TIESINĖ ALGEBRA

Matricos

Matrica yra tam tikra tvarka surašytų skaičių stačiakampė lentelė

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Lentelėje surašyti skaičiai vadinami *matricos elementais*. Ši matrica turi n eilučių ir m stulpelių. Ją vadinsime stačiakampe matrica. Matrica vadinama *kvadratine*, jei jos eilučių skaičius lygus stulpelių skaičiui.Kvadratinės matricos eilučių skaičius vadinamas *matricos eile*. Pavyzdžiui, matrica

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ yra antros eilės.

Matrica, kurios visi nariai lygūs nuliui, vadinama *nuline matrica*.

Kvadratinė matrica, kurios visi elementai ant pagrindinės įstrižainės lygūs vienetui, o kiti lygūs nuliui, vadinama *vienetine matrica* ir žymima raide *E*. Pavyzdžiui,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica, gauta iš matricos A sukeitus jos eilutes ir stulpelius vietomis, vadinama *transponuotąja matrica* ir žymima *AT*. Pavyzdžiui,

jei $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, tai $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Matricos vadinamos *vienarūšėmis*, jei jos turi vienodą skaičių eilučių ir stulpelių. Vienarūšės matricos laikomos *lygiomis*, jeigu jų atitinkami elementai lygūs.

Veiksmai su matricomis

Matricų sudėtis. Dviejų vienarūšių matricų suma laikoma matrica, kurią sudaro atitinkamų matricų elementų sumos. Pavyzdžiui,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+(-5) \\ -3+3 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matricų daugyba iš skaičiaus. Skaičiaus k ir matricos A sandauga vadinama matrica kA, kurioje kiekvienas matricos A elementas yra padaugintas iš skaičiaus k. Pavyzdžiui, jei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad ir \quad k = 5, \quad tai \quad kA = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 & 5\cdot 1 \\ 5\cdot 5 & 5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 25 & 10 \end{pmatrix}.$$

Matricų sandauga. Matricų A ir B sandauga vadinama matrica C, kurios elementai c_{ij} yra lygūs matricos A i-osios eilutės elementų ir matricos B j-ojo stulpelio atitinkamų elementų sandaugų sumai. Pavyzdžiui, jei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, o\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix},$$

$$tai\ C = A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix}.$$

Pratimai

1. Atlikite veiksmus:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad Ats.: \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 0 \\ 10 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad Ats.: \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $\quad Ats.: \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad Ats.: \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

5) $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $\quad Ats.: \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

6) $2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \right)$; $\quad Ats.: \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

7) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad Ats.: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad Ats.: \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

9) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad Ats.: \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

10) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad Ats.: \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

11) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\quad Ats.: \begin{pmatrix} 1 \\ 30 \\ -17 \end{pmatrix}$.

12) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; $\quad Ats.: \begin{pmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 20 & -8 & 12 \\ 10 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

13) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad Ats/: \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Duotos matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad ir \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix};$$

Apskaičiuokite: 1) 2A – AB; 2) AB-3B;

Ats.: 1) $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$.

3. Duotos matricos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad ir \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

Apskaičiuokite : 1) AB+2A; 2) 2B+AB.

Ats.: 1) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Determinantai

Determinantas – tai kvadratinės matricos skaitinė reikšmė. Determinantus žymėsime

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad arba \quad \Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinantas D yra antrosios eilės, o determinantas Δ yra trečiosios eilės.

Determinantai skaičiuojami pagal tam tikras taisykles. Antrosios eilės determinantas lygus įstrižainių elementų sandaugų skirtumui:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ 5 \ a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

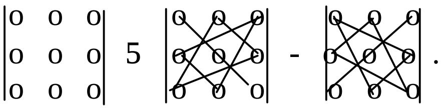
Pavyzdžiui,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-5) - 3 \cdot 4 = -5 - 12 = -17.$$

Trečiosios eilės determinantas skaičiuojamas pagal taip vadinamą *Sariuso* taisyklę:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Ši taisyklė lengviau įsimenama geometrinėje formoje:



Pavyzdžiui,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 0 = 6 + 0 + 0 - 12 + 4 - 0 =$$
$$= -2.$$

Bet Sariuso taisyklę galima užrašyti ir kitaip

$$\Delta = (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Determinanto elemento minoras ir adjunktas

Išbraukę determinanto eilutę ir stulpelį, kurio sankirtoje yra elementas a_{ij} gausime determinantą, kuris vadinamas elemento a_{ij} minoru ir žymimas M_{ij}. Pavyzdžiui, elemento a_{12} ***minoras*** yra $M_{12} \ 5 \ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$. Sandauga $(-1)^{i+j} M_{ij} \ 5 \ A_{ij}$ vadinama elemento a_{ij} ***adjunktu***. Taigi $\Delta \ 5 \ a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$.

Determinantas lygus bet kurios jo eilutės (stulpelio) elementų ir jų adjunktų sandaugų sumai. Ši formulė vadinama determinanto ***skleidiniu*** eilutės (stulpelio) elementais. Pavyzdžiui,

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6-5-18=-17.$$

Determinantų savybės

1. Sukeitus determinanto eilutes ir stulpelius vietomis, jo reikšmė nepasikeis.
2. Determinantas, turintis nulinę eilutę (stulpelį), lygus nuliui.
3. Sukeitus dvi eilutes (stulpelius) vietomis, pasikeičia tik determinanto ženklas.
4. Jeigu kurios nors determinanto eilutės (stulpelio) elementai turi bendrą daugiklį, tai jį galima iškelti prieš determinanto ženklą.
5. Prie vienos determinanto eilutės (stulpelio) pridėjus kitos eilutės (stulpelio) atitinkamus elementus , padaugintus iš bet kurio skaičiaus, determinantas nepasikeis.
6. Determinantas, turintis dvi vienodas eilutes (stulpelius), lygus nuliui.

Pavyzdžiai

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 3\cdot 4 = 2-12=-10.$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 5 + 2\cdot 2\cdot 0 + 5\cdot 1\cdot 4 - 4\cdot(-1)\cdot 0 - 2\cdot 5\cdot 5 - 2\cdot 1\cdot 1 = -37.$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11} + 5\cdot A_{12} + 6\cdot A_{13} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +$

$+ 6\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3+10-24=-11.$

4. $\begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5(2-3) = -5.$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ /.(-2)/.(-1) $\quad 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2+1.(-2) & 0+2.(-2) & 1+(-1).(-2) \\ 1+1.(-1) & -1+2.(-1) & 1+(-1).(-1) \end{vmatrix} 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} 5$

$= \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 1.$

6. $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0.$

7. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Pratimai

1. Apskaičiuokite:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$; $\quad$ *Ats.*: $-10.$

2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; $\quad$ *Ats.*: $-3.$

3) $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; $\quad$ *Ats.*: $-3.$

4) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$; $\quad$ *Ats.*: $-4.$

5) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; $\quad$ *Ats.*: $14.$

6) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}$; $\quad$ *Ats.*: $0.$

7) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ -16 & -4 & -1 \\ -13 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; $\quad$ *Ats.*: $0.$

8) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$; $\quad$ *Ats.*: $5.$

9) $\begin{vmatrix} -21 & 1 & 5 \\ -23 & 0 & 5 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$; $\quad$ *Ats.*: $5.$

10) $\begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$; $\quad$ *Ats.*: $-54.$

11) $\begin{vmatrix} -10 & -3 & 1 \\ 22 & 3 & -4 \\ 12 & 4 & -1 \end{vmatrix}$; *Ats.*: 0. 12) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; *Ats.*: 28.

13) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}$; *Ats.*: 6. 14) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 8 \\ -4 & -4 & 19 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; *Ats.*: –2.

15) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 6 \\ 6 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; *Ats.*: 15. 16) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; *Ats.*: –20.

17) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & -4 \\ 7 & -8 & -9 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; *Ats.*: 364. 18) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 & 4 \\ 5 & -4 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; *Ats.*: –6.

2. Išspręskite lygtis:

1) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 10 = 0;$ *Ats.*: 0;2.

2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & x^2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -5 & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 16 = 0;$ *Ats.*: –3;6.

3) $\begin{vmatrix} x^2-3 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 7x \cdot \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3;$ *Ats.*: –2;–1.

3. Išspręskite nelygybes:

1) $x^2 + \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ x & -4 \end{vmatrix} \le 0;$ *Ats.*: $-4 \le x \le 5$.

2) $\begin{vmatrix} 3 & 15-x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \ge \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix};$ *Ats.*: $x \le 4, \quad x \ge 5$.

3) $\begin{vmatrix} x^2 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} < 0;$ *Ats.*: $-2 < x < 4$.

Atvirkštinė matrica

Matricos A *atvirkštine matrica* vadinama tokia matrica B, kuri tenkina lygybę AB 5 BA 5 E. Matricos A atvirkštinė matrica žymima A^{-1} ir skaičiuojama pagal formulę A^{-1} 5 $\frac{1}{\Delta}\tilde{A}$, kur $\Delta \neq 0 -$ matricos A determinantas, o $\tilde{A}$ - transponuota adjunktų matrica.

Jei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tai B 5 $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Formulės įrodymui reikėtų patikrinti lygybę AB 5 E. jeigu matricos determinantas lygus nuliui, tai tokia matrica vadinama *išsigimusia*. Išsigimusi matrica atvirkštinės matricos neturi.

Pavyzdžiai

1) A 5 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Apskaičiuojame $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7;$

A^{-1} 5 $\frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Patikriname

$A.A^{-1}$ 5 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-7} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$

2) A 5 $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 9 + 8 + 12 - 24 - 5 = 2;$

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ 5

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -11 & 32 & 3 \\ 5 & -14 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -4 & -0{,}5 \\ -5{,}5 & 16 & 1{,}5 \\ 2{,}5 & -7 & -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Pratimai

Raskite šių matricų atvirkštines matricas:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$; $Ats.: \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $Ats.: -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $Ats.: \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 7 & 11 & 5 \\ -7 & 7 & 7 \\ 7 & -1 & 11 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $Ats.: \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 13 & 9 \\ 0 & 5 & 5 \\ 2 & -7 & -6 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; $Ats.: \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Ats.: \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Ats.: \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 8 & 14 & -10 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $Ats.: \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $Ats.: \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $Ats.: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Tiesinių lygčių sistemos. Kramerio taisyklė

Tiesinės lygtys, surašytos viena po kitos sudaro, *tiesinių lygčių sistemą*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_{m;} \end{cases}$$

čia a_{ij} – sistemos koeficientai, x_j – kintamieji, o b_i - laisvieji nariai

(i 5 1;2;...;m; j 5 1;2;...;n).

Tiesinių lygčių sistema gali turėti tik vieną sprendinį arba be galo daug sprendinių, tada ji laikoma suderinta. Sistema nesuderinta, jeigu neturi sprendinių.

Yra keli tiesinių lygčių sistemų sprendimo būdai. Vienas iš jų – *Kramerio* taisyklė. Čia pateikiamos *Kramerio* formulės be įrodymo. Išspręsime trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_{3;} \end{cases}$$

apskaičiuojame:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}; \qquad x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

Šios formulės ir vadinamos *Kramerio formulėmis*, o sprendimo būdas *Kramerio taisykle*.

Jeigu $\Delta \neq 0$, lygčių sistema turi vienintelį sprendinį;

jeigu $\Delta = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0$, lygčių sistema turi be galo daug sprendinių;

jeigu $\Delta = 0$, o bent vienas $\Delta x_1, \Delta x_2$ *ar* $\Delta x_3 \neq 0$, tai sistema sprendinių neturi.

Jeigu sistemoje kintamųjų nedaug, jie gali būti žymimi *x*, *y*, *z* ir t.t.

Pavyzdžiai

Išspręsime sistemas:

1) $\begin{cases} x + 3y = 7, \\ 4x - 2y = 0; \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14,$ $\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -14,$

$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -28;$ $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-14}{-14} = 1,$ $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-28}{-14} = 2.$ $Ats.: (1;2).$

2) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 4x + 2y = 0; \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ $\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2;$ Sistema sprendinių neturi.

Ats.:&.

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1; \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$+ (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 16 - 10 + 21 = 27,$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot 2\cdot 2 + (-1)\cdot 4\cdot 1 + 4\cdot(-1)\cdot(-3) - (-3)\cdot 2\cdot 1 - (-1)\cdot 4\cdot 2 -$$

$$-4\cdot(-1)\cdot 4 = 16 - 4 + 12 + 6 + 8 + 16 = 58 - 4 = 54,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ /\cdot(-2)/\cdot(-3) = \\ \downarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -4 & -11 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & -11 & -10 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} -4 & -11 \\ -11 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= -(40 - 121) = 81,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ /\cdot(-2)/\cdot(-3) = \\ \downarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -7 & -11 \end{vmatrix} = -55 + 28 = -27;$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{81}{27} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-27}{27} = -1.$$

Ats.: (2;3;-1).

4) $\begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ x + 2y - z = 0, \\ -2x + 2y - 4z = -6; \end{cases}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} /\cdot 2 \\ \downarrow \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$

nesunkiai gautume, kad ir $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$.

Ši sistema turi begalo daug sprendinių. Juos gausime spręsdami pirmąsias dvi lygtis, nes pirma ir trečia lygtys vienodos (padalinkite trečią lygtį iš (–2)):

$\begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ x + 2y - z = 0; \end{cases}$ pažymėkime z 5 t, tada gausime sistemą $\begin{cases} x - y = -2t + 3, \\ x + 2y = t; \end{cases}$

ją išsprendę gausime $x = 2 - t, \quad y = t - 1$. Ats.: *(2-t;t-1),* kur ***teR***.

Pratimai

Išspręskite lygčių sistemas taikydami *Kramerio* formules:

1) $\begin{cases} x - y = 1, \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$ $\quad Ats.: (2;1).$

2) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 4x - 2y = 1; \end{cases}$ $\quad Ats.: \&.$

3) $\begin{cases} 3x - y = -5, \\ 4x + 2y = 0; \end{cases}$ $\quad Ats.: (-1;2).$

4) $\begin{cases} y - 3x = -1, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$ $\quad Ats.: (1;2).$

5) $\begin{cases} x-y+z=6, \\ 2x+y+z=3, \\ x+y+2z=5; \end{cases}$ $Ats.:(1;-2;3).$

6) $\begin{cases} 5x-3y-z=6, \\ 4x+y+5z=-1, \\ 2x+4y+z=1; \end{cases}$ $Ats.:(1;0;-1).$

7) $\begin{cases} x-2y=3, \\ 3x-5z=23, \\ 2x+y-5z=21; \end{cases}$ $Ats.:(1;-1;-4).$

8) $\begin{cases} 3x-4y+4z=11, \\ 5x+5y+z=-11, \\ 4x+2y-z=-1; \end{cases}$ $Ats.:(1;-3;-1).$

9) $\begin{cases} 3x+2y-z=-9, \\ 2x+y+z=-10, \\ 5x-2y-4z=8; \end{cases}$ $Ats.:(-2;-3;-3).$

10) $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ x+y+z=2, \\ 4x-2y+6z=1; \end{cases}$ Ats.: &.

11) $\begin{cases} x-2y+z=1, \\ y-2z=3, \\ 2x-4y+2z=2; \end{cases}$ $Ats.:(3t+7;2t+3;t).$

12) $\begin{cases} 3x-3y-4z=-28, \\ 3x-3y+3z=0, \\ y=2; \end{cases}$ $Ats.:(-2;2;4).$

13) $\begin{cases} x+2y-z=3, \\ 2x-y+2z=-2, \\ 3x+y-4z=11; \end{cases}$ $Ats.:(1;0;-2).$

14) $\begin{cases} 2x-y+z=6, \\ 3x+z=7, \\ y+2z=1; \end{cases}$ $Ats.:(2;-1;1).$

15) $\begin{cases} 2x-y-z=-6, \\ x-2y+z=-3, \\ 3x+y-2z=-5; \end{cases}$ $Ats.:(-1;2;2).$

16) $\begin{cases} x-2y-2z=3, \\ 2x-y=4, \\ y+3z=1; \end{cases}$ $Ats.:(1;-2;1).$

Tiesinių lygčių sistemų sprendimas Gauso – Žordano metodu

Gauso metodas – tai nežinomųjų nuoseklaus eliminavimo metodas, kai duotąją sistemą suvedame į trikampę formą, iš kurios paskutinės lygties lengvai randame vieno nežinomojo reikšmę. Radus vieno nežinomojo reikšmę ir įrašius ją į kitas lygtis, surandamos ir kitų nežinomųjų reikšmės.

1 pavyzdys:

$$\begin{cases} x+2y-z=3, \quad /\cdot(-2)/\cdot(-3) \\ 2x-y+2z=-2, \\ 3x+y-4z=11; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+ & 2y- & z & = & 3, \\ & -5y+ & 4z & = & -8, /\cdot(-1) \\ & -5y- & z & = & 2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+ & 2y- & z & = & 3, \\ & -5y+ & 4z & = & -8, \\ & & -5z & = & 10; \end{cases}$$ -5z 5 10, z 5 -2, y 5 0, x 5 1. Ats.:(1;0;-2).

Ši sistema išspręsta *Gauso metodu*.

Kad nereikėtų perrašinėti kintamųjų, veiksmus galima atlikti tik su sistemos išplėstinės matricos elementais.

2 pavyzdys:

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ -2x+y-2z=-5, \\ 4x+z=5; \end{cases}$$ sudarome išplėstinę matricą ir ją pertvarkome:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vert & 1 \\ -2 & 1 & -2 & \vert & -5 \\ 4 & 0 & 1 & \vert & 5 \end{pmatrix} /.2/(-4) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \vert & -3 \\ 0 & -4 & -3 & \vert & 1 \end{pmatrix} /:3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vert & -1 \\ 0 & -4 & -3 & \vert & 1 \end{pmatrix} /.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \vert & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vert & -1 \\ 0 & 0 & -3 & \vert & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /.(-1) \\ /:3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vert & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vert & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vert & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=-1, \\ z=1. \end{cases}$$ Ats.:(1;-1;1).

Ši sistema išspręsta *Gauso – Žordano* metodu.

3 pavyzdys:

$$\begin{cases} -3x+y+z=0, \\ 5x+y-2z=2, \\ -2x-2y+z=-3; \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & \vert & 0 \\ 5 & 1 & -2 & \vert & 2 \\ -2 & -2 & 1 & \vert & -3 \end{pmatrix} /(-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & \vert & 3 \\ 5 & 1 & -2 & \vert & 2 \\ -2 & -2 & 1 & \vert & -3 \end{pmatrix} /.5/.(-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & \vert & -3 \\ 0 & 16 & -2 & \vert & 17 \\ 0 & -8 & 1 & \vert & -9 \end{pmatrix} /.2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & \vert & -3 \\ 0 & 16 & -2 & \vert & 17 \\ 0 & 0 & 0 & \vert & -1 \end{pmatrix};$$

Paskutinioji lygtis sprendinių neturi, todėl sistema nesuderinta.

4 pavyzdys:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=6, \\ x_2-x_3-2x_4=-2, \\ x_2-2x_3-x_4=-2, \\ 5x_2-11x_3-4x_4=-10; \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & \vert & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & \vert & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & \vert & -2 \\ 0 & 5 & -11 & -4 & \vert & -10 \end{pmatrix} /.(-1)/.(-5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & \vert & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & \vert & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & \vert & 0 \end{pmatrix} /.(-6) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & \vert & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & \vert & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \vert & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vert & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=6, \\ x_2-x_3-2x_4=-2, \\ x_3-x_4=0. \end{cases}$$

Ši sistema turi be galo daug sprendinių. Tegu x_4 5 *t*, tada x_3 5 *t*, x_2 5 *3t-2*, x_1 5 *4-3t*. Ats.: *(4-3t;3t-2;t;t), teR*.

Pratimai

Išspręskite lygčių sistemas Gauso – Žordano metodu:

1) $\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 4x-y+2z=5, \\ y-z=0; \end{cases}$ $Ats.: (1;1;1).$

2) $\begin{cases} 4x-y+z=5, \\ x-y-z=3, \\ 2x+2y+3z=0; \end{cases}$ $Ats.: (2;1;-2).$

3) $\begin{cases} x-y-3z=-7, \\ -x+2y-z=0, \\ 3x+z=2; \end{cases}$ $Ats.: (0;1;2).$

4) $\begin{cases} 4x+2z=10, \\ -2x+2y=2, \\ x+y-5z=-12; \end{cases}$ $Ats.: (1;2;3).$

5) $\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ 3x+2y+z=0, \\ 2x+2y+2z=0; \end{cases}$ $Ats.; (-t;-2t;t).$

6) $\begin{cases} x-y+z=2, \\ 2x+y-2z=6, \\ 3x+2y+4z=17; \end{cases}$ $Ats.: (3;2;1).$

7) $\begin{cases} 2x+2y-z=4, \\ -2x+y=-1, \\ 4x-y+z=3; \end{cases}$ $Ats.: (1;1;0).$

8) $\begin{cases} x-y+z=5, \\ 3x+2z=14, \\ 4y-5z=-5; \end{cases}$ $Ats.: (4;0;1).$

9) $\begin{cases} -3x-y+z=8, \\ x-z+2y=-3, \\ 4x-3y=-11; \end{cases}$ $Ats.: (-2;1;3).$

10) $\begin{cases} x+y+2z=1, \\ 2x+2y+4z=1, \\ 3x+3y+6z=0; \end{cases}$ $Ats.: \&.$

11) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2, \\ 2x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+2x_3=5; \end{cases}$ $Ats.: (-1;0;3).$

12) $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=3, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=17, \\ 5x_1+2x_2+4x_3=15; \end{cases}$ $Ats.: \&.$

13) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ 3x_1-x_2+2x_3=4, \\ 2x_1-2x_2+x_3=1; \end{cases}$ $Ats.: (\frac{7-3t}{4};\frac{5-t}{4};t).$

14) $\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=5, \\ 3x_2+4x_3-x_4=6, \\ 2x_1-x_3-x_4=0; \end{cases}$ $Ats.: (1;1;1;1).$

15) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2; \end{cases}$ *Ats.*: (1;0;0;1).

16) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1; \end{cases}$ *Ats.*: (1;1;1;0).

Tiesinių lygčių sistemos sprendimas atvirkštinės matricos pagalba

Imkime tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases}$$

Jeigu A 5 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$,

tai lygčių sistemą galima užrašyti viena lygtimi *AX* 5 *B*.

Abi lygties puses padauginę iš A^{-1}, gausime

$A^{-1}.A.X$ 5 $A^{-1}.B$,

$E.X$ 5 $A^{-1}.B$,

X 5 $A^{-1}.B$.

Gavome $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$, arba

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n),$$
$$x_2 = \frac{1}{\Delta}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n),$$
....
$$x_n = \frac{1}{\Delta}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n).$$

Pavyzdys

$$\begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ -x + 2y - 2z = 1; \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} /.(-2) \\ \downarrow \end{matrix} \downarrow \; 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -12.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & -3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & -3 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$x = -\frac{1}{12}(-8 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 1) = -\frac{1}{12}(-12) = 1,$$
$$y = -\frac{1}{12}(3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = 0,$$
$$z = -\frac{1}{12}(7 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 1) = -\frac{1}{12} \cdot 12 = -1.$$

Ats.: (1;0;-1).

Pratimai

Išspręskite lygčių sistemas atvirkštinės matricos metodu:

1) $\begin{cases} 4x + y + 5z = -1, \\ -5x + 3y + z = -6, \\ 2x + 4y + z = 1; \end{cases}$ $Ats.: (1;0;-1).$

2) $\begin{cases} 2x + y + 3z = 15, \\ 5x + 2y + 5z = 28, \\ -2x + 5y - 4z = -25, \end{cases}$ $Ats.: (2;-1;4).$

3) $\begin{cases} 3x - 3y + 3z = -9, \\ 2x + 4y + 5z = -3, \\ 3x - y - 4z = 0: \end{cases}$ $Ats.; (-1;1;-1).$

4) $\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 1, \\ -2x - 3z = 12, \\ -x - 4y + 5z = 5; \end{cases}$ $Ats.: (-3;-3;-2).$