INTEGRALINIS SKAIČIAVIMAS

NEAPIBRĖŽTINIS INTEGRALAS

1. Pirmykštė funkcija. Tiesioginis integravimas

Diferencialinio skaičiavimo pagrindinis uždavinys – rasti funkcijos *F(x)* išvestinę *F9(x) 5 f(x)* arba diferencialą *dF(x) 5 f(x)dx*. Dažnai tenka spręsti atvirkštinį uždavinį – ieškoti funkcijos *F(x),* kai žinoma šios funkcijos išvestinė *f(x)* arba diferencialas *f(x)dx*.

1 apibrėžimas. Funkcija *F(x)* vadinama funkcijos *f(x) pirmykšte funkcija* atkarpoje *[a;b]*, jeigu visuose šios atkarpos taškuose *x* teisinga lygybė

F9(x) 5 f(x) arba dF(x) 5 f(x)dx.

Pvz., funkcijos f(x) 5 x^3 *pirmykštės funkcijos F(x) intervale (- : ; :) yra šios*

$F(x) = \frac{1}{4}x^4, \quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3, \quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3, \quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$*, nes*

$F'(x) = (\frac{1}{4}x^4)' = (\frac{1}{4}x^4 + 3)' = (\frac{1}{4}x^4 - 3)' = (\frac{1}{4}x^4 + C)' = x^3 = f(x).$ *Vadinasi, jei funkcija f(x) turi vieną pirmykštę funkciją, tai ji turi jų be galo daug.*

2 apibrėžimas. Jeigu funkcija *F(x)* yra funkcijos *f(x)* pirmykštė funkcija, tai reiškinys *F(x)+C* vadinamas funkcijos *f(x)* neapibrėžtiniu integralu ir žymimas simboliu $\int f(x)dx.$

Vadinasi $\int f(x)dx = F(x) + C,$ kur *C* – const., *F9(x) 5 f(x).*

Veiksmas, kuriuo surandame duotosios funkcijos pirmykštė funkcija, vadinamas *integravimu*.

Neapibrėžtinio integralo savybės:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$
2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3) $\int dF(x) = F(x) + C;$
4) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx;$
5) $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Pagrindinių integralų lentelė:

1. $\int dx = x + C.$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq 1).$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad (x \neq 0).$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0,\, a \neq 1).$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C.$

14. $\int tgxdx = \ln|\cos x| + C.$

15. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C.$

16. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left| tg \dfrac{x}{2} \right| + C.$

17. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg\left(\dfrac{p}{4} + \dfrac{x}{2} \right) \right| + C.$

18. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left| \dfrac{x-a}{x+a} \right| + C.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Pavyzdžiai

1. $\int (3x^2 - 2\sin x + 6\sqrt{x})dx = \int 3x^2 dx - \int 2\sin x dx + \int 6\sqrt{x} dx =$

$$= 3\int x^2 dx - 2\int \sin x dx + 6\int x^{\frac{1}{2}} dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} - 2(-\cos x) + 6\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = x^3 + 2\cos x + 4x\sqrt{x} + C.$$

2. $\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = tgx + x + C.$

Pratimai

1. $\int (2x + 5)dx;\quad Ats.: x^2 + 5x + C.$

2. $\int (12x^3 - 6x + 4)dx;\quad Ats.: 3x^4 - 3x^2 + 4x + C.$

3. $\int \left(4x^3 + \frac{3}{x}\right)dx;\quad Ats.: \frac{16}{7}x^7 + 8x^3 - \frac{9}{x} + C.$

4. $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} + 3\right)dx;\quad Ats.: \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + C.$

5. $\int \frac{3x^2 \sqrt[6]{x}\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx;\quad Ats.: x^3 + C.$

6. $\int \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3} dx;\quad Ats.: \frac{1}{3}x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C.$

7. $\int \frac{3x^3 - 2\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt{x} + 2}{x^2} dx;\quad Ats.: \frac{3}{2}x^2 - 6\sqrt[3]{x} + \frac{6\sqrt{x}}{x} - \frac{2}{x} + C.$

8. $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx;\quad Ats.: \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$

9. $\int e^x\left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx;\quad Ats.: e^x + \frac{1}{x} + C.$

10. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;\quad Ats.: -ctgx - tgx + C.$

11. $\int ctg^2 x dx;\quad Ats.: -ctgx - x + C.$

12. $\int \frac{3 - 2tg^2 x}{\cos^2 x} dx;\quad Ats.: 3tgx + 2ctgx + C.$

13. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$; $\quad Ats.: \frac{x}{2} - \frac{\sin x}{2} + C.$

14. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$; $\quad Ats.: 2arctgx - 3\arcsin x + C.$

15. $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$; $\quad Ats.: \frac{x^3}{3} - x + arctgx + C.$

2. Integravimas keičiant kintamuosius

Integruojant kintamojo keitimo metodu, integralas $\int f(x)dx$ pakeičiamas integralu $\int F(u)du$, kurį lengva apskaičiuoti pagal kurią nors formulę. Ieškodami integralo $\int f(x)dx$, kintamąjį x pakeičiame nauju kintamuoju ***u**: x 5 w(u)*. Išdiferenciavę tą lygybę, gauname *dx 5 w9(u)du*. Į pointegralinį reiškinį vietoje *x* ir *dx* įrašę jų išraiškas per ***u*** ir *du*, gauname $\int f(x)dx = \int f(j(u))j'(u)du = \int F(u)du$.

Apskaičiavę integralą naujo kintamojo atžvilgiu, keitiniu ***u** 5 c(x)* vėl grįžtame prie kintamojo x.

Pavyzdžiai

1. $\int (3x+2)^5 dx$

Sprendimas. Imkime keitinį $3x+2=u, \quad x = \frac{1}{3}u - \frac{2}{3},$

$dx = \left(\frac{1}{3}u + \frac{2}{3} \right)' du = \frac{1}{3} du.$ *Įstatę į duotą integralą, gausime*

$$\int (3x+2)^5 dx = \int u^5 \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int u^5 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{18}(3x+2)^6 + C.$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{5x^3+1} = \left| \begin{array}{c} 5x^3+1 = u, \\ du = \left(5x^3+1\right)' dx, \\ du = 15x^2 dx, \\ x^2 dx = \frac{1}{15} du \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{15} du}{u} = \frac{1}{15} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{15} \ln|u| + C =$$

$$= \frac{1}{15} \ln\left|5x^3+1\right| + C.$$

3. $\int \frac{dx}{\sin 2x} = \left| \begin{matrix} 2x = u, \\ du = 2dx, \\ dx = \frac{1}{2}du \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sin u} = \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln|tgx| + C.$

4. $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{25-9^x}} = \left| \begin{matrix} 3^x = u, \\ du = 3^x \ln 3 dx, \\ 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}du; \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{\ln 3}du}{\sqrt{5^2-u^2}} = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{du}{\sqrt{5^2-u^2}} = \frac{1}{\ln 3}\arcsin\frac{u}{5} +$

$+C = \frac{1}{\ln 3}\arcsin\frac{3x}{5} + C.$

Pratimai

1. $\int x^2\sqrt{1+x^3}\,dx;\quad Ats.: \frac{2}{3}\sqrt{\left(1+x^3\right)} + C.$

2. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{5-2x^2}};\quad Ats.: -\frac{3}{2}\sqrt{5-2x^2} + C.$

3. $\int \frac{6z^3dz}{5z^4-2};\quad Ats.: \frac{3}{10}\ln\left|5z^4-2\right| + C.$

4. $\int \frac{z^2dz}{5z^3+1};\quad Ats.: \frac{1}{15}\ln\left|5z^3+1\right| + C.$

5. $\int e^{3x+1}dx;\quad Ats.: \frac{1}{3}e^{3x+1} + C.$

6. $\int e^{5x^2-1}2xdx;\quad Ats.: \frac{1}{5}e^{5x^2-1} + C.$

7. $\int \frac{e^{\sqrt{3x-1}}}{\sqrt{3x-1}}dx;\quad Ats.: \frac{2}{3}e^{\sqrt{3x-1}} + C.$

8. $\int e^{3x^2+6x+5}(x+1)dx;\quad Ats.: \frac{1}{6}e^{3x^2+6x+5} + C.$

9. $\int 5^{4x^2-3}dx;\quad Ats.: \frac{5^{4x^2-3}}{\ln 5} + C.$

10. $\int \frac{6^{\frac{1}{x^2}}dx}{2x^3};\quad Ats.: \frac{-6^{\frac{1}{x^2}}}{16\ln 6} + C.$

11. $\int \frac{8^{tgx}}{5\cos^2 x}dx;\quad Ats.: \frac{8^{tgx}}{5\ln 8} + C.$

12. $\int \cos\left(5t^2-3\right)2tdt;\quad Ats.: \frac{1}{5}\sin\left(5t^2-3\right) + C.$

13. $\int \cos^2 t dt$; $\quad Ats.: \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C.$

14. $\int \sin^2 x dx$; $\quad Ats.: \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

15. $\int \sin^3 x \cos x dx$; $\quad Ats.: \frac{1}{4}\sin^4 x + C.$

16. $\int \frac{5x^2 dx}{\sin^2(8x^3 - 2)}$; $\quad Ats.: -\frac{5}{24} ctg(8x^3 - 2) + C.$

17. $\int \frac{x dx}{\sin^2\left(\frac{x^2}{5}\right)}$; $\quad Ats.: -\frac{5}{2} ctg\left(\frac{x^2}{5}\right) + C.$

18. $\int \frac{6dx}{\sqrt{9 - 36x^2}}$; $\quad Ats.: \arcsin 2x + C.$

19. $\int \frac{4dx}{\sqrt{1 - 16x^2}}$; $\quad Ats.: \arcsin 4x + C.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 3x^2}}$; $\quad Ats.: \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right) + C.$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x+2)^2}}$; $\quad Ats.: \arcsin(x+2) + C.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-3)^2}}$; $\quad Ats.: \arcsin \frac{x-3}{2} + C.$

23. $\int \frac{5dx}{3 + 12x^2}$; $\quad Ats.: \frac{5}{6} arctg 2x + C.$

24. $\int \frac{4du}{5 + 6u^2}$; $\quad Ats.: \frac{2\sqrt{30}}{15} arctg \frac{\sqrt{30}z}{5} + C.$

25. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$; $\quad Ats.: \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C.$

26. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^8}}$; $\quad Ats.: \frac{1}{4}\arcsin x^4 + C.$

27. $\int \cos x \sin 3x dx$; $\quad Ats.: -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

28. $\int \cos^3 x dx$; $\quad Ats.: \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

29. $\int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}$; $\quad$ $Ats.: 2\sqrt{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{5} - 1\right) + C.$

30. $\int \frac{\cos x}{1 + 2\sin x} dx$; $\quad$ $Ats.: \frac{1}{2}\ln|1 + 2\sin x| + C.$

3. Integravimas dalimis

Tegu *u 5 u(x)* ir *v 5 v(x)* – kintamojo *x* funkcijos, turinčios tolydžias išvestines. Tada

d(uv) 5 udv+vdu,

udv 5 d(uv)+vdu.

Integruodami šios lygybės abi puses gausime

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Pavyzdžiai

1. $\int x\sin xdx = \begin{vmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin xdx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx =$

$= -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C.$

2. $\int e^x \cos xdx = \begin{vmatrix} u = e^x, & du = e^x dx, \\ dv = \cos xdx, & v = \sin x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \int \sin xe^x dx =$

$= \begin{vmatrix} u = e^x, & du = e^x dx, \\ dv = \sin xdx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int(-\cos x)e^x dx\right).$ *Gavome lygybę*

$\int e^x \cos xdx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos xdx, \quad 2\int e^x \cos xdx = e^x(\sin x + \cos x),$

$\int e^x \cos xdx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x).$

Pratimai

1. $\int x\sin xdx$; $\quad$ $Ats.: -x\cos x + \sin x + C.$

2. $\int \ln xdx$; $\quad$ $Ats.: x\ln x - x + C.$

3. $\int x^2 e^x dx$; $\quad$ $Ats.: x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$

4. $\int xe^x dx$; $\quad$ $Ats.: e^x(x - 1) + C.$

5. $\int xe^{-2x} dx$; $\quad$ $Ats.: -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$

6. $\int (x-1)e^{2x}dx;\quad Ats.: \frac{1}{2}(x-1)e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C.$

7. $\int (1-x)\sin xdx;\quad Ats.: (x-1)\cos x-\sin x+C.$

8. $\int x\cos xdx;\quad Ats.: x\sin x+\cos x+C.$

9. $\int x\sin 2xdx;\quad Ats.: -\frac{x}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

10. $\int e^{x}\sin xdx;\quad Ats.: \frac{1}{2}e^{x}(\sin x-\cos x)+C.$

11. $\int e^{2x}\cos xdx;\quad Ats.: \frac{1}{5}e^{2x}(\sin x+\cos 2x)+C.$

12. $\int arctgxdx;\quad Ats.: xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^{2}\right)+C.$

13. $\int xarctgxdx;\quad Ats.: \frac{1}{2}\left(x^{2}arctgx+arctgx-x\right)+C.$

14. $\int \frac{\ln x}{x^{2}}dx;\quad Ats.: -\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C.$

15. $\int \frac{xdx}{\sin^{2}x};\quad Ats.: \ln|\sin x|xctgx+C.$

16. $\int \frac{xdx}{\cos^{2}x};\quad Ats.: xtgx-\ln|\cos x|+C.$

17. $\int \arccos xdx;\quad Ats.: x\arccos x-\sqrt{1-x^{2}}+C.$

18. $\int \frac{xarctgx}{\sqrt{1+x^{2}}};\quad Ats.: \sqrt{1+x^{2}}arctgx-\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)+C.$

19. $\int x^{3}e^{x}dx;\quad Ats.: e^{x}\left(x^{3}-3x^{2}+6x-6\right)+C.$

20. $\int \ln^{2}xdx;\quad Ats.: x\left(\ln^{2}x-2\ln x+2\right)+C.$

4. Racionaliųjų trupmenų integravimas

Racionaliąja trupmena vadinama $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ pavidalo trupmena, kur $P_n(x)$ ir $Q_m(x)$ – atatinkamai *n* – ojo ir *m* – ojo laipsnio daugianariai. Racionalioji trupmena vadinama taisyklinga, jei $n<m$, ir netaisyklinga, jei $n>m$.

Bet kokią netaisyklingą racionaliąją trupmeną, jos skaitiklį padalijus iš vardiklio, galima pakeisti daugianario ir taisyklingosios trupmenos suma.

Integruojant taisyklingąją racionaliąją trupmeną, ji išreiškiama paprastųjų trupmenų suma, t.y.

$$\frac{A}{(x-a)^m} \quad ir \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$$

pavidalo trupmenų suma, kur kvadratinis trinaris x^2+px+q neturi realių šaknų, o m ir n – sveikieji teigiami skaičiai.

Pavyzdžiai

1. $\int \frac{2x+1}{x^2-5x+4}dx.$

Sprendimas

Surandame vardiklio šaknis ir pointegralinį reiškinį pakeičiame dviejų trupmenų suma

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4};$$

čia A ir B – koeficientai, kuriuos reikia rasti. Abi lygybės puses padauginame iš bendro vardiklio ir gauname

2x+1 5 A(x-4)+B(x-1),

2x+1 5 (A+B)x-(4A+B).

Sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} A+B=2, \\ 4A+B=-1, \end{cases}$$

Išsprendę lygčių sistemą randame A 5 -1, B 5 3. Vadinasi

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+4} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-4};$$

Dabar apskaičiuojame duotąjį integralą

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+4}dx = -\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x-4} = -\ln|x-1| + 3\ln|x-4| + C = \ln\left|\frac{(x-4)^3}{x-1}\right| + C.$$

2. $\int \frac{3x+1}{(x+3)^2(x-5)}dx.$

Sprendimas

$$\frac{3x+1}{(x+3)^2(x-5)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{x-5},$$

3x+1 5 A(x+3)(x-5)+B(x-5)+C(x+3)^2,

3x+1 5 Ax^2+3Ax-5Ax-15A+Bx-5B+Cx^2+6Cx+9C,

3x+1 5 (A+C)x^2+(-2A+B+6C)x+(-15A-5B+9C).

Sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių, gauname sistemą

$$\begin{cases} A+C=0, \\ -2A+B+6C=3, \\ -15A-5B+9C=1. \end{cases}$$

Išsprendę gauname $A=-\frac{1}{4}, \quad B=1, \quad C=\frac{1}{4}$. *Taigi*

$$\int\frac{3x+1}{(x+3)^2(x-5)}dx=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{dx}{(x+3)^2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-5}=-\frac{1}{4}\ln|x+3|-\frac{1}{x+3}+$$

$$+\frac{1}{4}\ln|x-5|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-5}{x+3}\right|-\frac{1}{x+3}+C.$$

3. $\int\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}dx;$

$$x^4+4x^3+4x^2-9=\left(x^2+2x\right)^2-3^2=\left(x^2+2x-3\right)\left(x^2+2x+3\right)=$$

$$=(x-1)(x+3)\left(x^2+2x+3\right),$$

$$\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3},$$

iš čia

$$7x^2+26x-9=A(x+3)\left(x^2+2x+3\right)+B(x-1)\left(x^2+2x+3\right)+(Cx+D)(x-1)(x+3);$$

sutvarkę lygybės dešinę pusę ir sulyginę koeficientus prie vienodų x laipsnių gausime sistemą

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ 5A+B+2C+D=7, \\ 9A+B-3C+2D=26, \\ 9A-3B-3D=-9; \end{cases}$$

išsprendę gauname A 5 1, B 5 1, C 5 -2, D 5 5. Tuomet

$$\int\frac{7x^2+26x-9}{x^4+4x^3+4x^2-9}dx=\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{x+3}+\int\frac{-2x+5}{x^2+2x+3}dx=\ln|x-1|+\ln|x+3|-$$

$$-\int\frac{2x+2-7}{x^2+2x+3}dx=\ln|x-1|+\ln|x+3|-\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx+\int\frac{7dx}{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\ln|x-1|+$$

$$+\ln|x+3|-\ln\left|x^2+2x+3\right|+\frac{7}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C=\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)}{x^2+2x+3}\right|+\frac{7}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

4. $\int\frac{x^4dx}{x^2-3}$.

Sprendimas

Duotoji trupmena netaisyklingoji, todėl išskiriame jos sveikąją dalį:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^4 & ?\underline{x^2-3} \\ \underline{x^4-3x^2} & x^2+3 \\ -\,3x^2 & \\ \underline{3x^2-9} & \\ 9 & \end{array}$$

Tada $\frac{x^4}{x^2-3}=x^2+3+\frac{9}{x^2-3}=x^2+3+\frac{9}{\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}=$

$$=x^2+3-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{x-\sqrt{3}}-\frac{1}{x+\sqrt{3}}\right)$$

Todėl $\int\frac{x^4dx}{x^2-3}=\frac{x^3}{3}+3x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C.$

Pratimai

1. $\int\frac{x}{x+4}dx;\quad Ats.: x-4\ln|x+4|+C.$

2. $\int\frac{(1+x)^2}{x^2+1}dx;\quad Ats.: x+\ln\left(x^2+1\right)+C.$

3. $\int\frac{x^4dx}{x^2+1};\quad Ats.: \frac{x^3}{3}-x+arctgx+C.$

4. $\int\frac{dx}{x(x-1)};\quad Ats.: \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C.$

5. $\int\frac{dx}{(x+1)(2x-3)};\quad Ats.: \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|+C.$

6. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$; $\quad Ats.: \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C.$

7. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}$; $\quad Ats.: \ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+2}\right|+C.$

8. $\int \frac{6x^2-13x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$; $\quad Ats.: \ln\left|x^2(x-1)^3(x-2)\right|+C.$

9. $\int \frac{x^3}{x-2}dx$; $\quad Ats.: \frac{x^3}{3}+x^2+4x+8\ln|x-2|+C.$

10. $\int \frac{6x-4}{x^3-4x}dx$; $\quad Ats.: \ln\left|\frac{x(x-2)}{(x+2)^2}\right|+C.$

11. $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$; $\quad Ats.: \ln\left|\frac{(x-2)^2}{x-3}\right|+C.$

12. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$; $\quad Ats.: \ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+2}\right|+C.$

13. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$; $\quad Ats.: \ln\left|\frac{x^3(x-1)}{x+1}\right|+C.$

14. $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$; $\quad Ats.: \frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{(x-1)^8}{x}\right|+C.$

15. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$; $\quad Ats.: \frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C.$

5. Kai kurių trigonometrinių funkcijų integravimas

Skaičiuojant $\int \sin^{2n} x dx \quad arba \quad \int \cos^{2n} x dx$ pavidalo integralus, kai sinuso arba kosinuso laipsnis lyginis, taikome laipsnio mažinimo formules:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}+\cos 2x.$$

Pvz., $\int \sin^2 2x = \int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x + C.$

Skaičiuojant $\int \sin^{2n+1} xdx$ *arba* $\int \cos^{2n+1} xdx$ pavidalo integralus, kai sinuso arba kosinuso laipsnis nelyginis, reikia nuo nelyginio laipsnio atskirti vieną daugiklį ir įvesti naują kintamąjį, pažymėjus *sinx 5 u* arba *cosx 5 u.*

Pvz., $\int \cos^3 xdx = \int \cos^2 x \cos xdx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)\cos xdx = \int \cos xdx -$

$- \int \sin^2 xd\left(\sin x\right) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

Skaičiuojant $\int \sin ax \cos bxdx, \int \sin ax \sin bxdx$ *ir* $\int \cos ax \cos bx$ pavidalo integralus, reikia taikyti formules:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(a - b\right)x - \cos\left(a + b\right)x\right)$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos\left(a - b\right)x + \cos\left(a + b\right)x\right)$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin\left(a - b\right)x + \sin\left(a + b\right)x\right).$$

Pvz., $\int \sin 3x \cos 5xdx = \frac{1}{2}\int (\sin(-2x) + \sin 8x)dx = -\frac{1}{2}\int \sin 2xdx + \frac{1}{2}\int \sin 8xdx =$

$= \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$

Skaičiuojant $\int R(\sin x; \cos x)dx$ pavidalo integralus, reikia naudoti keitinį $tg\frac{x}{2} = t$ ir formules:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2};$$

$$\cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

$$tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

Iš lygties $tg\frac{x}{2} = t$ randame, kad $x = 2arctgt$, tai $dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$

Pvz., $\int \frac{dx}{5+4\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{5+5t^2-4-4t^2} = 2\int \frac{dt}{t^2+9} =$

$= 2\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+C = \frac{2}{3}arctg\left(\frac{1}{3}tg\frac{x}{2}\right)+C.$

Pratimai

1. $\int \sin^3 x dx;\quad Ats.: -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$

2. $\int \cos^3 x dx;\quad Ats.: \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$

3. $\int \sin 5x \sin 3x dx;\quad Ats.: \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

4. $\int \cos^4 x dx;\quad Ats.: \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

5. $\int \cos 4x \cos x dx;\quad Ats.: \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{1}{10}\sin 5x + C.$

6. $\int \sin 7x \cos 3x dx;\quad Ats.: -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + C.$

7. $\int (1+2\cos x)^2 dx;\quad Ats.: 3x + 4\sin x + \sin 2x + C.$

8. $\int (1-\sin 2x)^2 dx;\quad Ats.: \frac{3x}{2} + \cos 2x - \frac{\sin 4x}{8} + C.$

9. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx;\quad Ats.: \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C.$

10. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx;\quad Ats.: \frac{3x}{128} - \frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024} + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sin x};\quad Ats.: \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

12. $\int \sin^2 x \cos x dx;\quad Ats.: \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

6. Kai kurių iracionaliųjų funkcijų integravimas

Skaičiuojant integralus, turinčius $\sqrt{x^2 - a^2}$, $\sqrt{x^2 + a^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$ pavidalo radikalų, naudojamasi trigonometriniais keitiniais:

1) *x 5 asinu* (arba *x 5 acosu*) integraluose, turinčiuose $\sqrt{x^2 - a^2}$;

2) *x 5 atgu* (arba *x 5 actgu*) integraluose, turinčiuose $\sqrt{x^2 + a^2}$;

3) *x 5 a/sinu* (arba *x 5 a/cosu*) integraluose, turinčiuose $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Pavyzdžiai

1. $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx.$

Sprendimas

Panaudokime keitinį x 5 2sinu; iš čia dx 5 2cosudu, $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2^2 - 2^2 \sin^2 u} =$

$= 2\sqrt{1 - \sin^2 u} = 2\cos u.$ *Turime*

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int 2\cos u \, 2\cos u du = 4\int \cos^2 u du = 4\int \frac{1 + \cos 2u}{2} du =$$

$$= 2\left(\int du + \int \cos 2u du\right) = 2u + \sin 2u + C.$$

Iš keitinio x 5 2sinu randame $u = \arcsin\frac{x}{2}$, $\sin 2u = \sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right) =$

$$= 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)} = x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2}.$$

Gauname $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2}.$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}.$

Sprendimas

Pažymėję x 5 tgu, randame $dx = \frac{du}{\cos^2 u}$, $\sqrt{1 + x^2} = \frac{1}{\cos u}$. *Vadinasi*

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}} = \int \frac{1}{\cos^2 u}\cdot\frac{1}{tgu}\cdot \cos u du = \int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C.$$

Kadangi $\cos u = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, *tai* $\sin u = \sqrt{1-\dfrac{1}{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $tg\dfrac{u}{2} = \dfrac{\sin u}{1+\cos u} =$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}; \text{ ir } \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}\right| + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x}$.

Sprendimas

Panaudokime keitinį $x = \dfrac{1}{\sin u}$, *tada* $dx = -\dfrac{\cos u}{\sin^2 u}du$, $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \cos u$ *ir*

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x} = -\int \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}du = \int \frac{\sin^2 u - 1}{\sin^2 u}du = u + ctgu + C = \arcsin\frac{1}{x} + ctg\left(\arcsin\frac{1}{x}\right) + C =$$

$$= \arcsin\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{\sin^2\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)} - 1} + C = \arcsin\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} - 1} + C = \arcsin\frac{1}{x} + \sqrt{x^2-1} + C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left|x = u^2, \quad dx = 2udu\right| = 2\int \frac{udu}{u+1} = 2\int \frac{u+1-1}{u+1}du = 2\int\left(1-\frac{1}{u+1}\right)du =$

$$= 2\int du - 2\int \frac{d(u+1)}{u+1} = 2u - 2\ln|u+1| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C.$$

Pratimai

1. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$; *Ats.*: $4{,}5\arcsin\dfrac{x}{3} - \dfrac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$; *Ats.*: $-\dfrac{(x^2+8)\sqrt{4-x^2}}{3} + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$; *Ats.*: $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}+4}\right| + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$; *Ats.*: $\ln\left(x+\sqrt{9+x^2}\right) + C.$

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; *Ats.*: $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

6. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$; $\quad$ *Ats.*: $\frac{-\sqrt{9-x^2}}{9x}+C.$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}dx}{x}$; $\quad$ *Ats.*: $2\arcsin\frac{2}{x}+\sqrt{x^2-4}+C.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$; $\quad$ *Ats.*: $\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$; $\quad$ *Ats.*: $\frac{-x}{16\sqrt{16-x^2}}+C.$

10. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$; $\quad$ *Ats.*: $-\arcsin\frac{1}{x}+C. \int$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}+5}$; $\quad$ *Ats.*: $\sqrt{2x}-5\ln\left(\sqrt{2x}+5\right)+C.$

12. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$; $\quad$ *Ats.*: $2\left(\sqrt{x}-arctg\sqrt{x}\right)+C.$

13. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$; $\quad$ *Ats.*: $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{4}\left(2-x^2\right)\sqrt{4-x^2}+C.$

APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS

7. Apibrėžtinio integralo sąvoka

Sakykime, funkcija *f(x)* apibrėžta atkarpoje *[a;b]*. Padalykime atkarpą *[a;b]* taškais $a < x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ į n lygių dalių, išrinkite kiekvienoje elementarioje atkarpoje $[x_{k-1};x_k]$ bet kokį tašką j_k ir pažymėkime Δx_k kiekvienos tokios atkarpos ilgį. Funkcijos ***f(x) integraline suma*** atkarpoje *[a;b]* vadinama suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + ... + f(x_n)\Delta x_n .$$

Funkcijos ***f(x) apibrėžtiniu integralu*** atkarpoje *[a;b]* vadinama integralinės sumos riba, kai didžiausios iš elementariųjų atkarpų ilgis artėja prie nulio:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k .$$

Apibrėžtinio integralo savybės

1. Baigtinio skaičiaus funkcijų algebrinės sumos apibrėžtinis integralas yra lygus tų funkcijų apibrėžtinių integralų algebrinei sumai:

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

2. Pastovų daugiklį galima iškelti prieš integralo ženklą:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

3. Pakeitus integravimo rėžius, apibrėžtinio integralo ženklas pakeičiamas priešingu:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4. Apibrėžtinis integralas, kurio integravimo rėžiai vienodi, lygus nuliui:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

5. Integravimo atkarpą galima skaidyti į dalis:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

8. Niutono – Leibnico formulė

Funkcijos *f(x)* apibrėžtinis integralas, kai galima rasti atitinkamą neapibrėžtinį integralą *F(x)*, skaičiuojamas pagal *Niutono-Leibnico* formulę:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Pavyzdžiai

1. $\int_0^1 (2x+1)dx = (x^2+x)\Big|_0^1 = (1^2+1)-(0^2+0) = 2.$

2. $\int_{-\frac{p}{6}}^{\frac{p}{6}} \sin x dx = -\cos x\Big|_{-\frac{p}{6}}^{\frac{p}{6}} = -\cos\frac{p}{6} - \left(-\cos\left(-\frac{p}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_{-1}^{1} = arctg1 - arctg(-1) = \frac{p}{4} - \left(-\frac{p}{4}\right) = \frac{p}{2}.$

Pratimai

1. $\int_{-3}^{1} (2x+5)dx;\quad Ats.: 12.$

2. $\int_{-2}^{1} (3x^2-5x-2)dx;\quad Ats.: 10{,}5.$

3. $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx;\quad Ats.: 2\frac{2}{3}.$

4. $\int_1^9 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx;\quad Ats.: 21\frac{1}{3}.$

5. $\int_{-\frac{p}{4}}^{\frac{p}{4}} \cos x dx;\quad Ats.: \sqrt{2}.$

6. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dx}{1+x^2};\quad Ats.: \frac{2}{3}p.$

7. $\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}};\quad Ats.: \frac{p}{3}.$

8. $\int_{-1}^{2} (x^2+2x+1)dx;\quad Ats.: 9.$

9. $\int_{-1}^{0} (x^3+2x)dx;\quad Ats.: -1\frac{1}{4}.$

10. $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}dx;\quad Ats.: 18\frac{3}{5}.$

11. $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}};\quad Ats.: 7{,}5.$

12. $\int_{-1}^{1} e^x dx;\quad Ats.: \frac{e^2-1}{e}.$

13. $\int_0^1 e^{3x}dx;\quad Ats.: \frac{e^3-1}{3}.$

14. $\int_1^e \frac{dx}{x};\quad Ats.: 1.$

15. $\int_0^1 \frac{dx}{x+2};\quad Ats.: \ln 1{,}5.$

16. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}};\quad Ats.: \frac{p}{2}.$

9. Apibrėžtinio integralo skaičiavimas kintamojo keitimo metodu

Skaičiuojant apibrėžtinį integralą kintamojo keitimo metodu, iš apibrėžtinio integralo $\int_a^b f(x)dx$, pakeitus $u = y(x)$ arba $\mathbf{x} = j(\mathbf{u})$, gaunamas apibrėžtinis integralas kintamojo u atžvilgiu. Šiuo atveju integravimo rėžiai a ir b atitinkamai pakeičiami rėžiais a ir b, kurie randami iš pradinio keitinio.

Pavyzdžiai

1. $$\int_2^3 (2x-1)^3 dx = \left| \begin{array}{ll} 2x-1=u, & du=2dx,\ dx=\frac{1}{2}du; \\ kai\ x=2,\ u=3; & kai\ x=3,\ u=5; \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_3^5 u^3 du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}\Big|_3^5 = 68.$$

2. $$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}} = \left| \begin{array}{l} u=5x-1,\ du=5dx,\ dx=\frac{1}{5}du; \\ kai\ x=1,\ u=4;\ kai\ x=2,\ u=9; \end{array} \right| = \frac{1}{5}\int_4^9 u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{2}{5}u^{\frac{1}{2}}\Big|_4^9 = \frac{2}{5}.$$

Pratimai

1. $\int_4^5 (4-x)^3$; *Ats.*: $-\frac{1}{4}$.
2. $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^4}$; *Ats.*: $\frac{7}{64}$.
3. $\int_0^3 \sqrt[3]{3x-1}dx$; *Ats.*: $3\frac{3}{4}$.
4. $\int_1^5 \sqrt{(2x-1)^3}dx$; *Ats.*: 12.
5. $\int_0^5 \sqrt{3x+1}dx$; *Ats.*: 3.
6. $\int_0^1 (2x^3+1)^4 x^2 dx$; *Ats.*: $\frac{1}{15}$.
7. $\int_{-1}^2 (x^2-1)^3 xdx$; *Ats.*: $10\frac{1}{8}$.
8. $\int_0^2 \frac{4xdx}{(x^2-1)^3}$; *Ats.*: $\frac{8}{9}$.
9. $\int_0^2 9\sqrt{x^3+1}x^2dx$; *Ats.*: 52.
10. $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$; *Ats.*: $\frac{1}{3}$.
11. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{32xdx}{(x^2+1)^5}$; *Ats.*: $\frac{15}{64}$.
12. $\int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{3\sin x+1}\cos xdx$; *Ats.*: $1\frac{5}{9}$.
13. $\int_{\frac{3p}{2}}^{2p} \sqrt{1-\cos x}\sin xdx$; *Ats.*: $-\frac{2}{3}$.
14. $\int_0^{\frac{p}{3}} \frac{\sin xdx}{3-\cos x}$; *Ats.*: ln1,25.
15. $\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\cos xdx}{2+\sin x}$; *Ats.*: ln1,5.
16. $\int_0^{\frac{p}{6}} e^{\sin x}\cos xdx$; *Ats.*: $\sqrt{e}-1$.

17. $\int\limits_0^{-\frac{1}{2}} e^{-2x}dx;\quad Ats.:\frac{1-e}{2}.$

18. $\int\limits_{\frac{p}{12}}^{\frac{p}{8}} \sin 2xdx;\quad Ats.:\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}.$

19. $\int\limits_{\frac{p}{8}}^{\frac{p}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x};\quad Ats.:\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$

20. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}};\quad Ats.:\frac{p}{3}.$

21. $\int \frac{4xdx}{\left(x^2-1\right)^3};\quad Ats.:\frac{8}{9}.$

22. $\int\limits_0^{\sqrt{5}} \sqrt{(4-3x)^3}dx;\quad Ats.:-132\frac{4}{15}.$

23. $\int\limits_0^{\sqrt{5}} \frac{3xdx}{\sqrt{x^2+4}};\quad Ats.:3.$

24. $\int\limits_0^2 \frac{2xdx}{\sqrt{2x^2+1}};\quad Ats.:2.$

25. $\int\limits_0^{\frac{p}{4}} \sin 4xdx;\quad Ats.:0{,}5.$

26. $\int\limits_{\frac{p}{6}}^{\frac{p}{2}} \frac{3\cos xdx}{2\sin x+1};\quad Ats.:1{,}5\ln 1{,}5.$

27. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};\quad Ats.:\frac{p}{2}.$

28. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2};\quad Ats.:\frac{p}{18}.$

10. Apibrėžtinio integralo integravimas dalimis

Jeigu funkcijos *u(x)* ir *v(x)* ir jų išvestinės yra tolydžios atkarpoje *[a;b]*, tai apibrėžtinio integravimo dalimis formulė yra tokia:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Pavyzdys

$$\int\limits_0^1 xe^x dx = \begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ e^x dx = dv & v=e^x \end{vmatrix} = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = e^x(x-1)\Big|_0^1 = 1.$$

Pratimai

1. $\int\limits_0^1 xe^{2x}dx;\quad Ats.:\frac{1}{4}\left(e^2+1\right).$

2. $\int\limits_1^2 \ln xdx;\quad Ats.:\ln 4-1.$

3. $\int\limits_1^2 x\ln xdx;\quad Ats.:\ln 4-\frac{3}{4}.$

4. $\int\limits_0^p x\cos xdx;\quad Ats.:-2.$

5. $\int\limits_{0}^{\frac{p}{2}} x\sin xdx;\quad Ats.:1.$ 6. $\int\limits_{e}^{4} x\ln x;\quad Ats.:8\ln 4-4-\frac{e^2}{4}.$

7. $\int\limits_{0}^{1} \arcsin xdx;\quad Ats.:\frac{p}{2}-1.$ 8. $\int\limits_{0}^{1} xarctgxdx;\quad Ats.:\frac{p}{4}-\frac{1}{2}.$

9. $\int \ln^2 xdx;\quad Ats.:e-2.$ 10. $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx;\quad Ats.:1-\frac{2}{e}.$

11. $\int\limits_{0}^{\frac{p}{4}} x\sin 2xdx;\quad Ats.:\frac{1}{4}.$ 12. $\int\limits_{1}^{2} x^2\ln xdx;\quad Ats.:\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}.$

13. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \arccos xdx;\quad Ats.:1-\frac{p}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$ 14. $\int\limits_{0}^{2p} x^2\cos xdx;\quad Ats.:4p.$

11. Netiesioginiai integralai

1. Jeigu funkcija *f(x)* tolydi intervale *[a;+ :),* tai

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b=\lim_{b\to+\infty} F(b)-F(a).$$

2. Jeigu funkcija *f(x)* tolydi intervale *(- : ;b],* tai

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_a^b=F(b)-\lim_{a\to-\infty} F(a).$$

3. Jeigu funkcija *f(x)* tolydi intervale *(- : ;+ :),* tai

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Tais atvejais, kai ribos baigtinės, sakoma, kad netiesioginiai integralai *konverguoja;* priešingu atveju jie *diverguoja*.

Pavyzdžiai

1. $\int\limits_{0}^{+\infty}\sin xdx=\lim_{b\to-\infty}\int\limits_{0}^{b}\sin xdx=-\lim_{b\to-\infty}\cos x\Big|_0^b=-\lim_{b\to-\infty}\cos b+1.$

Kadangi $-\lim_{b\to-\infty}\cos b$ *neegzistuoja, tai integralas* $\int\limits_{0}^{+\infty}\sin xdx$ *diverguoja.*

2. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\ln(x^2+4)\Big|_a^0=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}(\ln 4-\ln(a^2+4))\Big|_a^0=- : .$

Integralas diverguoja.

$$3.\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{(x+1)^2+1}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}+$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=\lim_{a\to-\infty}arctg(x+1)\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}arctg(x+1)\Big|_0^b=\lim_{a\to-\infty}(arctg1-arctg(a+1))+$$

$$+\lim_{b\to+\infty}(arctg(b+1)-arctg1)=\frac{p}{4}+\frac{p}{2}+\frac{p}{2}-\frac{p}{4}=p.$$ *Integralas konverguoja.*

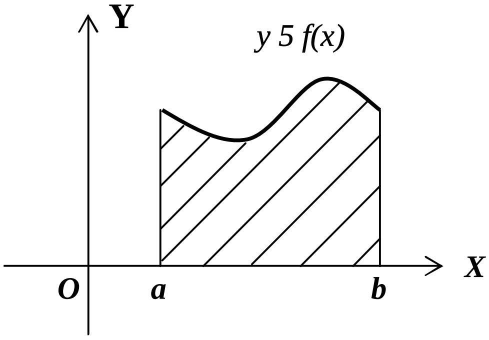
Pratimai

1. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}$; *Ats.: diverguoja.*
2. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; *Ats.*: $\frac{p}{4}$.
3. $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x+1}$; *Ats.: diverguoja.*
4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$; *Ats.*: $\frac{p\sqrt{5}}{5}$.
5. $\int_{0}^{+\infty}xe^{-x^2}dx$; *Ats.*: 0,5.
6. $\int_{0}^{+\infty}xe^{-x}dx$; *Ats.*: 1.
7. $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$; *Ats.*: 1.
8. $\int_{-\infty}^{0}\frac{x+1}{x^2+1}dx$; *Ats.: diverguoja.*
9. $\int_{0}^{+\infty}x\cos 2x dx$; *Ats.: diverguoja.*
10. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2(1+x)}$; *Ats.*: $1-\ln 2$.

12. Apibrėžtinio integralo taikymai

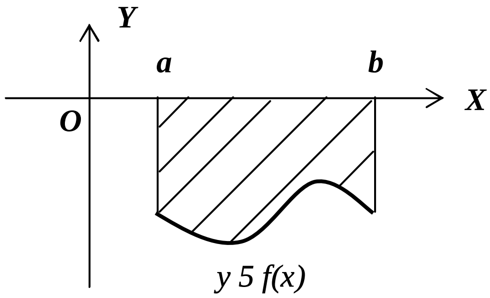
Plokščios figūros plotas

1. Kreivinės trapecijos, apribotos funkcijos *f(x) / 0* grafiko, abscisių ašies ir tiesių *x 5 a* bei *x 5 b* , plotas skaičiuojamas pagal formulę



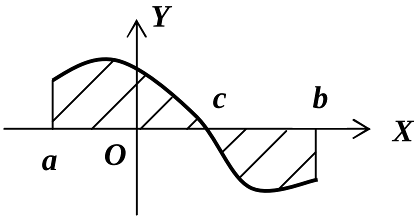
$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

2. . Kreivinės trapecijos, apribotos funkcijos *f(x) £ 0* grafiko, abscisių ašies ir tiesių *x 5 a* bei *x 5 b* , plotas skaičiuojamas pagal formulę



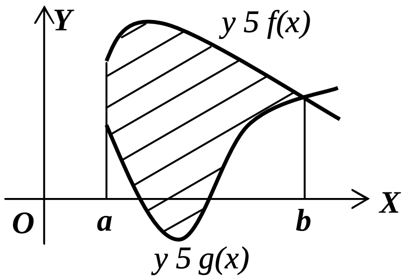
$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

3. Jei figūra, ribojama kreivės *f(x),* abscisių ašies ir tiesių *x 5 a* bei *x 5 b,* yra abiejose pusėse abscisių ašies, tai



$$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Jei figūrą riboja dviejų funkcijų *y 5 f(x)* ir *y 5 g(x)* grafikai, tai jos plotas lygus

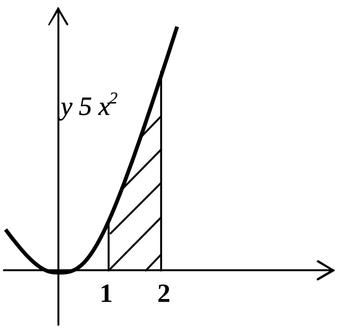


$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx.$$

Pavyzdžiai

Apskaičiuoti figūros, apribotos kreivių y 5 x^2, x 5 1, x 5 2, y 5 0, plotą.

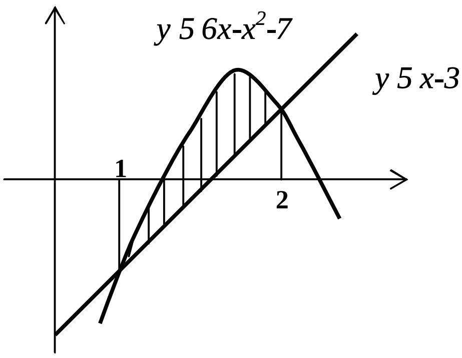
Sprendimas



$$S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

2. Apskaičiuokite figūros, apribotos kreivių y 5 6x-x^2-7 ir y 5 x-3, plotą.

Sprendimas



Pirmiausia randame tų kreivių susikirtimo taškų abscises.Tuo tikslu sprendžiame lygtį 6x-x²-7 5 x-3; iš čia gauname x_1 5 1, x_2 5 4. Tada

$$S=\int_1^4\left(6x-x^2-7-x+3\right)dx=$$

$$\int_1^4\left(5x-x^2-4\right)dx=\left(\frac{5}{2}x^2-\frac{x^3}{3}-4x\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=40-\frac{64}{3}-16-\frac{5}{2}+\frac{1}{3}+4=4{,}5.$$

Pratimai

Rasti figūrų, apribotų linijomis, plotus:

1. 2x+3y 5 9, y 5 0, x 5 -1, x 5 4; Ats.:10.

2. y-3x 5 -1,y 5 0, x 5 2, x 5 4; Ats.:16.

3. 4x+5y=20, x=0, y=0; Ats.:10.

4. y=x^2+1, y=0, x=0, x=2; Ats.: $4\frac{2}{3}$.

5. y=3x^2+3, y=0, x=-2, x=1; Ats/:18.

6. y=-x^2+9, y=0; Ats.:36.

7. $y=-\frac{1}{3}x^2+3,\quad y=0,\quad x=-2,\ x=3;\quad Ats.:11\frac{1}{9}.$

8. y=-x^2+6x-5, y=0, x=2, x=3; Ats.: $3\frac{2}{3}$.

9. y=-x^2+8x+4, y=0; Ats.:120.

10. y=-x^2+5x-4, y=0; Ats.:4,5/

11. y=-x^2+6, x+y=4; Ats.:4,5.

12. y=x^2, x-2y=-6; Ats.: $7\frac{7}{48}$.

13. y=$\frac{4}{x^2}$, y=7-3x; Ats.:0,5.

14. y=x^2, y=2x-x^2; Ats.:1/3.

15. y=x^2-2x+2, y=2+4x-x^2; Ats.:9.

16.$y=x^2-2x+2$, $2x+y=6$; Ats.:$10\frac{2}{3}$.

17. $y=2x^2-4x+3$, $x+2y=6$; Ats.:$1\frac{17}{64}$.

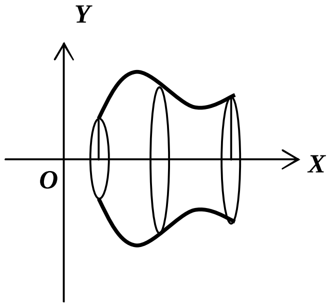
18. $y=4-x^2$, $y=0$;   Ats.:$\frac{32}{3}$.

19. $xy=4$,$x=1$,$x=4$,$y=0$;   Ats.:8ln2.

20. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$;   Ats.:1.

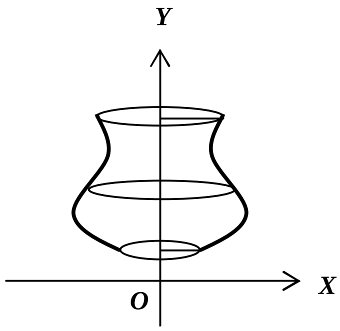
Sukinio tūris

1. Jei kreivinė trapecija, apribota kreivės *y 5 f(x)* ir tiesių *y 5 0, x 5 a, x 5 b,* sukama apie ašį *OX*, tai gauto sukinio tūris lygus



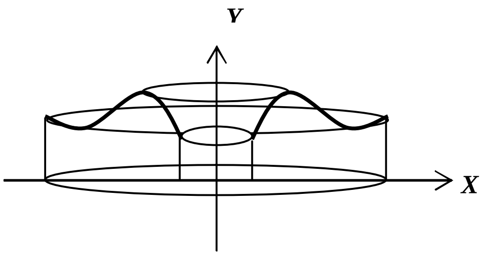
$$V_X = p\int_a^b y^2 dx$$

2. Jei kreivinė trapecija, apribota kreivės *x 5 f(y)* ir tiesių *x 5 0, y 5 a, y 5 b,* sukama apie ašį *OY*, tai gauto sukinio tūris lygus



$$V_Y = p\int_a^b x^2 dy$$

3. Jei kreivinė trapecija, apribota kreivės *y 5 f(x)* ir tiesių *y 5 0, x 5 a, x 5 b,* sukama apie ašį *OY*, tai gauto sukinio tūris lygus



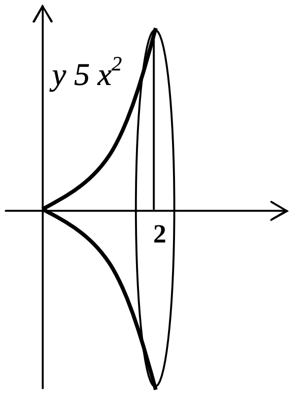
$$V_Y = 2p\int_a^b xydx$$

4. Jei figūra, apribota kreivių *y 5 f(x)* ir *y 5 g(x) (f(x) / g(x))* ir *x 5 0, y 5 a, y 5 b,* sukama apie ašį *OX*, tai gauto sukinio tūris lygus

$$V_X = p\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)dx .$$

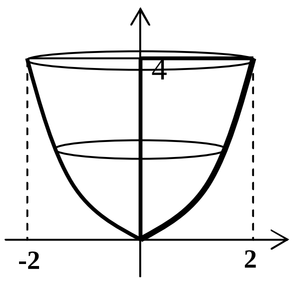
Pavyzdžiai

1. Figūra, apribota kreivių *y 5 x*^{2}*, x 5 2, y 5 0* sukama apie *OX* ašį. Apskaičiuokite gautojo sukinio tūrį.



$$V_X = p\int_a^b y^2 dx = p\int_0^2 \left(x^2\right)^2 dx = p\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{32}{5}p .$$

2. Figūra, apribota kreivių *y 5 x*^{2}*, y 5 4, x 5 0* sukama apie *OY* ašį. Apskaičiuokite gautojo sukinio tūrį.



$$V_Y = p\int_a^b x^2 dy = \left| jei\ y = x^2,\ tai\ x = \sqrt{y}\ ir\ a = 0, b = 4 \right| =$$

$$= p\int_0^4 y dy = p\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^4 = 8p .$$

Pratimai

Apskaičiuokite tūrius sukinių, kurie gaunami duotų kreivių apribotas figūras sukant apie *OX* ašį:

1. y^2 5 2x, x 5 3, y 5 0;	Ats.:*9p*.
2. y^2 5 6x, x 5 0, x 5 5, y 5 0;	Ats.:75p.
4. y 5 $\sqrt{x}$, x 5 1,x 5 4, y 5 0;	Ats.:7,5p.
5. y 5 3x, y 5 0, x 5 2;	Ats.:24p.

6. y 5 2x-x^2, y 5 0; Ats.: $\frac{16}{15}$ p.

7. y 5 x^3, y 5 0, x 5 2; Ats.: $\frac{16}{3}$ p.

8. xy 5 4, x 5 1, x 5 4, y 5 0; Ats.: 12 p.

9. y 5 x^3, y= $\sqrt{x}$; Ats.: $\frac{5}{14}$ p.

10. y=$(x-1)^2$, y=1; Ats.: $\frac{8}{5}$ p.

11 y= $\sqrt{4-x^2}$, x-y+2=0, y=0; Ats.: 8 p.

12. y=x, y= $\frac{1}{x}$, x=3; Ats.: 8 p.

13. y= $\frac{x^2}{4}$, y= $\frac{x^3}{8}$, Ats.: $\frac{4}{35}$ p.

14. y=sinx, y= $\frac{2}{p}x$, $0 \le x \le \frac{p}{2}$; Ats.: $\frac{p^2}{12}$.

15. y=sinx, y=cosx, y=0, $0 \le x \le \frac{p}{2}$; Ats.: $\frac{p(p-2)}{4}$.

Apskaičiuokite tūrius sukinių, kurie gaunami duotų kreivių apribotas figūras sukant apie *OY* ašį:

16. y=2x-x^2, y=0; Ats.: $\frac{8}{3}$ p.

17. y=x $\sqrt{x}$, x=4, y=0; Ats.: $\frac{512}{7}$ p.

18. y=x^3, x=0, y=8; Ats.: 19,2 p.

19. x^2-y^2=4, y=-2, y=2; Ats.: $\frac{64}{3}$ p.

20. y=lnx, x=2, y=0; Ats.: $2p\left(2\ln 2-\frac{3}{4}\right)$.