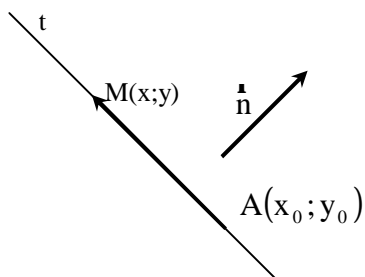


ANALIZINĖ GEOMETRIJA

1 Tiesė plokštumoje

Bendroji tiesės lygtis

Tiesė plokštumoje gali būti duota keliais būdais. Vienas iš jų: tiesė t eina per duotą tašką $A(x_0; y_0)$ ir statmena vektoriui $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Bet kuris vektorius, statmenas tiesei, vadinamas jos normaliniu vektoriumi.



Sakykime, $M(x; y)$ – bet kuris tiesės t taškas. Tada

$\vec{AM} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j}$. Kadangi $\vec{n} \perp \vec{AM}$, tai pagal dviejų vektorių statmenumo sąlygą gausime:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Čia yra lygtis tiesės, einančios per duotąjį tašką ir statmenos duotam vektoriui. Pertvarkykime gautąją lygtį

$ax + by - ax_0 - by_0 = 0$. Pažymėję $-ax_0 - by_0 = c$, gausime

bendrąją tiesės lygtį

$$ax + by + c = 0$$

Pavyzdys

Tiesė eina per tašką $A(1; -2)$ ir statmena vektoriui $\vec{n} = (-1; 2)$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

$$\begin{aligned} a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 &\Rightarrow -1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - (-2)) = 0 \Rightarrow -x + 1 + 2y + 4 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -x + 2y + 5 = 0 \Rightarrow x - 2y - 5 = 0. \end{aligned}$$

Pratimai

1. Patikrinkite ar taškai $A(3; 14)$, $B(4; 13)$, $C(-3; 0)$ ir $D(0; 7)$ priklauso tiesei $7x - 3y + 21 = 0$.

2. Tiesė eina per tašką M ir yra statmena vektoriui \vec{n} . Parašykite jos lygtį, kai:

- 1) $M(3; -5)$, $\vec{n} = (4; 2)$; 2) $M(-2; -3)$, $\vec{n} = (4; -5)$; 3) $M(1; -1)$, $\vec{n} = (-3; 4)$.

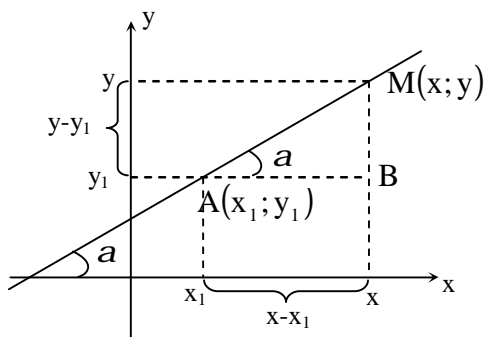
Ats.: 1) $2x + y - 1 = 0$; 2) $4x - 5y - 7 = 0$; 3) $3x - 4y - 7 = 0$.

3. Tiesė eina per tašką M ir yra statmena vektoriui \vec{AB} . Parašykite jos lygtį, kai:

- 1) $M(-2; -3)$, $A(-5; 2)$, $B(-1; 4)$; 2) $M(2; 2)$, $A(1; -3)$, $B(6; -5)$; 3) $M(-2; -3)$, $A(2; 1)$, $B(1; 5)$.

Ats.: 1) $2x + y + 7 = 0$; 2) $5x - 2y - 6 = 0$; 3) $x - 4y - 10 = 0$.

Kryptinė tiesės lygtis



Parašysime lygtį tiesės, kuri eina per duotąjį tašką $A(x_1; y_1)$ ir su x -ų ašimi sudaro kampą a . Tiesėje laisvai pasirenkame tašką $M(x; y)$. Iš stačiojo trikampio AMB

turėsime $\frac{MB}{AB} = \operatorname{tg} a = k$ - tiesės pasvirimo kampo tangentas vadinamas *krypties koeficientu*. Iš kitos pusės

$$k = \frac{y - y_1}{x - x_1} \text{ arba}$$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Čia yra lygtis tiesės, einančios per duotąjį tašką su duotu krypties koeficientu. Pertvarkykime gautąją lygtį $y = kx - kx_1 + y_1$, pažymėję $b = -kx_1 + y_1$, gausime *kryptinę tiesės lygtį*

$$y = kx + b$$

Jeigu įstatysime $x = 0$, tai gausime $y = b$. Reiškia tiesė $y = kx + b$ y-ų ašį kerta taške $(0; b)$

Jeigu *tiesė eina per koordinatinių pradžių tašką*, tai $b = -k \cdot 0 + 0 = 0$ ir

$$y = kx$$

Pavyzdžiai

1. Tiesė eina per tašką $A(-1; 2)$ ir su x-ų ašimi sudaro 45° kampą. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

$$k = \tan 45^\circ = 1 \text{ ir } y - 2 = 1 \cdot (x - (-1)) \Rightarrow y - 2 = x + 1 \Rightarrow x - y + 3 = 0.$$

2. Raskite tiesės $2x + 3y - 5 = 0$ krypties koeficientą.

Sprendimas

Parašykime tiesės lygtį pavidalu $y = kx + b$: $3y = -2x + 5$ ir $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. Tada $k = -\frac{2}{3}$.

Pratimai

1. Tiesė eina per tašką $A(2; 1)$ ir su x-ų ašimi sudaro kampą 45° . Parašykite jos lygtį.

Ats.: $x - y - 1 = 0$.

2. Parašykite tiesės lygtį, jei duotas krypties koeficientas ir taškas ant y-ų ašies: 1) $k = -3$,

$A(0; 5)$; 2) $k = -\frac{3}{2}$, $A(0; -7)$; 3) $k = -\frac{1}{2}$, $A\left(0; -1\frac{2}{3}\right)$.

Ats.: 1) $3x + y - 5 = 0$; 2) $3x + 2y + 14 = 0$; 3) $3x + 6y + 10 = 0$.

3. Tiesė eina per koordinatinių pradžių ir tašką A. Parašykite jos lygtį, kai: 1) $A(-1; 2)$; 2) $A(-3; 1)$; 3) $A(4; -2)$.

Ats.: 1) $2x + y = 0$; 2) $x + 3y = 0$; 3) $x + 2y = 0$.

4. Raskite tiesių krypties koeficientus: 1) $3x + 2y + 6 = 0$; 2) $5x - y = 0$; 3) $x + 3y - 3 = 0$.

Ats. 1) $-1,5$; 2) 5 ; 3) $-\frac{1}{3}$.

Per du taškus einančios tiesės lygtis

Parašysime lygtį tiesės, einančios per taškus $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$. Lygtis tiesės, einančios per tašką $A(x_1; y_1)$ yra $y - y_1 = k(x - x_1)$. Jeigu ši tiesė eina ir per tašką $B(x_2; y_2)$, tai to taško

koordinatės turi tenkinti šios tiesės lygtį, t.y. $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Iš čia randame $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Įstatę į

pirmesniąją lygtį, gausime $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ arba

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Pavyzdys

Parašykite tiesės, einančios per taškus A(-1;2) ir B(-2;1), lygtį.

Sprendimas

$$\frac{x - (-1)}{-2 - (-1)} = \frac{y - 2}{1 - 2} \Rightarrow \frac{x + 1}{-1} = \frac{y - 2}{-1} \Rightarrow x + 1 = y - 2 \Rightarrow x - y + 3 = 0.$$

Pratimai

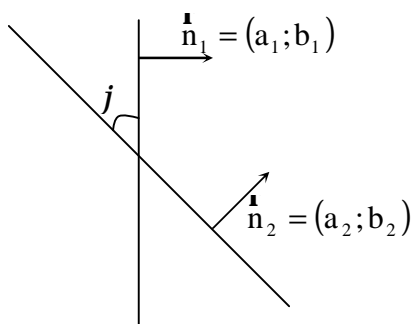
1. Parašykite lygtį tiesės, einančios per du taškus:

- 1) A(-1;-1) ir B(-2;-2); 2) A(3;0) ir B(0;4); 3) A(-2;1) ir B(3;-1); 4) A(1;-2) ir B(0;2).

Ats.: 1) $x - y = 0$; 2) $4x + 3y - 12 = 0$; 3) $2x + 5y - 1 = 0$; 4) $4x + y - 2 = 0$.

2. Trikampio viršūnės yra taškai A(-3;-2), B(1;5) ir C(8;-4). Parašykite kraštinių lygtis.

Ats.: $7x - 4y + 13 = 0$; $9x + 7y - 44 = 0$; $2x + 11y + 28 = 0$.

Kampas tarp tiesių

Rasime kampą tarp tiesių $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Kampas tarp šių tiesių lygus kampui tarp jų normalinių vektorių $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$ ir $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$, o šią formulę jau žinome

$$\cos j = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Jeigu tiesės duotos lygtimis $y = k_1x + b_1$ ir $y = k_2x + b_2$, tai kampas tarp jų apskaičiuojamas pagal formulę

$$\operatorname{tg} j = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$$

Pavyzdys

Raskite smailųjį kampą tarp tiesių $5x - 12y - 16 = 0$ ir $3x + 4y - 12 = 0$.

Sprendimas

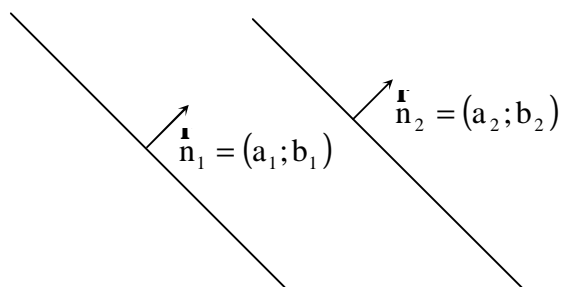
$$\cos j = \left| \frac{5 \cdot 3 + (-12) \cdot 4}{\sqrt{5^2 + (-12)^2} \sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \left| \frac{-33}{13 \cdot 5} \right| = \frac{33}{65}, \quad j = \arccos \frac{33}{65} \approx 59^\circ.$$

Pratimas

Raskite smailųjį kampą tarp tiesių: 1) $5x - y = 0$ ir $2x - y = 0$; 2) $3x - y = 0$ ir $x + y = 0$;

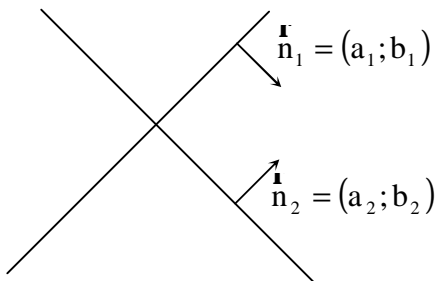
- 3) $2x - 3y + 6 = 0$ ir $3x - y - 3 = 0$.

Ats.: 1) 15° ; 2) 63° ; 3) 38° .

Tiesių lygiagretumo ir statmenumo sąlygos

Jeigu tiesės $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ lygiagrečios, tai ir jų normaliniai vektoriai $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$ ir $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$ lygiagretūs. Taikome dviejų vektorių lygiagretumo sąlygą:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$



Jeigu tiesės $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ statmenos, tai ir jų normaliniai vektoriai $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$ ir $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$ statmeni. Taikome dviejų vektorių statmenumo sąlygą:

$$\vec{a}_1 \vec{a}_2 + \vec{b}_1 \vec{b}_2 = 0$$

Pavyzdžiai

1. Patikrinkite tiesių lygiagretumą: 1) $x+2y-3=0$ ir $2x+4y+3=0$; 2) $2x+y+1=0$ ir $x-2y-2=0$.

Sprendimas

1) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ lygiagrečios; 2) $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2} \Rightarrow$ nelygiagrečios.

2. Parašykite lygtį tiesės, einančios per tašką $A(-3;2)$ ir lygiagrečios tiesei $5x-3y+21=0$.

Sprendimas

Rašome lygtį tiesės, einančios per duotąjį tašką ir statmenos duotam vektoriui:

$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$; čia x_0 ir y_0 duotojo taško koordinatės, a ir b normaliojo (statmenojo) vektoriaus koordinatės. Bet, kadangi tiesės lygiagrečios, tai normalusis vektorius gali būti tas pats, t.y. $\vec{n} = (5; -3)$. Įstatę į lygtį, gausime $5(x - (-3)) - 3(y - 2) = 0 \Rightarrow 5x - 3y + 21 = 0$.

3. Kokia turi būti parametro m reikšmė, kad tiesės $x+2y-3=0$ ir $mx-y+6=0$ būtų statmenos?

Sprendimas

$1 \cdot m + 2 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$.

Pratimai

1. Kurios iš šių tiesių yra lygiagrečios: 1) $2x-3y+4=0$ ir $10x-15y-7=0$; 2) $25x+20y-8=0$ ir $5x+4y+4=0$; 3) $2x+y-8=0$ ir $2x+y+1=0$; 4) $3x-y+4=0$ ir $3x+y+2=0$?

Ats.: 1), 2) ir 3).

2. Parašykite lygtį tiesės, einančios per tašką M ir lygiagrečios duotajai tiesei:

1) $M(-2;4)$, $2x-3y-6=0$; 2) $M(-3;2)$, $5x-3y+21=0$; 3) $M(-1;4)$, $3x+4y-12=0$.

Ats.: 1) $2x-3y+16=0$; 2) $5x-3y+21=0$; 3) $3x+4y+19=0$.

3. Kurios iš šių tiesių yra statmenos: 1) $3x-4y+12=0$ ir $4x+3y-6=0$; 2) $4x+5y-8=0$ ir $3x-2y+4=0$; 3) $4x+3y+2=0$ ir $3x-4y+14=0$; 4) $x-y-7=0$ ir $x-y+3=0$; 5) $3x-10y+37=0$ ir $9x+2y-17=0$?

Ats.: 1) ir 3).

4. Kokia turi būti parametro k reikšmė, kad tiesės būtų statmenos: 1) $5x-y-4=0$ ir $kx-y-2=0$; 2) $3x-ky+28=0$ ir $5x+4y+26=0$; 3) $kx+2y-21=0$ ir $8x-3y+7=0$; 4) $3x+ky+21=0$ ir $2x-y+5=0$?

Ats.: 1) $-\frac{1}{5}$; 2) $3\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) 6.

5. Parašykite lygtį tiesės, kuri eina per tašką M ir yra statmena duotajai tiesei:

- 1) M(4;-3), $5x-2y+10=0$; 2) M(-4;1), $6x-5y-30=0$; 3) M(0;0), $2x+3y-12=0$.

Ats.: 1) $2x+5y+7=0$; 2) $5x+6y+14=0$; 3) $3x-2y=0$.

Taško atstumas iki tiesės

Atstumas nuo taško $M(x_0; y_0)$ iki tiesės $ax+by+c=0$ skaičiuojamas pagal formulę:

$$d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} |ax_0 + by_0 + c|$$

Pavyzdžiai

1. Raskite taško M(6;8) atstumą iki tiesės $4x+3y+2=0$.

Sprendimas

$$d = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} |4 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 2| = \frac{1}{5} (24 + 24 + 2) = \frac{1}{5} \cdot 50 = 10.$$

2. Raskite atstumą tarp lygiagrečių tiesių $4x+3y-8=0$ ir $4x+3y-33=0$.

Sprendimas

Tiesėje $4x+3y-8=0$ pasirenkame tašką M(-1;4) ir randame jo atstumą iki tiesės $4x+3y-33=0$.

$$d = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} |-1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 33| = \frac{1}{5} \cdot |-25| = |-5| = 5.$$

Pratimai

1. Raskite atstumą nuo taško M iki duotosios tiesės: 1) M(6;8), $4x+3y+2=0$; 2) M(-2;4), $4x-3y-5=0$; 3) M(4;6), $3x+4y+14=0$; 4) M(2;-1), $4x+3y+10=0$; 5) M(0;-3), $5x-12y-23=0$.

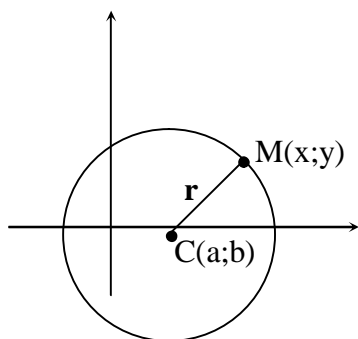
Ats.: 1) 10; 2) 5; 3) 10; 4) 3; 5) 1.

2. Raskite atstumą tarp lygiagrečių tiesių: 1) $3x-4y-10=0$ ir $6x-8y+5=0$; 2) $5x-12y+26=0$ ir $5x-12y-13=0$; 3) $4x-3y+15=0$ ir $8x-6y+25=0$; 4) $24x-10y+39=0$ ir $12x-5y-26=0$.

Ats.: 1) 2,5; 2) 3; 3) 0,5; 4) 3,5.

2 Antros eilės kreivės

Apskritimas



Apskritimu vadinama aibė plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo vieno tos plokštumos taško, kuris vadinamas centru. Bet kurio apskritimo taško atstumas iki centro vadinamas apskritimo spinduliu ir žymimas **r**. Jeigu apskritimo centras C(a;b), o M(x;y) – laisvai pasirinktas apskritimo taškas, tai

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \text{ ir}$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Čia yra apskritimo lygtis.

Jeigu apskritimo centras yra koordinačių pradžios taške, tai $a=0$ ir $b=0$. Įstatę, gausime apskritimo, kurio centras koordinačių pradžios taške, lygtį:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Pavyzdžiai

1. Apskritimo centras yra taškas $C(5;-7)$ ir apskritimas eina per tašką $A(2;-3)$. Parašykite jo lygtį.

Sprendimas

Randame apskritimo spindulį: $r = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-(-7))^2} = \sqrt{9+16} = 5$. Į apskritimo lygtį įstatome centro koordinatas ir spindulio reikšmę: $(x-5)^2 + (y+7)^2 = 25$.

2. Apskritimo skersmens galų koordinatės yra: $A(0;3)$ ir $B(6;-7)$. Parašykite jo lygtį.

Sprendimas

Apskritimo centro koordinatas rasime padalinę atkarpą AB pusiau:

$x = \frac{0+6}{2} = 3$, $y = \frac{3-7}{2} = -2$. Apskritimo spindulys lygus pusei atkarpos AB :

$r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(6-0)^2 + (-7-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+(-10)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{136}$. Belieka parašyti apskritimo

lygtį: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 34$ arba $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 34$, $x^2 - 6x + y^2 + 4y - 21 = 0$.

Pratimai

1. Parašykite apskritimo lygtį, kai:

- 1) apskritimo centras yra koordinačių pradžioje, o spindulys $R=3$;
- 2) apskritimo centras yra taške $C(2;-3)$, o spindulys $R=7$;
- 3) apskritimas eina per koordinačių pradžią, o centras yra taške $C(6;8)$;
- 4) apskritimas eina per tašką $A(2;6)$, o jo centras yra taške $C(-1;2)$;
- 5) taškai $A(3;2)$ ir $B(-1;6)$ yra skersmens galai;
- 6) apskritimo centras yra koordinačių pradžios taške, o tiesė $3x-4y+20=0$ liečia apskritimą;
- 7) apskritimo centras yra taške $C(1;-1)$, o tiesė $5x-12y+9=0$ liečia apskritimą;
- 8) apskritimas eina per taškus $A(3;1)$ ir $B(-1;3)$, o jo centras yra tiesėje $3x-y-2=0$;
- 9) apskritimas eina per taškus $A(1;1)$, $B(1;-1)$ ir $C(2;0)$;
- 10) apskritimas eina per taškus $A(-1;5)$, $B(-2;-2)$ ir $C(5;5)$.

Ats.: 1) $x^2+y^2=9$; 2) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$; 3) $(x-6)^2+(y+8)^2=100$; 4) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$;
5) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$; 6) $x^2+y^2=16$; 7) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$; 8) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$; 9) $(x-1)^2+y^2=1$;
10) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

2. Raskite apskritimo centro koordinatas ir spindulį, kai duota apskritimo lygtis:

1) $(x-5)^2+(y+2)^2=5$; 2) $(x+2)^2+y^2=64$; 3) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$; 4) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$.

Ats.: 1) $C(5;-2)$, $R=\sqrt{5}$; 2) $C(-2;0)$, $R=8$; 3) $C(1;-2)$, $R=5$; 4) $C(-2;1)$, $R=0$.

3. Raskite atstumą nuo taško iki apskritimo, kai: 1) $A(6;-8)$, $x^2+y^2=9$; 2) $A(3;9)$, $x^2+y^2-26x+30y+313=0$; 3) $A(-7;2)$, $x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

Ats.: 1) 7; 2) 17; 3) 2.

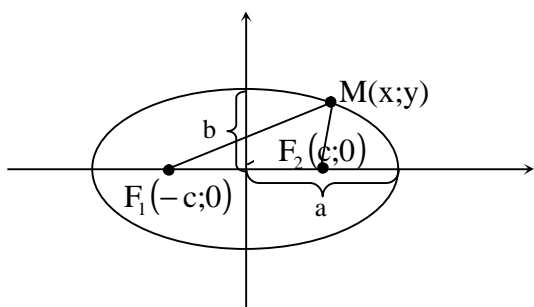
4. Nustatykite tiesės ir apskritimo tarpusavio padėtį, kai: 1) $7x - y + 12 = 0$ ir $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$; 2) $y = 0,5x - 0,5$ ir $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$; 3) $x - y + 10 = 0$ ir $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Ats.: 1) kertasi; 2) liečiasi; 3) neturi bendrų taškų.

5. Parašykite lygtį tiesės, kuri eina per apskritimų $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ ir $3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0$ susikirtimo taškus.

Ats.: $7x - 4y = 0$.

Elipsė



Elipse vadinama aibė plokštumos taškų, kurių atstumų nuo dviejų duotųjų taškų, vadinamų židiniiais, suma yra pastovus dydis ($2a$). Pagal apibrėžimą

$$F_1M + MF_2 = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc \Rightarrow a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \Rightarrow a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \text{ Pažymėję } a^2 - c^2 = b^2, \text{ gauname elipsės lygtį } b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \text{ arba}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Čia a – didysis pusašis, b – mažasis pusašis, o $e = \frac{c}{a}$ – elipsės ekscentricitetas.

Pavyzdžiai

1. Elipsės židiniai yra ašyje Ox , o jos ašys 12 ir 8. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

Norint parašyti elipsės lygtį, reikia žinoti parametrus a ir b . Iš sąlygos randame, kad $2a = 12$,

$a = 6$ ir $2b = 8$, $b = 4$. Įstatę rastąsias reikšmes į elipsės lygtį, gauname $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

2. Atstumas tarp elipsės židinių lygus 6, o didžioji ašis lygi 10. Parašykite elipsės lygtį.

Sprendimas

Iš sąlygos randame, kad $c = 3$, $a = 5$, o b^2 randame iš formulės $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$. Įrašę

gautas reikšmes į elipsės formulę, gausime $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

3. Elipsės židiniai yra taškai $F(\pm 4; 0)$, o jos ekscentricitetas $e = 0,8$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

$$c = 4; \frac{c}{a} = 0,8 \Rightarrow \frac{4}{a} = 0,8 \Rightarrow a = 5; b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9; \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

4. Elipsė eina per taškus $A(\sqrt{3}; \sqrt{6})$ ir $B(3; \sqrt{2})$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

Į elipsės lygtį įrašę duotųjų taškų koordinates, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{6}{b^2} = 1, \\ \frac{9}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 12, \\ b^2 = 8; \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Pratimai

1. Parašykite elipsės lygtį, jei žinoma, kad jos židiny yra OX ašyje, kai : 1) jos pusašiai lygūs 2 ir 5; 2) didžioji ašis 10, o atstumas tarp židinių 8; 3) mažoji ašis 24, o atstumas tarp židinių 10; 4) atstumas tarp židinių 6, o ekscentricitetas 0,6; 5) didžioji ašis 20, o ekscentricitetas 0,6.

Ats.:

$$1) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad 2) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad 3) \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1; \quad 4) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad 5) \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

2. Raskite duotų elipsių ašis, atstumus tarp židinių ir ekscentricitetus: 1) $9x^2 + 16y^2 = 144$; 2) $x^2 + 4y^2 = 4$; 3) $x^2 + 25y^2 = 25$.

$$\text{Ats.: } 1) 8; 6; 2\sqrt{7}; \frac{\sqrt{7}}{4}; \quad 2) 4; 2; 2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) 10; 2; 4\sqrt{6}; \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

3. Apskaičiuokite keturkampio plotą, jei dvi jo viršūnės yra elipsės $x^2 + 5y^2 = 20$ židinio taškuose, o kitos dvi sutampa su mažosios ašies galais.

Ats.: 16.

4. Ant elipsės $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$, raskite taškus, kurių abscisė lygi -3.

Ats.: $(-3; \pm 1,6)$.

5. Raskite elipsės $7x^2 + 16y^2 = 112$ taškus, kurių atstumas iki kairiojo židinio lygus 2,5.

$$\text{Ats.: } \left(-2; \pm \frac{\sqrt{21}}{2} \right).$$

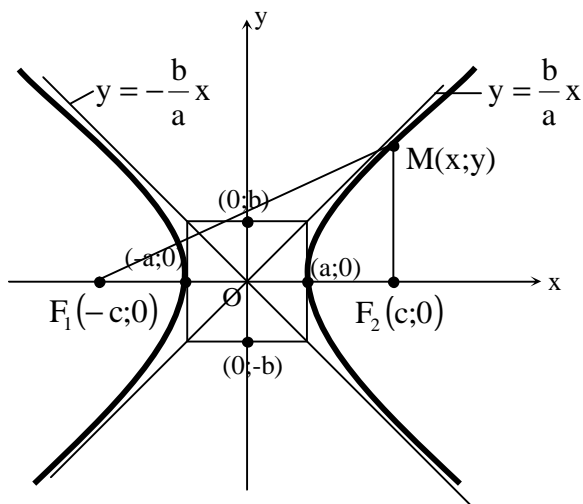
6. Parašykite elipsės, kurios židiniai yra OX ašyje, lygtį, kai: 1) elipsė eina per tašką $M(-2\sqrt{5}; 2)$, o mažoji pusašis lygi 3; 2) elipsė eina per tašką $M(2; -2)$, o didžioji pusašis lygi 4; 3) elipsė eina per taškus $A(4; -\sqrt{3})$ ir $B(2\sqrt{2}; 3)$; 4) elipsė eina per tašką $M(\sqrt{15}; -1)$, o atstumas tarp židinių 8; 5) elipsė eina per tašką $M\left(2; -\frac{5}{3}\right)$, o ekscentricitetas $e = \frac{2}{3}$.

$$\text{Ats.: } 1) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1; \quad 2) \frac{x^2}{16} + \frac{3y^2}{16} = 1; \quad 3) \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1; \quad 4) \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad 5) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

7. Raskite elipsės ir tiesės susikirtimo taškus: 1) $9x^2 + 16y^2 = 144$, $3x + 4y = 12$; 2) $4x^2 + 9y^2 = 36$, $x + y = 5$; 3) $3x + 2y - 20 = 0$, $x^2 + 4y^2 = 40$.

Ats.: 1) $(0; 3)$, $(4; 0)$; 2) \emptyset ; 3) $(6; 1)$.

Hiperbolė



Hiperbole vadinama aibė plokštumos taškų, kurių atstumų nuo dviejų duotųjų taškų, vadinamų židiniais, skirtumo modulis yra pastovus dydis ($2a$). Pagal apibrėžimą

$$\begin{aligned} F_1M - MF_2 = 2a &\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \\ &- \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} &= 2a + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \\ + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &\Rightarrow \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= xc - a^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow a^2((x-c)^2 + y^2) &= x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 &= x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 \Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \text{ arba} \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2). \text{ Pažymėję } \boxed{c^2 - a^2 = b^2}, \text{ gauname hiperbolės lygtį} \\ b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 \text{ arba} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Čia a - realusis pusašis, b - menamasis pusašis. Hiperbolės ekscentricitetu vadinamas santykis

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}. \text{ Hiperbolė turi dvi asimptotės, kurių lygtys } \boxed{y = \pm \frac{b}{a}x}.$$

Pavyzdžiai

1. Hiperbolės viršūnės yra taškuose $(\pm 3; 0)$, o židiniai taškuose $(\pm 5; 0)$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

Iš sąlygos turime, kad $a=3$, o $c=5$. Pritaikome formulę $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$. Įrašę į lygtį

$$a^2 \text{ ir } b^2 \text{ reikšmes, gauname } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

2. Duota hiperbolė $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$. Raskite jos viršūnių ir židinių koordinates.

Sprendimas

$a^2 = 81 \Rightarrow a = 9$; $b^2 = 144$; $c^2 = a^2 + b^2 = 225 \Rightarrow c = 15$. Vadinasi, hiperbolės viršūnės yra taškuose $(\pm 9; 0)$, o židiniai - $(\pm 15; 0)$.

3. Hiperbolės realiosios ašies ilgis 12, o ekscentricitetas $e = \frac{4}{3}$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

$2a = 12 \Rightarrow a = 6; \frac{c}{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{c}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8; b^2 = c^2 - a^2 = 64 - 36 = 28$. Įrašę į lygtį a^2 ir b^2 reikšmes, gauname $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{28} = 1$.

4. Hiperbolė eina per tašką $A(6;-4)$, o jos asimptotės duotos lygtimis $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}x$. Prašykite jos lygtį.

Sprendimas

Iš sąlygos $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Į hiperbolės lygtį įstatome duotojo taško koordinates ir sprendžiame lygčių

$$\text{sistemą } \begin{cases} \frac{6^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{b^2} = 1, \\ \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 12, \\ b^2 = 8. \end{cases} \text{ Įstatę, gauname } \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

Pratimai

1. Parašykite lygtį hiperbolės, kurios židiniai yra Ox ašyje, grafikas simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu, ir: 1) ašys yra lygios 10 ir 8; 2) atstumas tarp židinių 10, o menamoji ašis lygi 8; 3) atstumas tarp židinių 6, o ekscentricitetas $e = 1,5$; 4) realioji ašis lygi 16, o ekscentricitetas $e = 1,25$.

Ats.: 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 4) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

2. Raskite duotų hiperbolių pusašius, židinių koordinates, ekscentricitetą ir asimptotų lygtis:

1) $4x^2 - 9y^2 = 36$; 2) $x^2 - 16y^2 = 16$; 3) $x^2 - 4y^2 = 16$; 4) $x^2 - y^2 = 1$.

Ats.: 1) 3, 2, $F(\pm \sqrt{13}; 0)$, $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$, $y = \pm \frac{2}{3}x$; 2) 4, 1, $F(\pm \sqrt{17}; 0)$, $e = \frac{\sqrt{17}}{4}$, $y = \pm \frac{1}{4}x$;

3) 4, 2, $F(\pm 2\sqrt{5}; 0)$, $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $y = \pm \frac{1}{2}x$; 4) 1, 1, $F(\pm \sqrt{2}; 0)$, $e = \sqrt{2}$, $y = \pm x$.

3. Patikrinkite ar taškas $M(-5; 2, 25)$ priklauso hiperbolei $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Ats.: priklauso.

4. Parašykite hiperbolės, kurios židiniai yra Ox ašyje, lygtį, kai: 1) taškai $A(6;-1)$ ir $B(-8; 2\sqrt{2})$ priklauso hiperbolei; 2) hiperbolė eina per tašką $M(-5; 3)$, o ekscentricitetas $e = \sqrt{2}$;

3) hiperbolė eina per tašką $M(4, 5; -1)$, o asimptotės duotos lygtimis $y = \pm \frac{2}{3}x$.

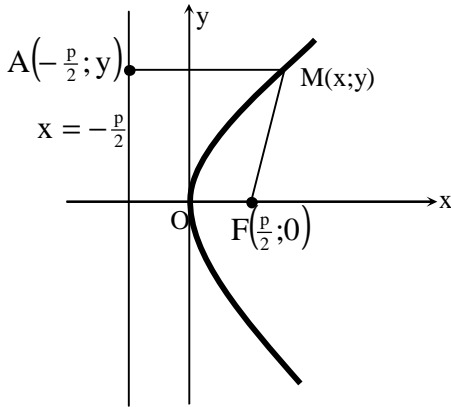
Ats.: 1) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{8} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$.

5. Raskite hiperbolės ir tiesės susikirtimo taškų koordinates: 1) $x^2 - 4y^2 = 20$, $2x - y - 10 = 0$; 2) $16x^2 - 25y^2 = 400$, $4x - 3y - 16 = 0$; 3) $4x^2 - 9y^2 = 36$, $2x - y + 1 = 0$.

Ats.: 1) $(6; 2), \left(\frac{14}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 2) $\left(\frac{25}{4}; 3\right)$; 3) \emptyset .

6. Nustatykite tiesės ir hiperbolės tarpusavio padėtį: 1) $x-y-3=0$ ir $x^2-4y^2=12$; 2) $x-2y+1=0$ ir $9x^2-16y^2=144$; 3) $7x-5y=0$ ir $16x^2-25y^2=400$.
 Ats.: 1) liečia; 2) kerta; 3) neturi bendrų taškų.

Parabolė



Parabolė vadinama aibė plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo duotojo taško, vadinamo *židiniu*, ir nuo duotosios tiesės, vadinamos *direktrise*. Jeigu parabolės simetrijos ašis – Ox, šakos nukreiptos į dešinę, židinio ir direktrės atstumai iki koordinatinių pradžios taško lygūs $\frac{p}{2}$, tai, pagal apibrėžimą, turėsime

$$MA = MF \Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

Pakeitus parabolės šakų kryptį, simetrijos ašį ar viršūnės koordinates, pasikeis ir parabolės lygtis. Visos galimos parabolės padėtys ir jos lygtys pateiktos lentelėje (a ir b – viršūnės koordinatės):

1		2		3		4	
	$y^2 = 2px$		$y^2 = -2px$		$x^2 = 2py$		$x^2 = -2py$
5		6		7		8	
	$(y - b)^2 = 2p(x - a)$		$(y - b)^2 = -2p(x - a)$		$(x - a)^2 = 2p(y - b)$		$(x - a)^2 = -2p(y - b)$

Pavyzdžiai

1. Parabolės viršūnė yra koordinatinių pradžios taške, o direktrės lygtis $x = -4$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

Šiuo atveju parabolės šakos nukreiptos į dešinę, nes direktrės lygtis $x = -\frac{p}{2}$, o židinio koordinatės $F(\frac{p}{2}; 0)$. Vadinasi, $\frac{p}{2} = 4$, $p = 8$. Įrašę p reikšmę į pirmąją parabolės lygtį, gauname $y^2 = 16x$.

2. Parabolės viršūnė yra taškas $A(1; 2)$, o simetrijos ašis lygiagreti Ox ašiai. Parašykite parabolės lygtį, jei ji eina per tašką $M(4; 8)$.

Sprendimas

Iš sąlygos matyti, kad parabolės lygtis yra 5-o pavidalo, nes taškas M yra dešiniau jos viršūnės. Į lygtį įrašome viršūnės A ir taško M koordinates: $(8-2)^2 = 2p(4-1) \Rightarrow p = 6$. Į 5-ą lygtį įrašome p reikšmę ir viršūnės A koordinates ir gauname $(y-2)^2 = 12(x-1)$.

3. Parabolės viršūnė yra taške A(2;2), o židinyš taške F(2;0). Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

Parabolės simetrijos ašis lygiagreti Oy ašiai, nes viršūnės ir židinio abscisės yra vienodos. Parabolės šakos nukreiptos žemyn, nes židinyš yra žemiau viršūnės. Vadinasi, tai 8-o pavidalo lygtis. $\frac{p}{2} = 2 - 0 = 2$, $p = 4$. Į 8-ą lygtį įrašome p reikšmę ir viršūnės A koordinates ir gauname $(x-2)^2 = -8(y-2)$.

4. Duota parabolės lygtis $x^2 - 8x - 4y + 28 = 0$. Raskite viršūnės koordinates.

Sprendimas

Duotąją lygtį pertvarkome taip, kad ji atitiktų kurį nors iš 8-ių pavidalų:
 $x^2 - 2 \cdot 4x + 4^2 = 4y - 28 + 4^2 \Rightarrow (x-2)^2 = 4(y-3) \Rightarrow a = 2, b = 3; A(2;3)$.

Pratimai

1. Parašykite parabolės, kurios viršūnė yra koordinačių pradžios taške, lygtį žinant, kad:

- 1) parabolė simetriška Ox ašies atžvilgiu, yra dešinėje pusplokštumėje ir parametras $p=3$;
- 2) parabolė simetriška Ox ašies atžvilgiu, yra kairėje pusplokštumėje ir $p=0,5$;
- 3) parabolė simetriška Oy ašies atžvilgiu, yra viršutinėje pusplokštumėje ir $p=0,25$;
- 4) parabolė simetriška Oy ašies atžvilgiu, yra apatinėje pusplokštumėje ir $p=3$.

Ats.: 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=-x$; 3) $x^2=0,5y$; 4) $x^2=-6y$.

2. Parašykite parabolės, kurios viršūnė yra koordinačių pradžios taške, lygtį žinant, kad:

- 1) simetriška Ox ašies atžvilgiu ir eina per tašką A(9;6);
- 2) simetriška Ox ašies atžvilgiu ir eina per tašką A(-1;3);
- 3) simetriška Oy ašies atžvilgiu ir eina per tašką A(1;1);
- 4) simetriška Oy ašies atžvilgiu ir eina per tašką A(4;-8).

Ats.: 1) $y^2=4x$; 2) $y^2=9x$; 3) $x^2=y$; 4) $x^2=-2y$.

3. Raskite židinio koordinates ir parašykite direktrės lygtį, kai parabolė duota lygtimi:

- 1) $y^2=4x$; 2) $y^2=-6x$; 3) $x^2=8y$; 4) $x^2=-4y$.

Ats.: 1) F(1;0), $x=1$; 2) F(-1,5;0), $x=1,5$; 3) F(0;2), $y=-2$; 4) F(0;-1), $y=1$.

4. Parašykite lygtį parabolės, kurios viršūnė yra koordinačių pradžios taške, o židinyš yra taške:

- 1) F(5;0); 2) F(-4;0); 3) F(0;2); 4) F(0;-3).

Ats.: 1) $y^2=20x$; 2) $y^2=-16x$; 3) $x^2=8y$; 4) $x^2=-12y$.

5. Parašykite lygtį parabolės, kurios viršūnė yra koordinačių pradžios taške, o direktrės duota lygtimi: 1) $x+2=0$; 2) $x-3=0$; 3) $y+4=0$; 4) $y-1=0$.

Ats.: 1) $y^2=8x$; 2) $y^2=-12x$; 3) $x^2=16y$; 4) $x^2=-4y$.

6. Parabolės simetrijos ašis lygiagreti Ox ašiai. Parašykite parabolės lygtį, kai:

- 1) parabolė eina per tašką M(1;3), o jos viršūnė yra taške A(-4;-2);

- 2) parabolė eina per koordinačių pradžią, o jos viršūnė yra taške $A(-2;-4)$;
 3) parabolė eina per tašką $M(-3;-3)$, o jos viršūnė yra taške $A(3;-1)$.

Ats.: 1) $(y+2)^2 = 5(x+2)$; 2) $(y+4)^2 = 8(x+2)$; 3) $3(y+1)^2 = -2(x-3)$.

7. Parabolės simetrijos ašis lygiagreti Oy ašiai. Parašykite parabolės lygtį, kai:

- 1) parabolė eina per tašką $M(-6;8)$, o jos viršūnė yra taške $A(2;4)$;
 2) parabolė eina per koordinačių pradžią, o jos viršūnė yra taške $A(5;-5)$;
 3) parabolė eina per koordinačių pradžią, o jos viršūnė yra taške $A(3;5)$.

Ats.: 1) $(x-2)^2 = 16(y-4)$; 2) $(x-5)^2 = 5(y+5)$; 3) $5(x-3)^2 = -9(y-5)$.

8. Parašykite parabolės lygtį, kai duota jos viršūnė A ir židiny F: 1) $A(4;6)$, $F(-2;6)$;

2) $A(3;-2)$, $F(3;0)$; 3) $A(-1;1)$, $F(-1;-4)$.

Ats.: 1) $(y-6)^2 = -24(x-4)$; 2) $(x-3)^2 = 8(y+2)$; 3) $(x+1)^2 = -20(y-1)$.

9. Parašykite parabolės lygtį, kai duota jos viršūnė ir direktrės lygtis:

1) $A(1;-3)$, $x-5=0$; 2) $A(-2;4)$, $y+2=0$; 3) $A(-3;5)$, $y-7=0$.

Ats.: 1) $(y+3)^2 = -16(x-1)$; 2) $(x+2)^2 = 24(y-4)$; 3) $(x+3)^2 = -8(y-5)$.

10. Raskite parabolės viršūnės ir židinio koordinates, parašykite direktrės lygtį, kai:

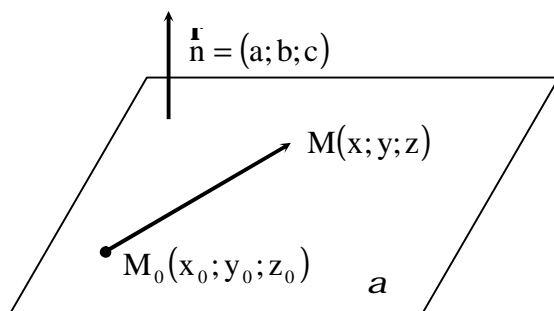
1) $y^2+4y-24x+76=0$; 2) $x^2+10x+8y+41=0$; 3) $x^2-4x-16y+68=0$; 4) $y^2-6y-8x-7=0$;

Ats.: 1) $A(3;-2)$, $F(9;-2)$, $x=3$; 2) $A(-5;-2)$, $F(-5;-4)$, $y=5$; 3) $A(2;4)$, $F(2;8)$, $y=5$;

4) $A(-2;3)$, $F(0;3)$, $x=5-4$.

3 Plokštuma

Plokštumos, einančios per tašką ir statmenos vektoriui, lygtis. Bendroji plokštumos lygtis



Sakykime erdvėje duota plokštuma a , jai priklausantis taškas $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ir jai statmenas vektorius $\vec{n} = (a; b; c)$. Parašysime šios plokštumos lygtį. Plokštumoje pasirenkame bet kurį tašką $M(x; y; z)$ ir brėžiame vektorių $\overrightarrow{M_0M}$. Vektorius \vec{n} bus statmenas vektoriui $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, todėl jų skaliarinė sandauga bus lygi nuliui: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ arba

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Gavome lygtį plokštumos, einančios per duotąjį tašką M_0 ir statmenos vektoriui \vec{n} , kuris vadinamas plokštumos normaliniu vektoriumi. Šią lygtį galima užrašyti ir kitaip: $ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$. Pažymėję $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, gausime:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Čia bendroji plokštumos lygtis.

Pavyzdys

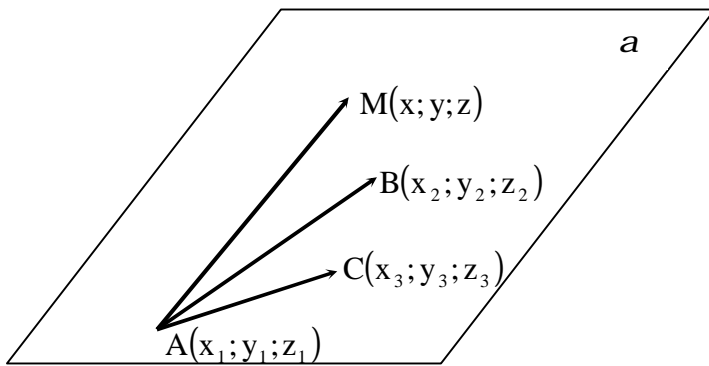
Parašykite lygtį plokštumos, einančios per tašką $A(-1;2;0)$ ir statmenos vektoriui $\vec{n} = (2;1;-3)$.

Sprendimas

Šiuo atveju $a=5$, $b=1$ ir $c=3$. Į lygtį įrašę koeficientų a, b ir c reikšmes ir taško A koordinates, gausime $2 \cdot (x - (-1)) + 1 \cdot (y - 2) - 3 \cdot (z - 0) = 0$ arba $2x + y - 3z = 0$.

Pratimai

1. Parašykite lygtį plokštumos, einančios per tašką M ir statmenos vektoriui \vec{n} :
- 1) $M(2;1;-1)$ ir $\vec{n} = (1;-2;3)$; 2) $M(-1;4;2)$ ir $\vec{n} = (-1;2;4)$; 3) $M(0;-3;1)$ ir $\vec{n} = (-2;4;0)$.
- Ats.: 1) $x-2y+3z+5=0$; 2) $x-2y-4z+17=0$; 3) $x-2y-6=0$.
2. Duoti taškai A ir B . Parašykite lygtį plokštumos, einančios per tašką A ir statmenos vektoriui \vec{AB} :
- 1) $A(3;-1;2)$ ir $B(4;-2;-1)$; 2) $A(-2;0;3)$ ir $B(1;4;-2)$; 3) $A(0;3;-1)$ ir $B(4;-2;0)$.
- Ats.: 1) $x-y-3z+2=0$; 2) $3x+4y-5z+21=0$; 3) $4x-5y+z+16=0$.

Plokštumos, einančios per tris taškus, lygtis

Parašysime lygtį plokštumos, einančios per taškus $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ ir $C(x_3; y_3; z_3)$. Plokštumoje laisvai pasirenkame tašką $M(x; y; z)$ ir brėžiame vektorius \vec{AM} , \vec{AB} ir \vec{AC} ;

$$\vec{AM} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1),$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$

$$\vec{AC} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1).$$

Šie vektoriai

yra vienoje plokštumoje, todėl jie komplanarūs. Vadinasi, $(\vec{AM} \times \vec{AB}) \cdot \vec{AC} = 0$ arba

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Pavyzdys

Parašykite lygtį plokštumos, einančios per taškus $A(-1;0;2)$, $B(0;2;1)$ ir $C(-2;1;0)$.

Sprendimas

Į lygtį įrašome taškų koordinates:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 0+1 & 2-0 & 1-2 \\ -2+1 & 1-0 & 0-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (x+1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} -$$

$$-y \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (z-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3(x+1) + 3y + 3(z-2) = -3x + 3y + 3z - 9 = 0 \text{ arba } x-y-z+3=0.$$

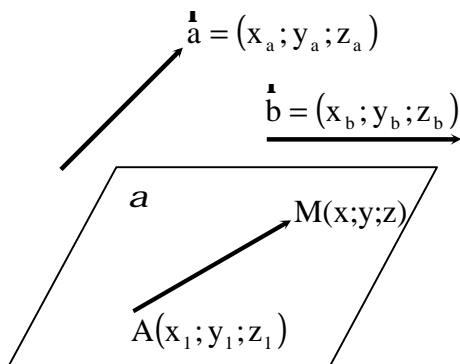
Pratimas

Parašykite lygtį plokštumos, einančios per taškus A, B ir C :

1) $A(3;-1;2)$, $B(4;-1;-1)$ ir $C(2;0;2)$; 2) $A(1;2;0)$, $B(4;0;1)$ ir $C(-2;1;0)$; 3) $A(0;2;4)$, $B(-1;-3;0)$ ir $C(2;-1;0)$.

Ats.: 1) $3x+3y+z-8=0$; 2) $x-3y-9z+5=0$; 3) $8x-12y+13z-28=0$.

Plokštumos, einančios per tašką ir lygiagrečios dviems vektoriams, lygtis



Sakykime, plokštuma a eina per tašką $A(x_1; y_1; z_1)$ ir lygiagreti vektoriams $\hat{a} = (x_a; y_a; z_a)$ ir $\hat{b} = (x_b; y_b; z_b)$. Parašysime jos lygtį. Plokštumoje a laisvai pasirenkame tašką $M(x; y; z)$ ir brėžiame vektorių $\overrightarrow{AM} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$. Vektoriai \overrightarrow{AM} , \hat{a} ir \hat{b} yra komplanarūs. Pritaikę trijų vektorių komplanarumo sąlygą, gauname:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = 0$$

Pavyzdys

Plokštuma eina per tašką $A(2; -1; 3)$ ir lygiagreti vektoriams $\hat{a} = (2; 1; 0)$ bei $\hat{b} = (-1; 0; 1)$.

Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y + 1 & z - 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x - 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (y + 1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (z - 3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = x - 2 - 2(y + 1) + z - 3 = 0;$$

$$x - 2y + z - 7 = 0.$$

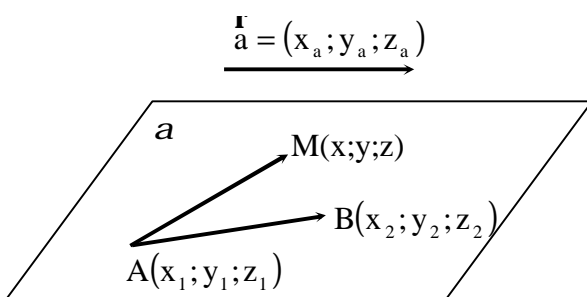
Pratimas

Parašykite lygtį plokštumos, einančios per tašką A ir lygiagrečios vektoriams \hat{a} ir \hat{b} :

- 1) $A(3; 4; -5)$, $\hat{a} = (3; 1; -1)$, $\hat{b} = (1; -2; 1)$; 2) $A(1; 0; 2)$, $\hat{a} = (1; 2; -1)$, $\hat{b} = (0; 1; 2)$;
- 3) $A(0; 3; 5)$, $\hat{a} = (2; -1; 3)$, $\hat{b} = (4; 0; 1)$.

Ats.: 1) $x + 4y + 7z + 16 = 0$; 2) $5x - 2y + z - 7 = 0$; 3) $x - 10y - 4z + 50 = 0$.

Plokštumos, einančios per du taškus ir lygiagrečios vektoriui, lygtis



Sakykime, plokštuma a eina per taškus $A(x_1; y_1; z_1)$ ir $B(x_2; y_2; z_2)$ ir lygiagreti vektoriui $\hat{a} = (x_a; y_a; z_a)$. Parašysime jos lygtį. Plokštumoje a laisvai pasirenkame tašką $M(x; y; z)$ ir brėžiame vektorių $\overrightarrow{AM} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$ ir $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Vektoriai \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AB} ir \hat{a} yra komplanarūs. Pritaikę trijų vektorių

komplanarumo sąlygą, gauname:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_a & y_a & z_a \end{vmatrix} = 0$$

Pavyzdys

Plokštuma eina per taškus A(-1;0;2) bei B(0;1;-2) ir lygiagreti vektoriui $\vec{a} = (2;0;1)$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 0+1 & 1 & -2-2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x+1) \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

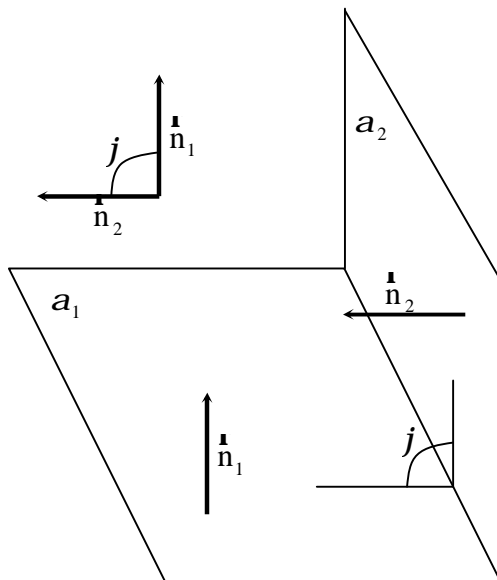
$$= x+1-9y-2(z-2)=0 \text{ arba } x-9y-2z+5=0.$$

Pratimas

Parašykite lygtį plokštumos, einančios per taškus A ir B ir lygiagrečios vektoriui \vec{c} :

- 1) A(2;-1;3) ir B(3;1;2), $\vec{c} = (3;-1;4)$; 2) A(-1;3;0) ir B(4;2;-1), $\vec{c} = (2;1;-3)$;
3) A(0;-3;1) ir B(1;0;1), $\vec{c} = (1;2;3)$.

Ats.: 1) $x-y-z=0$; 2) $4x+13y+7z-35=0$; 3) $9x-3y-z-8=0$.

Kampas tarp plokštumų

Kampas tarp plokštumų $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ lygus kampui tarp jų normalinių vektorių $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ ir $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Taigi,

$$\cos j = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

Norint apskaičiuoti smailųjį kampą tarp plokštumų, dešinėje pusėje imamas modulis.

Pavyzdys

Apskaičiuokite smailųjį kampą tarp plokštumų $2x-3y+4z-1=0$ ir $3x-4y-z+3=0$.

Sprendimas

$$\cos j = \frac{|2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) + 4 \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-1)^2}} = \frac{14}{\sqrt{29} \sqrt{26}} \approx 0,5098; j \approx 59^\circ.$$

Pratimas

7. Raskite kampą tarp plokštumų : 1) $2x-y+2z+35=0$ ir $2x-2y+55=0$;
 2) $2x-y+5z+35=0$ ir $x+3y-z-75=0$; 3) $2x-9y+6z-225=0$ ir $6x-2y+3z+75=0$.
 Ats.: 1) 45° ; 2) $\approx 71^\circ$; 3) $\approx 51^\circ$.

Plokštumų lygiagretumo ir statmenumo sąlygos

Kad dvi plokštumos $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ būtų lygiagrečios, jų normaliniai vektoriai $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ ir $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ turi būti lygiagretūs. Pasinaudoję dviejų vektorių lygiagretumo sąlyga, gausime:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Kad dvi plokštumos $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ būtų statmenos, jų normaliniai vektoriai $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ ir $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ turi būti statmeni. Pasinaudoję dviejų vektorių statmenumo sąlyga, gausime:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Pavyzdžiai

1. Kokios turi būti parametrai m ir n reikšmės, kad plokštumos $mx+2y-z+45=0$ ir $2x+y-nz-35=0$ būtų lygiagrečios?

Sprendimas

$$\frac{m}{2} = \frac{2}{1} = \frac{-1}{-n} \Rightarrow \frac{m}{2} = 2 = \frac{1}{n} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} = 2, \\ 2 = \frac{1}{n}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 4, \\ n = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

2. Plokštuma eina per tašką $A(-2;3;4)$ ir lygiagreti plokštumai $x+2y-3z+45=0$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

Kadangi plokštuma, kurios lygtį rašysime, yra lygiagreti plokštumai $x+2y-3z+45=0$, tai jos normaliniu vektoriumi galima laikyti duotosios plokštumos normalinį vektorių $\vec{n} = (1;2;-3)$. Rašome lygtį plokštumos, einančios per tašką ir statmenos vektoriui:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow 1 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (y - 3) - 3 \cdot (z - 4) = 0 \text{ arba } x + 2y - 3z + 8 = 0.$$

3. Kokia turi būti parametro m reikšmė, kad plokštumos $3x-5y-mz5=0$ ir $x+3y+2z-155=0$ būtų statmenos?

Sprendimas

$$3 \cdot 1 + (-5) \cdot 3 + (-m) \cdot 2 = 0 \Rightarrow 2m = -12 \Rightarrow m = -6.$$

4. Plokštuma eina per taškus $A(-2;-3;1)$ ir $B(1;4;-2)$ ir yra statmena plokštumai $2x+3y-z+45=0$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

Nagrinėjamos plokštumos normaliniu vektoriumi galima laikyti vektorių $\overrightarrow{AB} = (3;7;-3)$ ir $\vec{n}_1 = (2;3;-1)$ vektorinę sandaugą:

$$\vec{n}_2 = \vec{AB} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 7 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Belieka parašyti lygtį plokštumos, einančios per tašką $A(-2;-3;1)$ ir statmenos vektoriui $\vec{n}_2 = (2;-3;-5)$: $2(x+2)-3(y+3)-5(z-1)=0$ arba $2x-3y-5z=0$.

Pratimai

1. Kurios iš šių plokštumų yra lygiagrečios: 1) $2x-3y-5z-7=0$ ir $2x-3y+5z+3=0$; 2) $4x+2y-4z+5=0$ ir $2x+y+2z-1=0$; 3) $x-3z+2=0$ ir $2x-6z-7=0$?
Ats.: 3).

2. Kokios turi būti m ir n reikšmės, kad plokštumos būtų lygiagrečios: 1) $2x+my+3z-5=0$ ir $nx-6y-6z+2=0$; 2) $3x-y+mz-9=0$ ir $2x+ny+2z-3=0$; 3) $mx+3y-2z-1=0$ ir $2x-5y-nz=0$?

Ats.: 1) 3; -4; 2) $3; -\frac{2}{3}$; 3) $-\frac{6}{5}; -\frac{10}{3}$.

3. Parašyti lygtį plokštumos, einančios per tašką A ir lygiagrečios kitai plokštumai:

- 1) $A(3;-2;-7)$ ir $2x-3z+5=0$; 2) $A(1;-1;0)$ ir $x+y+z+1=0$; 3) $A(-2;-1;0)$ ir $3x-2y+5z-6=0$.

Ats.: 1) $2x-3z-27=0$; 2) $x+y+z=0$; 3) $3x-2y+5z+4=0$.

4. Kurios iš šių plokštumų yra statmenos: 1) $3x-y-2z-5=0$ ir $x+9y-3z+2=0$;

- 2) $2x+3y-z-3=0$ ir $x-y-z+5=0$; 3) $2x-5y+z=0$ ir $x+2z-3=0$?

Ats.: 1) ir 2).

5. Kokios turi būti parametro m reikšmės, kad plokštumos būtų statmenos: 1) $3x-5y+mz=0$ ir $x+3y+2z+5=0$; 2) $5x+y-3z=0$ ir $2x+my-3z+1=0$; 3) $7x-2y-z=0$ ir $mx+y-3z-1=0$?

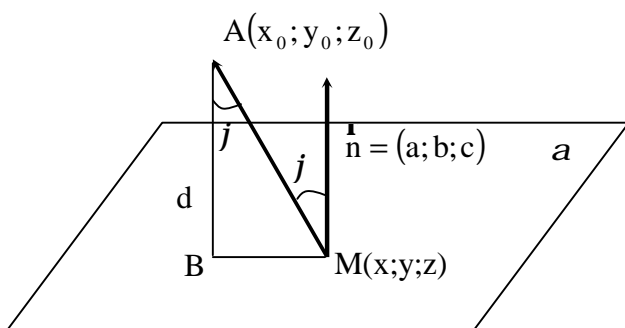
Ats.: 1) 6; 2) -19; 3) $-\frac{1}{7}$.

6. Parašykite lygtį plokštumos, einančios per tašką A ir statmenos dviem duotom plokštumom:

- 1) $A(0;0;0)$, $2x-y+3z-1=0$ ir $x+2y+z=0$; 2) $A(2;-1;1)$, $2x-z+1=0$ ir $y=0$; 3) $A(-1;0;3)$, $x+y+z-1=0$ ir $2x-y-z+3=0$.

Ats.: 1) $7x-y-5z=0$; 2) $x+2z-4=0$; 3) $y-z+3=0$.

Taško atstumas iki plokštumos



Rasime taško $A(x_0; y_0; z_0)$ atstumą iki plokštumos $ax+by+cz+d=0$. Iš taško A nuleidžiame statmenį į plokštumą $a \perp AB$. Atstumą iki plokštumos pažymėkime $d \perp AB$. Plokštumoje a laisvai pasirenkame tašką $M(x;y;z)$ ir iš jo brėžiame vektorius \vec{MA} ir \vec{n} . Randame šių vektorių skaliarinę sandaugą: $\vec{MA} \cdot \vec{n} = |\vec{MA}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos j$,
 $|\vec{MA} \cdot \vec{n}| = |\vec{MA}| \cdot |\vec{n}| \cdot |\cos j|$; bet $|\vec{MA}| \cdot |\cos j| = AB$.

$$\text{Vadinasi, } AB = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|(x_0 - x)a + (y_0 - y)b + (z_0 - z)c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - ax - by - cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Pastebėsime, kad iš lygties $ax+by+cz+d=0$ $d=-ax-by-cz$. Vadinasi,

$$AB = \left| \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) \right|$$

Pavyzdžiai

1. Raskite taško $A(1;-2;5)$ atstumą iki plokštumos $x-2y-2z+3=0$.

Sprendimas

$$d = \left| \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} (1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) - 2 \cdot 5 + 3) \right| = \left| \frac{1}{3} \cdot (-2) \right| = \frac{2}{3}.$$

2. Raskite atstumą tarp lygiagrečių plokštumų $2x-2y+z-8=0$ ir $2x-2y+z+7=0$.

Sprendimas

Pirmojoje plokštumoje pasirenkame bet kurią tašką, pavyzdžiui, $A(0;0;8)$, ir randame jo atstumą

$$\text{iki kitos plokštumos: } d = \left| \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} (0 + 0 + 8 + 7) \right| = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5.$$

Pratimai

1. Raskite atstumą nuo taško iki plokštumos: 1) $M(-2;-4;3)$ iki $2x-y+2z+3=0$;

2) $M(2;-1;-1)$ iki $16x-12y+15z-4=0$; 3) $M(1;2;-3)$ iki $4x-3z+2=0$.

Ats.: 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{3}{5}$.

2. Raskite atstumą tarp lygiagrečių plokštumų: 1) $x-2y-2z-12=0$ ir $x-2y-2z-6=0$;

2) $2x-3y+6z-14=0$ ir $4x-6y+12z+21=0$; 3) $16x+12y-15z+50=0$ ir $16x+12y-15z+25=0$.

Ats.: 1) 2; 2) 3,5; 3) 1.

4 Tiesė erdvėje

Tiesės parametrinės ir kanoninės lygtys

$$\mathbf{a} = (m; n; p)$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$$

Tiesės padėtis erdvėje yra nustatyta, jeigu žinoma jos kryptis ir taškas, esantis tiesėje. Tiesės kryptį nusakysime lygiagrečiu vektoriumi $\mathbf{a} = (m; n; p)$. Šis vektorius vadinamas tiesės *krypties vektoriumi*. Parašysime lygtis tiesės, kuri eina per tašką $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ir kurios krypties vektorius $\mathbf{a} = (m; n; p)$.

Tiesėje laisvai pasirenkame tašką $M(x; y; z)$ ir brėžiame vektorių

$\overrightarrow{M_0M}$. Vektoriai $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ ir $\mathbf{a} = (m; n; p)$ kolinearūs, tai:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

Gavome *tiesės kanonines lygtis*. Jeigu vienas ar du iš skaičių m , n ar p lygus nuliui, tai suprasime, kad atitinkami skaitikliai lygūs nuliui.

Jeigu kanoninėse lygtyse pažymėsime $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t$, tai gausime:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = t, \\ \frac{y-y_0}{n} = t, \\ \frac{z-z_0}{p} = t; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-x_0 = mt, \\ y-y_0 = nt, \\ z-z_0 = pt; \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}}$$

Šios lygtys vadinamos *parametrinėmis tiesės lygtimis*.

Pavyzdžiai

1. Tiesė eina per tašką $A(2;1;3)$ ir yra lygiagreti vektoriui $\vec{a} = (4;-5;-6)$. Parašykite jos lygtį.
Sprendimas

Taško ir vektoriaus koordinatės įstatome į lygtis: $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-3}{-6}$.

2. Tiesė eina per tašką $A(-1;2;0)$ ir lygiagreti tiesei $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{4}$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

Kadangi nagrinėjamoji tiesė yra lygiagreti duotajai, tai jos krypties vektoriumi galime laikyti duotosios tiesės krypties vektorių $\vec{a} = (2;3;4)$. Įstatome: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$.

3. Tiesė lygiagreti Ox ašiai ir eina per tašką $A(1;2;3)$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

Ašies Ox krypties vektorius yra $\vec{a} = (1;0;0)$, todėl ieškomosios tiesės lygtis yra

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{0} \text{ arba } \begin{cases} y-2=0, \\ z-3=0. \end{cases}$$

Pratimai

1. Parašykite kanonines lygtis tiesės, einančios per tašką $M(2;0;-3)$ ir lygiagrečios:

1) vektoriui $\vec{a} = (2;-3;5)$; 2) tiesei $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Ats.: 1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$.

2. Parašykite parametrines lygtis tiesės, einančios per tašką $M(1;-1;-3)$ ir lygiagrečios:

1) vektoriui $\vec{a} = (2;-3;4)$; 2) tiesei $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{0}$; 3) tiesei $\begin{cases} x = 3t - 1, \\ y = -2t + 3, \\ z = 5t + 2. \end{cases}$

Ats.: 1) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 - 3t, \\ z = -3 + 4t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 + 4t, \\ z = -3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = -3 + 5t. \end{cases}$

3. Parašykite kanonines lygtis tiesės, einančios per tašką $A(-1;2;-4)$ ir lygiagrečios Oz ašiai.

$$\text{Ats.: } \frac{x+1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{1} \text{ arba } \begin{cases} x+1=0, \\ y-2=0. \end{cases}$$

Tiesės, einančios per du taškus, lygtys

Parašysime lygtį tiesės, einančios per du taškus $A(x_1; y_1; z_1)$ ir $B(x_2; y_2; z_2)$. Šios tiesės krypties vektorius gali būti vektorius $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Kadangi tiesė eina per tašką A ir žinomas jos krypties vektorius, tai galima parašyti jos kanonines lygtis:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Gavome lygtis tiesės, einančios per du taškus.

Pavyzdys

Parašykite lygtis tiesės, einančios per taškus $A(-1;3;2)$ ir $B(0;1;2)$.

Sprendimas

$$\frac{x+1}{0+1} = \frac{y-3}{1-3} = \frac{z-2}{2-2} \text{ arba } \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{0} \text{ arba } \begin{cases} x+1 = \frac{y-3}{-2}, \\ z-2 = 0. \end{cases}$$

plokštumai xOy.

Pratimai

1. Parašykite kanonines lygtis tiesės, einančios per du taškus: 1) $A(1;-2;1)$ ir $B(3;1;-1)$; 2) $A(3;-1;0)$ ir $B(1;0;-3)$; 3) $A(0;-2;3)$ ir $B(3;-2;1)$.

$$\text{Ats.: 1) } \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}; \quad 2) \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}; \quad 3) \frac{x}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-3}{-2}.$$

2. Parašykite parametrines lygtis tiesės, einančios per du taškus: 1) $A(3;-1;2)$ ir $B(2;1;1)$; 2) $A(1;1;-2)$ ir $B(3;-1;0)$; 3) $A(0;0;1)$ ir $B(0;1;-2)$.

$$\text{Ats.: 1) } \begin{cases} x = 3 - t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 2 - t; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = -2 + 2t; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 1 - 3t. \end{cases}$$

Lygtys tiesės, duotos dviejų plokštumų susikirtimu

Dvi plokštumos, jeigu jos nėra lygiagrečios, kertasi tiese. Parašysime plokštumų $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ir $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ susikirtimo tiesės kanonines lygtis.

Kadangi tiesė priklauso abiem plokštumoms, tai jos krypties vektorius statmenas vektoriams $\vec{n}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ ir $\vec{n}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Vadinasi, plokštumų susikirtimo tiesės krypties vektorius yra

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Liko surasti vieno iš tiesės taškų koordinatės. Jas randame iš sistemos

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0; \end{cases} \text{ laisvai pasirinkę vieno kintamojo reikšmę. Jeigu to taško koordinatės } (x_0; y_0; z_0), \text{ tai kanoninės lygtys bus:}$$

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Pavyzdys

Parašykite tiesės $\begin{cases} x - 3y - z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ kanonines lygtis.

Sprendimas

Pasirenkame $z = 0$ ir iš sistemos $\begin{cases} x - 3y - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ surandame $x = 1$, $y = -1$ ir rašome lygtis:

$$\frac{x - 1}{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{y + 1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{z - 0}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} \text{ arba } \frac{x - 1}{8} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z}{11}.$$

Tiesės kanoninės lygtis galima parašyti ir pasirinkus du taškus.

Pratimai

1. Parašykite tiesių lygtis kanoniniu pavidalu:

$$1) \begin{cases} 2x + y - z - 3 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - 2y + z - 3 = 0, \\ x - 2y - z + 3 = 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 4x + y + 2z - 14 = 0, \\ 2x - y + 2z - 4 = 0. \end{cases}$$

Ats.: 1) $\frac{x}{2} = \frac{y - 2}{-3} = \frac{z + 1}{1}$; 2) $\frac{x}{3} = \frac{y}{3} = \frac{z - 3}{-3}$; 3) $\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z}{-3}$.

2. Tiesių lygtis parašykite parametrine forma: 1) $\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z + 1 = 0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 5x + y + z = 0, \\ 2x + 3y - 2z + 5 = 0. \end{cases}$

Ats.: 1) $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 7t, \\ z = -2 + 19t; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = t, \\ y = 5 - 3t, \\ z = 4 - 5t; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 5t, \\ y = -1 - 12t, \\ z = 1 - 13t. \end{cases}$

Kampas tarp tiesių

Kampu tarp tiesių $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ ir $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ laikysime kampą tarp jų kryptinių vektorių $\vec{a}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ ir $\vec{a}_2 = (m_2; n_2; p_2)$. Vadinasi,

$$\cos j = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Pavyzdys

Apskaičiuokite smailųjį kampą tarp tiesių $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{2}$ ir $\frac{x+1}{12} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{4}$.

Sprendimas

$$\cos j = \frac{|2 \cdot 12 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{35}{3 \cdot 13} \approx 0,8974; \quad j \approx 26^\circ.$$

Pratimas

Apskaičiuokite kampą tarp tiesių: 1) $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ ir $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$;

$$2) \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1} \text{ ir } \frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z+1}{-1}; \quad 3) \begin{cases} x = 2t + 3, \\ y = t + 1, \\ z = 2t + 4; \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} x = 12t - 1, \\ y = 3t - 3, \\ z = 4t + 2. \end{cases}$$

Ats.: 1) 60° ; 2) 45° ; 3) $\approx 26^\circ$.

Tiesių lygiagretumo ir statmenumo sąlygos

Tiesės $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ ir $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ lygiagrečios, jei jų krypties

vektoriai $\vec{a}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ ir $\vec{a}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ lygiagretūs, t.y.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Tiesės $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ ir $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ statmenos, jei jų krypties

vektoriai $\vec{a}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ ir $\vec{a}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ statmeni, t.y.

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

Pavyzdžiai

1. Tiesė eina per tašką A(-1;2;1) ir lygiagreti tiesei $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{1}$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

Kadangi nagrinėjamoji tiesė yra lygiagreti duotajai, tai jos krypties vektoriumi galima laikyti

duotosios tiesės krypties vektorių $\vec{a} = (2;3;1)$. Įstatę, gauname: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$.

2. Patikrinkite tiesių $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-2}$ ir $\frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-2}{-1}$ statmenumą.

Sprendimas

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) = 4 - 6 + 2 = 0 \Rightarrow \text{statmenos.}$$

Pratimai

1. Kurios iš šių tiesių yra lygiagrečios: 1) $\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{6} = \frac{z+1}{3}$ ir $\frac{x-7}{8} = \frac{y+5}{12} = \frac{z+1}{6}$;

$$2) \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1} \text{ ir } \begin{cases} x+y+z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x=2t+5, \\ y=-t+2, \\ z=t-7; \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0. \end{cases}$$

Ats.: 1) ir 3).

2. Parašykite kanonines lygtis tiesės, einančios per duotą tašką ir lygiagrečios duotai tiesei:

1) $M(2;-3;-1)$, $\frac{x-4}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$; 2) $M(-1;0;3)$, $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{2}$;

3) $M(1;-1;2)$, $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{3}$.

Ats.: 1) $\frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+1}{2}$; 2) $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{2}$; 3) $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-3}$.

3. Kurios iš šių tiesių statmenos: 1) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ ir $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 3x+3y-8z+3=0; \end{cases}$

$$2) \begin{cases} x=2t+3, \\ y=3t-2, \\ z=-6t+1; \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0; \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0. \end{cases}$$

Ats.: 2) ir 3).

5 Plokštuma ir tiesė erdvėje**Tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtis erdvėje**

Tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtį galima nustatyti sprendžiant jų lygčių sistemą: jei sistema turi vienintelį sprendinį, tai tiesė kerta plokštumą; jei sistema turi be galo daug sprendinių, tai tiesė priklauso plokštumai; jei sistema sprendinių neturi, tai tiesė lygiagreti plokštumai.

Pavyzdys

Nustatykite tiesės $\begin{cases} x+y-2z=1, \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$ ir plokštumos $2x+2y-4z=3$ tarpusavio padėtį.

Sprendimas

Sprendžiame lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x+y-2z=1, \\ 2x-y+z=2, \\ 2x+2y-4z=3; \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1. \text{ Ši}$$

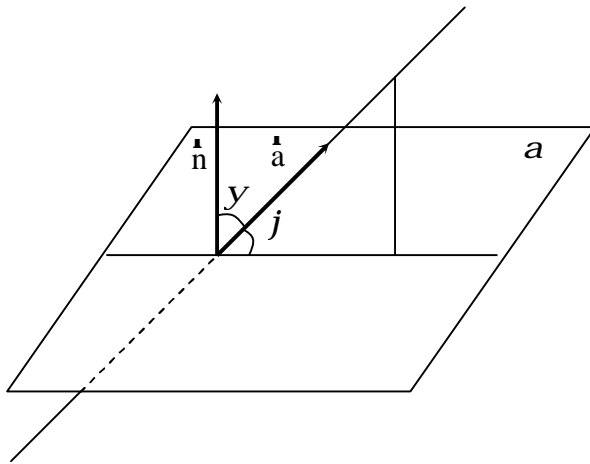
sistema sprendinių neturi. Vadinasi, tiesė lygiagreti plokštumai.

Pratimas

1. Nustatykite tiesės ir plokštumos tarpusavio padėtį:

- 1) $\begin{cases} x - 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y - 2z - 6 = 0; \end{cases}$ ir $x + y + z - 15 = 0$; 2) $\begin{cases} x + y + z + 2 = 0, \\ x - y + z + 2 = 0; \end{cases}$ ir $x + 2y - 1 = 0$;
 3) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}$ ir $x - 2y + z - 15 = 0$.

Ats.: 1) tiesė priklauso plokštumai; 2) kertasi; 3) neturi bendrų taškų.

Kampas tarp tiesės ir plokštumos

$$\text{Kampu tarp tiesės } \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

ir plokštumos $ax+by+cz+d=0$ laikysime kampą j tarp tos tiesės ir jos projekcijos plokštumoje. Jeigu kampas tarp vektorių $\vec{n} = (a; b; c)$ ir $\vec{a} = (m; n; p)$ yra y , tai $j = 90^\circ - y$. Tada

$$\sin j = \sin(90^\circ - y) = \cos y. \text{ Gavome}$$

$$\sin j = \frac{|am + bn + cp|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Pavyzdys

Apskaičiuokite kampą tarp tiesės $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{2}$ ir plokštumos $x+2y-3z+4=0$.

Sprendimas

$$\sin j = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{14} \cdot 29} \approx 0,2482; \quad j \approx 14^\circ.$$

Pratimas

Apskaičiuokite kampą tarp tiesės ir plokštumos: 1) $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{2}$ ir

$$x+2y-3z+4=0; \quad 2) \begin{cases} 2x - 2y - 24 = 0, \\ 3x - z + 4 = 0; \end{cases} \text{ ir } 6x + 15y - 10z + 31 = 0; \quad 3) \frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{4} \text{ ir } 2x-3y-2z+5=0.$$

Ats.: 1) $\approx 14^\circ$; 2) $\approx 8^\circ$; 3) $\approx 21^\circ$.

Tiesės ir plokštumos lygiagretumo ir statmenumo sąlygos

Jeigu tiesė $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ ir plokštuma $ax+by+cz+d=0$ lygiagrečios, tai jų vektoriai

$\vec{n} = (a; b; c)$ ir $\vec{a} = (m; n; p)$ yra statmeni, t.y.

$$ma + nb + pc = 0$$

Jeigu tiesė $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ ir plokštuma $ax+by+cz+d=0$ statmenos, tai jų vektoriai $\vec{n} = (a;b;c)$ ir $\vec{a} = (m;n;p)$ yra lygiagretūs, t.y.

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$

Pavyzdžiai

1. Plokštuma eina per tašką $A(-1;2;-3)$ ir statmena tiesei $\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{2}$. Parašykite jos lygtį.

Sprendimas

Akivaizdu, kad nagrinėjamos plokštumos normaliniu vektoriumi galima laikyti duotos tiesės krypties vektorį $\vec{a} = (4;3;2)$, nes jis statmenas plokštumai. Liko parašyti lygtį plokštumos, einančios per tašką A ir statmenos vektoriumi \vec{a} : $4(x+1)+3(y-2)+2(z+3)=0$ arba $4x+3y+2z+4=0$.

2. Su kokia parametro k reikšme tiesė $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{k} = \frac{z+3}{-1}$ lygiagreti plokštumai $x-2y+4z-3=0$?

Sprendimas

$$2 \cdot 1 + k \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 = 0 \Rightarrow 2 - 2k - 4 = 0 \Rightarrow 2k = -2 \Rightarrow k = -1.$$

3. Su kokiomis parametru r ir s reikšmėmis tiesė $\begin{cases} x = 2 + rt, \\ y = -2 - st, \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ yra statmena plokštumai

$$2x+4y+z-5=0?$$

Sprendimas

Tiesės krypties vektoriaus koordinatės $(r;-s;2)$ ir plokštumos normalinio vektoriaus koordinatės

$$(2;4;1) \text{ įstatome į lygiagretumo sąlygą: } \frac{r}{2} = \frac{-s}{4} = \frac{2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{r}{2} = 2, \\ \frac{-s}{4} = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 4, \\ s = -8. \end{cases}$$

Pratimai

1. Patikrinkite tiesės ir plokštumos lygiagretumą: 1) $\frac{x-2}{4} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-1}{-2}$ ir $5x-2y+7z+3=0$; 2) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+1}{3}$ ir $3x-5y-3z-4=0$; 3) $\frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$ ir $2x-y-2z-9=0$.

2. Parašykite kanonines lygtis tiesės, einančios per tašką M ir statmenos duotai plokštumai:

1) $M(2;-3;-5)$ ir $6x-3y-5z+2=0$; 2) $M(-3;4;7)$ ir $x-2y+3z-8=0$; 3) $M(1;-1;1)$ ir $x-y+z-10=0$.

$$\text{Ats.: 1) } \frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}; \quad 2) \frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-7}{3}; \quad 3) \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}.$$

3. Parašykite lygtį plokštumos, einančios per duotą tašką ir statmenos duotai tiesei:

$$1) M(1;-2;1) \text{ ir } \begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0; \end{cases} \quad 2) M(1;-1;-1) \text{ ir } \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{4}.$$

$$\text{Ats.: 1) } x+2y+3z-1=0; \quad 2) 2x-3y+4z-1=0.$$

4. Su kokia parametro m reikšme tiesė lygiagreti plokštumai: 1) $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ ir $x-3y+6z+7=0$; 2) $\frac{x-5}{5} = \frac{y+1}{m} = \frac{z-4}{3}$ ir $2x+3y+z-1=0$; 3) $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+3}{m} = \frac{z+6}{5}$ ir $x+2y-2z+6=0$.

Ats.: 1) -3 ; 2) $-4\frac{1}{3}$; 3) 7 .

5. Kokia turi būti parametro a reikšmė, kad tiesė būtų lygiagreti plokštumai:

$$1) \begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = 1 - 4t, \\ z = -3 + t; \end{cases} \text{ ir } ax + 2y - 4z + 23 = 0; \quad 2) \begin{cases} x = -3 + t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 1 - 4t; \end{cases} \text{ ir } ax + 5y - z + 6 = 0;$$

$$3) \begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 1 + 5t, \\ z = -2 + 6t; \end{cases} \text{ ir } ax - 6y + z - 7 = 0?$$

Ats.: 1) 3 ; 2) -19 ; 3) 8 .

6. Su kokiais parametru m ir n reikšmėmis tiesė yra statmena plokštumai:

$$1) \frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3} \text{ ir } 3x - 2y + nz + 1 = 0; \quad 2) \begin{cases} x = mt - 6, \\ y = -2t + 5, \\ z = t - 8; \end{cases} \text{ ir } x + y + nz + 6 = 0;$$

$$3) \frac{z-7}{m} = \frac{y+3}{8} = \frac{z+5}{-4} \text{ ir } 2x - y + nz + 8 = 0?$$

Ats.: 1) -6 ; $1,5$; 2) 2 ; $-0,5$; 3) -16 ; $0,5$.