būdais pirkėjas gali nusipirkti 2 rūšių gėrimų? Ats.: 28.
10. 10 darbininkų reikia suskirstyti į dvi brigadas taip, kad kiekvienoje brigadoje būtų ne mažiau kaip 4 žmonės. Keliais skirtingais būdais galima tai padaryti? Ats.: 462.
11. Loterijos bilietai sunumeruoti nuo 1 iki 20. Keliais būdais iš jų galima išrinkti 3 bilietus taip, kad iš išrinktųjų bilietų bent vieno numeris būtų didesnis už 15? Ats.: 685.
12. Kiek yra būdų perstatyti skaičiaus 123589 skaitmenis vietomis, kad gautieji skaičiai būtų lyginiai? Ats.: 240.
13. Raskite daugiakampio, turinčio 14 įstrižainių, kraštinių skaičių. Ats.:7.
14. Kiek yra šešiaženklių skaičių, kurie užrašyti nepanaudojant nė vieno iš skaitmenų 0,4,5,6,7,8 ir 9? Ats.: 729.
15. Šešių valstybių delegacijų derybos vyks prie apvalaus stalo. Kiekvienos valstybės delegacijos vieta pažymima valstybės vėliavėle. Kiek yra variantų išdėlioti ant stalo 6 valstybių vėliavėles? Ats.: 720.
16. Iš 9 studentų reikia sudaryti 5 studentų grupę vykti į užsienį. Vienas studentas bus grupės vadovas, kitas – jo pavaduotojas. Kiek yra galimų variantų minėtai studentų grupei sudaryti? Ats.: 2520.
17. Finalinėse krepšinio varžybose komandos A ir B žaidžia tarpusavyje tol, kol viena iš jų pasiekia 4 pergales. Sudaroma laimėjusių komandų pavadinimų seka (pvz., ABABBAA). Kiek tokių skirtingų sekų galima sudaryti? Ats.: 70.

4. *Niutono binomas*

Sudarykime C_n^k reikšmių lentelę:

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	$\sum$
0	1									...	$1 = 2^0$
1	1	1								...	$2 = 2^1$

2	1	2	1							...	4 5 2^2
3	1	3	3	1						...	8 5 2^3
4	1	4	6	4	1					...	16 5 2^4
5	1	5	10	10	5	1				...	32 5 2^5
6	1	6	15	20	15	6	1			...	64 5 2^6
7	1	7	21	35	35	21	7	1		...	128 5 2^7
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	...	256 5 2^8
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Ši lentelė vadinama ***Paskalio trikampiu***, prancūzų matematiko B.Paskalio (1623-1662) garbei. Iš trikampio matyti, kad jo eilutės simetriškos, t.y. teisinga lygybė $C_n^k = C_n^{n-k}$, pvz., $C_5^2 = C_5^3 = 10$.

Pastebėsime ir tai, kad kiekvienos eilutės elementų suma lygi natūriniam skaičiaus 2 laipsniui, t.y.

$$\boxed{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \mathbf{K} + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n}.$$

Pabandykime sudėti du gretimus Paskalio trikampio eilutės elementus. Sudėję gretimus skaičius, gausime kitos eilutės skaičių, esantį po dešiniuoju dėmeniu. Nesunkiai įrodoma, kad

$$\boxed{C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}}.$$

Niutono formulė. Paskalio trikampio eilučių elementai atitinka dvinario a+b n-ojo laipsnio koeficientus:

$$(a+b)^0 = 1 = C_0^0,$$

$$(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b,$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^3,$$

....

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n}.$$

Ši formulė anglų fiziko ir matematiko Izaoko Niutono (1642-1727) garbei pavadinta ***Niutono formule***. Dešinioji šios formulės dalis vadinama ***binomo laipsnio dėstiniu***. Niutono formulės koeficientai C_n^k vadinami ***binominiais koeficientais***.

Pagrindinės Niutono formulės savybės:

1. Dėstinio binominiai koeficientai yra Paskalio trikampio n-osios eilutės skaičiai.
2. Dėstinio binominiai koeficientai, vienodai nutolę nuo pirmojo ir paskutiniojo nario, yra lygūs.
3. Niutono formulėje a laipsnio rodiklis didėja nuo 0 iki n, o b laipsnio rodiklis mažėja nuo n iki 0.
4. Bet kuriame naryje a ir b laipsnių rodiklių suma lygi n.
5. Kiekvienas dėmuo turi pavidalą $C_n^k a^{n-k} b^k$. T.y. (k+1)-ojo nario formulė yra

$$\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}.$$

Niutono formulėje, vietoje b įrašę –b, gausime $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} (-b)^k = (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$. T.y.

$$(a-b)^n = C_n^0 a^n b^0 - C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + (-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + (-1)^n C_n^n a^0 b^n.$$

Pavyzdžiai

1. Užrašykite binomo laipsnio $(2x-3)^5$ dėstinį.

Sprendimas

$$(2x-3)^5 = C_5^0(2x)^5 - C_5^1(2x)^4\cdot 3 + C_5^2(2x)^3\cdot 3^2 - C_5^3(2x)^2\cdot 3^3 + C_5^4 2x\cdot 3^4 - C_5^5 3^5 =$$
$$= 32x^5 - 5\cdot 16x^4\cdot 3 + 10\cdot 8x^3\cdot 9 - 10\cdot 4x^2\cdot 27 + 5\cdot 2x\cdot 81 - 243 =$$
$$= 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243.$$

2. Raskite binomo laipsnio $\left(x+\frac{2}{x}\right)^{12}$ dėstinio aštuntąjį narį.

Sprendimas

$$T_8 = T_{7+1} = C_{12}^7 x^{12-7}\left(\frac{2}{x}\right)^7 = C_{12}^5 x^5\,\frac{2^7}{x^7} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}\cdot 128x^{-2} = 792\cdot 128x^{-2} = 101376x^{-2}.$$

3. Raskite binomo laipsnio $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$ dėstinio narį, kuriame nebūtų x.

Sprendimas

$T_{k+1} = C_{12}^k\left(\frac{1}{x}\right)^{12-k}\left(\sqrt{x}\right)^k = C_{12}^k x^{k-12}\cdot x^{\frac{k}{2}} = C_{12}^k x^{k-12+\frac{k}{2}} = C_{12}^k x^{1{,}5k-12}$. Kad šis narys neturėtų x, būtina ir pakankama, kad $x^{1{,}5k-12} = x^0 = 1$, iš čia $1{,}5k-12=0$, $k=\frac{12}{1{,}5}=8$ ir $T_{8+1} = T_9 = C_{12}^8 = 495$.

Pratimai

1. Apskaičiuokite: 1) $(x-y)^5$; 2) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^5$; 3) $(1+y^2)^4$; 4) $(x-2y)^6$; 5) $(p^2-1)^6$; 6) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$.
2. Parašykite binomo dėstinio bendrojo nario formulę: 1) $(2x+1)^n$; 2) $(1-3x^2)^n$; 3) $(a^{-2}+b^{-1})^n$; 4) $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^n$; 5) $(a^{-1}-b)^n$; 6) $(x-2y)^n$.
3. Apskaičiuokite binomo laipsnio $(x+y)^{10}$ dėstinio šeštąjį narį. Ats.: $252x^5y^5$.
4. Raskite binomo laipsnio $\left(\sqrt[3]{t}-\frac{1}{t}\right)^{20}$ dėstinio narį, nepriklausantį nuo *t*. Ats.: $-C_{20}^5$.
5. Raskite binomo laipsnio $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$ dėstinio penktąjį narį. Ats.: $126\sqrt[3]{a}$.
6. Raskite binomo laipsnio $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$ dėstinio vidurinįjį narį. Ats.: $252\sqrt[3]{x^2}$.

7. Raskite binomo laipsnio $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$ dėstinio narį, nepriklausantį nuo *x*.

Ats.:15.

8. Raskite binomo laipsnio $(x+y)^9$ dėstinio narį, turintį x^7. Ats.: $36x^7y^2$.

9. Raskite binomo laipsnio $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{15}$ dėstinio šeštąjį narį. Ats.:3003.

10. Raskite binomo laipsnio $\left(\mathrm{x}^3+\frac{1}{\mathrm{x}^3}\right)^{18}$ dėstinio narį, neturintį *x*. Ats.: C_{18}^9.

11. Raskite binomo laipsnio $\left(\frac{1}{x}+x\right)^{12}$ dėstinio devintąjį narį. Ats.: $495x^4$.

12. Raskite binomo laipsnio $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$ dėstinio ketvirtąjį narį. Ats.:84*a*.

13. Raskite binomo laipsnio rodiklį, jeigu dėstinio $\left(a^{-\frac{1}{30}}+\sqrt[5]{a}\right)^n$ šeštasis narys neturi *a*.

Ats.:35.

14. Raskite dėstinio narį, kuris nepriklausytų nuo x, jeigu binomo laipsnio $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^n$ dėstinio binominių koeficientų suma lygi 256. Ats.:1120.

TIKIMYBIŲ TEORIJA

1. Atsitiktiniai įvykiai ir veiksmai su jais

Tikimybių teorijoje *įvykiais* vadinami bandymo arba stebėjimo rezultatai. *Atsitiktinis įvykis* yra toks įvykis, kuris gali įvykti, bet gali ir neįvykti.

Pavyzdys. Metama moneta. Iškrito herbas. O juk galėjo iškristi ir skaičius. Tai, kad iškrito herbas, yra atsitiktinis įvykis.

Būtinas įvykis yra toks įvykis, kuris, atlikus bandymą, visada įvyksta.

Pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas. Tai, kad iškris ne daugiau kaip 6 akys, yra būtinas įvykis.

Jei, atlikus bandymą, įvykis niekada negali įvykti, tai jis vadinamas *negalimu įvykiu*.

Pavyzdys. Į taikinį šauta 3 kartus. Tai, kad pataikyta 5 kartus, yra negalimas įvykis.

Atsitiktinius įvykius priimta žymėti didžiosiomis raidėmis A, B, C ir t.t. be indeksų ir su jais. Būtiną įvykį žymėsime raide **U**, o negalimą – **V**.

Du įvykiai vadinami *nesutaikomais*, jeigu jie, atliekant bandymą, negali įvykti vienu metu, t.y. gali įvykti tik vienas iš jų.

Pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas. Įvykiai A – atsivertė 3 akys ir B – atsivertė lyginis akių skaičius yra nesutaikomi įvykiai.

Įvykiui A *priešingas įvykis* yra toks įvykis B, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai neįvyksta įvykis A. Įvykiui A priešingas įvykis žymimas $\overline{A}$. Taigi, $B = \overline{A}$.

Pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas. Jei įvykis A – atsivertė lyginis akių skaičius, tai įvykiui A priešingas įvykis $\overline{A}$ - atsivertė nelyginis akių skaičius.

Elementarieji įvykiai yra tokie įvykiai, iš kurių susideda kiti įvykiai. *Elementariųjų įvykių aibė* yra bandymo visų elementariųjų įvykių visuma. Su bandymu susiję elementarieji įvykiai yra poromis nesutaikomi.

Pavyzdys. Metama moneta. Įvykiai H – atsivertė herbas ir įvykis S – atsivertė skaičius yra elementarieji įvykiai ir jie sudaro elementariųjų įvykių aibę, nes tai yra visi galimi minėto bandymo rezultatai. Be to šie įvykiai yra nesutaikomi.

Įvykiui A *palankūs elementarieji įvykiai* yra tokie įvykiai, kuriems įvykus, įvyksta ir įvykis A.

Pavyzdys. Palyginkime 2 įvykius: A – metus lošimo kauliuką, iškrito 2 akys ir B – metus lošimo kauliuką, iškrito lyginis akių skaičius. Matome, kad įvykus įvykiui A, įvyksta ir įvykis B, nes 2 yra lyginis skaičius. Šiuo atveju sakoma, kad įvykis A yra įvykio B dalis, arba įvykis A yra palankus įvykiui B. Tai galima užrašyti $A \subset B$.

Du įvykiai yra *sutaikomi*, jei abiem įvykiams yra bent vienas palankus įvykis.

Pavyzdys. Atsitiktinai pasirenkamas dviženklis skaičius. Įvykiai A – pasirinktas dviženklis skaičius dalijasi iš 3 ir B – pasirinktas skaičius dalijasi iš 9 yra sutaikomi, nes visada galima rasti tokį dviženklį skaičių, kuris dalytųsi ir iš 3 ir iš 9.

Įvykių A ir B *sąjunga (suma)* vadinamas įvykis, kuris įvyksta tada ir tiktai tada, kai įvyksta bent vienas iš įvykių A arba B. Įvykių A ir B žymima A+B arba $A \cup B$.

Pavyzdys. Panagrinėkime įvykius: A – metus lošimo kauliuką, iškrito 1 akis; B – metus lošimo kauliuką, iškrito 2 akys; C – metus lošimo kauliuką, iškrito ne daugiau kaip 2 akys. Jeigu įvyksta įvykis A arba B, tai įvyksta ir įvykis C, t.y., įvykus bent vienam iš įvykių A arba B, įvyksta ir įvykis C. Vadinasi C 5 A+B arba $C = A \cup B$.

Įvykių A ir B *sankirta (sandauga)* vadinamas toks įvykis, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta ir įvykis A ir įvykis B. Įvykių sankirta (sandauga) žymima $A \cdot B$ arba $A \cap B$.

Pavyzdys. Du šauliai, nepriklausomai vienas nuo kito, šauna po vieną kartą į taikinį. Jei įvykis A – pataikė pirmasis šaulys, o įvykis B – pataikė antrasis šaulys tai įvykis $A \cdot B$ - pataikė abu šauliai.

Jeigu įvykiai A ir B yra nesutaikomi, t.y. negali įvykti kartu, tai jų sandauga yra negalimas įvykis $A \cap B = V$. Priešingų įvykių sandauga irgi yra negalimas įvykis, bet jų suma yra būtinas įvykis, t.y. $A \cap \overline{A} = V$ ir $A \cup \overline{A} = U$.

Pratimai

1. Kiek elementariųjų įvykių turi įvykiai: A – metama moneta du kartus; B – šaunama į taikinį su 10 koncentrinių skritulių ir įvykis yra pelnytų taškų skaičius; C – krepšininkas meta kamuolį į krepšį tris kartus; D – atsitiktinai parašytų dviejų natūrinių skaičių suma lygi 10; E- iškritusių lošimo kauliuko taškų skaičius yra nelyginis.
2. Nustatykite, kurie šių įvykių elementarūs, kurie sudėtiniai eksperimentuose:

1) Lošimo kauliukas metamas du kartus: A – iškrito daugiau kaip 10 taškų; B – pirmą kartą iškrito 2 taškai, o antrą kartą – 5 taškai; C - iškrito mažiau kaip 11 taškų; D – iškritusių taškų suma – lyginis skaičius.
2) Atsitiktinai parenkamas dviženklis skaičius: A – parinktas skaičius 12; B – parinktas skaičius dalus iš 100; C – parinktas skaičius pirminis; E – parinktas skaičius mažesnis už 11.

3. Į kiekvieną iš 5 vokų įdėtas vienas iš 10 Lt, 20 Lt, 50 Lt, 100 Lt ir 200 Lt vertės banknotų. Atsitiktinai parinkti 2 vokai. Sudarykite elementariųjų įvykių aibę.
4. Sudarykite elementariųjų įvykių aibes bandymuose:

1) Metamos 3 monetos: 1 cento, 2 centų ir 5 centų.
2) Metama 5 centų moneta ir lošimo kauliukas.
3) Moneta metama 3 kartus.
4) Šaunama į taikinį su 10 koncentrinių skritulių.

5. Nustatykite, kurie iš įvykių yra būtini, kurie negalimi, kurie atsitiktiniai eksperimentuose:

1) Atsitiktinai parenkamas triženklis skaičius:
A – skaičius didesnis už 1000; B – skaičius mažesnis už 1000; C – skaičius dalus iš 50, D – skaičius mažesnis už 371.
2) Metami 2 lošimo kauliukai: A – iškrito mažiau kaip 8 taškai; B - iškritusių taškų skaičius dalus iš 5; C – iškrito daugiau kaip 13 taškų; D - iškrito teigiamas taškų skaičius.
3) Trys medžiotojai šauna į zuikį: A – pataikė bent vienas; B - nei vienas nepataikė; C – zuikis nušautas; D – zuikis nubėgo.

6. Kuris įvykis sudaro kurio dalį?

1) Į taikinį šaunama 10 kartų: A – į taikinį pataikyta pirmu šūviu; B – į taikinį pataikyta vienu iš pirmų keturių šūvių; C – į taikinį pataikyta vienu iš dviejų pirmų šūvių.
2) Metami du lošimo kauliukai: A – taškų suma dalijasi iš 3; B – taškų suma dalijasi iš 6; C – taškų suma didesnė už 2.

7. Suformuluokite įvykį D, kuris reiškia įvykių sąjungą, kai:

1) A- į taikinį pataikyta pirmu šūviu; B – į taikinį pataikyta antru šūviu;
2) A – loterijoje išlošta 10 litų; B- loterijoje išlošta 20 litų;
3) A –metus dvi monetas iškrito 2 herbai; B – metus 2 monetas iškrito herbas ir skaičius.

Ats.:1) D – į taikinį pataikyta iš dviejų šūvių; 2) D – loterijoje išlošta arba 10, arba 20 litų; 3) D – metus 2 monetas iškrito bent vienas herbas.

8. Suformuluokite įvykį D, kuris reiškia įvykių sankirtą, kai:

1) A – metus lošimo kauliuką, iškrito nelyginis akių skaičius; B – metus lošimo kauliuką neiškrito 4 akys; C – metus lošimo kauliuką neiškrito 6 akys;
2) A – pirmu traukimu ištrauktas laimingas bilietas; B – antru traukimu ištrauktas laimingas bilietas.

Ats.:1) D – iškrito viena akis; 2) D – laimingas bilietas ištrauktas pirmaisiais dviem bandymais.

9. Suformuluokite įvykius; 1) $A \cap B$, 2)$A \cup B$, 3)$A \cap C$, kai: A – metus kauliuką iškrito lyginis akių skaičius; B – metus kauliuką iškrito 4 akys; C – metus kauliuką neiškrito 6 akys.

Ats.:1) metus kauliuką iškrito 4 akys; 2) metus kauliuką iškrito lyginis akių skaičius; 3) metus kauliuką iškrito arba 2, arba 4 akys.

10. Suformuluokite priešingus įvykius įvykiams: A – metus lošimo kauliuką iškrito lyginis akių skaičius; B – metus monetą atvirto herbas; C – metus du lošimo kauliukus iškritusių akių suma mažesnė už 6.

11. Atsitiktinai paimta detalė yra: A – pirmos rūšies; B – antros rūšies; C – trečios rūšies. Suformuluokite įvykius: 1) $A \cup B$; 2) $\overline{A \cup C}$; 3) $A \cap C$; 4) $A \cap B \cup C$.

Ats.: 1) detalė yra arba pirmos, arba antros rūšies; 2) detalė – antros rūšies; 3) negalimas įvykis; 4) detalė – trečios rūšies.

2. Klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas

Sakykime, m yra skaičius vienodai galimų elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A, n – visų elementariųjų įvykių skaičius. Santykis $\frac{m}{n}$ vadinamas ***įvykio A tikimybe*** ir žymimas

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}.$$

Būtino įvykio tikimybė P(U) 5 1, nes m 5 n. Negalimo įvykio tikimybė P(V) 5 0, nes m 5 0. Be to, $0 \le m \le n$ ir $0 \le P(A) \le 1$. Priešingo įvykio tikimybė $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, nes $P(\overline{A}) + P(A) = 1$.

Pavyzdžiai

1. Metama moneta. Kokia tikimybė, kad atsivers herbas.

Sprendimas

Galimi 2 elementarūs įvykiai: A – atsivers herbas; B – atsivers skaičius. Šie įvykiai yra vienodai galimi ir sudaro pilną elementarių įvykių aibę, taigi, n 5 2. Palankus įvykis yra vienas (m 5 1), todėl šio įvykio tikimybė $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$.

2. Dėžėje yra 25 standartinės ir 5 nestandartinės detalės. Iš dėžės atsitiktinai išimta viena detalė. Apskaičiuokite tikimybę, kad išimtoji detalė yra standartinė.

Sprendimas

Nagrinėsime įvykį A – iš dėžės išimta detalė yra standartinė. Iš visų 30 elementariųjų įvykių 25 įvykiai yra palankūs įvykiui A. Todėl, $P(A) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$.

3. Moneta metama 2 kartus. Apskaičiuokite tikimybę, kad bent kartą atsivers skaičius.

Sprendimas

Surašysime visus elementariuosius įvykius: HH, HS, SH, SS. Matome, kad palankūs įvykiai yra trys: HS, SH ir SS. Vadinasi, m 5 3, o n 5 4 ir $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$. Čia įvykis A – bent kartą atsivers skaičius.

3. Iš 35 bilietų, kurie sunumeruoti nuo 1 iki 35, atsitiktinai traukiamas vienas bilietas. Kokia tikimybė, kad ištraukto bilieto numeris dalijasi iš 5?

Sprendimas

Nagrinėsime įvykį A – ištraukto bilieto numeris dalijasi iš 5. Tarp 35 elementariųjų vienodai galimų įvykių yra 7 įvykiui A palankūs įvykiai: ištraukto bilieto numeris 5, 10, 15, 20, 25, 30 ir 35. Todėl, $P(A)=\frac{7}{35}=\frac{1}{5}=0{,}2$.

4. Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė įvykio A – atvirtusių akių suma lygi 7?

Sprendimas

Visų vienodai galimų elementariųjų įvykių bus tiek, kiek galima sudaryti gretinių su pasikartojimais iš 6 elementų po 2, nes šie junginiai vienas nuo kito skiriasi elementais bei jų išdėstymo tvarka ir elementai gali kartotis. Pvz., 12, 21, 33, 52 ir t.t. Čia pirmasis skaitmuo rodo atvirtusių akių skaičių ant pirmojo kauliuko, o antrasis – ant antrojo. Taigi, $n=\overline{A}_6^2=6^2=36$. Palankius įvykis galima išvardinti: 16, 25, 34, 43, 52, 61, nes 1+6 5 2+5 5 ... 5 7. Vadinasi, m 5 6 ir $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

5. Ant apskritimo pasirenkami 4 skirtingi taškai. Kokia tikimybė, kad stygos AB ir CD kirsis?

Sprendimas

Galimi 6 skirtingi taškų išdėstymo variantai: ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC ir ADCB. Palankūs yra tik 2 išdėstymo variantai: ACBD ir ADBC. Vadinasi, $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

6. Tikimybė, kad studentas išlaikys matematikos egzaminą lygi 0,6. Kokia tikimybė, kad studentas neišlaikys matematikos egzamino?

Sprendimas

Jeigu įvykis A – studentas išlaikys matematikos egzaminą, jam priešingas įvykis $\overline{A}$ - studentas neišlaikys matematikos egzamino. Vadinasi, $P(\overline{A})=1-P(A)=1-0{,}6=0{,}4$.

7. Atsitiktinai parenkamas triženklis skaičius. Kokia tikimybė, kad bent 2 jo skaitmenys sutaps?

Sprendimas

Pirmąjį triženklio skaičiaus skaitmenį galima parinkti iš 9 skaitmenų (negali būti 0), antrąjį ir trečiąjį– iš 10. Taigi, pagal daugybos taisyklę, $n=9\cdot10\cdot10=900$. Tegul įvykis A – parinktojo skaičiaus bent du skaitmenys sutampa. Čia lengviau būtų apskaičiuoti tikimybę priešingo įvykio $\overline{A}$ – parinktojo skaičiaus visi skaitmenys skirtingi. Tada $m=9\cdot9\cdot8$ ir $P(\overline{A})=\frac{9\cdot72}{900}=\frac{72}{100}=0{,}72$, o $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}72=0{,}28$.

Pratimai

1. Metamos 3 monetos: 1 cento, 2 centų ir 5 centų. Sudarykite bandymo elementariųjų įvykių aibę. Raskite tikimybes įvykių ir jiems priešingų įvykių: 1) A – herbas atvirto daugiau kaip ant vienos monetos; 2) B – atvirtusių centų suma didesnė už 2; 3) C – atvirtusių centų suma mažesnė už 5; 4)D – atvirtusių centų suma didesnė už 5.

Ats.:1) 1/2; 1/2; 2)5/8; 3/8; 3)1/2; 1/2; 4)3/8; 5/8.

2. Metama 5 centų moneta ir lošimo kauliukas. Sudarykite bandymo elementariųjų įvykių aibę. Raskite tikimybes įvykių ir jiems priešingų įvykių: 1) A – atvirtusių centų ir taškų suma didesnė

už 9; 2) B – atvirtusių centų skaičius didesnis už taškų skaičių; 3) C- atvirtusių centų ir taškų suma dali iš 3; 4) D – atvirtusių centų skaičius dalus iš atvirtusių taškų skaičiaus.

Ats.:1) 1/6; 5/6; 2) 1/3; 2/3; 3) 1/3; 2/3; 4) 2/3; 1/3.

3. Dėžutėje yra septynios kortelės, sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki 7. Atsitiktinai viena po kitos ištraukiamos 2 kortelės ir užrašomi jų numeriai. Sudarykite bandymo elementariųjų įvykių aibę Raskite tikimybes įvykių: 1) A – numeriai lygūs; 2) B- numeriai nelygūs; 3) C – pirmasis numeris mažesnis už antrąjį; 4) D – pirmasis numeris didesnis už antrąjį; 5) G – numerių suma lyginė; 6) H – numerių suma nelyginė; 6) K – numerių suma lygi 10.

Ats.:1) 0; 2) 1; 3) 1/2; 4) 1/2; 5) 3/7; 6) 4/7; 7) 2/21.

4. Dėžėje yra 10 rutulių. Tikimybė, kad du atsitiktinai ištraukti rutuliai yra balti, lygi 2/15. kiek dėžėje baltų rutulių. Ats.:4.

5. Gaminant detalę, atliekama keletas operacijų. Tikimybė pagaminti detalę, neatitinkančią standartų, lygi 0,01. kokia tikimybė pagaminti gerą detalę? Ats.:0,99.

6. Metams lošimo kauliukas. Kokia tikimybė, kad iškrito mažiau kaip 6 taškai? Ats.:5/6.

7. Dėžėje yra 4 balti ir 7 juodi rutuliukai. Atsitiktinai išimamas vienas rutuliukas. Kokia tikimybė, kad jis baltas? Ats.:4/11.

8. Krepšinio pirmenybėse dalyvauja 18 komandų, kurios burtų keliu suskirstomos į 2 pogrupius po 9 komandas. 5 komandos yra pirmaujančios. Kokia tikimybė, kad visos pirmaujančios 5 komandos pateks į tą pačią grupę? Ats.: 1/34.

9. Už 10 vietų stalo atsitiktinai susodinami 10 svečių. Kokia tikimybė, kad Aldona ir Algis sėdės greta? Ats.: 2/9.

10. Revolverio būgnelyje yra 7 lizdai. Į 5 iš jų įdėti šoviniai, 2 – tušti. Būgnelis pasukamas ir spaudžiamas gaidukas. Kokia tikimybė, kad padarius minėtą bandymą, ginklas neišaus? Ats.: 2/7.

11. Metamas lošimo kauliukas. Kokia tikimybė, kad iškrito lyginis taškų skaičius? Ats.: 0,5.

12. Matematikos knygoje yra 300 puslapių. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai atversto puslapio numeris yra skaičiaus 25 kartotinis? Ats.:0,04.

13. Iš dėžės, kurioje yra 5 brokuotos detalės ir 30 be defektų, atsitiktinai paimtos 3 detalės. Kokia tikimybė, kad visos 3 detalės be defektų? Ats.: 0,62.

14. Iš skaičių eilės nuo 1 iki 30 atsitiktinai išrinktas sveikasis skaičius. Kokia tikimybė, kad jis yra 30-ies daliklis? Ats.: 4/15.

15. Bilietai sunumeruoti nuo 1 iki 30. Atsitiktinai ištrauktas vienas bilietas. Kokia tikimybė, kad ištraukto bilieto numeris yra 3 kartotinis? Ats.: 1/3.

16. Metami 2 lošimo kauliukai. Koks įvykis labiau tikėtinas: “taškų suma lygi 11” ar “taškų suma lygi 4”? Ats.: “taškų suma lygi 4”.

17. Iš dėžės, kurioje yra 10 baltų ir 6 juodi rutuliai, atsitiktinai imami du rutuliai. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai juodi? Ats.: 1/8.

18. Kortelėse surašyti sveikieji skaičiai nuo 1 iki 20 imtinai. Atsitiktinai ištrauktos 2 kortelės. Kokia tikimybė, kad parašytųjų skaičių suma lygi 10? Ats.:2/95.

19. Žmogus, rinkdamas telefono numerį, pamiršo 2 paskutinius skaitmenis, ir žinodamas, kad tie skaitmenys yra skirtingi, surinko juos atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad telefono numeris surinktas teisingai? Ats.: 1/90.

20. Tarp 100 detalių 5 brokuotos. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimtos 3 detalės bus nebrokuotos? Ats.: 0,856.

21. Tvenkinyje 30 lydekų. Sugavo 5, jas pažymėjo ir vėl paleido. Antrą kartą sugavo 7 lydekas. Kokia tikimybė, kad tarp jų buvo 2 pažymėtos lydekos? Ats.:0,26.

22. Klasėje 13 mergaičių ir 12 berniukų. Reikia išrinkti 3 moksleivių delegaciją. Kokia tikimybė, kad į delegaciją pateks 2 mergaitės ir 1 berniukas? Ats.: 0,407.

23. Iš 36 kortų kaladės, kurioje yra 4 tūzai, atsitiktinai ištrauktos 3. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus 2 tūzai? Ats.:0,027.

24. Urnoje 30 loterijos bilietų, tarp kurių 5 laimingi. Ištraukti 4 bilietai. Kokia tikimybė, kad 2 bilietai laimingi? Ats.: 0,11.

25. Knygų lentynoje atsitiktinai sudėtos 5 algebros ir 3 geometrijos knygos. Kokia tikimybė, kad vieno dalyko knygos sudėtos greta? Ats.: 1/28.

26. Futbolo turnyre dalyvauja 20 komandų. Jos burtų keliu suskirstytos į 2 pogrupius po 10 komandų. Kokia tikimybė, kad 2 stipriausios komandos bus viename pogrupyje?

Ats.: 9/19.

27. Iš 5 abėcėlės raidžių sudėtas žodis knyga. Nemokantis skaityti vaikas išbarstė raides ir paskui atsitiktinai jas surinko. Kokia tikimybė, kad jis vėl sudėjo žodį knyga?

Ats.: 1/120.

28. Namas 7 aukštų. Pirmame aukšte į liftą įlipa 3 asmenys. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:

A – "visi keleiviai išlipo ketvirtame aukšte",

B – " visi keleiviai išlipo tame pat aukšte",

C – "visi keleiviai išlipo skirtinguose aukštuose". Ats.: 1/216; 1/36; 5/9.

29. 5 kortelėse įrašyti skaitmenys 1,2,3,4 ir 5. Atsitiktinai viena po kitos paimamos 2 kortelės. Kokia tikimybė, kad antroje kortelėje skaitmuo didesnis negu pirmoje? Ats.: 0,5.

30. Du kartus iš eilės metama moneta. Kokia tikimybė, kad bent kartą iškris herbas?

Ats.: 0,75.

31. Iš 100 elektros lempučių 5 sugadintos. Kokia tikimybė, kad iš 3 atsitiktinai paimtų lempučių visos bus geros? Ats.: 0,86.

32. Metami 2 lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad iškritusių akių suma lygi 8?

Ats.: 5/36.

33. Kiekvienas iš 3 keleivių gali įlipti į bet kurį iš 10 keleivinio traukinio vagonų. Kokia tikimybė, kad visi trys pateks į: 1) pirmą vagoną; 2) pirmus penkis vagonus; 3) skirtingus vagonus; 4) vieną vagoną? Ats.: 0,001; 1/8; 0,72; 0,01.

34. Metuose 365 dienos. Atsitiktinai parenkamas tų metų nuplėšiamo kalendoriaus lapelis. Raskite tikimybes įvykių: A – lapelyje esantis skaičius dalus iš 5; B – lapelyje esantis skaičius dalus iš 7. Ats.:71/365; 48/365.

35. Ant 25 kortelių surašyti skaičiai nuo 1 iki 25. Atsitiktinai ištraukiamos 2 kortelės. Rasti tikimybes įvykių: A – ištrauktų skaičių suma lygi 10; B – ištrauktų skaičių suma dali iš 10; C – ištrauktų skaičių suma lyginė; D – ištrauktų skaičių suma nelyginė. Ats.:1/75;7/75;12/25;13/25.

36. Dėžutėje 4 geltonos ir 6 raudonos spalvos pieštukai. Atsitiktinai ištraukiami du pieštukai. Rasti tikimybes įvykių: A – pieštukai geltonos spalvos; B – pieštukai raudonos spalvos; C – pieštukai skirtingų spalvų; D – abu pieštukai vienodos spalvos. Ats.: 2/15; 1/3; 8/15; 7/15.

37. 5 kortelėse įrašyti skaičiai 1,2,3,4,5. Atsitiktinai ištraukiama 1 kortelė, užrašomas jos skaičius ir kortelė gražinama į dėžutę. Po to atsitiktinai traukiama kita kortelė ir užrašomas jos skaičius. Rasti tikimybes įvykių: 1) pirmas skaičius mažesnis už antrą; 2) pirmas skaičius didesnis už antrą; 3) abu skaičiai lyginiai; 4) abu skaičiai lygūs; 5) abu skaičiai nelyginiai; 6) skaičių suma lygi 8; 7) skaičių suma lygi 6.

Ats.: 1) 0,4; 2) 0,4; 3) 0,16; 4) 0,2; 5) 0,36; 6) 0,12; 7) 0,2.

38. Moneta metama 3 kartus iš eilės. Kokia tikimybė, kad herbas iškris du kartus?

Ats.: 3/8.

39. Lošimo kauliukas metamas du kartus. Rasti tikimybę to, kad abu kartus iškris vienodas akučių skaičius. Ats.:1/6.

40. Iš žodžio SIGIS raidžių atsitiktinai paimamos 3 raidės. Kokia tikimybė, kad bus sudėtas žodis GIS? Ats.:1/15.

41. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai užrašius triženklį skaičių du jo skaitmenys bus vienodi?

Ats.:0,27.

42. Dėžėje yra žalios ir mėlynos spalvos kaladėlės. Tikimybė, kad 2 ištrauktos kaladėlės bus mėlynos spalvos, lygi 5/14. Kiek dėžėje buvo kaladėlių, jei mėlynos spalvos kaladėlių buvo 5?

Ats.:8.

43. Iš dėžės, kurioje yra 4 balti ir 2 geltoni rutuliai, atsitiktinai parinkdami paimame 2 rutulius. Kokia tikimybė, kad paimti rutuliai yra:
1) abudu balti,
2) vienas baltas ir vienas geltonas,
3) abudu geltoni? Ats.: 6/15; 8/15; 1/15.

44. Metami 3 žaidimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad iškritusių taškų suma lygi 6?

Ats.: 5/108.

45. Kokia tikimybė, kad iš 8 paeiliui einančių langelių, atsitiktinai parinkdami langelius ir įrašydami į juos raides E,E,L,L,O,O,T,T, gausime žodį TELELOTO? Ats.: 1/2520.

46. Kokia tikimybė, kad iš šešių paeiliui einančių langelių, atsitiktinai parinkdami langelius ir įrašydami į juos skaitmenis 1,2,2,3,3,3, gausime skaičių 123233?

Ats.; 1/60.

47. Studentas įskaitai gauti turi teisingai atsakyti ne mažiau kaip į 4 iš 6 atsitiktinai parinktų klausimų. kokia tikimybė, kad studentas gaus įskaitą, jeigu jis iš 12 klausimų išmoko tik 8 klausimus?

Ats.: 0,(72) 5 8/11.

48. Keturi keleiviai važiuoja keturių vagonų traukiniu. kokia tikimybė, kad:
1) visi keleiviai yra viename vagone,
2) trys keleiviai yra viename vagone, o ketvirtas – kitame,
3) du keleiviai yra viename vagone, o kiti du – kitame,
4) du keleiviai yra viename vagone, o kiti du – skirtinguose vagonuose,
5) visi keturi keleiviai yra skirtinguose vagonuose?

Ats.: 1) 1/64; 2) 3/16; 3) 9/64; 4) 9/16; 5) 3/32.

49. Loterijoje yra 1000 bilietų. 300 iš jų laimi. Atsitiktinai traukiamas 1 bilietas. kokia tikimybė, kad jis yra laimingas? Ats.: 3/10.

50. Bilietai sunumeruoti nuo 1 iki 34. Atsitiktinai ištrauktas 1 bilietas. Kokia tikimybė, kad jo numeris yra skaičiaus 3 kartotinis? Ats.: 11/34.

51. Aštuoniose vienodose kortelėse parašyti skaičiai 2,4,6,7,8,11,12,13. Atsitiktinai ištrauktos 2 kortelės. Kokia tikimybė, kad iš šių skaičių sudaryta trupmeną galima suprastinti?

Ats.: 5/14.

52. Į knygų lentyną atsitiktinai paimamos ir dedamos 4 istorijos ir 3 geografijos knygos. kokia tikimybė, kad vieno ir to paties dalyko (istorijos arba geografijos) knygos bus sudėtos greta?

Ats.: 2/35.

53. Iš 40 klausimų, įeinančių į egzaminų bilietus, studentas išmoko 10. Kokia tikimybė studentui ištraukti bilietą, kurio abu klausimus jis moka? Ats.: 3/52.

54. Devynios kortelės, pažymėtos skaitmenimis nuo 1 iki 9. Nesirenkant imamos 4 kortelės ir dedamos viena greta kitos. Gaunamas keturženklis skaičius. kokia tikimybė, kad jis bus lyginis?

Ats.: 4/9.

3. Veiksmai su tikimybėmis

Nesutaikomų įvykių sumos tikimybė. Sakykime, m- skaičius vienodai galimų įvykių, palankių įvykiui A, k- skaičius vienodai galimų įvykių, palankių įvykiui B, o n elementariųjų įvykių aibė. Tada $P(A)=\frac{m}{n}$, $P(B)=\frac{k}{n}$. Kadangi įvykiai A ir B yra nesutaikomi, tai įvykis A+B reiškia, kad įvyko arba tik A, arba tik B. Šiam įvykiui palankių elementariųjų įvykių yra m+k, todėl

$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B)$. Vadinasi, ***<u>nesutaikomų įvykių sumos (sąjungos) tikimybė lygi šių įvykių tikimybių sumai</u>***, t.y.

$$\boxed{P(A+B)\ 5\ P(A)+P(B)}.$$

Pavyzdžiai

1. Dėžutėje yra 50 spalvotų pieštukų: 20 raudonų, 10 mėlynų, 15 žalių ir 5 rudi. Apskaičiuokite tikimybę, kad atsitiktinai paimtas pieštukas yra mėlynas arba žalias.

Sprendimas

Pažymėkime įvykius: A – paimtas pieštukas yra mėlynas; B – paimtas pieštukas yra žalias; C – paimtas pieštukas yra mėlynas arba žalias. Akivaizdu, kad įvykis C įvyks, jeigu įvyks bent vienas iš įvykių A arba B. Vadinasi C 5 A+B. Be to, įvykiai A ir B yra nepriklausomi, todėl

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{10}{50}+\frac{15}{50}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

2. Loterijoje yra 1000 bilietų. Iš jų vienas bilietas išlošia 300 Lt, 5 bilietai po 100 Lt, 20 bilietų po 50 Lt, 50 bilietų po 20 Lt, 60 bilietų po 10 Lt ir 100 bilietų po 5 Lt. Kokia tikimybė, nusipirkus vieną bilietą, išlošti ne mažiau 50 litų.

Sprendimas

Sakykime, įvykis A – išlošta 300 Lt; B – išlošta 100 Lt; C- išlošta 50 Lt; D – išlošta ne mažiau 50 Lt. Aišku, kad D 5 A+B+C ir įvykiai A, B, C – nepriklausomi. Vadinasi

$$P(D)=P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{1000}+\frac{5}{1000}+\frac{20}{1000}=\frac{26}{1000}=0{,}026.$$

Nepriklausomų įvykių sandaugos tikimybė. Du įvykius vadinsime *<u>nepriklausomais</u>*, jeigu vieno iš jų tikimybė nepriklauso nuo to, įvyko ar neįvyko kitas įvykis. Priešingu atveju tie įvykiai vadinami *<u>priklausomais</u>*.

Sakykime įvykiai A ir B yra sutaikomi (yra bent vienas įvykis, palankus abiem įvykiams) ir nepriklausomi. m – skaičius vienodai galimų įvykių, palankių įvykiui A, k – skaičius vienodai galimų įvykių, palankių įvykiui B, o n – bendras vienodai galimų įvykių skaičius. Vadinasi, $P(A)=\frac{m}{n}$ ir $P(B)=\frac{k}{n}$, o $P(A\cdot B)=\frac{m\cdot k}{n\cdot n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{n}=P(A)\cdot P(B)$. Gavome, kad *<u>sutaikomų nepriklausomų įvykių A ir B sandaugos tikimybė lygi tų tikimybių sandaugai</u>*, t.y.

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)}.$$

Jeigu įvykiai A ir B nesutaikomi, tai $A\cap B=A\cdot B=V$ ir $P(A\cdot B)=P(V)=0$. Vadinasi, *<u>nesutaikomų įvykių sandaugos tikimybė lygi nuliui</u>*.

Pavyzdžiai

1. Vienoje dėžėje yra 4 balti ir 8 juodi rutuliai, kitoje – 3 balti ir 9 juodi rutuliai. Iš kiekvienos dėžės paimta po rutulį. Kokia tikimybė, kad abu rutuliai yra balti?

Sprendimas

Sakykime, A – iš pirmos dėžės paimtas baltas rutulys, B – iš antros dėžės paimtas baltas rutulys, C – paimti 2 balti rutuliai. Aišku, kad A ir B ir sutaikomi ir nepriklausomi įvykiai. Vadinasi,

$$P(C)=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{12}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

2. Į taikinį vienu metu šauna du šauliai. Pirmojo šaulio pataikymo tikimybė yra 0,8, o antrojo – 0,75. Kokia tikimybė, kad į taikinį pataikys abu šauliai?

Sprendimas

Sakykime, įvykis A – į taikinį pataikė pirmasis šaulys, B – į taikinį pataikė antrasis šaulys ir C – į taikinį pataikė abu šauliai. Įvykiai A ir B yra sutaikomi (gali įvykti kartu) ir nepriklausomi. Įvykis C yra lygus įvykių A ir B sandaugai, nes turi įvykti ir įvykis A ir įvykis B. Taigi, $P(C) = P(A \cdot B) =$
$= P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}75 = 0{,}6$.

3. Įrengtos dvi nepriklausomos signalizacijos, duodančios signalą per avariją. Įvykio, kad per avariją duos signalą pirmoji signalizacija, lygi 0,95, o kad antroji – 0,9. Kokia tikimybė, kad per avariją duos signalą tik viena sistema?

Sprendimas

Jeigu, įvykis A – signalą duos pirmoji sistema, tai $\overline{A}$ - pirmoji sistema signalo neduos ir jeigu B – signalą duos antroji sistema, tai $\overline{B}$ - antroji sistema signalo neduos. Sakykime, C – signalą duos pirmoji sistema, o antroji neduos, D – signalą duos antroji sistema, o pirmoji neduos ir E – signalą duos tik viena sistema. Akivaizdu, kad E 5 C+D, o $C = A \cdot \overline{B}$, o $D = \overline{A} \cdot B$. Kadangi įvykiai C ir D yra nesutaikomi, o signalizacijos nepriklausomos, tai $P(E) = P(C + D) = P(C) + P(D) = P(A \cdot \overline{B}) + P(\overline{A} \cdot B) =$
$= P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B)$; $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$.
$P(E) = 0{,}95 \cdot 0{,}1 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 = 0{,}095 + 0{,}045 = 0{,}14$.

4. Trys šauliai po vieną kartą šauna į taikinį. Kokia tikimybė, kad bent vienas šaulys pataikys į taikinį, jei pirmojo šaulio pataikymo tikimybė lygi 0,7, antrojo – 0,6 ir trečiojo – 0,8?

Sprendimas

Nagrinėsime įvykius: A – į taikinį pataikė bent vienas šaulys; A_1 - į taikinį pataikė pirmasis šaulys; A_2 - į taikinį pataikė antrasis šaulys; A_3 - į taikinį pataikė trečiasis šaulys. Tuomet $P(A_1) = 0{,}7$, $P(A_2) = 0{,}6$ ir $P(A_3) = 0{,}8$. Įvykiui A priešingas įvykis $\overline{A}$ - į taikinį nepataikė nei vienas šaulys. Apskaičiuojame $P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}024$ ir randame $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}024 = 0{,}976$.

Sutaikomų įvykių sumos tikimybė. Panagrinėkime 2 sutaikomus įvykius A ir B. Sakykime, m yra skaičius vienodai galimų įvykių, palankių įvykiui A, k – skaičius vienodai galimų įvykių, palankių įvykiui B, o r – skaičius vienodai galimų įvykių, palankių ir įvykiui A, ir įvykiui B. Jeigu n yra visų vienodai galimų įvykių skaičius, tai $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(B) = \frac{k}{n}$, $P(A \cdot B) = \frac{r}{n}$. Įvykiui A+B (įvyko bent vienas iš įvykių A arba B) palankių įvykių yra m+k-r. Todėl $P(A + B) = \frac{m + k - r}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{r}{n} =$
$= P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$. Vadinasi, *sutaikomų įvykių A ir B sumos tikimybė lygi tų tikimybių sumai be tikimybės šiems įvykiams įvykti kartu*, t.y.

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)}.$$

Pavyzdžiai

1. Du medžiotojai vienu metu nepriklausomai vienas nuo kito šauna į zuikį. Zuikis nušaunamas, jei į jį pataiko bent vienas medžiotojas. Kokia tikimybė, kad zuikis bus nušautas, jei medžiotojų pataikymo tikimybės lygios 0,8 ir 0,7?

Sprendimas

Sakykime, įvykis A – į zuikį pataiko pirmasis medžiotojas, B – į zuikį pataiko antrasis medžiotojas ir C – zuikis nušautas. Aišku, kad C 5 A+B, nes įvykis C įvyksta, jei įvyksta bent vienas iš įvykių A arba B. Įvykiai A ir B yra priklausomi, nes jie gali įvykti kartu. Vadinasi, $P(C) = P(A+B) =$ $= P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 1{,}5 - 0{,}56 = 0{,}94$.

2. Studentas laiko 2 egzaminus. Pirmojo egzamino išlaikymo tikimybė lygi 0,6, o antrojo – 0,5. Kokia tikimybė, kad studentas išlaikys bent vieną egzaminą?

Sprendimas

Jeigu A – studentas išlaikys pirmąjį egzaminą, B – studentas išlaikys antrąjį egzaminą, tai A+B – studentas išlaikys bent vieną egzaminą. Įvykiai A ir B yra nepriklausomi ir sutaikomi, vadinasi, $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0{,}6 + 0{,}5 - 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 1{,}1 - 0{,}3 = 0{,}8$.

Pratimai

1. Egzamino bilietai sunumeruoti sveikais skaičiais nuo 1 iki 30. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai moksleivio ištrauktas bilietas yra 5 arba 7 kartotinis? Ats.: 1/3.
2. Dėžėje yra 4 spalvų rutuliai: 50 baltų, 20 žalių, 20 mėlynų ir 10 raudonų. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai ištrauktas rutulys yra raudonos arba mėlynos spalvos? Ats.:0,3.
3. Dėžėje yra 250 lempučių. 100 lempučių po 100 vatų, 50 – po 60 vatų, 50 – po 25 vatus ir 50 – po 15 vatų. Apskaičiuoti tikimybę, kad atsitiktinai paimtos lemputės galia neviršija 60 vatų? Ats.:0,6.
4. Karinės mokyklos kursantas laiko šaudymo į taikinį įskaitą. Įskaita laikoma išlaikyta, jei kursantas gauna pažymį, ne mažesnį už 4 (maksimalus balas – 5). Kokia tikimybė kursantui išlaikyti egzaminą, jei žinoma, kad tikimybė už šaudymą gauti pažymį 5 lygi 0,3, o tikimybė gauti pažymį 4 lygi 0,5? Ats.:0,8.
5. Loterijoje yra 1000 bilietų: iš jų 1 bilietas išlošia 500 litų, 10 bilietų – po 100 litų, 50 bilietų – po 20 litų ir 100 bilietų – po 5 litus, o likusieji nieko neišlošia. Martynas nusipirko 1 bilietą. Kokia tikimybė, kad jis išloš ne mažiau kaip 20 litų? Ats.:0,061.
6. Iš 10 loterijos bilietų, tarp kurių 2 laimingi, atsitiktinai ištraukiami 5 bilietai. Kokia tikimybė, kad tarp ištrauktųjų bus bent vienas bilietas laimingas? Ats.:7/9.
7. Du šauliai nepriklausomai vienas nuo kito šauna į tą patį taikinį. Pirmojo pataikymo tikimybė lygi 0,8, antrojo – 0,6. Kokia tikimybė, kad į taikinį pataikys bent vienas šaulys? Ats.:0,92.
8. Metami du kauliukai. Kokia tikimybė, kad bent viename iš jų iškris 6 akys? Ats.:11/36.
9. Iš natūraliųjų skaičių eilės nuo 1 iki 1000 atsitiktinai imamas skaičius. Kam lygi tikimybė, kad jis dalus iš 3 arba iš 4? Ats.:0,5.
10. Pirmosios raketos pataikymo į taikinį tikimybė yra 0,4, antrosios – 0,6. Kokia tikimybė, kad bent viena raketa pataikys į taikinį, jei jos paleidžiamos nepriklausomai viena nuo kitos? Ats.:0,76.
11. Tikimybė, kad Jurga išlaikys matematikos egzaminą, lygi 0,7, kad neišlaikys anglų kalbos egzamino – 0,1. kokia tikimybė, kad Jurga išlaikys bent vieną egzaminą? Ats.:0,97.
12. Du medžiotojai vienu metu ir nepriklausomai vienas nuo kito šauna į zuikį. Zuikis laikomas nušautu, jeigu pataiko bent vienas medžiotojas. Kokia tikimybė, kad zuikis bus nušautas, jeigu medžiotojų pataikymo tikimybės lygios 0,8 ir 0,75? Ats.:0,95.
13. Metama moneta ir lošimo kauliukas. Kokia tikimybė, kad iškris herbas, o kauliuko atsivertusių akių skaičius bus lyginis? Ats.1/4.

14. Pirmoje dėžėje yra 12 detalių, iš jų 5 nestandartinės. Antroje dėžėje yra 20 detalių, iš jų 4 nestandartinės. Iš kiekvienos dėžės atsitiktinai išimama viena detalė. kokia tikimybė, kad abi detalės nestandartinės? Ats.: 1/12.

15. Metami du kauliukai. Kokia tikimybė, kad viename iškris nelyginis taškų skaičius, o kitame – 6 taškai? Ats.:1/12.

16. Kambaryje nepriklausomai viena nuo kitos dega 2 lemputės. Tikimybė, kad valandos bėgyje neperdegs pirmoji lemputė lygi 0,9, o antroji – 0,7. Kokia tikimybė, kad valandos bėgyje perdegs abi lemputės? Ats.:0,03.

17. Moksleivis išmoko 20 iš 25 fizikos bilietų ir 20 iš 30 istorijos bilietų. Kokia tikimybė, kad: a) moksleivis išlaikys abu egzaminus; b) moksleivis neišlaikys nei vieno egzamino?
Ats.:a)8/15; b)1/15.

18. Metamos trys monetos. Kokia tikimybė, kad visose iškris skaičius?
Ats.:1/8.

19. Du šauliai, nepriklausomai vienas nuo kito, šauna į tą patį taikinį. Pirmojo pataikymo tikimybė lygi 0,9, antrojo – 0,8. Kokia tikimybė, kad bus pataikyta į taikinį?
Ats.:0,98.

20. Iš 30 sporto mokyklos moksleivių 12 moksleivių mokosi krepšinio, 15 – tinklinio, 5 – tinklinio ir krepšinio, o kiti – kitų sporto šakų. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pasirinktas moksleivis mokosi tinklinio arba krepšinio? Ats.:11/15.

21. Raskite tikimybę, kad atsitiktinai užrašytas dviženklis skaičius bus 3 arba 5 kartotinis.
Ats.:7/15.

22. Šaulys pataiko į taikinį su tikimybe 1/3. Jis šauna į taikinį 3 kartus. Apskaičiuokite tikimybes šių įvykių:

A – šaulys nepataikė daugiau kaip 2 kartus;
B – šaulys pataikė vieną kartą;
C – šaulys pataikė du kartus;
D – šaulys pataikė ne mažiau kaip du kartus.

Ats.:8/27; 4/9; 2/9; 7/27.

23. Tikimybė, kad studentas išlaikys pirmą egzaminą, lygi 0,9, antrą – 0,85, trečią – 0,8. Kokia tikimybė studentui išlaikyti ne mažiau kaip du egzaminus? Ats.:0,941.

24. Tikimybė, kad šaulys kiekvienu šūviu pataikys į taikinį, lygi 0,7. Jis šauna 4 kartus. Kokia tikimybė, kad pirmieji du šūviai nekliudys, o kiti du kliudys taikinį?
Ats.:0,0441.

25. Metami du kauliukai. Kokia tikimybė, kad pirmajame iškris nelyginis akių skaičius, o antrajame – 5 akys? Ats.:1/12.

26. Pirmosios raketos pataikymo į taikinį tikimybė yra 0,7, antros – 0,8. Kokia tikimybė, kad abi raketos pataikys į taikinį? Ats.:0,56.

27. Tikimybė, kad pirmosios staklės per darbo valandą nesuges yra 0,9, antrosios – 0,95. Kokia tikimybė, kad per darbo valandą suges tik vienos staklės, jei abi dirba nepriklausomai viena nuo kitos? Ats.:0,14.

28. Du šauliai nepriklausomai vienas nuo kito šauna į taikinį. Pirmojo pataikymo tikimybė – 0,9, antrojo – 0,75. Kokia tikimybė, kad bent vienas šaulys pataikys į taikinį?
Ats.:0,975.

29. Sukdamas “laimės ratą” ratą vieną kartą, berniukas ką nors laimi su tikimybe 0,1. Apskaičiuokite tikimybes įvykių:

A – berniukas laimės vieną kartą, bandęs 2 kartus;
B – berniukas laimės vieną kartą, bandęs 3 kartus;
C – laimės ne mažiau kaip du kartus, bandęs 3 kartus.

Ats.:0,18; 0,243; 0,028.

30. Abiturientas laiko 2 stojamuosius egzaminus į aukštąją mokyklą. Tikimybė, kad jis išlaikys pirmąjį egzaminą, lygi 0,8, o antrąjį – 0,5. Kokia tikimybė, kad abiturientas išlaikys abu egzaminus? Ats.:0,4.

31. Egzamino biliete yra 3 klausimai. Tikimybė, kad studentas atsakys į pirmąjį ir antrąjį klausimą, lygi 0,9, o į trečiąjį – 0,8. Kokia tikimybė, kad studentas išlaikys egzaminą, jei reikia atsakyti: 1) į visus tris klausimus;
2) nors į du klausimus? Ats.:1) 0,648; 2) 0,954.

32. Žaidime 5 iš 36 laimima tada, kai atspėjami bent trys skaičiai. Kokia laimėjimo tikimybė? Ats.:0,0127.

33. Krepšininkas meta tris baudas. Pataikymo tikimybės, metant pirmą, antrą ir trečią kartą, atitinkamai lygios 2/3, 3/4 ir 4/5. Kokia tikimybė, kad du iš šių trijų metimų bus taiklūs? Ats.: 13/30.

34. Stebimas dviejų nepriklausomų įmonių akcijų kainų kitimas. Tikimybė, kad per mėnesį pakils pirmosios įmonės akcijų kaina, yra 0,6; kad antrosios įmonės, lygi 0,5. Apskaičiuokite tikimybę, kad pakils bent vienos iš įmonių akcijų kaina. Ats.:0,8.

35. Tikimybė, kad studentui reikalinga knyga yra universiteto bibliotekoje – 0,9, o fakulteto bibliotekoje – 0,5. Kokia tikimybė, kad studentas gaus knygą? Ats.:0,95.

36. Dviejose dėžutėse yra skirtingų spalvų, bet vienodo dydžio ir formos pieštukai. Pirmojoje dėžutėje yra 4 raudoni ir 6 juodi pieštukai, o antrojoje – 3 raudoni, 5 mėlyni ir 2 juodi pieštukai. Iš abiejų dėžučių atsitiktinai išimama po vieną pieštuką. Kokia tikimybė, kad abu pieštukai bus raudoni? Ats.:0,12.

4. Sąlyginė tikimybė. Dviejų įvykių sandaugos tikimybė. Pilnosios tikimybės formulė. Bejeso formulė

Įvykio B tikimybė su sąlyga, kad įvyko įvykis A, vadinama ***sąlygine tikimybe*** ir žymima P(B/A). Jeigu m – skaičius vienodai galimų elementariųjų įvykių, palankių įvykiui A, p – skaičius vienodai galimų elementariųjų įvykių, palankių įvykiui AB, o n – visų elementariųjų įvykių skaičius, tai $P(B/A)=\frac{p}{m}=\frac{p}{n}:\frac{m}{n}$. Kadangi $P(AB)=\frac{p}{n}$, o $P(A)=\frac{m}{n}$, tai

$$\boxed{P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}} \text{ arba } \boxed{P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}}.$$

Iš šių formulių gauname, kad

$$\boxed{P(AB)=P(B/A)\cdot P(A)=P(A/B)\cdot P(B)},$$

t.y. ***priklausomų įvykių sandaugos tikimybė*** lygi vieno įvykio sąlyginei tikimybei, padaugintai iš tikimybės kito įvykio, nuo kurio priklauso pirmasis įvykis.

Jeigu yra n priklausomų įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tai

$$\boxed{P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1A_2\ldots A_n)}.$$

Tarkime, kad įvykis A gali įvykti kartu su vienu iš įvykių $H_1, H_2, \ldots, H_n$, sudarančių pilną tarpusavyje nesutaikomų įvykių aibę, tai įvykis A įvyks, jeigu įvyks bent vienas iš įvykių AH_1, $AH_2, \ldots, AH_n$. Vadinasi, $A=AH_1+AH_2+\ldots+AH_n$. Įvykiai $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$ yra tarpusavyje nesutaikomi, todėl $P(A)=P(AH_1)+P(AH_2)+\ldots+P(AH_n)$. Kadangi $P(AH_1)=P(A/H_1)\cdot P(H_1)$, $P(AH_2)=P(A/H_2)\cdot P(H_2)$, ..., $P(AH_n)=P(A/H_n)\cdot P(H_n)$, tai

$$\boxed{P(A)=P(A/H_1)\cdot P(H_1)+P(A/H_2)\cdot P(H_2)+\ldots+P(A/H_n)\cdot P(H_n)},$$

t.y. įvykio A, galinčio įvykti kartu su vienu iš įvykių $H_1, H_2, \ldots, H_n$, sudarančių pilną tarpusavyje nesutaikomų įvykių aibę, tikimybė lygi kiekvieno iš tų įvykių tikimybių ir atitinkamų įvykio A sąlyginių tikimybių sandaugų sumai. Ši formulė vadinama ***pilnosios tikimybės formule***. Įvykiai $H_1, H_2, \ldots, H_n$ vadinami ***hipotezėmis***. Remiantis šia formule galima įrodyti formulę

$$\boxed{P(H_i / A) = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + \ldots + P(A/H_n)P(H_n)}},$$

kur i 5 1,2,....n. Ši formulė vadinama ***Bejeso formule***.

Pavyzdžiai

1. Metami du lošimo kauliukai – raudonas ir baltas. Apskaičiuokite tikimybę, kad baltojo kauliuko atsivertusių akių skaičius bus didesnis už 4, jei raudonojo kauliuko atsivertė 6 akys.

Sprendimas

Pažymėkime A – baltojo kauliuko atsivertusių taškų skaičius didesnis už 4 ir B - raudonojo kauliuko atsivertė 6 akys. Tada $P(B) = \frac{6}{36}$. Kadangi įvykiui AB yra tik 2 palankūs įvykiai: (6;5) ir (6;6), tai $P(AB) = \frac{2}{36}$. Lieka apskaičiuoti sąlyginę tikimybę $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2. Iš 32 kortų kaladės atsitiktinai viena po kitos ištraukiamos 2 kortos. Kokia tikimybė, kad pirmoji korta tūzas, o antroji – karalius?

Sprendimas

Pažymėkime A – pirmoji korta tūzas, B – antroji korta – karalius. Aišku, kad, $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, o $P(B/A) = \frac{4}{31}$. Tada $P(AB) = P(B/A)P(A) = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{31} = \frac{1}{62}$.

3. Dėžėje yra 6 raudoni, 5 mėlyni ir 3 balti rutuliai. Paeiliui iš dėžės imami 3 rutuliai. Apskaičiuokite tikimybę, kad pirmasis rutulys yra raudonas, antrasis – mėlynas ir trečiasis – baltas.

Sprendimas

Pažymėkime įvykius:

A – pirmasis rutulys – raudonas;

B – antrasis rutulys – mėlynas;

C – trečiasis rutulys – baltas.

Apskaičiuosime $P(A) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$. Tikimybė, kad antrasis rutulys yra mėlynas, kai pirmasis išimtas raudonas rutulys, lygi $P(B/A) = \frac{5}{13}$. Tikimybė, kad trečiasis išimtas rutulys yra baltas, kai pirmasis išimtas rutulys – raudonas, o antrasis mėlynas, lygi $P(C/A\cdot B) = \frac{3}{12}$. Vadinasi, tikimybė, kad pirmasis rutulys yra raudonas, antrasis – mėlynas ir trečiasis – baltas, lygi $P(A\cdot B\cdot C) = P(A)\cdot$ $P(B/A)\cdot P(C/A\cdot B) = \frac{3}{7}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{12} = \frac{15}{364} \approx 0{,}04$.

4. Iš 50 detalių 15 pagaminta pirmajame ceche, 20 – antrajame, o likusios – trečiajame. Pirmasis ir trečiasis cechai išleidžia puikios kokybės produkciją su tikimybe 0,9, o antrasis su tikimybe – 0,6. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimta detalė yra puikios kokybės?

Sprendimas

Pažymėkime įvykius:

A – atsitiktinai paimta detalė yra puikios kokybės;

H_1 – detalė pagaminta pirmajame ceche;

H_2 – detalė pagaminta antrajame ceche;

H_3 – detalė pagaminta trečiajame ceche.

Tada $P(H_1)=\frac{15}{50}=0{,}3,\quad P(H_2)=\frac{20}{50}=0{,}4$ ir $P(H_3)=\frac{15}{50}=0{,}3$. Įvykio A sąlyginės tikimybės duotos: $P(A/H_1)=P(A/H_3)=0{,}9,\quad P(A/H_2)=0{,}6$. Taikome pilnosios tikimybės formulę: $P(A)=P(A/H_1)\cdot P(H_1)+P(A/H_2)\cdot P(H_2)+P(A/H_3)\cdot P(H_3)=$ $=0{,}9\cdot 0{,}3+0{,}6\cdot 0{,}4+0{,}9\cdot 0{,}3=\ 0{,}27+0{,}24+0{,}27=0{,}78$.

5. Pirmojoje dėžėje yra 8 balti ir 6 juodi rutuliai, o antrojoje – 10 baltų ir 4 juodi rutuliai. Atsitiktinai pasirenkama dėžė ir rutulys. Paimtas juodas rutulys. Kokia tikimybė, kad rutulys buvo paimtas iš pirmosios dėžės?

Sprendimas

Pažymėkime įvykius:

A – paimtas juodas rutulys;

H_1 – pasirinkta pirmoji dėžė;

H_2 – pasirinkta antroji dėžė.

Tada $P(H_1)=P(H_2)=0{,}5$. Juodo rutulio paėmimo tikimybė, kai pasirinkta pirmoji dėžė, lygi $P(A/H_1)=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$ ir, kai pasirinkta antroji dėžė - $P(A/H_2)=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$. Pagal pilnosios tikimybės formulę apskaičiuojame tikimybę, kad paimtas rutulys juodas: $P(A)=P(A/H_1)\cdot P(H_1)+$ $P(A/H_2)\cdot P(H_2)=\ \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{14}+\frac{2}{14}=\frac{5}{14}$. Ieškomąją tikimybę, kad paimtas juodas rutulys iš pirmosios dėžės, apskaičiuojame pagal Bejeso formulę:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{5}{14}}=\frac{3}{5}=0{,}6.$$

Pratimai

1. 1. Žinome, kad P(A) 5 0,3, P(B) 5 0,2 ir P(A+B) 5 0,4. Apskaičiuokite tikimybes įvykių: 1) P(AB); 2) P(A/B); 3) P(B/A). Ats.:1) 0,1; 2) 0,5; 3) $\frac{1}{3}$.

2. 2. Metami du lošimo kauliukai. Apskaičiuokite tikimybę, kad iškritusių akių suma lygi 7, jei jų sandauga neviršija 13. Ats.: $\frac{6}{23}$.

3. Dėžėje yra 20 vienodo didumo rutulių. 8 balti rutuliai pažymėti skaitmeniu 1, 7 balti – skaitmeniu 2, 3 juodi skaitmeniu 1 ir 2 juodi – skaitmeniu 2. Atsitiktinai traukiamas rutulys. Apskaičiuokite tikimybę ištraukti baltą rutulį, kuris pažymėtas skaitmeniu 2.

Ats.: $\frac{7}{9}$.

4. Moneta mėtoma tol, kol atsiverčia herbas arba kol tris kartus atsiverčia skaičius. Apskaičiuokite tikimybę, kad moneta mesta tris kartus su sąlyga, kad pirmą kartą atsivertė skaičius.
Ats.: 0,5.

5. Iš 34 egzamino klausimų studentas vieną po kito traukia 2 klausimus. Egzaminą studentas išlaiko, jeigu atsako bent į vieną klausimą. Apskaičiuokite tikimybę, kad studentas išlaikys egzaminą, jeigu jis gerai žino atsakymus į 30 klausimų ir pirmuoju ištraukė “nelaimingą” klausimą.
Ats.: 0,107.

6. Iš 3 gamyklų į parduotuvę atvežė elektros lemputes. 25 % visų lempučių pagaminta pirmojoje gamykloje, 35 % lempučių – antrojoje gamykloje ir 40 % - trečiojoje gamykloje. Tikimybė, kad pirmoji gamykla pagamino brokuotą lemputę, lygi 0,01, antroji – 0,008 ir trečioji – 0,007. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimta lemputė brokuotina? Ats.:0,0081.

7. Gautos detalės, pagamintos trimis staklėmis. Pirmomis staklėmis pagaminta 40 % visų detalių, antromis – 35 %, trečiomis – 25 %. Pirmomis staklėmis pagaminta 90 % pirmos rūšies detalių, antromis – 80 % ir trečiomis – 70 %. Kokia tikimybė, kad paimta detalė bus pirmos rūšies?
Ats.: 0,815.

8. Į dėžę, kurioje buvo 2 rutuliai, įdėtas baltas rutulys. Po to iš jos atsitiktinai ištraukiamas vienas rutulys. Apskaičiuokite tikimybę, kad ištrauktas baltas rutulys, jeigu visi dėžėje buvusių rutulių spalvų kombinacijų variantai yra vienodai galimi. Ats.: $\frac{2}{3}$.

9. Dėžėje sudėtos tokios detalės: 16 detalių, pagamintų pirmajame bare, 24 – antrajame ir 20 – trečiajame. Tikimybė, kad antrajame bare pagaminta detalė yra labai geros kokybės, lygi 0,6, tikimybė, kad pirmajame ir trečiajame bare pagaminta detalė yra labai geros kokybės, lygi 0,8. Raskite tikimybę, kad paimta detalė bus labai geros kokybės. Ats.: 0,72.

10. Medžiotojas 3 kartus šauna į bėgantį šerną. Tikimybė pataikyti pirmu šūviu lygi 0,4, antru – 0,5, trečiu – 0,7. Kad šernas krinta, pataikius vieną kartą, tikimybė 0,2, du kartus – tikimybė 0,6. Pataikius tris kartus, jis tikrai krinta. Raskite tikimybę įvykio, kad šernas bus nušautas.
Ats.: 0,458.

11. Vienoje dėžėje yra 6 balti ir 4 juodi rutuliai, antroje – 7 balti ir 3 juodi, trečioje – 8 balti. Atsitiktinai pasirenkama viena iš trijų dėžių ir atsitiktinai iš jos išimamos rutulys. Išimtas baltas rutulys. Kokia tikimybė, kad jis išimtas iš antros dėžės? Ats.: $\frac{7}{23}$.

12. Medicininiai tyrimai rodo, kad 5 % vyrų ir 0,25 % moterų yra daltonikai. Iš suaugusių žmonių grupės, kurią sudarė 400 moterų ir 60 vyrų, atsitiktinai pasirinktas žmogus pasirodė esąs daltonikas. Kokia tikimybė, kad pasirinktas vyras? Ats.: $\frac{3}{4}$.

13. Iš 10 studentų, atėjusių laikyti egzaminą, 3 yra pasiruošę labai gerai, 4 – gerai, 2 – vidutiniškai ir 1 –nepasiruošęs. Egzamino bilietuose yra 20 klausimų. Labai gerai pasiruošęs studentas gali atsakyti į visus klausimus, gerai pasiruošęs – į 16 klausimų, vidutiniškai – į 10, o nepasiruošęs – į 5. Atsitiktinai iškviestas studentas atsakė į tris pateiktus klausimus. Kokia tikimybė, kad šis studentas buvo labai gerai pasiruošęs egzaminui? Ats.: 0,58.

14. Meškeriotojas turi 3 mėgstamas žūklės vietas, kurias lanko su vienoda tikimybe. Tikimybė, kad žuvis užkimba, užmetus meškerę pirmoje vietoje, yra $\frac{1}{3}$, antroje - $\frac{1}{2}$, o trečioje - $\frac{1}{4}$. Žinoma, kad meškeriotojas meškerę užmetė 3 kartus, o ištraukė tik vieną žuvį. Kokia tikimybė, kad jis žūklavo pirmoje iš mėgstamų vietų? Ats.: 0,36.

15. Grybautojas, paklydęs miške, išėjo į laukymę, iš kurios į įvairias puses eina 5 keliai. Tikimybė išeiti iš miško per valandą pirmuoju keliu lygi 0,6, antruoju – 0,3, trečiuoju – 0,2, ketvirtuoju

– 0,1 ir penktuoju – 0,1. kokia tikimybė, kad grybautojas pasuko pirmuoju keliu, jei jis išėjo iš miško tikrai per valandą? Ats.: $\frac{6}{13}$.

16. Pirmojoje dėžėje yra 1 baltas ir 4 juodi rutuliai, antrojoje – 4 balti ir vienas juodas. Iš pirmosios dėžės atsitiktinai išimtas vienas rutulys ir įdėtas į antrąją dėžę. Po to iš antrosios dėžės atsitiktinai išimtas vienas rutulys. Apskaičiuokite tikimybę, kad rutulys yra baltas.
Ats.: 0,7.

17. 10 jaunuolių išėjo grybauti. 5 iš jų baravyką randa su tikimybe 0,6, trys – su tikimybe 0,5 ir kiti du – su tikimybe 0,3. Vienas vaikinas rado baravyką. Kokia tikimybė, kad baravyką rado pirmosios grupės jaunuolis? Ats.: 0,59.

18. Pro degalinę važiuoja lengvosios ir krovininės mašinos. Krovininės mašinos sudaro 60 % visų pravažiuojančių mašinų. Tikimybė, kad prisipilti degalų užvažiuos lengvoji mašina, lygi 0,2, krovininė – 0,1. Prie degalinės privažiavo mašina. Kokia tikimybė, kad tai krovininė mašina?

Ats.: $\frac{3}{7}$.

5. Nepriklausomi pasikartojantys bandymai. Bernulio formulė

Mėtome monetą. Pirmą kartą iškrito herbas, antrą – vėl herbas, trečią – skaičius, ketvirtą – herbas ir t.t. Tai, kad ketvirtą kartą metus monetą, iškrito herbas, visiškai nepriklauso nuo to, kas iškrito, metus pirmą, antrą ir trečią kartą. Čia yra nepriklausomų pasikartojančių bandymų pavyzdys.

Kai įvykio A tikimybė kiekviename iš bandymų nepriklauso nuo kitų bandymų rezultatų, bandymai vadinami ***nepriklausomais*** įvykio A atžvilgiu.

Sakykime, atliekant nepriklausomą bandymą, tikimybė, kad įvyks įvykis A, lygi p $(0 \le p \le 1)$, o kad šis įvykis neįvyks, lygi q 5 1-p. Apskaičiuosime tikimybę $P_n(k)$, kad, atliekant n nepriklausomų bandymų, įvykis A įvyks k kartų. Tikimybė vieno sudėtinio įvykio, kur, atlikus n nepriklausomų bandymų įvykis A įvyko k kartų ir neįvyko n-k kartų, lygi nepriklausomų įvykių tikimybių sandaugai $\overbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}^{k} \cdot \overbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}^{n-k} = p^k q^{n-k}$. Bet įvykis A, atliekant n bandymų, gali įvykti skirtinguose bandymuose. Tokių skirtingų sudėtinių įvykių yra tiek, kiek galima sudaryti derinių iš n elementų po k, t.y. C_n^k. Kadangi visi šie sudėtiniai įvykiai yra nesutaikomi, tai

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}}.$$

Ši formulė vadinama ***Bernulio formule***. Jeigu reikia apskaičiuoti tikimybę, kur, atliekant n nepriklausomų bandymų, įvykis A įvyko tarp k_1 ir k_2 kartų, tai naudojama formulė

$$\boxed{P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}}.$$

Apskaičiavę tikimybes $P_n(k)$ su įvairiomis k reikšmėmis, matysime, jog pradžioje $P_n(k)$ didėja, didėjant k, o nuo tam tikros reikšmės k_0 pradeda mažėti. Vadinasi, egzistuoja toks k_0, kad $P_n(k_0 - 1) \le P_n(k_0) \le P_n(k_0 + 1)$ arba $\boxed{np + p - 1 \le k_0 \le np + p}$.

Taigi, su k_0 reikšme $P_n(k)$ įgyja didžiausią reikšmę, t.y. $\boxed{k_0}$ ***yra labiausiai tikėtinas*** įvykio A pasirodymų skaičius. Kadangi k_0 yra sveikasis skaičius, tai k_0 turi vienintelę reikšmę, kai intervalo galai nėra sveikieji skaičiai, ir k_0 turi dvi reikšmes $k_1 = np + p - 1$ ir $k_2 = np + p$, kai intervalo galai yra sveikieji skaičiai.

Kai skaičiai n ir k yra pakankamai dideli, susiduriame su tikimybės $P_n(k)$ skaičiavimo sunkumais. ***Laplaso formulės*** suteikia galimybę nors ir apytiksliai, bet žymiai paprasčiau apskaičiuoti šią tikimybę:

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{pnk}} j\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)},$$

$$\boxed{P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right)};$$

čia

$$j(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \ \Phi(x) = \int_0^x j(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Šiose formulėse $j(x)$ yra lyginė funkcija, o $\Phi(x)$ - nelyginė. Šių funkcijų reikšmės randamos iš lentelių.

Kai n yra didelis, o p labai mažas skaičius, tai tikimybė $P_n(k)$ skaičiuojama pagal ***Puasono formulę***:

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{l^k e^{-l}}{k!}}, \text{ kur } l = np$$

Pagal Puasono formulę skaičiuojamos dideliame bandymų skaičiuje retai pasitaikančių įvykių tikimybės.

Pavyzdžiai

1. Tikimybė pataikyti į taikinį lygi 0,8. Kokia tikimybė pataikyti 7 kartus iš 10?

Sprendimas

Čia n 5 10, p 5 0,8, q 5 1-0,8 5 0,2. Pagal Bernulio formulę

$$P_{10}(7) = C_{10}^7 (0{,}8)^7 (0{,}2)^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4^7}{5^7} \cdot \frac{1^3}{5^3} \approx 0{,}2.$$

2. Žaidimo kauliukas metamas 5 kartus. Kokia tikimybė, kad 4 akys iškris ne mažiau kaip 3 kartus?

Sprendimas

$$P_5(k \ge 3) = \sum_{k=3}^{5} P_5(k) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right) + C_5^5 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^0 =$$

$$5 \ \frac{1}{6^5} \cdot (10 \cdot 25 + 5 \cdot 5 + 1) = \frac{276}{6^5} = \frac{23}{648} \approx 0{,}035.$$

3. Moneta metama 1000 kartų. Apskaičiuokite labiausiai tikėtiną herbo pasirodymų skaičių.

Sprendimas

Čia n 5 1000, p 5 0,5, tai np+p 5 $1000 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 = 500{,}5$. Vadinasi, $500{,}5 - 1 \le k_0 \le 500{,}5$ ir $k_0 = 500$. Gavome, kad labiausiai tikėtinas herbo atsivertimų skaičius yra 500.

4. 10 % parduotų televizorių per garantinį laikotarpį reikalauja remonto. Kokia tikimybė, kad iš 64 parduotų televizorių 6 pareikalaus garantinio remonto?

Sprendimas

Čia n 5 64, k 5 6, p 5 0,1, q 5 0,9. Skaičiuojame $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{6 - 64 \cdot 0{,}1}{\sqrt{64 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} \approx -0{,}17$; lentelėje randame, kad $j(-0{,}17) = j(0{,}17) \approx 0{,}3932$. Įstatome į Laplaso formulę $P_{64}(6) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} j(x) =$

$= \frac{1}{2{,}4} \cdot 0{,}3932 \approx 0{,}1638.$

5. Tikimybė, kad pagaminta detalė yra nestandartinė, lygi 0,005. Apskaičiuokite tikimybę, kad tarp atsitiktinai paimtų 1000 detalių bus 4 nestandartinės detalės.

Sprendimas

Kadangi n 5 1000 yra palyginti didelis, o p 5 0,005 pakankamai mažas skaičius, tai $P_{1000}(4)$ skaičiuosime pagal Puasono formulę. Apskaičiuojame $l = np = 1000 \cdot 0{,}005 = 5$ ir iš lentelės randame $P_{1000}(4) \approx 0{,}1755$.

Pratimai

1. Šaulio pataikymo į taikinį tikimybė lygi 0,6. Raskite tikimybę, kad, šovęs 4 kartus, jis pataikys ne mažiau kaip 3 kartus. Ats.: 0,4752.

2. Sėklų daigumas lygus 60 %. Kokia tikimybė, kad iš 5 sėklų sudygs ne mažiau kaip keturios? Ats.: 0,337

3. Tikimybė išlošti loterijoje, turint vieną bilietą, lygi 0,15. Kokia tikimybė, kad išloš bent vienas iš 4 bilietų? Ats.: 0,478.

4. Tikimybė, kad šaulys pataikys į taikinį, lygi 0,8. Šaulys į taikinį šovė 5 kartus. Kokia tikimybė, kad pataikyta tris kartus? Ats.: 0,2048.

5. Krepšininkas meta keturias baudas. Kokia tikimybė, kad bus taiklūs ne mažiau kaip trys metimai, jeigu bet kurį kartą metant baudą šio krepšininko taiklaus metimo tikimybė yra 0,75? Ats.:0,738.

6. Kiekvieną kartą šaunant į taikinį pataikymo tikimybė yra 0,6. Kokia tikimybė, kad šaunant 5 kartus ne mažiau kaip vienas ir ne daugiau kaip trys šūviai bus taiklūs? Ats.:0,6528.

7. Moneta metama 10 kartų. Kokia tikimybė, kad herbas iškris lygiai 3 kartus? Ats.:15/128.

8. Dėžutėje yra 6 balti ir 9 juodi rutuliukai. Vienas rutuliukas išimamas, įsidėmima jo spalva ir dedamas atgal į dėžutę. Paskui iš jos vėl išimamas vienas rutuliukas, įsidėmima jo spalva ir pastarasis taip pat dedamas atgal į dėžutę. Po to iš dėžutės išimamas dar vienas rutuliukas, vėl įsidėmima jo spalva ir pastarasis taip pat dedamas atgal į dėžutę. Kokia tikimybė, kad visų trijų išimtų rutuliukų spalva balta? Ats.:8/125.

9. Šviestuve yra 6 elektros lemputės. Tikimybė, kad lemputė perdegs per metus lygi 0,2. Kokia tikimybė, kad per metus perdegs 2 elektros lemputės? Ats.:768/3125.

10. Lošimo kauliukas metamas 3 kartus. Kokia tikimybė, kad 6 taškai iškris 2 kartus? Ats.:5/72.

11. Turime sąrašą Lietuvos šeimų, auginančių po 3 vaikus. Atsitiktinai iš to sąrašo pasirenkame vieną šeimą. Apskaičiuokite tikimybes įvykių: 1) visi trys vaikai šeimoje – berniukai; 2) šeimoje du berniukai ir viena mergaitė; 3) šeimoje dvi mergaitės ir vienas berniukas; 4) šeimoje trys mergaitės. (Laikykite, kad mergaitės ir berniuko gimimo tikimybės yra lygios). Ats.:1) 1/8; 2) 3/8; 3) 3/8; 4) 1/8.

12. Laikant egzaminą reikia atsakyti į 6 klausimus. Duoti keturi galimi kiekvieno klausimo atsakymai, kurių vienas yra teisingas. Apskaičiuokite tikimybę spėjant atsakyti bent į 5 klausimus.
Ats.: $19/2^{12}$.

13. Tikimybė išlošti loterijoje lygi 0,08. Kokia tikimybė, kad iš 5 pirktų bilietų du bus laimingi? Ats.: 0,05.

14. Tikimybė, kad šaulys pataikys į taikinį, lygi 0,8. Šaulys į taikinį šovė 5 kartus. Kokia tikimybė, kad pataikyta tris kartus? Ats.:0,2048.

15. Du vienodo pajėgumo šachmatininkai žaidžia šachmatais. Kas labiau tikėtina: iš 4 partijų išlošti 2 ar iš 6 partijų išlošti 3? Ats.:iš 4 išlošti 2.

16. Kokia tikimybė, kad 10 kartų metus lošimo kauliuką trys akys atsivers ne daugiau kaip 2 kartus? Ats.:0,775.

17. Tikimybė, kad birželio mėnesį diena yra giedra, lygi 0,8. Kokia tikimybė, kad iš 7 savaitės dienų 5 bus giedros? Ats.:0,2753.

18. Tikimybė, kad šaulys pataikys į taikinį, lygi 0,8. Kokia tikimybė, kad bus taiklūs 9 iš 10 šūvių? Ats.: $2\cdot(4/5)^9$.

19. Keturis kartus metame lošimo kauliuką. Kiekvieną kartą žiūrime, ar iškris daugiau nei 4 taškai. Apskaičiuokite tikimybes, kad stebimas įvykis įvyks: 1) du kartus; 2) tris kartus; 3) bent du kartus; 4) bent tris kartus. Ats.:1) 8/27; 2) 8/81; 3) 11/27; 4) 1/9.

20. Žaidžiame su lygiaverčiu priešininku. Kas labiau tikėtina: laimėti 4 partijas iš 5 ar bent 6 iš 8? Ats.:4 iš 5.

21. Gamyklos produkcijos brokas sudaro 7,5 %. Atsitiktinai paimtos 39 detalės. Raskite labiausiai tikėtiną standartinių detalių skaičių. Ats.: 36 ir 37.

22. Mokymo rūmuose yra 410 dienos šviesos lempų. Tikimybė, kad lempa perdegs per metus, lygi $\frac{1}{9}$. Koks yra labiausiai tikėtinas skaičius lempų, kurias per metus teks pakeisti naujomis?
Ats.: 45.

23. Lošimo kauliukas metamas 240 kartų. Kokį labiausiai tikėtiną skaičių kartų atsivers 6 akys? Ats.:40.

24. Tikimybė, kad baravykas sukirmijęs, lygi 0,2. Rasta 50 baravykų. Koks tikėtiniausias sveikų baravykų skaičius? Ats.: 40.

25. 80 % įmonės produkcijos yra aukščiausios rūšies. Kokia tikimybė, kad iš 900 šios įmonės gaminių aukščiausios rūšies bus ne mažiau kaip 700? Ats.: 0,9525.

26. Tikimybė, kad knygos puslapyje yra klaidų, lygi 0,0025. Tikrinama 800 puslapių knyga. Kokia tikimybė, kad knygoje bus nuo 3 iki 5 puslapių su klaidomis? Ats.: 0,3068.

27. Elektroninėje schemoje yra 800 elementų, dirbančių nepriklausomai vienas nuo kito. Tikimybė, kad per savaitę kuris nors elementas suges, yra 0,003. Kokia tikimybė, kad per savaitę suges 2 elementai? Ats.: 0,26

6. Atsitiktiniai dydžiai ir jų charakteristikos

Dažnai bandymo rezultatas yra atsitiktinis įvykis, kurį atitinka koks nors skaičius. Pavyzdžiui, mesdami lošimo kauliuką, gauname vieną iš skaičių 1, 2, 3, 4, 5, 6. Atvirtusių akių skaičių laikysime atsitiktiniu dydžiu. Atsitiktiniais dydžiais galime laikyti ir žmogaus ūgį, saulėtų dienų skaičių per mėnesį, autoavarijų skaičių per savaitę ir t.t.

Atsitiktinis dydis yra toks dydis, kuris po bandymo įgyja konkrečią skaitinę reikšmę. Norint nusakyti atsitiktinį dydį, reikia žinoti ne tik jo reikšmes, bet ir kaip dažnai tos reikšmės įgyjamos, t.y. reikia žinoti tikimybes, su kuriomis tos reikšmės įgyjamos. Atsitiktinius dydžius, kurie įgyja baigtinį skaičių reikšmių, vadinsime *diskrečiaisiais atsitiktiniais dydžiais*. Atsitiktinius dydžius žymėsime raidėmis X, Y, Z ir t.t. Atsitiktinio dydžio X reikšmes žymėsime raidėmis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, o tikimybes, su kuriomis tos reikšmės įgyjamos, žymėsime $p_1, p_2, \mathbf{K}, p_n$. Lentelė, kurioje pateikiamos atsitiktinio dydžio visos galimos reikšmės ir tų reikšmių įgijimo tikimybės, vadinama ***atsitiktinio dydžio skirstiniu***

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Įvykiai “ A_1 - atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę x_1”, “ A_2 - atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę x_2”, ... , “ A_n - atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę x_n” sudaro pilnąją nesutaikomų įvykių aibę, todėl tų įvykių suma yra būtinas įvykis:

$$P(A_1 + A_2 + \mathbf{K} + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \mathbf{K} + P(A_n) = \boxed{p_1 + p_2 + \mathbf{K} + p_n = 1}$$

Atsitiktinio dydžio ***matematine viltimi (vidurkiu)*** vadinsime atsitiktinio dydžio reikšmių ir jų tikimybių sandaugų sumą:

$$\boxed{MX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \mathbf{K} + x_n p_n}.$$

Binominio skirstinio matematinė viltis $\boxed{MX\ 5\ np}$.

Atsitiktinio dydžio X ***nuokrypiu*** nuo matematinės vilties MX vadinsime skirtumą X-MX. Atsitiktinio dydžio X nuokrypio kvadrato matematinę viltį vadinsime šio dydžio ***dispersija*** ir žymėsime DX:

$$\boxed{DX = M(X - MX)^2}.$$

Binominio skirstinio dispersija $\boxed{DX\ 5\ npq}$.

Dispersija parodo, kaip atsitiktinio dydžio reikšmės yra “išsibarsčiusios” apie jo matematinę viltį, t.y. jei DX yra nedidelis skaičius, tai X reikšmės artimos matematinei vilčiai, o jei DX yra didelis skaičius, tai X reikšmės labai skiriasi nuo matematinės vilties MX. Šiuo atveju, statistiškai vertinant X reikšmes, negalima teigti, jog MX savybės budingos daugeliui reikšmių.

Atsitiktinio dydžio ***vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu*** vadinsime dydį $\boxed{s = \sqrt{DX}}$.

Atsitiktinio dydžio skirstinys gali būti pavaizduotas grafiškai tokiu būdu: Ox ašyje atidedame atsitiktinio dydžio X reikšmes, o Oy ašyje – jų atitinkamas tikimybes. Laužtė, jungianti taškus $(x_i; y_i)$, vadinama ***pasiskirstymo daugiakampiu***, arba ***poligonu***.

Pavyzdžiai

1. Metamos dvi monetos. Atsitiktinis dydis X yra skaičiaus atsivertimų skaičius. Užrašykite šio atsitiktinio dydžio skirstinį.

Sprendimas

Šio bandymo elementarieji įvykiai yra: hh, hs, sh, ss. Atsitiktinis dydis X gali įgyti reikšmes 0, 1, 2. Šios reikšmės įgyjamos su tikimybėmis $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$. Užrašome atsitiktinio dydžio X skirstinį:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2. Į taikinį šaunama tris kartus. Atsitiktinis dydis X yra pataikymų į taikinį skaičius. Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį, jei žinoma, kad kiekvieno pataikymo į taikinį tikimybė lygi 0,2.

Sprendimas

Atsitiktinis dydis X gali įgyti reikšmes 0, 1, 2, 3. Turime nepriklausomų bandymų seriją, todėl tikimybes skaičiuosime pagal Bernulio formulę: $P_3(0)=(0{,}8)^3=0{,}512$; $P_3(1)=C_3^1(0{,}2)^1(0{,}8)^2=0{,}384$; $P_3(2)=C_3^2(0{,}2)^2(0{,}8)^1=0{,}096$; $P_3(3)=C_3^3(0{,}2)^3(0{,}8)^0=0{,}08$. Sudarome lentelę:

X	0	1	2	3
P	0,512	0,384	0,096	0,08

Patikrinimas: 0,512+0,384+0,096+0,08 5 1.

3. Duotas atsitiktinio dydžio skirstinys:

X	-2	-1	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Apskaičiuokite matematinę viltį ir dispersiją.

Sprendimas

$$MX=-2\cdot\frac{1}{6}-1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=0.$$

Sudarome atsitiktinių dydžių X-MX ir $(X\text{-}MX)^2$ skirstinius;

X-MX	-2	-1	1	2
$(X\text{-}MX)^2$	4	1	1	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$DX=4\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{6}=2.$$

4. Metamos trys monetos: 2 centų, 5 centų ir 10 centų. Atsitiktinis dydis X – atvirtusių centų suma. Raskite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį ir dispersiją. Apskaičiuokite tikimybes įvykių: $P\{X\le 10\}$; $P\{12\le X\}$; $P\{5<X<12\}$.

Sprendimas

Galimos tokios bandymo baigtys: hhh, 2hh, h5h, hh10, 25h, 2h10, h510, 2510. Visos bandymo baigtys vienodai galimos, todėl $p_i=\frac{1}{8}$. Sudarome lentelę:

X	0	2	5	7	10	12	15	17
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$MX=\frac{1}{8}(0+2+5+7+10+12+15+17)=8{,}5.$$

DX skaičiavimui sudarome naują skirstinį:

$(X\text{-}MX)^2$	$(0\text{-}8{,}5)^2$	$(2\text{-}8{,}5)^2$	$(5\text{-}8{,}5)^2$	$(7\text{-}8{,}5)^2$	$(10\text{-}8{,}5)^2$	$(12\text{-}8{,}5)^2$	$(15\text{-}8{,}5)^2$	$(17\text{-}8{,}5)^2$
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$DX=\frac{1}{8}(72{,}25+42{,}25+12{,}25+2{,}25+2{,}25+12{,}25+42{,}25+72{,}25)=\frac{1}{8}\cdot 258=32{,}25.$$

$$P\{X \le 10\} = P\{X = 0\} + P\{X = 2\} + P\{X = 5\} + P\{X = 7\} + P\{X = 10\} = \frac{5}{8}.$$

$$P\{12 \le X\} = P\{X = 12\} + P\{X = 15\} + P\{X = 17\} = \frac{3}{8}.$$

$$P\{5 < X < 12\} = P\{X = 7\} + P\{X = 10\} = \frac{1}{4}.$$

Pratimai

1. Yra 100 loterijos bilietų. 30 bilietų laimi po 1 Lt, 10 bilietų po 5 Lt, 2 bilietai po 25 Lt, likusieji – be laimėjimo. Laimėjimo dydis yra atsitiktinis dydis. Apskaičiuokite šio dydžio matematinę viltį (t.y. koks laimėjimas vidutiniškai tenka vienam bilietui) Ats.: 1,3 Lt.

2. Raskite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį (vidurkį), kai duotos jų pasiskirstymo lentelės: 1)

X	1	2	3	4
P	0,4	0,3	0,2	0,1

2)

X	2	4	6	8	10
P	0,2	0,1	0,2	0,1	0,4

Ats.: 1) 2; 2) 6,8.

3. Atsitiktinis dydis X yra pasirodžiusių taškų skaičius metus lošimo kauliuką. Raskite jo matematinę viltį. Ats.:3,5

4. Iš dėžės, kurioje yra 2 raudoni ir 3 juodi rutuliai, atsitiktinai ištraukiami 2 rutuliai. Atsitiktinis dydis – raudonų rutulių skaičius. Raskite matematinę viltį.
Ats.:0,8.

5. Parduota 1000 loterijos bilietų po 1 Lt. Iš jų du bilietai laimingi; vienas laimėjimas – 500 litų, kitas – 100 litų. Apskaičiuokite vidutinį laimėjimo dydį (laimėjimo matematinę viltį), jei pirktas 1 bilietas. Ats.:-0,4.

6. Raskite atsitiktinių dydžių matematinę viltį ir dispersiją, kai duotos jų pasiskirstymo lentelės:

1)

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2)

X	-1	0	1
P	0,3	0,4	0,3

3)

X	5	7	10	15
P	0,2	0,5	0,2	0,1

4)

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

5)

X	4	6	7
P	0,7	0,2	0,1

6)

X	0	1	2	3
P	0,4	0,3	0,2	0,1

7)

X	5	7	10	15
P	0,2	0,5	0,2	0,1

8)

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Ats.:1) 3,5; 2,9; 2) 0; 0,6; 3) 8; 8; 4) 0,1; 0,3; 5) 4,7; 1,2; 6) 1; 1; 7) 8; 8; 8) 0,1; 0,3.

7. Loterijos skritulys suskirstytas į 10 vienodų sektorių, iš kurių 1 sektorius pažymėtas skaičiumi 10, 1 – 8, 1 – 7, 1 – 6, 2 – 4, 1 – 1, 3 – 0. Bilietas, leidžiantis sukti ratą 1 kartą, kainuoja 6 centus. Išsuktas skaičius nurodo, kiek žmogus , pasukęs ratą, gauna centų. Sudarykite laimėjimo dydžio pasiskirstymo lentelę, raskite vidutinį laimėjimo dydį, laimėjimo dydžio dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį. Ats.:-2; 12,2; 3,5.

8. Metami 2 lošimo kauliukai. X – atvirtusių taškų suma. Sudarykite atsitiktinio dydžio skirstinį ir pavaizduokite jį grafiškai (nubraižykite poligoną). Raskite matematinę viltį, dispersiją ir

vidutinį kvadratinį nuokrypį. Apskaičiuokite tikimybes įvykių $\{X \le 6\}$, $\{MX - s \le X \le MX + s\}$.

Ats.: 7; $5\frac{5}{6}$; 2,4; $\frac{5}{12}$; $\frac{2}{3}$.

9. Metamos dvi monetos. Atsitiktinis dydis X yra herbo atsivertimų skaičius. Užrašykite šio dydžio skirstinį.

10. Loterijoje yra 1000 bilietų. 200 bilietų laimi po 1 Lt, 100 bilietų – po 5 Lt, 80 bilietų – po 20 Lt, 20 bilietų – po 50 Lt. Laimėjimo dydis X yra atsitiktinis dydis. Užrašykite jo skirstinį ir apskaičiuokite matematinę viltį. Ats.:3,3.

11. Iš dėžės, kurioje yra 2 balti ir 4 juodi rutuliai, atsitiktinai išimami 4 rutuliai. Atsitiktinis dydis X yra ištrauktų juodų rutulių skaičius. Apskaičiuokite šio atsitiktinio dydžio vidurkį, dispersiją ir kvadratinį nuokrypį. Ats.:8/3; 16/45; 0,6.

12. Metamas lošimo kauliukas. Jei atsiverčia mažiau nei 5 akys, tai Algis moka Martynui 10 centų, jei atsiverčia daugiau nei 4 akys, tai Algis gauna iš Martyno 20 centų. Atsitiktinis dydis – Algio išlošta suma. Raskite atsitiktinio dydžio matematinę viltį ir dispersiją.

Ats.:0; 200.

13. Iš dėžės, kurioje yra 2 balti ir 3 mėlyni rutuliai, atsitiktinai ištraukiami du rutuliai. Raskite MX, kai X – ištrauktų baltų rutulių skaičius. Ats.:0,8.

14. Loterijos skritulys suskirstytas į 16 vienodų sektorių, iš kurių vienas sektorius pažymėtas skaičiumi 14, du sektoriai pažymėti skaičiumi 9, trys sektoriai pažymėti skaičiumi 4, keturi sektoriai skaičiumi 1, visi likę sektoriai pažymėti skaičiumi 0. Bilietas, leidžiantis sukti ratą vieną kartą, kainuoja 4 litus. X – laimėjimo dydis – išsuktas skaičius, minus bilieto kaina. Apskaičiuokite matematinę viltį ir dispersiją. Raskite tikimybes įvykių: A – laimėjimo dydis $X<0$; B – laimėjimo dydis $-3 \le X < 10$. Ats.:-1; 133/8; 5/8; 9/16.

15. Kioske yra 34 žurnalai “Moteris” po 4,5 Lt, 36 žurnalai “Ji” po 3,5 Lt, 16 žurnalų “Laima” po 5 Lt ir 14 žurnalų “Ieva” po 10 Lt. Atsitiktinis dydis X – paimto žurnalo kaina. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį. Ats.:4,99.

16. Medžiotojas nutarė pabandyti laimę, turėdamas tik keturis šovinius. Pataikymo į bėgantį kiškį tikimybė lygi 0,25. Atsitiktinis dydis X – šūvių į kiškį iki pirmo pataikymo skaičius. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį ir dispersiją. Ats.:2,05; 1,57.

17. Į taikinį šaunama tris kartus. Pataikymo tikimybė 0,4. Atsitiktinis dydis X – pataikymų skaičius. Raskite matematinį vidurkį ir dispersiją. Ats.:1,2; 0,72.

18. Metamos 3 monetos: 1 cento, 2 centų ir 5 centų. Atsitiktinis dydis X – atvirtusių centų suma. Raskite atsitiktinio dydžio X pasiskirstymą, pavaizduokite jį grafiškai, apskaičiuokite matematinę viltį ir dispersiją. Apskaičiuokite tikimybes įvykių: $\{X \le 3\}$, $\{5 \le X\}$, $\{2<X<5\}$.

Ats.:4; 15/2; 1/2; 1/2; 1/8.

19. Moneta metama 3 kartus. X – herbo pasirodymų skaičius. Raskite atsitiktinio dydžio pasiskirstymą. Pavaizduokite jį grafiškai. Apskaičiuokite matematinę viltį ir dispersiją..

Ats.:3/2; 3/4.

20. Krepšininkas, kuris mesdamas baudą pataiko į krepšį su tikimybe 2/3, meta tris baudas. X – pataikymų skaičius. Apskaičiuokite matematinę viltį ir dispersiją. Ats.:2; 2/3.

21. Moneta metama 5 kartus. Atsitiktinis dydis X – skaičiaus pasirodymų skaičius. Apskaičiuokite matematinę viltį ir dispersiją. Ats.:2,5; 1,25.

22. Meškeriotojas kiekvienu meškerės užmetimu pagauna žuvį su tikimybe1/2. Atsitiktinis dydis X – pagautų žuvų skaičius 6 kartus užmetus meškerę. Raskite matematinę viltį ir dispersiją.

Ats.:3; 1,5.

23. Metamos 4 monetos . Atsitiktinis dydis X – skaičiumi atvirtusių monetų skaičius. Raskite matematinę viltį ir dispersiją. Ats.:2; 1.

24. Metamos trys monetos: 10 centų, 20 centų ir 50 centų. Atsitiktinis dydis X – atvirtusių centų suma. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio matematinę viltį ir dispersiją.

Ats.:40; 750.

25. Laimės ratas padalytas į 16 lygių sektorių, kurie pažymėti skaičiais: 5 – 0, 4 – 2, 6 – 5 ir 1 – 10. Šie skaičiai reiškia laimėjimo dydį litais. Bilietas, leidžiantis sukti laimės ratą, kainuoja 2 Lt. Atsitiktinis dydis X – išsukto laimėjimo ir bilieto kainos skirtumas. Sudarykite atsitiktinio dydžio skirstinio lentelę. Pavaizduokite atsitiktinio dydžio skirstinį grafiškai. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio matematinę viltį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

Ats.:1; 61/8; 2,76.

26. Turime 10 vienodų kortelių, ant kurių užrašyti skaičiai 1,6,1,4,4,6,4,4,6,1. Atsitiktinai ištraukiama viena kortelė, užrašomas skaičius ir kortelė dedama atgal. Po to ištraukiama antra kortelė, užrašomas skaičius ir kortelė dedama atgal. Atsitiktinis dydis – užrašytų skaičių suma.Apskaičiuokite matematinę viltį ir dispersiją. Ats.:7,4; 412,64.

27. Lošimo kauliukas metamas 3 kartus. Atsitiktinis dydis X yra atvirtusių "šešiukių" skaičius. Sudarykite atsitiktinio dydžio skirstinį. Apskaičiuokite matematinę viltį ir dispersiją.

Ats.:1,08

28. Moneta metama 4 kartus. Atsitiktinis dydis X yra atvirtusių herbu monetų skaičius. Sudarykite atsitiktinio dydžio skirstinį. Apskaičiuokite matematinę viltį ir dispersiją.

Ats.:2; 1.

29. Šaulys šauna į taikinį 4 kartus. Pataikymo tikimybė lygi 0,9. Atsitiktinis dydis X yra pataikymų skaičius. Raskite atsitiktinio dydžio matematinę viltį ir dispersiją.

Ats.:3,6; 0,36.

30. Tikimybė, kad verslininko sandoris sėkmingas, lygi 0,5. Tarkime, kad 5 nepriklausomi verslininkai sudarė po 1 sandorį. Sudarykite sėkmingų sandorių skaičiaus X skirstinį. raskite matematinę viltį ir dispersiją. Ats.:2,5; 1,25.

31. Tikimybė, kad tam tikros rūšies elementas veiks bent 15 dienų, yra lygi 0,8. Nupirkti 4 tokie elementai. Tegu X yra elementų, veikusių bent 15 dienų, skaičius. Raskite atsitiktinio dydžio skirstinį, vidurkį ir dispersiją. Ats.:3,2; 0,64.

Įvairūs uždaviniai

1. Iš 20 gaminių 3 yra nestandartiniai. Atsitiktinai pasirenkami 4 gaminiai. Kokia tikimybė, kad visi 4 gaminiai standartiniai? Ats.:≈0,49.
2. Į egzamino bilietus įtraukta 60 klausimų. Studentas išmoko 50. Kokia tikimybė, kad studentas atsakys: a) į abu bilieto klausimus; b) tik į vieną klausimą; c) neatsakys nė į vieną?

   Ats.:a) ≈0,69; b)≈0,28; c)≈0,03.
3. Kokia tikimybė, kad metant 2 žaidimo kauliukus, iškritusių akių suma bus ne mažesnė kaip 5? Ats.:5/6.
4. Trys šauliai – Antanas, Benas ir Cezaris šauna į taikinį po vieną kartą. Antano, Beno ir Cezario pataikymo į dešimtuką tikimybės yra lygios 1/4, 1/5 ir 1/6. Kokia tikimybė, kad pataikys į dešimtuką bent vienas šaulys? Ats.:0,5.
5. Kortelėse surašyti natūralieji skaičiai nuo 1 iki 15 imtinai. Atsitiktinai ištrauktos dvi kortelės. kokia tikimybė, kad tose kortelėse parašytų skaičių suma lygi 10?

   Ats.:0,0381.
6. Dėžėje yra 6 vienodi kubiukai, paeiliui sunumeruoti nuo 1 iki 6. Kubiukai atsitiktinai imami iš dėžės ir dedami į vieną eilę. Kokia tikimybė, kad jie bus išdėstyti numerių didėjimo tvarka?

   Ats.:1/720.
7. Iš 6 nupirktų bilietų 4 į pirmąją eilę. Kokia tikimybė, kad iš atsitiktinai ištrauktų 3 bilietų du yra į pirmąją eilę? Ats.:0,6.

8. Darbininkas aptarnauja 3 stakles. Tikimybė, kad per pamainą suges pirmosios staklės, lygi 0,15, antrosios – 0,1 ir trečiosios – 0,12. Raskite tikimybę, kad per pamainą suges bent vienos staklės.
Ats.:0,3268.

9. Studentas iš 30 egzamino klausimų moka 25. Raskite tikimybę, kad studentas atsakys į visus tris dėstytojo pateiktus klausimus. Ats.:115/203.

10. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai pasirinktas dviženklis skaičius dalijasi iš 3 arba iš 4?
Ats.:22/45

11. Du šauliai nepriklausomai vienas nuo kito šauna po vieną kartą į tą patį taikinį. Pirmojo pataikymo tikimybė lygi 0,7, antrojo – 0,9. Kokia tikimybė, kad pataikys bent vienas?
Ats.:0,97.

12. Ant suolo atsitiktinai susėda 5 studentai. Kokia tikimybė, kad Saulius ir Agnė sėdės greta?
Ats.:0,4.

13. Stalo teniso turnyre dalyvauja 12 studentų, burtais paskirstytų i du pogrupius po 6 žaidėjus. kokia tikimybė, kad 3 stipriausi žaidėjai pateks į tą patį pogrupį?
Ats.:3/11/

14. Iš 36 kortų kaladės, kurioje yra 4 tūzai, ištrauktos 3 kortos. Kokia tikimybė, kad tarp jų bus 2 tūzai? Ats.:0,03.

15. Dėžutėje yra 3 raudoni ir 2 mėlyni pieštukai. Atsitiktinai iš jos išimami 2 pieštukai. Atsitiktinis dydis X yra išimtų raudonų pieštukų skaičius. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio matematinę viltį ir dispersiją. Ats.:1,2; 0,36.

16. Iš dėžės, kurioje yra 2 balti ir 4 raudoni rutuliai, atsitiktinai ištraukiami 2 rutuliai. Atsitiktinis dydis X yra ištrauktų baltų rutulių skaičius. Apskaičiuokite matematinę viltį ir dispersiją.
Ats.:2/3; 16/45.

17. Loterijai atspausdinta 1000 bilietų. 200 jų laimi po 1 Lt, 100 - po 5 Lt, 80 - po 20 Lt, 20 – po 50 Lt. Kiek turi kainuoti bilietas, kad loterija būtų nenuostolinga?
Ats.:3,3 Lt.

18. Metamas lošimo kauliukas ir 2 centų moneta. Atsitiktinis dydis X yra atvirtusių taškų ir centų suma. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio matematinę viltį ir dispersiją.
Ats.:4,5; 3,9.

19. Moneta metama 6 kartus. Kokia tikimybė, kad herbas iškris 4 kartus?
Ats.:15/64.

20. Šaulys šauna į taikinį 3 kartus. Pataikymo tikimybė lygi 0,6. Atsitiktinis dydis X yra pataikymų skaičius. Raskite atsitiktinio dydžio matematinę viltį ir dispersiją.
Ats.:1,8; 1,2.

STATISTIKOS PAGRINDAI

Žodis *statistika* yra kilęs iš lotyniško žodžio *status* – valstybė. Statistika plačiąja prasme reiškia skaitinės informacijos rinkimą, sutvarkymą ir tyrimą. Matematinės statistikos uždavinys yra: ištyrus atsitiktinai parinktą objektų aibės dalį pagal tam tikrą požymį, gauti pagrįstas išvadas apie šio požymio pasiskirstymą visoje objektų aibėje.

1. Generalinė aibė ir imtis

Generalinė aibė yra pagal tam tikrą požymį tiriamų objektų aibė. Atsitiktinai parinkta generalinės aibės dalis vadinama *imtimi*.

Imties tūris n yra imties elementų skaičius. Jei imties elementai surašyti didėjančia tvarka, tai turime *sutvarkytą imtį*, kuri vadinama imties *variacine eilute*.

Didžiausios ir mažiausios imties reikšmių skirtumas vadinamas *imties pločiu*:

$$\boxed{r = x_d - x_m}.$$

Didžiausios ir mažiausios imties reikšmių aritmetinis vidurkis vadinamas *imties centru*;

$$\boxed{c = \frac{x_d + x_m}{2}}.$$

Imties mediana m vadinama variacinės eilutės vidurinioji reikšmė. Jei tokios reikšmės dvi, tai imamas jų aritmetinis vidurkis.

Stebėjimo duomenys paprastai surašomi į *dažnių lentelę*, kurios pirmojoje eilutėje rašomos skirtingos imties reikšmės x_k, o antroje – kiek kartų ši reikšmė pasikartoja. Skaičius, rodantis, kiek kartų elementas pasikartoja imtyje, vadinamas to elemento *dažniu*. Imties elemento *santykiniu dažniu* f_k vadinamas imties elemento dažnio m_k ir imties elementų skaičiaus n santykis:

$$\boxed{f_k = \frac{m_k}{n}}.$$

Dažnių lentelę galima pavaizduoti grafiškai. Tereikia abscisių ašyje atidėti imties reikšmes, o ordinačių ašyje – jų atitinkamus dažnius arba santykinius dažnius. Kreivė, jungianti atidėtus taškus, ir yra dažnių lentelės grafinis vaizdas. Ši kreivė vadinama *poligonu*.

Pavyzdys

Duota imtis : 5, 11, 6, 7, 5, 5, 9, 6, 7, 7, 6, 10, 6, 8, 10, 9. Sudarykite imties variacinę eilutę, apskaičiuokite imties plotį, centrą ir medianą. Sudarykite dažnių lentelę, apskaičiuokite santykinius dažnius. Apskaičiuokite dažnių bei santykinių dažnių sumas. Nubraižykite poligoną.

Sprendimas

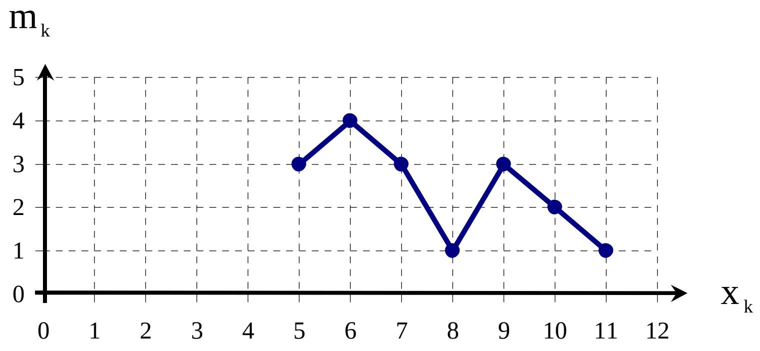
Imties variacinė eilutė yra: 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 11. Didžiausias imties elementas $x_d = 11$, o mažiausias - $x_m = 5$. Imties plotis r 5 11-5 5 6. Imties centras $c = \frac{11+5}{2} = 8$. Imties mediana lygi 7. Sudarome imties dažnių ir santykinių dažnių lentelę:

x_k	5	6	7	8	9	10	11
m_k	3	4	3	1	3	2	1
f_k	$\frac{3}{17}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{17}$

Dažnių suma: 3+4+3+1+3+2+1 5 17.

Santykinių dažnių suma: $\frac{3}{17}+\frac{4}{17}+\frac{3}{17}+\frac{1}{17}+\frac{3}{17}+\frac{2}{17}+\frac{1}{17}=\frac{17}{17}=1.$

Braižome poligoną:



Pratimai

1. Duota imtis 3, 2, 5, 1. Sudarykite imties variacinę eilutę, apskaičiuokite imties plotį, centrą ir medianą. Ats.: 4; 3; 2,5.

2. Sudarykite imties 0,3; 0,1; 0,3; 0,2; 0,1 variacinę eilutę, raskite imties plotį, centrą ir medianą. Ats.: 0,2; 0,2; 0,2.

3. Atsitiktinai paimtų 10 bulvių masė (gramais) yra: 40, 50, 60, 100, 60, 70, 50, 70, 100, 80. Apskaičiuokite šios imties plotį, centrą ir vidurkį. Ats.:60; 70; 68.

4. Matuojant penkiolikos jaunų medelių aukštį, gauti tokie rezultatai (decimetrais): 5; 7; 9; 10; 6; 8; 5; 10; 7; 5; 8; 8; 9; 5; 9. Sutvarkykite imtį. Lentelėje surašykite jos elementų dažnius ir santykinius dažnius. Apskaičiuokite dažnių bei santykinių dažnių sumas.
Ats.:15; 1.

5. Tikrinant 25 induose esančio pieno riebumą, gauti tokie duomenys (%):
1,1 3,2 3,2 2,4 1,7 2,2 3,5 4,2 3,2 2,2
2,2 2,4 1,7 1,7 2,7 3,2 4,2 3,8 1,4 2,4
2,7 2,1 1,4 3,2 1,7.
Sutvarkykite imtį. Lentelėje surašykite jos elementų dažnius ir santykinius dažnius. Apskaičiuokite dažnių bei santykinių dažnių sumas. Ats.:25; 1.

2. *Imties vidurkis ir dispersija*

Imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ***vidurkiu*** vadinamas aritmetinis vidurkis:

$$\boxed{\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}.$$

Jei imtis užrašyta dažnių lentele

x_1	x_2	...	x_k
m_1	m_2	...	m_k

tai tokios sugrupuotos imties vidurkis apskaičiuojamas pagal formulę:

$$\boxed{\bar{x}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k}{n}}.$$

Imties $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ***dispersija*** apskaičiuojama pagal formulę:

$$\boxed{S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \mathbf{K} + (x_n - \bar{x})^2}{n}}.$$

Jei imtis užrašyta dažnių lentele

x_1	x_2	...	x_k
m_1	m_2	...	m_k

tai sugrupuotų duomenų imties dispersija apskaičiuojama pagal formulę:

$$\boxed{S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 m_1 + (x_2 - \bar{x})^2 m_2 + \mathbf{K} + (x_k - \bar{x})^2 m_k}{n}}.$$

Imties dispersija S^2 apibūdina stebėjimo duomenų išbarstymą apie imties vidurkį.

Imties $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n$ *vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu* vadinama kvadratinė šaknis iš imties dispersijos:

$$\boxed{S = \sqrt{S^2}}.$$

Pavyzdys

Matematikos egzamino rezultatai pateikti dažnių lentele:

Egzamino balas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dažnis	1	0	4	7	10	12	8	4	3	1

Apskaičiuokite imties vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

Sprendimas

n 5 1+0+4+7+10+12+8+4+3+1 5 50.

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 4 + 4\cdot 7 + 5\cdot 10 + 6\cdot 12 + 7\cdot 8 + 8\cdot 4 + 9\cdot 3 + 10\cdot 1}{50} = \frac{288}{50} = 5{,}76.$$

$$S^2 = \frac{(1-5{,}76)^2\cdot 1 + (2-5{,}76)^2\cdot 0 + (3-5{,}76)^2\cdot 4 + (4-5{,}76)^2\cdot 7 + (5-5{,}76)^2\cdot 10}{50} +$$

$$+\frac{(6-5{,}76)^2\cdot 12 + (7-5{,}76)^2\cdot 8 + (8-5{,}76)^2\cdot 4 + (9-5{,}76)^2\cdot 3 + (10-5{,}76)^2\cdot 1}{50} =$$

$$= \frac{22{,}6576 + 30{,}4704 + 21{,}6832 + 5{,}776 + 0{,}6912 + 12{,}3008 + 20{,}0704 + 31{,}4928 + 17{,}9776}{50} =$$

$$= \frac{163{,}12}{50} \approx 3{,}26.\ S = \sqrt{S^2} \approx 1{,}8.$$

Pratimai

1. Apskaičiuokite imties 2, 5, 2, 4, 2, 5, 3, 5, 8, 1, 8, 3 vidurkį.

Ats.: 4.

2. Mantas iš matematikos gavo tokius balus: 8; 8; 10; 9; 6; 7; 8; 6; 7; 8. Sutvarkykite imtį. Apskaičiuokite imties centrą, plotį, vidurkį. Apskaičiuokite imties dažnių ir santykinių dažnių sumas.

Ats.:8; 4; 7,7; 10; 1.

3. Kontrolierius 10 dienų tikrino gaminių kokybę ir šiomis dienomis nustatė tokius nekokybiškų gaminių kiekius: 12, 8, 13, 4, 7, 17, 16, 5, 14, 18. Apskaičiuokite šios imties plotį, imties centrą ir imties vidurkį. Ats.: 14; 11;; 11,4.

4. Duota imties dažnių lentelė

x_k	1	2	3	5	6	7	8	9
m_k	2	3	1	3	2	5	4	5

Apskaičiuokite šios imties vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

Ats.:6; 7,04; 2,65.

5. Parduotuvė per dvi dienas pardavė 50 vyriškų kojinių, kurių dydžiai tokie:
27 28 31 26 25 27 28 28 30 27
26 27 25 28 29 28 27 25 26 27
28 26 26 27 28 29 28 26 27 28
29 27 28 27 30 26 27 28 28 29
30 28 27 26 25 28 25 29 29 30.

Imtį užrašykite dažnių lentele. Raskite imties vidurkį ir dispersiją. Nubraižykite poligoną.

Ats.:27,48; 2,13.

6. Apskaičiuokite imties 5, 2, 1, 1, 3 vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

Ats.:2,4; 2,032; 1,43.

7. Apskaičiuokite imties 6, 6, 7, 4, 3, 1, 2, 1, 9, 5 vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

Ats.:4,4; 5,028; 2,24.

8. Krepšininkas sužaidė 11 rungtynių ir jose pelnė tiek taškų: 8, 12, 9, 6, 14, 7, 14, 15, 5, 2, 18. Apskaičiuokite šios imties vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

Ats.:10; 24,4; 4,94.

9. Krepšininkas po kiekvienos treniruotės dar papildomai metė 20 tritaškių. Vienuolikos treniruočių serijoje jo įmestų tritaškių skaičiai buvo tokie: 13, 9, 7, 12, 14, 8, 10, 15, 11, 10, 12. Apskaičiuokite šios imties vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį.

Ats.: 11; 5,64; 2,37.

10. Šuolio į toli varžybose užfiksuoti tokie rezultatai: 2,70; 2,75; 2,80; 3,30; 3,05; 2,65; 2,90; 3,95; 3,85; 2,85; 2,53. Nustatykite imties tūrį. Sutvarkykite ją pagal didumą. Raskite imties didžiausią ir mažiausią reikšmes, imties plotį, imties centrą, medianą. Apskaičiuokite imties vidurkį ir dispersiją.

Ats.:11; 3,95; 2,53;1,42; 3,24; 2,85; 3,03; 0,228.

11. Bandomajame sklype tiriant morkų derlingumą, buvo matuojamas (5 mm tikslumu) morkų ilgis. Gauti rezultatai pateikti lentelėje:

Morkos ilgis	150	160	170	190	200
Skaičius	6	8	17	7	2

Raskite imties tūrį. Apskaičiuokite imties vidurkį ir dispersiją. Nubraižykite poligoną.

Ats.:40; 170; 195; 13,9.

12. Vairavimo mokykloje buvo tikrinamas dviejų grupių kursantų reakcijos į šviesos signalo pasikeitimą greitis. Gauti tokie duomenys (sekundžių šimtosiomis dalimis): 1-os grupės – 36, 38, 58, 46, 24, 56, 40, 28, 52, 48, 26, 53, 41, 2-os grupės – 24, 36, 30, 38, 40, 46, 48, 54, 44, 39, 41. Sutvarkykite imtis pagal didumą, raskite imčių pločius, centrus, medianas, vidurkius ir dispersijas. Palyginkite jas.

Ats.:1) 34; 41; 41; 42; 129,84; 2) 30; 39; 40; 40; 69.

13. Matematikos varžybose moksleiviams buvo pasiūlyta išspręsti 20 uždavinių. Kiekvienas uždavinys vertinamas nuo 0 iki 10 balų. Šiose varžybose dalyvavo Lukas ir Rimas, kurie pasiekė tokių rezultatų:

Lukas – 4, 8, 4, 3, 6, 1, 1, 5, 5, 7, 8, 4, 8, 7, 5, 6, 4, 8, 9, 4.

Rimas – 2, 4, 6, 7, 7, 4, 6, 7, 8, 8, 6, 7, 4, 6, 7, 2, 4, 6, 8, 6.

Parašykite imčių variacines eilutes, raskite imčių pločius ir tūrius. Lentelėse surašykite imčių dažnius ir santykinius dažnius. Apskaičiuokite imčių vidurkius, dispersijas ir vidutinius kvadratinius nuokrypius. Kuriam moksleiviui geriau sekėsi dalyvauti varžybose?

Ats.: $\bar{x}_1$ 5 5,35; $S_1^2 \approx 2{,}49$; $S_1 \approx 1{,}58$; $\bar{x}_2$ 5 5,75; $S_2^2 \approx 1{,}27$; $S_2 \approx 1{,}13$. Geriau sekėsi Rimui.

14. Besiruošdami krepšinio rungtynėms, du krepšininkai Saulius ir Paulius 20 kartų po 10 metimų kiekvieną kartą metė iš tos pačios vietos kamuolį į krepšį. Rezultatai buvo tokie:

Saulius

Metimų serijos Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Į krepšį įkritusių kamuolių skaičius	8	6	8	5	8	4	3	6	5	4	2	4	7	8	7	5	7	3	8	7

Paulius

Metimų serijos Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Į krepšį įkritusių kamuolių skaičius	5	9	3	5	6	7	4	5	8	4	5	7	3	5	8	4	5	6	7	2

Parašykite imčių variacines eilutes, raskite imčių pločius ir tūrius. Lentelėse surašykite imčių dažnius ir santykinius dažnius. Apskaičiuokite imčių vidurkius, dispersijas ir vidutinius kvadratinius nuokrypius. Kuriam krepšininkui geriau sekėsi mėtyti į krepšį?

Ats.: $\bar{x}_1$ 5 5,75; $S_1^2 \approx 3{,}599$; $S_1 \approx 1{,}89$; $\bar{x}_2$ 5 5,4; $S_2^2 \approx 3{,}24$; $S_2 \approx 1{,}8$. Geriau sekėsi Sauliui.

15. Šaudydami iš lanko į taikinį bandomosiose varžybose, sportininkai gavo tokius rezultatus:

Jonas – 5, 4, 6, 8, 8, 9, 9, 9, 5, 3, 4;

Petras – 10, 9, 8, 4, 3, 2, 5, 8, 8, 4;

Ignas – 6, 7, 8, 5, 6, 7, 5, 6, 5, 6, 5, 6.

Užrašykite imtis dažnių lentelėmis. Pavaizduokite imtis grafiškai. Apskaičiuokite vidurkius ir dispersijas. Kuris sportininkas pasirodė geriausiai?

Ats.: $\bar{x}_1$ 5 6,1; $S_1^2 \approx 4{,}99$; $\bar{x}_2$ 5 6,1; $S_2^2 \approx 7{,}88$; $\bar{x}_3$ 5 6,1; $S_3^2 \approx 0{,}88$. Ignas.

3. *Stebėjimo duomenų grupavimas*

Jeigu tyrimo metu duomenų gauname labai daug, tai su tokiais duomenimis sunku atlikti bet kokius skaičiavimus ir nustatyti kokius nors dėsningumus. Skaičiavimams palengvinti stebėjimo duomenys paprastai ***grupuojami***. Grupuojant duomenis, intervalas, kuriame telpa visi stebėjimo duomenys paprastai skaidomas į vienodo ilgio mažesnius dalinius intervalus.

Dalinio intervalo ***dažniu*** vadinamas imties reikšmių, patekusių į šį intervalą, skaičius. Jis žymimas n_i; čia i – dalinio intervalo numeris.

Dalinio intervalo santykiniu dažniu vadinamas šio intervalo dažnio n_i ir imties tūrio n santykis:

$$\boxed{f_i = \frac{n_i}{n}}.$$

Dalinių intervalų dažnių suma lygi imties tūriui n, o santykinių dažnių suma lygi 1.

Jei stebėjimo duomenis esame suskirstę į k dalinių intervalų, be to, apskaičiavę kiekvieno dalinio intervalo dažnį ir santykinį dažnį, tai visus šiuos rezultatus patogu surašyti į lentelę:

Dalinio intervalo numeris i	Dalinis intervalas $[t_i;t_{i+1})$	Dalinio intervalo dažnis n_i	Dalinio intervalo santykinis dažnis f_i
1	$[t_1;t_2)$	n_1	f_1
2	$[t_2;t_3)$	n_2	f_2
3	$[t_3;t_4)$	n_3	f_3
...	...	...	...
k	$[t_k;t_{k+1})$	n_k	f_k

Ši lentelė dar vadinama ***klasifikuotos imties dažnių lentele***.

Turėdami klasifikuotos imties dažnių lentelę galime nubraižyti imties grafiką – ***diagramą*** arba ***histogramą***. Ox ašyje atidedame dalinius intervalus, o Oy ašyje atidedame dažnius, jei braižome diagramą ir santykinius dažnius, jei braižome histogramą. Po to virš kiekvieno dalinio intervalo braižome stulpelį, kurio aukštis lygus dažniui arba santykiniam dažniui.

Diagrama ir histograma skiriasi tik masteliu.

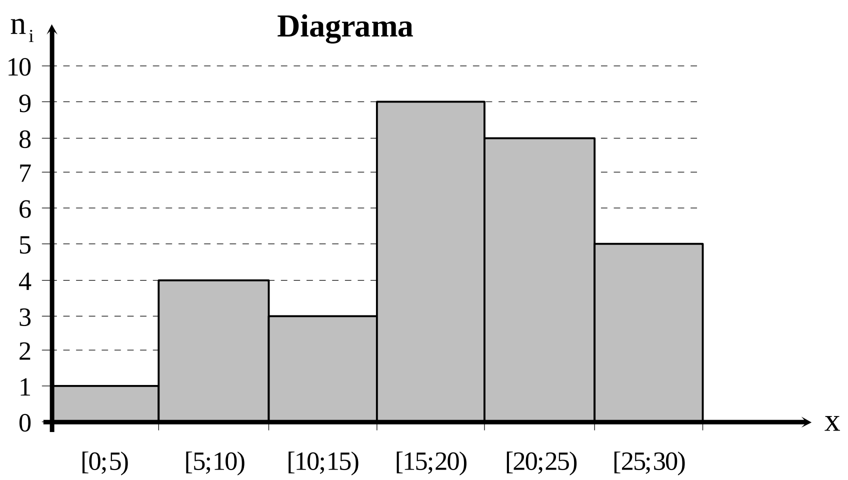
Pavyzdys

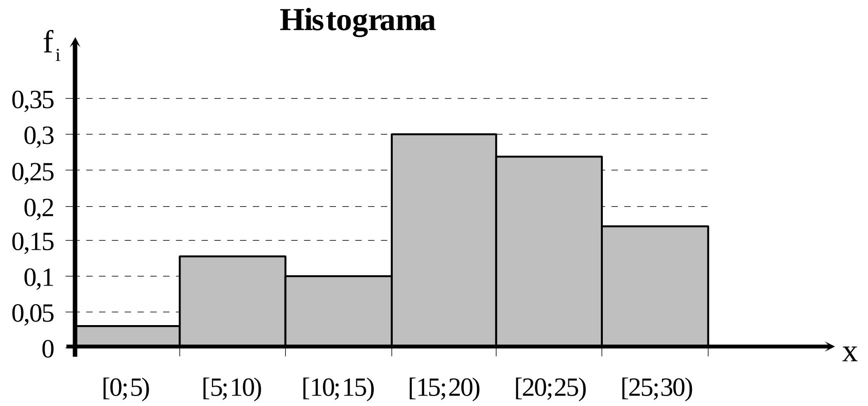
Per 30 rungtynių krepšininkas pelnė atitinkamai 12, 23,20, 5, 17, 11, 25, 3, 17, 22, 9, 28, 25, 19, 8, 15, 23, 21, 13, 22, 25, 9, 17, 20,16, 28, 15, 18, 21, 16 taškų. Parinkę dalinio intervalo ilgį, sugrupuokite imtį, sudarykite dažnių lentelę. Apskaičiuokite dažnių ir santykinių dažnių sumas. Nubraižykite diagramą ir histogramą.

Sprendimas

Pasirinkę dalinio intervalo ilgį lygų 5, sudarome dažnių lentelę:

Dalinio intervalo numeris i	Dalinis intervalas $[t_i;t_{i+1})$	Dalinio intervalo dažnis n_i	Dalinio intervalo santykinis dažnis f_i
1	[0;5)	1	0,03
2	[5;10)	4	0,13
3	[10;15)	3	0,1
4	[15;20)	9	0,3
5	[20;25)	8	0,27
6	[25;30)	5	0,17
	Dažnių suma:	30	1





Pratimai

1. Matuojant 25 induose esančių druskos rūgšties tirpalų procentinę koncentraciją, gauti tokie duomenys:

2,66	2,96	2,88	2,57	2,71
2,70	3,21	2,58	2,91	2,89
2,83	3,20	3,00	2,69	3,02
3,17	2,92	2,67	2,64	3,14
3,24	3,19	2,77	3,06	3,23.

Paėmę dalinio intervalo ilgį, lygų 0,1, sugrupuokite imties elementus, t.y. suskirstykite juos į intervalus, kurių ilgis lygus 0,1. Raskite dalinių intervalų dažnius ir santykinius dažnius. Sudarykite dažnių lentelę. Raskite dalinių intervalų dažnių bei santykinių dažnių sumas. Nubraižykite histogramą ir diagramą.

2. Matuojant 40 aštuoniolikmečių merginų ūgį, gauti tokie rezultatai (centimetrais):

168	157	174	170	164	175	167	172	161	169
171	176	166	172	180	156	175	183	168	164
170	164	173	152	174	168	160	178	171	166
169	162	176	172	163	175	166	170	158	168.

Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 5 , sugrupuokite imtį, sudarykite dažnių lentelę, raskite dalinių intervalų dažnių ir santykinių dažnių sumas. Nubraižykite diagramą. Dalinių intervalų santykinius dažnius išreiškę procentais, nubraižykite histogramą.

3. Žymaus dailininko ekspozicija veikė 30 dienų. Žurnale buvo žymima apsilankiusių žmonių skaičius. Gauti tokie rezultatai:

60	43	80	35	42	65	68	74	84	46
40	38	26	62	53	53	71	56	79	36
43	35	30	42	50	42	28	62	26	30.

Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 10, sugrupuokite imtį. Sudarykite dažnių lentelę. Nubraižykite histogramą.

4. Nuo obels nuskinta 50 obuolių ir jie pasverti. Nustatytas toks svoris gramais:

65	64	68	55	77	99	40	46	52	80
74	70	23	30	58	46	80	69	60	25
33	50	60	74	87	67	62	22	39	60
74	80	55	92	95	38	78	69	49	30
92	97	50	43	64	40	80	66	90	50.

Imties intervalu laikydami intervalą [20;100] ir dalinio intervalo ilgį pasirinkę 10, sugrupuokite imtį. Apskaičiuokite dalinių intervalų dažnius, santykinius dažnius ir dalinio intervalo vidurio reikšmes. Sudarykite klasifikuotos imties dažnių lentelę ir nubraižykite diagramą.

5. Norima įkurti privačią mokyklą, kurioje mokslas būtų mokamas. Tačiau neaišku, kokią ji turės paklausą ir kiek tėvai pajėgūs mokėti už savo sūnaus ar dukros mokslą. Todėl buvo apklaustos 64 šeimos, turinčios vaikų iki 16 metų amžiaus, kokią pinigų sumą jie galėtų skirti per mėnesį, jei vaikas eitų į šią mokyklą. Gauti tokie rezultatai (Lt):

80	10	20	40	60	50	80	90	80	50	20	70	80	10	50	40
90	10	30	50	70	50	60	90	50	40	100	50	30	80	40	30
100	110	60	60	30	70	90	80	80	40	90	70	90	60	10	20
140	40	50	70	30	50	40	80	40	10	10	60	50	50	100	30.

Raskite imties plotį. Apskaičiuokite vidurkį, dispersiją ir vidutinį kvadratinį nuokrypį. Dalinio intervalo ilgį pasirinkę 20, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę. Nubraižykite histogramą.

Ats.:r 5 130; $\bar{x} \approx 56{,}4$; $S^2 \approx 804{,}3$; $S \approx 28{,}36$.

6. Matuojant detalės apdorojimo laiką, gauti tokie duomenys (minutėmis):

5,2	4,9	6,1	5,3	5,2	4,8	5,3	5,5	5,3	4,9
5,8	5,5	5,3	4,9	5,8	5,3	5,5	6,2	5,3	5,7.

Sudarykite variacinę eilutę. Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 0,5, sugrupuokite imtį. Nubraižykite diagramą.

7. Parduotuvė per vieną mėnesį pardavė keturiasdešimt moteriškų suknelių, kurių dydžiai tokie:

44	46	48	50	52	46	48	48	52	46
50	48	50	48	48	48	50	54	46	48
52	46	46	44	46	50	46	44	48	48
46	48	44	46	48	44	48	44	48	50.

Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 2, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę. Nubraižykite histogramą dalinių intervalų santykinius dažnius išreiškę procentais.

8. Gamyklos ceche atlikti automobilio variklių 30 cilindrų skersmens nuokrypio nuo vidurkio tikrinimai. Gauti tokie duomenys:

-0,012	-0,005	0,022	-0,012	0,021	-0,011	0,022	-0,010	0,017	0,008
-0,018	-0,005	0,008	-0,018	-0,005	0,008	0,017	0,003	-0,006	0,012
-0,012	0,07	0,012	-0,004	0,012	0,001	-0,003	0,008	-0,001	0,001.

Paėmę intervalo ilgį 0,004, suklasifikuokite imtį, užrašykite ją dažnių lentele. Apskaičiuokite imties vidurkį ir dispersiją. Nubraižykite histogramą.

Ats.: $\bar{x}$ 5 0,002; $S^2 \approx 0{,}00013$.

9. Studentų sergamumui ištirti buvo parinktos dvi grupės, kuriose yra 60 studentų. Praleistų dienų skaičius pateiktas lentelėje (vieno semestro laikotarpiu):

Praleistų dienų skaičius	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)
Studentų skaičius	25	16	10	4	2	2	1	0

Apskaičiuokite dalinių intervalų vidurio reikšmes ir santykinius dažnius. Nubraižykite histogramą.

10. Šeima per trejus metus sunaudojo elektros energijos kiekį (kWh):

93	80	84	82	70	76	90	75	70	85	90	85
95	80	70	70	75	75	80	80	85	98	105	108
96	80	82	85	80	85	90	85	80	106	100	103.

Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 5, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę. Apskaičiuokite imties vidurkį. Nubraižykite diagramą.

Ats.: $\bar{x} \approx 85{,}36$.

11. Matuojant 50 septyniolikmečių jaunuolių ūgį, gauti tokie rezultatai (centimetrais):

166	191	171	189	182	173	179	156	171	162
183	188	185	177	165	173	167	175	176	180
177	160	181	168	174	178	187	192	184	190
175	148	186	163	170	196	183	175	158	176
177	182	179	178	185	184	172	180	173	183.

Raskite didžiausią ir mažiausią imties reikšmę. Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 5, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę. Nubraižykite diagramą.

12. Draudimo bendrovė surinko duomenis apie apdraudžiamų automobilių kainą . Gauti tokie duomenys (tūkst. dolerių):

2,0	3,0	2,4	1,7	2,4	2,7	3,4	9,9	6,4	1,0	1,5	1,3
2,1	4,4	5,8	5,6	3,3	2,0	1,0	1,5	3,5	3,4	1,7	2,5
0,5	1,6	1,4	5,0	2,2	3,1	1,6	2,2	1,1	1,4	1,8	1,4.

Apskaičiuokite imties vidurkį ir dispersiją. Dalinio intervalo ilgį pasirinkę lygų 1, sugrupuokite imtį ir sudarykite dažnių lentelę. Nubraižykite diagramą. Ats.: $\overline{x} \approx 2{,}7$; $S^2 \approx 3{,}6$.

4. Dažnis ir tikimybė

Sprendžiant praktinius uždavinius, ne visada pavyksta rasti įvykio tikimybę naudojantis tikimybės apibrėžimu. Tokiais atvejais reikia pasikliauti įvykio A pasirodymo dažniu atliekant seriją bandymų. Jeigu N bandymų serijoje įvykis A įvyko m kartų, tai santykis $\frac{m}{\mathrm{N}}$ vadinamas ***statistiniu dažniu***, arba tiesiog dažniu.

Tais atvejais, kai žinoma teorinė įvykio A tikimybė, galima teorinę tikimybę palyginti su to paties įvykio statistiniu dažniu. Pastebėta, kad, didinant bandymų skaičių, statistinis įvykio dažnis artėja prie to įvykio teorinės tikimybės. Ši dažnio savybė neretai naudojama ir nežinomai įvykio tikimybei apibrėžti: ***skaičius, prie kurio artėja įvykio dažnis didinant bandymų skaičių, vadinamas*** įvykio tikimybe, arba ***statistine tikimybe***.

Pavyzdys

Matematikas Dž. Kerichas, gamtininkas ir rašytojas G. de Biufonas, matematikas ir statistikas K. Pirsonas atliko bandymus mėtydami monetą. Gauti tokie rezultatai:

Bandytojas	Bandymų skaičius	Kiek kartų atsivertė herbas	Dažnis
Biufonas	4040	2048	0,5080
Kerifas	10000	5087	0,5087
Pirsonas	24000	12012	0,5005

Iš lentelės matome, kad dažnis yra artimas teorinei herbo pasirodymo tikimybei, kuri lyg 0,5.

5. Normalusis skirstinys

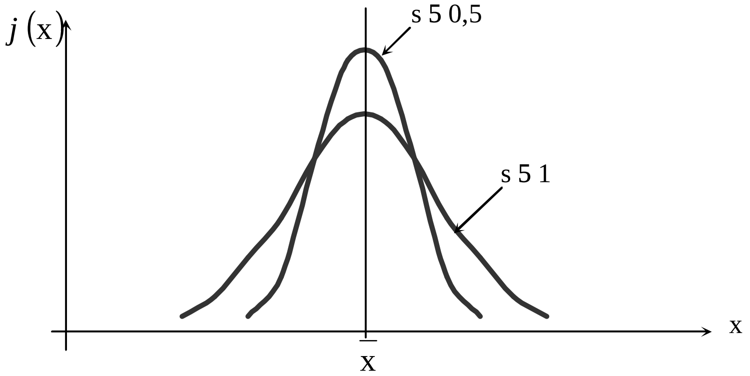
Jeigu bandymų skaičius pakankamai didelis, o intervalų ilgis pakankamai mažas, tai, sujungę stulpelių viršūnių vidurio taškus, gausime kreivę. Tą kreivė vadinama ***dažnio pasiskirstymo kreive*** arba ***atsitiktinio dydžio pasiskirstymo kreive***. Histograma virsta kreive, kai atsitiktinis dydis gali įgyti bet kurią nagrinėjamo intervalo reikšmę. Dažniausiai praktikoje pasitaikanti atsitiktinio dydžio pasiskirstymo kreivė yra varpo pavidalo. Ta varpo pavidalo kreivė vadinama ***normaliąja pasiskirstymo kreive***, o tokią pasiskirstymo kreivę turintis atsitiktinis dydis – normaliuoju.

Nustatyta, kad daugelis normaliųjų pasiskirstymo kreivių panašios į funkcijos

$$\boxed{\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}}$$

grafiką.

Žemiau pateikiamos dvi normaliųjų pasiskirstymų kreivės:



Matome, kad normalioji kreivė visiškai nusakoma vidurkiu $\bar{x}$ ir vidutiniu kvadratiniu nuokrypiu σ. Funkcijos $\varphi(x)$ grafikas yra varpo formos ir visas juo apribotas plotas lygus vienetui. Be to, grafikas simetriškas $\bar{x}$ atžvilgiu.

Vienas iš statistikos uždavinių – rasti tikimybę, kad mus dominantis atsitiktinis dydis pateks į kurį nors intervalą. Žinant, kad stebimas dydis turi normalųjį skirstinį, tokias tikimybes galima rasti statistinėse lentelėse. Ar tiriamasis skirstinys panašus į normalųjį, parodo nubraižyta histograma.