Pagrindinės sąvokos

- ▲*elektros krūvis* – elektrinio lauko šaltinis, kurio pagrindinė charakteristika nusakoma jėga, vadinama elektromagnetine sąveika. Visa elektrinių ir magnetinių reiškinių visuma yra įvairios Δ pasireiškimo formos. Skiriami du sąlyginiai tipai: teigiamas ir neigiamas. Gamtoje Δ visada yra diskretinis dydis, tačiau elektrodinamikoje dažnai laikomas tolydžiu. Matuojamas kulonais, $[q]=1\,\mathrm{C}$. Taip pat svarbus dydis yra krūvio tankis. Tolydaus krūvio atveju jis žymimas ρ; $[\rho]=1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$;
- ▲uždaroje fizikinėje sistemoje teigiamų ir neigiamų krūvių suma yra pastovi;
- ▲ *elektros srovė* – kryptingas krūvininkų arba įelektrintų makroskopinių dalelių judėjimas. Atitinkamai Δ vadinama laidumo ir konvekcine srove. Srovė, sukelta laike kintančio elektrinio lauko, vadinama slinkties srove. Srovė $[I]=1\,\mathrm{A}$, srovės tankis $[\vec{j}]=1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$;
- ▲ *elektromagnetinis laukas* – materijos forma, charakterizuojanti sąveiką tarp judančių ir nejudančių elektros krūvių. Gamtoje Δ pasireiškia dvejopai – tolydžiai bei diskretiškai (pvz., fotonai). Δ sąveika sklinda šviesos greičiu. Δ sąlyginai skirstomas į elektrinį ir magnetinį (tai priklauso nuo pasirinktos koordinačių sistemos. Pvz., sistemoje, nejudančioje krūvininko atžvilgiu, tas krūvininkas sukurs tik elektrinį lauką, o judančioje sistemoje – ir magnetinį).
- ▲ *elektrinis laukas* – viena iš elektromagnetinio lauko pasireiškimo formų, nulemiančių sąveiką tarp nejudančių krūvininkų arba tarp elektrinio lauko ir nejudančių krūvininkų. Δ yra vektorinis dydis, $[\vec{E}]=1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$;
- ▲ *magnetinė indukcija* – viena iš elektromagnetinio lauko pasireiškimo formų, nulemiančių sąveiką tarp judančių krūvininkų ir srovių arba tik elektromagnetinio lauko ir srovių. $[\vec{B}]=1\,\mathrm{T}$. Δ sudaro kitus tris elektromagnetinio tenzoriaus sandus.

Elektromagnetinį lauką apibūdina *Lorenco* jėga $\vec{F}=q(\vec{E}+[\vec{v},\vec{B}])$. Jei v arba B lygu nuliui, tuomet $\vec{F}=q\vec{E}$; jei $\vec{E}=0$, $\vec{F}=q[\vec{v},\vec{B}]$. Taigi *Lorenco* jėgą galima apibūdinti kaip: a) jėga, kuria vienetinis elektrinis laukas veikia vienetinį krūvį; b) jėga, veikianti vienetinį krūvininką magnetiniame lauke, kuri yra statmena $\vec{v}$ ir $\vec{B}$.

Elektrodinamikoje įvedami papildomi dydžiai: $\vec{D}$ – elektrinė indukcija, $\vec{H}$ – magnetinio lauko stipris. $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E};[D]=1\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}$, $\vec{B}=\mu_0\vec{H};[B]=1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$. $\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{\mathrm{c}^2}$. Palyginus matavimo vienetus, matyti, jog $\vec{D}$ susijęs su ρ, o $\vec{H}$ – su $\vec{j}$.

Taigi nagrinėti elektromagnetinį lauką medžiagoje užtenka šių dydžių: $\vec{H}$, $\vec{j}$, $\vec{D}$, ρ, $\vec{E}$ ir $\vec{B}$.

Elektromagnetinio lauko lygtys diferencialiniame ir integraliniame pavidale

Elektromagnetinį lauką visiškai aprašo *Maksvelo* lygtys:

$$\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{H}} = \frac{\partial \vec{\boldsymbol{D}}}{\partial \boldsymbol{t}} + \vec{\boldsymbol{j}}, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{t}}, \tag{2}$$

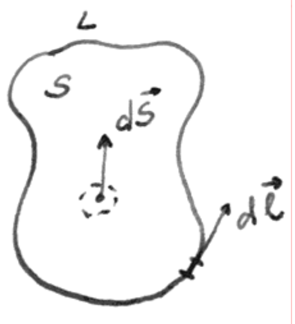
$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{\rho}, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\vec{\boldsymbol{B}} = 0. \tag{4}$$

(2) lygtis

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \left[\nabla, \vec{E}\right] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}.$$

Matyti, kad, jei $\vec{E} = \mathrm{const}$, tai ir $\vec{B} = \mathrm{const}$. Ar gali būti taip, kad $\vec{\boldsymbol{E}} \neq 0$, o $-\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial \boldsymbol{t}} = 0$? Kitaip tariant, ar gali egzistuoti kintantis erdvėje elektrinis laukas, kuris nekuria magnetinio lauko? Prisiminę, kad $\mathrm{rot\,grad}\,\varphi = 0$ bet kokiam φ, galime teigti, jog elektrinis laukas $\vec{E} \propto \mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi$ nekurs magnetinio lauko. Tokie laukai vadinami potencialiniais. Laukai, aprašomi rotoriumi, vadinami sūkuriniais. Jei tik $\vec{E}$ neproporcingas $\nabla\varphi$, atsiranda $\vec{B}$.



1 pav.

Tarkime, turime kontūrą (1 pav.), kurio ilgis *L*, o ribojamas plotas *S*. Suintegruokime:

$$\int_S \left(\mathrm{rot}\vec{E}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \mathrm{d}\vec{S}\right). \tag{5}$$

Pagal *Stokso* teoremą, $\oint_S \left(\mathrm{rot}\vec{A}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = \oint_L \left(\vec{A}, \mathrm{d}\vec{l}\right)$, čia $\mathrm{d}\vec{S}$ yra statmenas kontūro plokštumai. Pastarasis integralas dar vadinamas vektoriaus $\vec{A}$ cirkuliacija uždaru kontūru. Tuomet:

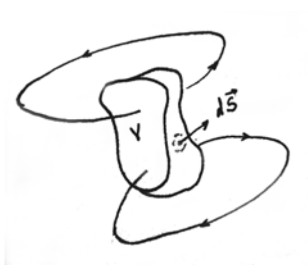
$$\int_S \left(\mathrm{rot}\vec{E}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = \oint_L \left(\vec{E}, \mathrm{d}\vec{l}\right) = -\int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \mathrm{d}\vec{S}\right). \tag{6}$$

Tegu kontūras nekinta laike, tuomet *S*=const ir

$$\oint_L \left(\vec{E}, \mathrm{d}\vec{l}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \left(\vec{B}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varPhi, \tag{7}$$

čia $\left(\vec{B}, \mathrm{d}\vec{S}\right)$ – magnetinio lauko srautas per paviršiaus ploto vienetą, o $\oint_L \left(\vec{E}, \mathrm{d}\vec{l}\right)$ – darbas, kurį atlieka vienetinis krūvis, apeidamas uždaru kontūru. (7) formulė, taigi ir (2) lygtis, apibūdina *Faradėjaus* elektromagnetinės indukcijos dėsnį.

(4) lygtis



2 pav.

Suintegruokime (4) lygtį uždaru tūriu (2 pav.):

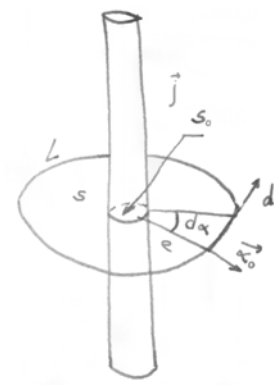
$$\int_V \mathrm{div}\vec{B}\ \mathrm{d}V = \int_V 0\ \mathrm{d}V = 0. \tag{8}$$

Pritaikę *Gauso* dėsnį $\int_V \mathrm{div}\vec{A}\ \mathrm{d}V = \int_S \left(\vec{A}, \mathrm{d}\vec{S}\right)$ (čia S – to tūrio paviršius) (8) lygčiai, gauname

$$\int_V \mathrm{div}\vec{B}\ \mathrm{d}V = \int_S \left(\vec{B}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = 0. \tag{9}$$

Taigi *per uždarą paviršių magnetinės indukcijos srautas visada lygus nuliui – magnetinio lauko linijos yra uždaros, neturi nei pradžios, nei pabaigos.*

(1) lygtis



3 pav.

Tegu turime ilgą apvalų laidininką ir jokie dydžiai nepriklauso nuo laiko; $\frac{\partial}{\partial t} = 0.$ Iš čia $\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j}$. Tuomet:

$$\int_{S_0} \left(\vec{j}, \mathrm{d}\vec{S}_0\right) = I. \tag{10}$$

Tegu strypo ilgis bei kampas α taip pat neturi reikšmės.

$$\int_S \left(\mathrm{rot}\vec{H}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = \int_S \left(\vec{j}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = \int_{S_0} \left(\vec{j}, \mathrm{d}\vec{S}_0\right) = I. \tag{11}$$

Suskaičiuojame $\vec{H}$ cirkuliaciją atsižvelgdami į (11):

$$\int_S \left(\mathrm{rot}\vec{H}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = \oint_L \left(\vec{H}, \mathrm{d}\vec{l}\right) = I. \tag{12}$$

Taigi matome, kad $\vec{H}$ yra tik ρ funkcija. Suskaičiuokime $\vec{H}$ cirkuliaciją kitaip:

$$\oint \left(\mathrm{rot}\vec{H}(\rho), \rho \cdot \mathrm{d}\alpha \cdot \vec{\alpha}_0\right) = \oint_L H_\alpha(\rho)\rho\ \ \mathrm{d}\alpha = \int_0^{2\pi} H_\alpha(\rho)\rho\ \ \mathrm{d}\alpha = 2\pi H_\alpha(\rho)\rho = I.$$

Iš čia

$$H_\alpha(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho}. \tag{13}$$

Iš (13) matyti, kad laido kuriamas magnetinis laukas tiesiogiai proporcingas I ir atvirkščiai proporcingas atstumui ρ. (13), kartu ir (1) lygtis *apibūdina atskirą Ampero dėsnį*.

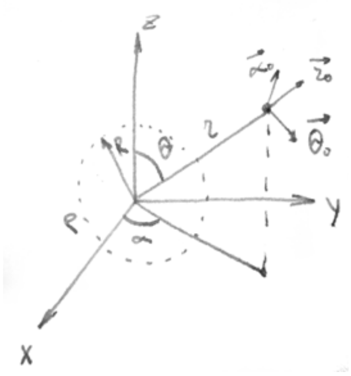
(3) lygtis

Integruokime (3) lygtį visu tūriu ir pritaikykime *Gauso* teoremą:

$$\int_V \mathrm{div}\vec{D}\mathrm{d}V = \int_V \rho \mathrm{d}V = q = \oint_S \left(\vec{D}, \mathrm{d}\vec{S}\right). \tag{14}$$

Tegul ρ pasiskirstęs sferiškai simetriškai. Tuomet patogiau naudoti sferinę koordinačių sistemą (4 pav.):

$$\mathrm{d}\vec{S} = r^2 \vec{r}_0 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\alpha.$$



4 pav.

Kadangi $\vec{D}$ nuo kampų nepriklauso:

$$\int_V \mathrm{div}\vec{D} \, \mathrm{d}V = \int_S \left(\vec{D}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = q. \tag{16}$$

$$\left(\vec{D}, r^2 \vec{r}_0 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\alpha\right) = D_r r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\alpha \tag{17}$$

Taigi $\vec{D}$ yra funkcija tik nuo r.

$$\int_S \left(\vec{D}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = D_r(r) r^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha \int_0^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta = 4\pi D_r(r) r^2 = q.$$

Iš čia

$$D_r(r) = \frac{q}{4\pi r^2}. \tag{18}$$

Kadangi $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$,

$$E_r(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \tag{19}$$

Padauginę (19) iš kokio nors krūvio q_1, gauname:

$$q_1 E_r(r) = F_r(r) = \frac{q q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}. \tag{20}$$

Taigi (20), o kartu ir (3) lygtys aprašo Kulono dėsnį.

Krūvio tvermės dėsnis ir srovės tolydumo lygtis

Suskaičiuokime divergenciją (1) *Maksvelo* lygties:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \mathrm{div}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0, \tag{21}$$

nes divergencija bet kokio vektoriaus rotoriaus lygi nuliui. Iškėlę diferencijavimą prieš divergencijos ženklą, bei pritaikę (3) Maksvelo lygtį, gauname:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0. \tag{22}$$

Pastaroji lygtis vadinama *krūvio tvermės dėsniu* arba *srovės tolydumo lygtimi*.

Tegul ρ – laiko ir koordinačių funkcija. Ieškokime pilnos ρ išvestinės pagal laiką:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\vec{v}, \mathrm{grad}\rho\right).$$

Pareikalavę, kad krūvis nekistų laike, turėsime:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\vec{v}, \mathrm{grad}\rho\right) = 0. \tag{23}$$

Palyginę pastarąją lygtį ir sąryšį $\mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \rho\,\mathrm{div}\vec{v} + \left(\vec{v}, \mathrm{grad}\rho\right)$, matome, kad labai patogu būtų, jei būtų $\mathrm{div}\vec{v} = 0$. Taip gali būti tik tada, jei $\vec{v} = \mathrm{rot}\vec{A}$, čia $\vec{A}$ – kažkoks vektorius. Tokiu atveju

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\vec{v})=0. \tag{24}$$

Užrašykime srovės tankį šitaip:

$$\vec{j}=\left[\vec{A},\mathrm{grad}\rho\right]; \text{ iš čia}$$

$$\mathrm{div}\vec{j}=\Big(\mathrm{grad}\rho,\underbrace{\mathrm{rot}\vec{A}}_{=\vec{v}}\Big)=\left(\vec{v},\mathrm{grad}\rho\right). \tag{25}$$

Suintegruokime visu tūriu, kuriame yra krūvis:

$$\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V=-\int_V\mathrm{div}\vec{j}\mathrm{d}V=-\int_S\left(\vec{j},\mathrm{d}\vec{S}\right)=-I, \text{ nes integralas yra tik laiko funkcija.}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\mathrm{d}V=-I=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q;\Rightarrow I=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{26}$$

Jei krūvis nekinta laike, $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$, ir iš (23) bei (25) išplaukia

$$\mathrm{div}\vec{j}=0; \tag{27}$$

Taigi *srovės tankio linijos yra uždaros*.

Elektromagnetinės medžiagų savybės

Vakuume

$$\begin{aligned}\vec{D}_0&=\varepsilon_0\vec{E}_0,\\ \vec{B}_0&=\mu_0\vec{H}_0.\end{aligned} \tag{28}$$

Elektriniam laukui sklindant ne vakuumu (darant prielaidą, kad medžiaga neveikia elektrinio lauko šaltinių), elektrinės slinkties vektorius pakis: $\vec{D}-\vec{D}_0=\vec{P}$. $\vec{P}$ vadinamas *elektrinės poliarizacijos vektoriumi*.

Visiškai analogiškai ir magnetiniam laukui: $\vec{B}-\vec{B}_0=\vec{M}$. $\vec{M}$ – *medžiagos įmagnetėjimo vektorius*.

Paprastai $\vec{P}$ priklauso tik nuo $\vec{E}$, o $\vec{M}$ – nuo $\vec{H}$ (arba $\vec{B}$). Tuomet galima užrašyti:

$$\begin{aligned}\vec{P}&=\varepsilon_0\kappa_\mathrm{E}\vec{E}=\kappa_\mathrm{E}\vec{D}_0,\\ \vec{M}&=\mu_0\kappa_\mathrm{M}\vec{H}=\kappa_\mathrm{M}\vec{B}_0,\end{aligned} \tag{29}$$

čia κ – elektrinis (magnetinis) proporcingumo koeficientas.

Taigi galime taip užrašyti:

$$\begin{aligned}\vec{D}=\vec{P}+\vec{D}_0=\varepsilon_0\kappa_\mathrm{E}\vec{E}+\varepsilon_0\vec{E}&=\varepsilon_0\left(1+\kappa_\mathrm{E}\right)\vec{E}=\varepsilon\vec{E},\\ \vec{B}&=\mu_0\left(1+\kappa_\mathrm{M}\right)\vec{H}=\mu\vec{H}.\end{aligned} \tag{30}$$

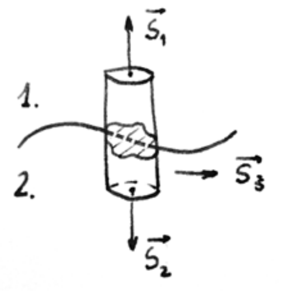
Bendru atveju, μ ir ε yra tenzoriai: $\vec{D}=\hat{\varepsilon}\vec{E},\vec{B}=\hat{\mu}\vec{H}$. Maždaug prieš 20-imt metų buvo atrastos *chirialinės aplinkos*, kuriose

$$\begin{aligned}\vec{D}&=\hat{\varepsilon}\vec{E}+\hat{\xi}\vec{H},\\ \vec{B}&=\hat{\varphi}\vec{E}+\hat{\mu}\vec{H}.\end{aligned} \tag{31}$$

Netiesinėse aplinkose paprastai naudojama $\vec{P}=\varepsilon_0\kappa_\mathrm{E}\vec{E}$. Bendru atveju $\vec{P}=\varepsilon_0\left(\kappa_\mathrm{E}\vec{E}+d_\mathrm{E}\left(\vec{E}\right)^2+...\right)$

Laidininkuose $\vec{j} = \hat{\sigma}\vec{E}$, – srovės kryptis nebūtinai lygiagreti elektriniam laukui.

Elektromagnetinio lauko vektorių kraštinės sąlygos



4 pav.

Turime dvi aplinkas – *1* ir *2* (4 pav.). Pasirinkime tūrio elementą, kurio aukštis *h*, tūris – *V*, apimantį abi medžiagas, ir kertantį skiriamąją ribą plotu *S*. Tarkime, kad krūvis yra tik skiriamojoje riboje ir yra tolygiai pasiskirstęs. Tuomet *Maksvelo* lygtys įgaus tokį pavidalą:

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j} + \begin{cases} \vec{\eta}, \text{kai } x, y, z \in S, \\ 0, \text{kai } x,y,z \notin S. \end{cases}, \tag{32}$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \tag{33}$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho + \begin{cases} \xi, \text{kai } x, y, z \in S, \\ 0, \text{kai } x, y, z \notin S. \end{cases}, \tag{34}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0. \tag{35}$$

Suintegruokime (34) lygtį bet kokiu tūriu *V*, kurio viena dalis yra vienoje aplinkoje, kita – kitoje:

$$\int_V \mathrm{div}\vec{D}\mathrm{d}V = \int_V \rho\mathrm{d}V + \int_V \xi\mathrm{d}V. \tag{36}$$

Pritaikome *Gauso* teoremą:

$$\int_{S_{\mathrm{visas}}} \left(\vec{D}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = \int_V \rho\mathrm{d}V + \int_S \xi\mathrm{d}S. \tag{37}$$

$$\int_{S_{\mathrm{visas}}} \left(\vec{D}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = \int_{S_1} \left(\vec{D}, \mathrm{d}\vec{S}_1\right) + \int_{S_š} \left(\vec{D}, \mathrm{d}S_š\right) + \int_{S_2} \left(\vec{D}, \mathrm{d}\vec{S}_2\right). \tag{38}$$

Tarkime, kad $h \to 0$. Tuomet $V \to 0$. Parinkime plotui *S* kryptį $\vec{n}$, sutampančią su S_1. Tuomet $\vec{S}_1 = -\vec{S}_2 = \vec{S}$. Kadangi

$$\lim_{h \to 0} \int_V \rho\mathrm{d}V = 0, \tag{39}$$

galime užrašyti

$$\begin{aligned} \int_{S_{\mathrm{visas}}} \left(\vec{D}, \mathrm{d}\vec{S}\right) &= \int_S \left(\vec{D}_1, \mathrm{d}\vec{S}\right) - \int_S \left(\vec{D}_2, \mathrm{d}\vec{S}\right) - \int_S \xi\mathrm{d}S = \\ &= \int_S \left\{\left(\vec{D}_1, \vec{n}\right) - \left(\vec{D}_2, \vec{n}\right) - \xi\right\}\mathrm{d}S = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

iš čia $\left(\vec{D}_1, \vec{n}\right) - \left(\vec{D}_2, \vec{n}\right) - \xi = 0$ bet kuriame taške. Dar galime taip užrašyti: $\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2, \vec{n}\right) = \xi$. Tai ir yra kraštinė sąlyga elektrinio lauko indukcijai*: pereinant dviejų aplinkų skiriamąjį paviršių, elektrinės indukcijos vektoriaus statmenųjų paviršiui sandų skirtumas lygus paviršiniam krūvio tankiui.* Ši lygtis tinka bet kokiam atvejui, bet kokiai medžiagai, tačiau krūvį galime rasti tik ženklo tikslumu.

Jei krūvio nėra, perėjimas yra tolydus.

Analogiškai, iš (35) lygties gauname, kad $\left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2, \vec{n}\right) = 0$, t.y., *pereinant dviejų aplinkų skiriamąjį paviršių, magnetinės indukcijos vektoriaus statmenieji paviršiui sandai nekinta.*

Žinomą sąryšį $\int\limits_V \mathrm{rot}\vec{A}\,\mathrm{d}V = -\int\limits_S \left[\vec{A}, \mathrm{d}S\right]$ pritaikykime (32) lygčiai:

$$\int\limits_V \mathrm{rot}\vec{H}\,\mathrm{d}V = \int\limits_V \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int\limits_V \vec{j}\,\mathrm{d}V + \int\limits_V \vec{\eta}\,\mathrm{d}V. \tag{41}$$

Erdvinį integralą pakeičiame paviršiniu:

$$-\int\limits_S \left[\vec{H}, \mathrm{d}\vec{S}\right] = -\int\limits_{S_1} \left[\vec{H}_1, \mathrm{d}\vec{S}_1\right] - \int\limits_{S_2} \left[\vec{H}_2, \mathrm{d}\vec{S}_2\right] - \underbrace{\int\limits_{S_š} \left[\vec{H}, \mathrm{d}\vec{S}_š\right]}_{=0,\,\mathrm{kai}\, h\to 0}. \tag{42}$$

Kadangi

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_V \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\,\mathrm{d}V = 0, \qquad \lim_{h\to 0} \int\limits_V \vec{j}\,\mathrm{d}V = 0, \qquad \lim_{h\to 0} \int\limits_V \vec{\eta}\,\mathrm{d}V = \int\limits_S \vec{\eta}\,\mathrm{d}S,$$

$$\int\limits_{S_1} \left[\vec{H}_1, \mathrm{d}\vec{S}\right] = \int\limits_{S_1} \left[\vec{H}_1, \vec{n}\right]\mathrm{d}S, \qquad \int\limits_{S_2} \left[\vec{H}_2, \mathrm{d}\vec{S}\right] = -\int\limits_{S_2} \left[\vec{H}_2, \vec{n}\right]\mathrm{d}S,$$

tai

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_V \mathrm{rot}\vec{H}\,\mathrm{d}\vec{V} = -\int\limits_S \left[\vec{H}_1, \vec{n}\right]\mathrm{d}S + \int\limits_S \left[\vec{H}_2, \vec{n}\right]\mathrm{d}S = \int\limits_S \vec{\eta}\,\mathrm{d}S, \text{ arba}$$

$$\int\limits_S \left(\left[\vec{n}, \vec{H}_1 - \vec{H}_2\right] - \vec{\eta}\right)\mathrm{d}S = 0, \tag{43}$$

nes $\left[\vec{n}, \vec{H}_1 - \vec{H}_2\right] = \vec{\eta}$, o $\left[\vec{n}, \vec{A}\right] = \left[\vec{n}, \vec{n}A_{\mathrm{n}} + \vec{s}A_S\right] = \underbrace{\left[\vec{n}, \vec{n}\right]}_{=0} A_{\mathrm{n}} + \left[\vec{n}, \vec{s}\right] A_{\mathrm{S}} = \left[\vec{n}, \vec{s}\right] A_{\mathrm{S}}$, čia $\vec{n} \perp \vec{s}$ – vienetiniai vektoriai.

Taigi *pereinant dviejų aplinkų skiriamąjį paviršių, lygiagrečių paviršinio magnetinio lauko vektoriaus sandų skirtumas moduliu lygus paviršinės srovės tankio moduliui.*

Dekarto koordinačių sistemoje pasirinkime $\vec{n} = \vec{z}_0$. Tuomet:

$$\vec{H}_1 - H_2 = \Delta\vec{H} = \vec{x}_0\Delta H_{\mathrm{x}} + \vec{n}_0\Delta H_{\mathrm{y}} + \vec{z}_0\Delta H_{\mathrm{z}};$$

$$\vec{\eta} = \vec{x}_0\eta_x + \vec{y}_0\eta_y;$$

$$\left[\vec{n}, \Delta\vec{H}\right] = \vec{x}_0\eta_x + \vec{y}_0\eta = \vec{\eta};$$

$$\left[\vec{n}, \Delta\vec{H}\right] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \Delta H_x & \Delta H_y & \Delta H_z \end{vmatrix} = -\vec{x}_0\Delta H_y + \vec{y}_0\Delta H_x;$$

$$\vec{x}_0\eta_x + \vec{y}_0\eta_y = \vec{x}_0\left(-\Delta H_y\right) + \vec{y}_0\left(\Delta H_x\right).$$

H_{y} kuria paviršinės srovės x komponentę.

Jei nėra paviršinių srovių, magnetinio lauko stiprio sandai, lygiagretūs paviršiui, pereinant per ribą kinta tolygiai.

Analogiškai galime užrašyti elektriniam laukui: $\left[\vec{n},\vec{E}_1-\vec{E}_2\right]=0$: *pereinant dviejų aplinkų ribą, lygiagretūs paviršiui elektrinio lauko sandai nekinta.*

Taigi elektromagnetinio lauko kraštines sąlygas galime užrašyti taip:

$$\begin{aligned}&\left(\vec{n},\vec{D}_1-\vec{D}_2\right)=\xi,\\&\left(\vec{n},\vec{B}_1-\vec{B}_2\right)=0,\\&\left[\vec{n},\vec{H}_1-\vec{H}_2\right]=\vec{\eta},\\&\left[\vec{n},\vec{E}_1-\vec{E}_2\right]=0.\end{aligned} \tag{44}$$

Jei viena iš aplinkų – laidininkas, tai jame nėra nei magnetinio, nei elektrinio lauko. Tuomet (44) lygtys supaprastėja:

$$\begin{aligned}&\left(\vec{n},\vec{D}_1\right)=D_\mathrm{n}=\xi,\\&\left(\vec{n},\vec{B}_1\right)=B_\mathrm{n}=0,\\&\left[\vec{n},\vec{H}_1\right]=\vec{\eta},\\&\left[\vec{n},\vec{E}_1\right]=0.\end{aligned} \tag{45}$$

$D_\mathrm{n}=\xi$. Kadangi D_n išmatuoti negalime, išmatuojame E_n, ir randame ξ.

$B_\mathrm{n}=0$. Normalinė $\vec{B}$ komponentė visada lygi nuliui.

$$\left[\vec{n},\vec{H}_1\right]=\left[\vec{n},\vec{n}H_\mathrm{n}+\vec{s}H_\mathrm{s}\right]=\left[\vec{n},\vec{s}H_\mathrm{s}\right]=\left[\vec{n},\vec{s}\right]H_\mathrm{s}=\vec{\eta}.\text{ Iš čia}$$

$$H_\mathrm{s}\perp\vec{\eta},H_\mathrm{s}=\left|\vec{\eta}\right|.$$

Analogiškai $\left[\vec{n},\vec{s}\right]E_\mathrm{s}=0,\ E_\mathrm{s}=0;$ – paviršiuje yra tik statmena komponentė. Turint idealų laidininką, užtenka pareikalauti, kad $E_\mathrm{s}=0$, ir *Maksvelo* lygtims galima rasti sprendinį.

Dielektrikams $\left[\vec{n},\vec{H}_1-\vec{H}_2\right]=0.$ Jeigu nėra paviršiniu krūvių ir srovių, tai iš elektrinio lauko ir magnetinio lauko indukcijos tangentinių komponenčių tolydumo seka elektrinio lauko ir magnetinio lauko indukcijos normalinės komponentės tolydumas.

Pointingo teorema, elektromagnetinio lauko energija

Pasinaudokime sąryšiu

$$\mathrm{div}\left[a,\vec{b}\right]=\left(\vec{b},\mathrm{rot}\vec{a}\right)-\left(\vec{a},\mathrm{rot}\vec{b}\right). \tag{46}$$

Tegu $\vec{a}=\vec{E},\vec{b}=\vec{H}$. Tuomet, pasinaudoję *Maksvelo* lygtimis, gausime:

$$\mathrm{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right]=-\left(\vec{H},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)-\left(\vec{E},\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{j}\right)=-\left(\vec{H},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)-\left(\vec{E},\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)-\left(\vec{j},\vec{E}\right). \tag{47}$$

(46) formulė ir išreiškia *Pointingo* teoremą.

Paprasčiausiu atveju $\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\vec{B}=\mu\vec{B}$, tuomet galime parašyti:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D},\vec{E}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E},\vec{D}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E},\varepsilon\vec{E}\right)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E},\vec{E}\right)=2\varepsilon\left(\vec{E},\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=2\left(\vec{E},\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right).$$

Analogiškai $\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H},\vec{B}\right)=2\left(\vec{H},\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$. Tuomet:

$$\mathrm{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right]=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\vec{E},\vec{D}\right)+\left(\vec{H},\vec{B}\right)\right\}-\left(\vec{j},\vec{E}\right). \qquad (48)$$

(48) formulė – *Pointingo* teorema diferencialiniu pavidalu. Vektorius $\vec{\Pi}=\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ vadinamas *Pointingo* vektoriumi.

Suintegruokime (47) tūriu V:

$$\int_V \mathrm{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right]\mathrm{d}V=\int_S\left(\left[\vec{E},\vec{H}\right],\mathrm{d}\vec{S}\right)=-\frac{1}{2}\int_V\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\vec{E},\vec{H}\right)+\left(\vec{H},\vec{B}\right)\right\}\mathrm{d}V-\int_V\left(\vec{j},\vec{E}\right)\mathrm{d}V. \qquad (49)$$

(49) lygtis – *Pointingo* teorema integraliniame pavidale.

Tegu niekas nepriklauso nuo laiko. Tuomet (48) atrodys taip:

$$\int_S\left(\left[\vec{E},\vec{H}\right],\mathrm{d}\vec{S}\right)=-\int_V\left(\vec{j},\vec{E}\right)\mathrm{d}V. \qquad (50)$$

Dešinioji lygybės pusė apibūdina galią, nes pointegracinis reiškinys išreiškia galios tankį.

Tegu srovė teka apvaliu be galo ilgu laidu (3 pav.). Kadangi laido laidumas ne begalinis, galios *Omo* dėsnis:

$\vec{j}=\vec{z}_0 j_0=\sigma E_z\vec{z}_0$; laido išorėje

$$\vec{H}=\frac{\vec{\alpha}_0 I}{2\pi\rho}=\vec{\alpha}_0 H_\alpha.$$

$$\left[\vec{E},\vec{H}\right]=\vec{\Pi}=\begin{vmatrix}\vec{\rho}_0 & \vec{\alpha}_0 & \vec{z}_0\\ 0 & 0 & E_z\\ 0 & H_\alpha & 0\end{vmatrix}=-\vec{\rho}_0 E_z H_\alpha.$$ => Pointingo vektorius nukreiptas į laidininką.

Iš 5 pav.:

$$-\mathrm{d}\vec{S}_a=\mathrm{d}\vec{S}_v=\vec{r}_0\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha;$$

$$\mathrm{d}\vec{S}_s=\vec{\rho}_\alpha R\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}z.$$

Laukas arti laidininko:

$$\left(\vec{\Pi},\mathrm{d}\vec{S}\right)=\left(-\vec{\rho}_0 E_z H_\alpha,\pm\vec{r}_0\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha\right)+\left(-\vec{\rho}_0 E_z H_\alpha\vec{\rho}_0 R_{+0}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}z\right)=-R_{+0}E_z H_\alpha\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}z.$$

$$\int_S\left(\vec{\Pi},\mathrm{d}\vec{S}\right)=-\int_S E_z\frac{I}{2\pi R_{+0}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}z=-\int_z IE_z\mathrm{d}z=-I\underbrace{\int_z E_z\mathrm{d}z}_{\textit{potencialų skirtumas}}=-I_\Delta U. \qquad (51)$$

Taigi Pointingo vektoriaus srautas lygus galiai tam tūriui, kurį riboja tas paviršius.

Pointingo vektorius nukreiptas į laido vidų, į ten eina elektrinio lauko galios srautas. Taigi $\vec{\Pi}$ – galios srautas į ploto vienetą.

Reikia, kad būtų $\int_S (\vec{\Pi}, \mathrm{d}\vec{S}) = 0$. Kadangi $\vec{E} \parallel \mathrm{d}\vec{S}$, $([\vec{E},\vec{H}], \mathrm{d}\vec{S}) = 0$.

Tarkime, turime dėžę, kurios paviršius superlaidus, o viduje – dielektrikas. Tuomet:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left\{(\vec{E},\vec{D})+(\vec{H},\vec{B})\right\}\mathrm{d}V = -\int_V (\vec{j},\vec{E})\,\mathrm{d}V = \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \overbrace{\left\{\frac{1}{2}(\vec{E},\vec{D})+\frac{1}{2}(\vec{H},\vec{B})\right\}}^{\text{ELM lauko energijos tankis}}\mathrm{d}V}_{\text{energijos kitimo greitis}}. \tag{52}$$

Iš pastarojo integralo matyti, kad elektromagnetinio lauko energija:

$$W_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{2}(\vec{E},\vec{D}) + \frac{1}{2}(\vec{H},\vec{B}). \tag{53}$$

$$W_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}(\vec{E},\vec{D}) = \frac{1}{2}\varepsilon E^2,\ W_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}\mu H^2. \tag{54}$$

Skaliariškai padauginkime (1) lygties abi puses iš $\vec{E}$ ir, prisiminę (46), gausime:

$$(\vec{E}, \mathrm{rot}\vec{H}) = (\vec{H}, \mathrm{rot}\vec{E}) - \mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}].$$

Pritaikę (2):

$(\vec{E}, \mathrm{rot}\vec{H}) = -\left(\vec{H}, \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}]$. Iš čia

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} &= (\vec{j},\vec{E}) = -\mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}] - \left(\vec{H}, \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \left(\vec{E}, \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right) = \\ &= -\mathrm{div}[\vec{E},\vec{H}] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{(\vec{H},\vec{B}) + (\vec{E},\vec{D})\right\}.\end{aligned} \tag{55}$$

Maksvelo lygtys kompleksiniame pavidale

Prisiminkime *Furjė* vaizdavimą:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega, \tag{56}$$

čia $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ – ciklinis dažnis.

Furjė vaizdas egzistuoja, jei

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty, \tag{57}$$

t.y. $f(t)$ yra *kvadratiškai integruojama funkcija* (dar kartais vadinama *L_2 funkcija*). Tuomet ir $F(\omega)$ – kvadratiškai integruojama funkcija.

Parsevalio lygybė:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega < \infty. \tag{58}$$

Furjė vaizdas gali egzistuoti ir tada, kai $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t = \infty$, pvz., jei $f(t)=1$. Tokios funkcijos *Furjė* vaizdas – *Dirako* f-ja.

Furjė transformaciją galime išskleisti:

$$F(\omega)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t - \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t;$$ iš čia matyti, kad

$$\operatorname{Re} F(-\omega) = \operatorname{Re} F(\omega),$$
$$\operatorname{Im} F(-\omega) = -\operatorname{Im} F(\omega).$$

Pritaikykime *Furjė* transformaciją elektriniam ir magnetiniam laukui:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\vec{E}}(x,y,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{59}$$

$$\frac{\partial\vec{E}(x,y,z,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\vec{E}}(x,y,z,\omega)\mathrm{i}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{60}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{H}(x,y,z,t) &= \operatorname{rot}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\vec{H}}(x,y,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\operatorname{rot}\vec{H}}(x,y,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.\end{aligned} \tag{61}$$

Nagrinėkime paprasčiausią atvejį, kai $\vec{D}(x,y,z,t) = \varepsilon\vec{E}(x,y,z,t)$. Tuomet

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rot}\underline{\vec{H}}(x,y,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{i}\omega\underline{\vec{D}}(x,y,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{\vec{j}}(x,y,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.\end{aligned} \tag{62}$$

$$\underline{\vec{D}}(x,y,z,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{D}(x,y,z,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t. \tag{63}$$

Su tikslumu funkcijos, kurios integralas lygūs nuliui, galime užrašyti:

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}\underline{\vec{H}}(x,y,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \\ &= \mathrm{i}\omega\underline{\vec{D}}(x,y,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \\ &+ \underline{\vec{j}}(x,y,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.\end{aligned} \tag{64}$$

Kadangi eksponentė niekada nevirsta nuliu:

$$\operatorname{rot}\underline{\vec{H}}(x,y,z,\omega) = \mathrm{i}\omega\underline{\vec{D}}(x,y,z,\omega) + \underline{\vec{j}}(x,y,z,\omega). \tag{65}$$

Taigi *Maksvelo* lygtis kompleksiniu pavidalu atrodo taip:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\underline{\vec{H}}(x,y,z,\omega)=\mathrm{i}\omega\underline{\vec{D}}(x,y,z,\omega)+\underline{\vec{j}}(x,y,z,\omega),\\
&\mathrm{rot}\underline{\vec{E}}(x,y,z,\omega)=-\mathrm{i}\omega\underline{\vec{B}}(x,y,z,\omega),\\
&\mathrm{div}\underline{\vec{B}}(x,y,z,\omega)=0,\\
&\mathrm{div}\underline{\vec{D}}(x,y,z,\omega)=\rho.
\end{aligned} \tag{66, 67, 68, 69}$$

Tegu $\varepsilon(t)=\varepsilon=\mathrm{const}, \sigma(t)=\sigma=\mathrm{const}.$ Tuomet $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}.$ Perrašom (66):

$$\mathrm{rot}\underline{\vec{H}}=\mathrm{i}\omega\varepsilon\underline{\vec{E}}+\sigma\underline{\vec{E}}, \text{kadangi } \vec{j}=\sigma\vec{E}. \text{ Taip pat:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{\vec{j}}(x,y,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma\underline{\vec{E}}(x,y,z,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

Ir

$$\mathrm{rot}\underline{\vec{H}}=\mathrm{i}\omega\varepsilon\underline{\vec{E}}+\mathrm{i}\omega\sigma\underline{\vec{E}}\frac{1}{\mathrm{i}\omega}=\mathrm{i}\omega\left(\varepsilon+\frac{\sigma}{\mathrm{i}\omega}\right)\underline{\vec{E}}=\mathrm{i}\omega\left(\varepsilon-\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\right)\underline{\vec{E}}=\mathrm{i}\omega\underline{\varepsilon}\underline{\vec{E}}. \tag{70}$$

Iš pastarosios lygties galime užrašyti, kad $\underline{\varepsilon}=\varepsilon'-\mathrm{i}\varepsilon''.$ Tačiau šis užrašymas nėra teisingas, nes, jei $\omega\to 0$, kompleksinė varža artės į begalybę. Teisingas užrašymas būtų toks:

$$\underline{\varepsilon}=\varepsilon+\pi\sigma\delta(\omega)-\mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}, \tag{71}$$

čia $\delta(\omega)$ – *Dirako* funkcija.

Priežastingumas ir kompleksinė skvarba

Remkimės trimis prielaidomis:

- pasekmė visada seka po priežasties,
- visos praeityje sukeltos pasekmės susideda (su atitinkamais įtakos koeficientais) ir nulemia duotu metu vykstantį procesą (*superpozicijos principas*). Poveikio įtaka be galo į praeitį nutolusiu momentu – nykstami maža,
- sąveika – invariantas laiko postūmio požiūriu.

Tuomet elektrinio lauko indukcija:

$$D(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}\varepsilon(t-t_0)E(t_0)\mathrm{d}t_0, \text{ čia} \tag{72}$$

$$t\ge t_0, \text{ ir } \varepsilon(t)=\begin{cases}0, t<0,\\ \ne 0, t>0.\end{cases}$$

Pažymėkime $t-t_0=\tau.$ Tuomet $t_0=t-\tau; \mathrm{d}t_0=-\mathrm{d}\tau.$ Ir:

$$D(t)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\varepsilon(\tau)E(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\varepsilon(\tau)E(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{73}$$

Tegu egzistuoja *Furjė* vaizdai:

$$E(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega; E(t-\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega.$$

$$D(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}D(\omega)e^{i\omega t}d\omega=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\varepsilon(\tau)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)e^{i\omega t}e^{-i\omega\tau}d\omega d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)e^{i\omega t}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\varepsilon(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau}_{\underline{\varepsilon}(\omega)}d\omega.$$

$$\underline{D}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underline{\varepsilon}(\omega)E(\omega)e^{i\omega t}d\omega. \tag{74}$$

Taigi jei priežastingumo principas galioja, ε tampa kompleksiniu dydžiu. Dėl priežastingumo principo atliekamas darbas ir prarandama energija.

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon}(\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\varepsilon(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau-\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\varepsilon(\tau)\sin(\omega\tau)d\tau=\varepsilon'-i\varepsilon''.\end{aligned} \tag{75}$$

Tebus $\underline{\omega}=\omega-i\gamma$. Suraskime $\lim\limits_{\gamma\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\varepsilon(\tau)e^{-i\underline{\omega}\tau}\,d\tau=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\varepsilon(\tau)e^{-i\omega\tau}\,e^{-\gamma\tau}\,d\tau$. Pažymėkime:

$$\underline{\varepsilon}=u+i\,v=\int_{0}^{\infty}\varepsilon(\tau)e^{-\gamma\tau}\cos\omega\tau\,d\tau-i\int_{0}^{\infty}\varepsilon(\tau)e^{-\gamma\tau}\sin\omega\tau\,d\tau, \tag{76}$$

čia $u=f(\omega,\gamma)$, $v=f(\omega,\gamma)$, o daugiklis $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ praleistas. Suskaičiuokime u, v išvestines pagal ω, γ:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial\omega}=-\int_{0}^{\infty}\tau\,e^{-\gamma\tau}\,\varepsilon(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau,\ \frac{\partial v}{\partial\omega}=\int_{0}^{\infty}\tau\,e^{-\gamma\tau}\,\varepsilon(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau,\\&\frac{\partial u}{\partial\gamma}=-\int_{0}^{\infty}\tau\,e^{-\gamma\tau}\,\varepsilon(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau,\ \frac{\partial v}{\partial\gamma}=-\int_{0}^{\infty}\tau\,e^{-\gamma\tau}\,\varepsilon(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau.\end{aligned} \tag{77}$$

Matyti, kad $\underline{\varepsilon}$ – analizinė funkcija, nes patenkinamos *Koši – Rymano* sąlygos

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial\omega}=\frac{\partial v}{\partial\gamma},\\&\frac{\partial u}{\partial\gamma}=-\frac{\partial v}{\partial\omega}.\end{aligned} \tag{78}$$

Dabar

$$\underline{D}(\omega)e^{i\omega t}=\underline{\varepsilon}\underline{E}(\omega)e^{i\omega t}, \tag{79}$$

čia buvo padauginta iš eksponentės, kad atsirastų priklausomybė nuo laiko. Kadangi

$$\underline{\varepsilon}=\varepsilon'-i\,\varepsilon''=\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}\,e^{-i\varphi},\ \text{kur}\ \varphi=\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}, \tag{80}$$

(79) galime taip perrašyti:

$$\underline{D}(\omega)e^{i\omega t}=\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2}\,\underline{E}(\omega)e^{i\omega\left(t-\frac{\varphi}{\omega}\right)}\overset{\frac{\varphi}{\omega}=\Delta t}{=}|\underline{\varepsilon}|\,\underline{E}(\omega)e^{i\omega(t-\Delta t)}. \tag{81}$$

(81) lygtyje matyti, kad, kai $t=t_0$, $D\le E$ – pasireiškia vėlavimas.

Iš principo, žinodami vieną $\underline{\varepsilon}$ dalį (*u* arba *v*), galime rasti kitą (konstantos tikslumu), nes *Koši – Rymano* sąlygos jas susieja. Pasinaudokime *Koši* integraline formule:

$$\underline{\varepsilon}(\underline{\omega}) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{\underline{\varepsilon}(\underline{\omega})\,\mathrm{d}\,\underline{\omega}_0}{\underline{\omega}_0 - \underline{\omega}}. \tag{82}$$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{\underline{\varepsilon}(\underline{\omega})\,\mathrm{d}\,\underline{\omega}_0}{\underline{\omega}_0 - \underline{\omega}} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\underline{\varepsilon}(\underline{\omega})\,\mathrm{d}\,\underline{\omega}_0}{\underline{\omega}_0 - \omega} = \underline{\varepsilon}(\omega). \tag{83}$$

Gali būti, kad $\underline{\omega}_0, \underline{\omega}$ gulės ant kontūro. Tuomet (82) integralas egzistuos tik *pagrindine Koši prasme*.

Pointingo teorema elektromagnetinio lauko vidurkiams (harmoniškai kintančiam laukui)

Tegu

$$\begin{aligned} A(t) &= A_\mathrm{c} \cos \omega t - A_\mathrm{s} \sin \omega t, \\ B(t) &= B_\mathrm{c} \cos \omega t - B_\mathrm{s} \sin \omega t. \end{aligned} \tag{91}$$

Galime užrašyti ir kitaip: $A(t) = \operatorname{Re} \underline{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, kur $\underline{A} = A_\mathrm{c} + \mathrm{i}\,A_\mathrm{s}$, nes

$$\begin{aligned} \underline{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} &= (A_\mathrm{c} + \mathrm{i}\,A_\mathrm{s})(\cos \omega t + \mathrm{i} \sin \omega t) = \\ &= A_\mathrm{c} \cos \omega t + A_\mathrm{s} \sin \omega t + \mathrm{i}(A_\mathrm{c} \sin \omega t + A_\mathrm{s} \cos \omega t), \end{aligned}$$

arba dar kitaip: $A(t) = \frac{1}{2}\left(\underline{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \underline{A}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)$. Tas pats taikoma ir $B(t)$. Suskaičiuokime $A(t)B(t)$:

$$\begin{aligned} A(t)B(t) &= A_\mathrm{c} B_\mathrm{c} \cos^2 \omega t + A_\mathrm{s} B_\mathrm{c} \sin \omega t \cos \omega t + \ldots = \\ &= \frac{1}{4}\left(\underline{A}\underline{B}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t} + \underline{A}^*\underline{B}^*\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t} + \left(\underline{A}\underline{B}^* + \underline{A}^*\underline{B}\right)\right). \end{aligned} \tag{92}$$

Suskaičiuokime sandaugos $A(t)B(t)$ integralą per periodą. Kadangi $\frac{1}{T}\int_0^T A(t)\,\mathrm{d}\,t = 0$, $\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2 \omega t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\omega t}{2}\right)\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}$ ir $\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 \omega t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}$, gauname:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_0^T A(t)B(t)\,\mathrm{d}\,t &= \frac{1}{2}A_\mathrm{c}B_\mathrm{c} + \frac{1}{2}A_\mathrm{s}B_\mathrm{s} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{4}\left(\underline{A}\underline{B}^* + \underline{A}^*\underline{B}\right)\mathrm{d}\,t = \\ &= \frac{1}{4}\left(\underline{A}\underline{B}^* + \underline{A}^*\underline{B}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\underline{A}\underline{B}^*\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\underline{A}^*\underline{B}\right). \end{aligned} \tag{93}$$

Tegu visi dydžiai $\left(\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{j}\right)$ kinta harmoniškai:

$$\begin{aligned} \vec{E}(t) &= \frac{1}{2}\left(\underline{\vec{E}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \underline{\vec{E}}^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right), \\ \vec{H}(t) &= \frac{1}{2}\left(\underline{\vec{H}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \underline{\vec{H}}^*\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right), \\ &\ldots \end{aligned} \tag{94}$$

Pritaikę (91) – (94) sąryšius, gausime:

$$\left[\vec{E},\vec{H}\right]=\frac{1}{4}\left\{\left[\underline{\vec{E}},\underline{\vec{H}}\right]\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}+\left[\underline{\vec{E}}^*,\underline{\vec{H}}^*\right]\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}+\left[\underline{\vec{E}},\underline{\vec{H}}^*\right]+\left[\underline{\vec{E}}^*,\underline{\vec{H}}\right]\right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E},\vec{D}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4}\left\{\left(\underline{\vec{E}},\underline{\vec{D}}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}+\left(\underline{\vec{E}}^*,\underline{\vec{D}}^*\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}+\underbrace{\left(\underline{\vec{E}}^*,\underline{\vec{D}}\right)+\left(\underline{\vec{E}},\underline{\vec{D}}^*\right)}_{\frac{\partial}{\partial t}=0}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{i}\,\omega\left\{\left(\underline{\vec{E}},\underline{\vec{D}}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}+\left(\underline{\vec{E}}^*,\underline{\vec{D}}^*\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}\right\}. \qquad (95)$$

Pritaikom šiuos sąryšius *Pointingo* teoremai (48): $-\mathrm{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right]=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\vec{H},\vec{B}\right)+\left(\vec{E},\vec{D}\right)\right\}-\left(\vec{j},\vec{E}\right)$:

$$\frac{1}{4}\mathrm{div}\left\{\left[\underline{\vec{E}},\underline{\vec{H}}\right]\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}+\left[\underline{\vec{E}}^*,\underline{\vec{H}}^*\right]\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}+\left[\underline{\vec{E}},\underline{\vec{H}}^*\right]+\left[\underline{\vec{E}}^*,\underline{\vec{H}}\right]\right\}=$$
$$=\frac{1}{4}\mathrm{i}\,\omega\left\{-\left(\underline{\vec{E}},\underline{\vec{D}}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}-\left(\underline{\vec{E}}^*,\underline{\vec{D}}^*\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}-\left(\underline{\vec{H}},\underline{\vec{B}}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}-\left(\underline{\vec{H}}^*,\underline{\vec{B}}^*\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}\right\}- \qquad (96)$$
$$-\frac{1}{4}\left\{\left(\underline{\vec{j}},\underline{\vec{E}}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}-\left(\underline{\vec{j}}^*,\underline{\vec{E}}^*\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t}-\left(\underline{\vec{j}}^*,\underline{\vec{E}}\right)-\left(\underline{\vec{j}},\underline{\vec{E}}^*\right)\right\}.$$

Dėl techninių sunkumų visada matuojamas tik intensyvumas – $\vec{\Pi}$ vidurkis. Suvidurkinus per periodą, visi nariai, padauginti iš eksponentės, bus lygūs nuliui. Taigi *Pointingo vektoriaus vidurkis priklauso tik nuo galios tankio srauto*.

Išveskime svarbią formulę.

Atskirai surašykime kintamuosius, priklausančius nuo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ ir $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$:

$$\begin{cases}\mathrm{rot}\,\underline{\vec{E}}=-\mathrm{i}\,\omega\underline{\vec{B}},\\ \mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}}=\mathrm{i}\,\omega\underline{\vec{D}}-\underline{\vec{j}};\end{cases}\Bigg|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \qquad \begin{cases}\mathrm{rot}\,\underline{\vec{E}}^*=-\mathrm{i}\,\omega\underline{\vec{B}}^*,\\ \mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}}^*=\mathrm{i}\,\omega\underline{\vec{D}}^*-\underline{\vec{j}}^*.\end{cases}\Bigg|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \qquad (97)$$

Kadangi $\mathrm{div}\left[\vec{\mathrm{a}},\vec{\mathrm{b}}\right]=\left(\vec{b},\mathrm{rot}\,\vec{a}\right)-\left(\vec{a},\mathrm{rot}\,\vec{b}\right)$,

$$\mathrm{div}\left[\underline{\vec{\mathrm{E}}},\underline{\vec{\mathrm{H}}}^*\right]=\left(\underline{\vec{H}}^*,\mathrm{rot}\,\underline{\vec{E}}\right)-\left(\underline{\vec{E}},\mathrm{rot}\,\underline{\vec{H}}^*\right)=$$
$$=-\mathrm{i}\,\omega\left(\underline{\vec{H}}^*,\underline{\vec{B}}\right)+\mathrm{i}\,\omega\left(\underline{\vec{E}},\underline{\vec{D}}\right)-\left(\underline{\vec{E}},\underline{\vec{j}}^*\right). \qquad (98)$$

($\mathrm{Re}\,\mathrm{div}\left[\underline{\vec{\mathrm{E}}},\underline{\vec{\mathrm{H}}}^*\right]$ – $\vec{\Pi}$ vidutinė vertė)

(98) sąryšis – *Pointingo teorema elektromagnetinio lauko vidurkiams (arba harmoniškai kintančiam elektromagnetiniam laukui)(su tikslumu iki ½)*.

Įvedamas kompleksinis *Pointingo* vektorius $\underline{\vec{\Pi}}=\frac{1}{2}\left[\underline{\vec{E}},\underline{\vec{H}}^*\right]$. Jo srautas per paviršių:

$$\oint_S\left(\underline{\vec{\Pi}},\mathrm{d}\vec{S}\right)=-\frac{\mathrm{i}\,\omega}{2}\int_V\left(\underline{\vec{E}},\underline{\vec{D}}^*\right)\mathrm{d}V-\frac{\mathrm{i}\,\omega}{2}\int_V\left(\underline{\vec{H}}^*,\underline{\vec{B}}\right)\mathrm{d}V-\frac{1}{2}\int_V\left(\underline{\vec{j}}^*,\underline{\vec{E}}\right)\mathrm{d}V. \qquad (99)$$

Dažnai išmatuoti galime tik integraliniame pavidale. Įveskime kompleksines dielektrines ir magnetines skvarbas $\underline{\varepsilon}=\varepsilon'-\mathrm{i}\,\varepsilon''$, $\underline{\mu}=\mu'-\mathrm{i}\,\mu''$. Perrašom (99):

$$\oint_S \left(\vec{\Pi}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = \frac{\omega}{2}\left(-\varepsilon'' + \mathrm{i}\,\varepsilon'\right)\int_V \underbrace{\left(\underline{\vec{E}}, \underline{\vec{E}}^*\right)}_{\text{realus teigiamas}} \mathrm{d}V - \frac{\omega}{2}\left(\mu'' + \mathrm{i}\,\mu'\right)\int_V \underbrace{\left(\underline{\vec{H}}, \underline{\vec{H}}^*\right)}_{\text{realus teigiamas}} \mathrm{d}V - \frac{1}{2}\int_V \left(\underline{\vec{j}}^*, \underline{\vec{E}}\right)\mathrm{d}V. \tag{100}$$

Atskirkime realią ir menamą dalis:

$$\mathrm{Re}\oint_S \left(\vec{\Pi}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = -\frac{\omega\varepsilon''}{2}\int_V \left(\underline{\vec{E}}, \underline{\vec{E}}^*\right)\mathrm{d}V - \frac{\omega\mu''}{2}\int_V \left(\underline{\vec{H}}, \underline{\vec{H}}^*\right)\mathrm{d}V - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_V \left(\underline{\vec{j}}^*, \underline{\vec{E}}\right). \tag{101}$$

$$\mathrm{Im}\oint_S \left(\vec{\Pi}, \mathrm{d}\vec{S}\right) = \frac{\omega\varepsilon'}{2}\int_V \left(\underline{\vec{E}}, \underline{\vec{E}}^*\right)\mathrm{d}V - \frac{\omega\mu'}{2}\int_V \left(\underline{\vec{H}}, \underline{\vec{H}}^*\right)\mathrm{d}V - \frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_V \left(\underline{\vec{j}}^*, \underline{\vec{E}}\right). \tag{102}$$

(101) formulė – *Pointingo* vektoriaus srauto vidurkis per tūrio paviršių. Jei $\left|\vec{j}\right| > 0,$ gauname, kad srautas neigiamas, t.y. *Pointingo* vektorius nukreiptas į medžiagą – vyksta absorbcija. Net jei $\left|\vec{j}\right| = 0,$ srautas vis tiek neigiamas, ir absorbcija taip pat pasireiškia (dėl vėlavimo). Kadangi $\underline{\varepsilon} = \varepsilon' - \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}$, o $\underline{\vec{j}}^* = \sigma\underline{\vec{E}}^*$, matome, kad srovės tankis σ įskaitomas du kartus.

Tarkime, turime idealaus laidininko dėžę; jos viduje – vakuumas. Srovių jokių nėra, srautas išeiti taip pat negali (arti paviršiaus $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{S},$ taigi $\vec{\Pi} \perp \mathrm{d}S, \left(\vec{\Pi}, \mathrm{d}S\right) = 0$), tuomet iš (102) seka:

$$\frac{\omega\varepsilon'}{2}\int_V \left(\underline{\vec{E}}, \underline{\vec{E}}^*\right)\mathrm{d}V = \frac{\omega\mu'}{2}\int_V \left(\underline{\vec{H}}, \underline{\vec{H}}^*\right)\mathrm{d}V. \tag{103}$$

Taigi *tame tūryje elektrinio lauko amplitudės kvadrato vidurkis yra lygus magnetinio lauko amplitudės kvadrato vidurkiui*.

Prisiminę, kad rezonansiniame kontūre rezonanso metu elektrinio lauko energija lygi magnetinio lauko energijai, matome, kad tokia laidininko dėžė gali veikti kaip rezonatorius.

Harmoniniai virpesiai, neapibrėžtumo principas

Prisiminime *Furjė* vaizdus:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega;\; F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t. \tag{104}$$

Jei $f(t)$ – baigtinė f-ja, t.y., jei $f(t) = \begin{cases} 0, t < a, \\ \neq 0, b < t < a, \\ 0, t > b. \end{cases}$, tuomet $F(\omega)$ – begalinė.

Kodėl begalinę funkciją galime naudoti vietoj baigtinės? Iš neapibrėžtumo sąryšio $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ gauname:

$$\nu\Delta t \geq 1, \tag{105}$$

nes $\Delta E = \hbar\nu, \hbar\nu\Delta t \geq \hbar.$

Suskaičiuokime fizikoje dažnai naudojamą integralą $I = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}x,$ dar vadinamą *Gauso* funkcija. Kadangi eksponentė visada teigiama, tai $I > 0$.

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}\,x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi y^2}\,\mathrm{d}\,y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

Polinėje koordinačių sistemoje $\mathrm{d}\,S = \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\alpha,$ ir:

$$I^2 = \int_0^{\infty} \rho\,\mathrm{e}^{-\pi\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\,\alpha = 2\pi \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi\rho^2}\,\mathrm{d}\,\pi\rho^2 = 1.$$

Taigi $I = 1$. Tegu $f\left(t\right) = A\,\mathrm{e}^{-\pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2}$. Šios funkcijos *Furjė* vaizdas bus toks:

$$F\left(\omega\right) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\,t. \tag{106}$$

Kadangi $\omega = 2\pi\nu$ ir

$$\pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2 + \mathrm{i}\,2\pi\nu t = \pi\left[\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2 + \mathrm{i}\,2\nu\Delta t\frac{t}{\Delta t} - \nu^2\Delta t^2 + \nu^2\Delta t^2\right] =$$

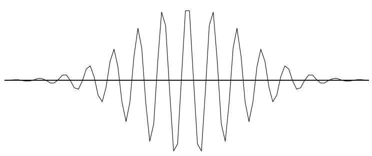
$$= \pi\left(\frac{t}{\Delta t} + \mathrm{i}\,\nu\Delta t\right)^2 - \frac{4\pi^2\nu^2\Delta t^2}{4\pi} = \pi\left(\frac{t}{\Delta t} + \mathrm{i}\,\nu\Delta t\right)^2 + \frac{\omega^2\Delta t^2}{4\pi},$$

$$F\left(\omega\right) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi\overbrace{\left(\frac{t}{\Delta t}+\mathrm{i}\nu\Delta t\right)^2}^{x^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2\Delta t^2}{4\pi}}\,\mathrm{d}\,t \overset{\mathrm{d}t = \Delta t\,\mathrm{d}x}{=} \frac{A\Delta t}{\sqrt{2\pi}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2\Delta t^2}{4\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{A\Delta t}{\sqrt{2\pi}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2\Delta t^2}{4\pi}}.$$

Taigi matome, kad $\dfrac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}}$ yra funkcijos $f(t)$ tikrinė vertė *Furjė* operatoriui.

Tegu turim periodinį (bet baigtinį) signalą (6 pav.):

$$f\left(t\right) = A\,\mathrm{e}^{-\pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2}\cos\omega_0 t = \frac{A}{2}\,\mathrm{e}^{-\pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\right).$$



6 pav.

Kai $\Delta t\Delta\omega_0 \gg 1$, gauname neslopstantį harmoninį signalą. Jo *Furjė* vaizdas:

$$F\left(\omega\right) = \frac{A}{2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega_0 t-\omega\right)}\,\mathrm{d}\,t + \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right)^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\omega_0 t-\omega\right)}\,\mathrm{d}\,t\right] =$$

$$= \frac{A\Delta t}{2\sqrt{2\pi}}\left(\underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{\left(\omega_0-\omega\right)^2\Delta t^2}{4\pi}}}_{\cong 1,\text{kai } \omega\approx\omega_0} + \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{\left(\omega_0+\omega\right)^2\Delta t^2}{4\pi}}}_{\cong 0,\text{kai } \omega\approx\omega_0}\right).$$

Tegul $f(t)$, $F(\omega)$ yra tokios, kad $\left|f\left(t\right)\right| \xrightarrow{t\to\infty} 0, \left|F\left(\omega\right)\right| \xrightarrow{t\to\infty} 0.$ Pasinaudokime *Parsevalio* lygybe (58),

bei vidurkio teorema $\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}\,x = \left(b-a\right)f\left(\xi\right), \xi\in\left(a,b\right)$:

$$\Delta t\left|f\left(t_0\right)\right|^2 = \Delta\omega\left|F\left(\omega_0\right)\right|^2 = W,$$

$$\Delta t\Delta\omega\left|f\left(t_0\right)\right|^2\left|F\left(\omega_0\right)\right|^2 = W^2 \neq 0,$$

$$\Delta t \Delta \omega = \frac{W^2}{\left|f\left(t_0\right)\right|^2 \left|F\left(\omega_0\right)\right|^2} \neq 0,$$

$$\Delta t \Delta \omega \geq \frac{W^2}{\left|f_{\max}\right|^2 \left|F_{\max}\right|^2} \neq 0,$$

$$\Delta t \Delta \omega \geq const. \tag{109}$$

Fizikoje $\Delta t \Delta \omega \geq h.$

Yra transformacijų, panašių į *Furjė*, tačiau realių ir kurių tiesioginiai ir atvirkštiniai vaizdai nesiskiria, pvz., *Hartlio*:

$$\begin{aligned} H\left(\omega\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t\right)\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) \mathrm{d}\, t, \\ f\left(t\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} H\left(\omega\right)\left(\cos\omega t + \sin\omega t\right) \mathrm{d}\, \omega. \end{aligned} \tag{110}$$

Elektromagnetinio lauko vektorių lygtys

Tegu *Maksvelo* lygtys yra tenkinamos ir $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}.$ Iš (4) lygties gauname, kad $\mathrm{div}\vec{B} = \mu\mathrm{div}\vec{H} = 0,$ taigi $\mathrm{div}\vec{H} = 0.$ Be to, tarkime, kad laukas yra diferencijuojamas. Tuomet iš (1):

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\vec{E} + \mathrm{rot}\,\vec{j} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} + \mathrm{rot}\,\vec{j};\ \text{iš čia}$$

$$-\Delta\vec{H} + \underbrace{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{H}}_{=0} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} - \mathrm{rot}\,\vec{j} = 0,$$

$$\Delta\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} = -\mathrm{rot}\,\vec{j}. \tag{111}$$

Pažymėkime $\vec{j} = \sigma\vec{E} + j_{\mathrm{p}},$ čia j_{p} – pašalinės srovės. Tuomet:

$$\Delta\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} - \sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = -\mathrm{rot}\,\vec{j}_{\mathrm{p}}. \tag{112}$$

Jei magnetinis laukas tenkina *Maksvelo* lygtis, tai jų sprendiniai yra ir (112) lygties sprendiniai. Tegu $\sigma = 0, \vec{j}_{\mathrm{p}} = 0$:

$$\Delta\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} = 0.\ \textbf{AHA}!!! \tag{113}$$

(113) galime perrašyti ir taip:

$$\vec{\mathrm{x}}_0\left(\Delta H_{\mathrm{x}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}H_{\mathrm{x}}\right) + \vec{\mathrm{y}}_0\left(\Delta H_{\mathrm{y}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}H_{\mathrm{y}}\right) + \vec{\mathrm{z}}_0\left(\Delta H_{\mathrm{z}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}H_{\mathrm{z}}\right) = 0. \tag{114}$$

Taip bus tik tada, kai kiekviena komponentė bus lygi nuliui, ir:

$$\Delta H_{\mathrm{x}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}H_{\mathrm{x}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}H_{\mathrm{x}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}H_{\mathrm{x}} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}H_{\mathrm{x}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}H_{\mathrm{x}} = 0. \tag{115}$$

Gavome bangos lygtį, kurios greitis $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Pritaikykime panašius veiksmus ir elektriniam laukui:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \vec{j}\right); \tag{116}$$

$$-\Delta\vec{E} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}.\ \text{Pasinaudojam (3):}$$

$$-\Delta\vec{E} + \operatorname{grad}\frac{\rho}{\varepsilon} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{j},$$

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\rho + \mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{j};\ \text{vėlgi}\ \vec{j} = \sigma\vec{E} + \vec{j}_{\mathrm{p}},\ \text{ir}$$

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} - \sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}\rho + \mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}_{\mathrm{p}}. \tag{117}$$

Jei laidumo nėra, $j = 0$, $\rho = 0$, ir vėl gauname bangos lygtį:

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0. \tag{118}$$

Jei tarsim, kad

$$\begin{aligned} H(t) &= \dot{\vec{H}}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \\ E(t) &= \dot{\vec{E}}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \end{aligned} \tag{119}$$

Gausime

$$\Delta\dot{\vec{H}}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \varepsilon\mu\left(-\omega^2\right) - \mathrm{i}\,\sigma\mu\omega\dot{\vec{H}}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \operatorname{rot}\dot{\vec{j}}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t};$$

$$\Delta\dot{\vec{H}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \varepsilon\mu\omega^2\dot{\vec{H}} - \mathrm{i}\,\sigma\mu\omega\dot{\vec{H}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \operatorname{rot}\dot{\vec{j}}_{\mathrm{p}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t};$$

$$\Delta\dot{\vec{H}} + \omega^2\mu\left(\varepsilon - \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\right) = \operatorname{rot}\dot{\vec{j}}_{\mathrm{p}}; \tag{120}$$

Jei $\sigma = 0$, gauname *Helmholco* lygtį, arba *lauko lygtį harmoniniams svyravimams*:

$$\Delta\dot{\vec{H}} + \omega^2\mu\varepsilon\dot{\vec{H}} = -\operatorname{rot}\dot{\vec{j}}_{\mathrm{p}}. \tag{121}$$

Dažnai $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\dot{\vec{H}} \approx 0$, tuomet

$$\Delta\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = 0. \tag{122}$$

Gavome *difuzijos* lygtį. Difuzijos būdu, staigiai mažinant tūrį, galima gauti labai stiprius magnetinius laukus.

Elektrodinamikos uždavinių sprendinių vienareikšmiškumas

Tegul turime du *Maksvelo* lygčių sprendinius $\vec{E}_1, \vec{H}_1; \vec{E}_2, \vec{H}_2$. Tuomet $\Delta\vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2, \Delta\vec{H} = \vec{H}_1 - \vec{H}_2$ taip pat bus *Maksvelo* lygčių sprendiniai. Tuomet Pointingo teorema atrodys taip:

$$\oint\limits_S \left(\left[\Delta\vec{E}, \Delta\vec{H} \right], \mathrm{d}\,\vec{S} \right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon \int\limits_V \left(\Delta\vec{E}, \Delta\vec{E} \right) \mathrm{d}\,V + \mu \int\limits_V \left(\Delta\vec{H}, \Delta\vec{H} \right) \mathrm{d}\,V \right] + \sigma \int\limits_V \left(\Delta\vec{E}, \Delta\vec{E} \right) \mathrm{d}\,V = 0. \tag{123}$$

Galimi du atvejai:

1. Uždara sistema. Tuomet $\mathrm{d}\,\vec{S} \perp \vec{H} \perp \vec{E},\ \left(\left[\Delta\vec{E}, \Delta\vec{H} \right], \mathrm{d}\,\vec{S} \right) = 0,$ ir

   $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon \int\limits_V \left(\Delta\vec{E}, \Delta\vec{E} \right) \mathrm{d}\,V + \mu \int\limits_V \left(\Delta\vec{H}, \Delta\vec{H} \right) \mathrm{d}\,V \right] = \underbrace{-\sigma \int\limits_V \left(\Delta\vec{E}, \Delta\vec{E} \right) \mathrm{d}\,V}_{<0}.$ Kadangi išvestinė neigiama, kairėje lygybės pusėje dydis turi mažėti. Tačiau, kai t = 0, $\Delta\vec{E} = \Delta\vec{H} = 0,$ taigi sprendiniai vienareikšmiai.

2. Atvira sistema. Sprendiniai bus vienareikšmiai, kai $\lim\limits_{S\to\infty} \oint\limits_S \left(\left[\Delta\vec{E}, \Delta\vec{H} \right], \mathrm{d}\,\vec{S} \right) = 0.$ Kadangi $S \propto r^2$, tai $\left[\Delta\vec{E}, \Delta\vec{H} \right]$ turi artėti į nulį greičiau, nei r^{-2}, ir abu dydžiai turi artėti į nulį greičiau nei r^{-1}. Išspinduliavimo sąlyga: $\lim\limits_{r\to\infty} \left| r\vec{E} \right| = 0, \lim\limits_{r\to\infty} \left| r\vec{H} \right| = 0.$

Plokščiosios elektromagnetinės bangos

Plokščioji banga – tai banga, kurios fazė plokštumoje nekinta, o amplitudė nepriklauso nuo koordinačių. Ją galima aprašyti lygtimi:

$$\varphi = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k},\vec{r}\right)\right)}, \tag{124}$$

čia $\vec{r} = \mathrm{x}_0 x + \mathrm{y}_0 y + \mathrm{z}_0 z,\ \vec{k} = \mathrm{x}_0 k_\mathrm{x} + \mathrm{y}_0 k_\mathrm{y} + \mathrm{z}_0 k_\mathrm{z},$ ir $\left(\vec{k},\vec{r}\right) = xk_\mathrm{x} + yk_\mathrm{y} + zk_\mathrm{z}.$ Įstatykime (124) į bangos lygtį:

$$\Delta\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = 0. \tag{125}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-xk_\mathrm{x}}\,\mathrm{e}^{-yk_\mathrm{y}}\,\mathrm{e}^{-zk_\mathrm{z}} = -k_\mathrm{x}^2 A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k},\vec{r}\right)\right)}. \tag{126}$$

$$\Delta\varphi = -\left(k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 + k_\mathrm{z}^2\right) A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k},\vec{r}\right)\right)}, \tag{128}$$

$$\left[-\left(k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 + k_\mathrm{z}^2\right) + \omega^2\varepsilon\mu \right]\varphi = 0, \tag{129}$$

$$\omega^2\varepsilon\mu = \left(k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 + k_\mathrm{z}^2\right) = k^2, \tag{130}$$

$$\omega^2\varepsilon\mu = k^2\left(\frac{k_\mathrm{x}^2}{k^2} + \frac{k_\mathrm{y}^2}{k^2} + \frac{k_\mathrm{z}^2}{k^2}\right). \tag{131}$$

Pažymėkime $\frac{k_\mathrm{x}}{k} = \cos\alpha, \frac{k_\mathrm{y}}{k} = \cos\beta, \frac{k_\mathrm{z}}{k} = \cos\gamma.$ Tuomet $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$ ir

$\vec{k} = k\left(\mathrm{\vec{x}}_0 \cos\alpha + \mathrm{\vec{y}}_0 \cos\beta + \mathrm{\vec{z}}_0 \cos\gamma\right) = k\vec{n};$

Ieškokime *Maksvelo* lygčių tokio pavidalo sprendinio: $\vec{E}_0 = \vec{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k},\vec{r}\right)\right)}$. Tuomet:

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\vec{H}_0 = \mathrm{i}\,\omega\varepsilon\vec{E}_0,\\ &\mathrm{rot}\,\vec{E}_0 = -\mathrm{i}\,\omega\mu\vec{H}_0,\\ &\mathrm{div}\vec{H}_0 = 0,\\ &\mathrm{div}\vec{E}_0 = 0. \end{aligned} \tag{132}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k},\vec{r}\right)\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)} = \mathrm{i}\,\omega\varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\vec{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)};\Big|:\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\vec{H}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)} = \mathrm{i}\,\omega\varepsilon\vec{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)},\\ &\mathrm{rot}\,\vec{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)} = -\mathrm{i}\,\omega\mu\vec{H}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)}. \end{aligned} \tag{133}$$

$\vec{E}$ – pastovus vektorius, taigi galime pritaikyti tapatybę $\mathrm{rot}\,f\vec{a} = f\,\mathrm{rot}\,\vec{a} - \left[\vec{a}, \mathrm{grad}\,f\right]$:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)}\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{E}}_{=0} - \left[\vec{E}, \mathrm{grad}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)}\right] = -\left[\vec{E}, \mathrm{grad}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)}\right].$$

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)} = \left(\mathrm{\vec{x}}_0\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{\vec{y}}_0\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{\vec{z}}_0\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk_\mathrm{x}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yk_\mathrm{y}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}zk_\mathrm{z}} = -\mathrm{i}\left(\mathrm{\vec{x}}_0k_\mathrm{x} + \mathrm{\vec{y}}_0k_\mathrm{y} + \mathrm{\vec{z}}_0k_\mathrm{z}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)} = -\mathrm{i}\,\vec{k}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)}.$$

Taigi $-\mathrm{i}\,\vec{k}$ – tikrinė vertė gradiento operatoriui, čia $\vec{k}$ – kovektorius.

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)} = -\left[\vec{E}, \mathrm{i}\,\vec{k}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)} = -\mathrm{i}\left[\vec{k}, \vec{E}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)}. \tag{134}$$

Pritaikę (133) lygtį:

$$-\mathrm{i}\left[\vec{k}, \vec{E}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)} = -\mathrm{i}\,\omega\mu\vec{H}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)},\Big|:-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)} \tag{135}$$

$$\left[\vec{k}, \vec{E}\right] = \omega\mu\vec{H}.\ \text{Taigi}\ \vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}\left[\vec{k}, \vec{E}\right]. \tag{136}$$

$$\vec{k} = \vec{n}k = \vec{n}\omega\sqrt{\varepsilon\mu},\ \vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left[\vec{n}, \vec{E}\right] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\vec{n}, \vec{E}\right]. \tag{137}$$

Vadinasi, jei pasirinkom $\vec{E}_0 = \vec{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k},\vec{r}\right)\right)}$, $\vec{H}_0$ jau negalime rinktis laisvai, nes $\vec{E}_0 \perp \vec{H}_0$ (plokščiai bangai – visada).

Reikalaukime, kad būtų tenkinamas *Ampero* dėsnis:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)} = \mathrm{i}\,\omega\varepsilon\vec{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)},$$

$$\frac{1}{\omega\mu}\mathrm{rot}\left[\vec{k}, \vec{E}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)} = \mathrm{i}\,\omega\varepsilon\vec{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)}\Bigg|:\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\vec{k},\vec{r}\right)}}{\omega\mu}$$

$$-\mathrm{i}\left[\vec{k}, \left[\vec{k}, \vec{E}\right]\right] = \mathrm{i}\,\omega^2\varepsilon\mu\vec{E},$$

$$\omega^2\varepsilon\mu = k^2,$$

$$\left[\vec{k},\left[\vec{k},\vec{E}\right]\right]=\vec{k}\left(\vec{k},\vec{E}\right)-\vec{E}\left(\vec{k},\vec{k}\right)=\vec{k}\left(\vec{k},\vec{E}\right)-k^2\vec{E}, \tag{138}$$

$$-k\left(\vec{k},\vec{E}\right)+k^2\vec{E}=k^2\vec{E},$$

$$k\left(\vec{k},\vec{E}\right)=0,$$

$$\vec{k}\perp\vec{E}. \tag{139}$$

Taigi $\vec{H}\perp\vec{E},\vec{H}\perp\vec{k},\vec{E}\perp\vec{k}$. Ką duoda $\vec{k}$ kryptis? Suskaičiuokime kompleksinį *Pointingo* vektorių:

$$\begin{aligned}\underline{\vec{\Pi}}&=\frac{1}{2}\left[\underline{\vec{E}}_0,\underline{\vec{H}}_0^*\right]=\frac{1}{2}\left[\vec{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\left(\vec{k},\vec{r}\right)\right)},\vec{H}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\omega t-\left(\vec{k},\vec{r}\right)\right)}\right]=\frac{1}{2}\left[\vec{E},\vec{H}\right]=\frac{1}{2}\left[\vec{E},\frac{1}{\omega\mu}\left[\vec{k},\vec{E}\right]\right]=\\&=\frac{1}{2\omega\mu}\left[\vec{k}\left(\vec{E},\vec{E}\right)-\vec{E}\left(\vec{E},\vec{k}\right)\right]=\vec{k}\,\frac{1}{2\omega\mu}\left(\vec{E},\vec{E}\right).\end{aligned} \tag{140}$$

Kadangi $\mathrm{Re}\,\underline{\vec{\Pi}}$ – galios vidurkis, tai $\vec{k}$ *kryptimi pernešama galia.*

$$W_{\mathrm{E}}=\frac{1}{2}\varepsilon\left(\vec{E}_0,\vec{E}_0^*\right)=\frac{1}{2}\varepsilon\left(\vec{E},\vec{E}\right); \tag{141}$$

$$W_{\mathrm{M}}=\frac{1}{2}\mu\left(\vec{H}_0,\vec{H}_0^*\right)=\frac{1}{2}\mu\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\right)^2\left(\left[\vec{n},\vec{E}\right],\left[\vec{n},\vec{E}\right]\right)=\frac{1}{2}\varepsilon\left(\vec{E},\vec{E}\right); \tag{142}$$

Matome, kad $W_{\mathrm{E}}=W_{\mathrm{M}}$ (vidutiniam tankiui).

Makroskopinio kūno atveju, $\left|\vec{E}\right|\propto U,\left|\vec{H}\right|\propto I$. Tuomet galime taip užrašyti: $\frac{U}{I}=\frac{\left|\vec{E}\right|}{\left|\vec{H}\right|}=\frac{\sqrt{\left(\vec{E},\vec{E}\right)}}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}\left(\left[\vec{n},\vec{E}\right],\left[\vec{n},\vec{E}\right]\right)}}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=Z$. Šiuo atveju Z reikštų *aplinkos banginę varžą*. Orui

Z = 120 πΩ. Z parodo tik santykį $\frac{\left|\vec{E}\right|}{\left|\vec{H}\right|}$, ir jokios fizikinės prasmės neturi.

Panagrinėkime tokį *Maksvelo* lygčių sprendinį: $\vec{E}_0=\vec{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t+\left(\vec{k},\vec{r}\right)\right)},\ \vec{H}_0=\vec{H}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t+\left(\vec{k},\vec{r}\right)\right)}$. Tuomet

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}_0=-\mathrm{i}\,\omega\mu\vec{H}_0.$$

$$\Delta\varphi-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi=-\left(k_{\mathrm{x}}^2+k_{\mathrm{y}}^2+k_{\mathrm{z}}^2-\omega^2\varepsilon\mu\right)\varphi=0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk_{\mathrm{x}}}=-k_{\mathrm{x}}^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk_{\mathrm{x}}},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}xk_{\mathrm{x}}}=-k_{\mathrm{x}}^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xk_{\mathrm{x}}}.$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\left(-\vec{k},\vec{r}\right)\right)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t+\left(\vec{k},\vec{r}\right)\right)},$$

$\vec{H} = -\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\left[\vec{n},\vec{E}\right]$, $\underline{\Pi} = -\dfrac{1}{2\omega\mu}\vec{k}\left(\vec{E},\vec{E}\right)$. Matome, kad sprendiniai iš esmės nesiskiria, tik galios srautas nukreiptas į priešingą pusę. Be to, ženklas keičiasi tik prie $\vec{H}$, bet ne prie $\vec{E}$. Sprendiniai nevienareikšmiai, nes ženklą galime rinktis laisvai.

Plokščių elektromagnetinių bangų poliarizacija

Tegu elektromagnetinė banga sklinda Z ašies kryptimi, o elektrinis laukas svyruoja XZ plokštumoje:

$$\vec{E}_0 = \vec{x}_0 E\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k},\vec{z}\right)\right)}, \tag{143}$$

$$\vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[\vec{n},\vec{E}_0] = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}[\vec{z}_0,\vec{E}_0] = \vec{y}_0 E_x \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}. \tag{144}$$

Nagrinėkime realiame pavidale:

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_x \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)} = \vec{x}_0 E_x \cos\left(\omega t - kz\right);$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{y}_0 E_x \cos\left(\omega t - kz\right);$$

$$[\vec{z}_0,\vec{E}_0] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 0 & 0 & 1 \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{y}_0 E_x. \tag{145}$$

Tegu banga – tiesiškai poliarizuota. Tuomet $W_{\mathrm{E}} = \dfrac{\varepsilon}{2} E_x^2 \cos^2\left(\omega t - kz\right) = W_{\mathrm{M}}$.

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \underbrace{\vec{x}_0 \frac{1}{2} E_x \cos\left(\omega t - kz\right) + \vec{y}_0 \frac{1}{2} E_x \sin\left(\omega t - kz\right)}_{\vec{E}_1} + \\ &\underbrace{+\vec{x}_0 \frac{1}{2} E_x \cos\left(\omega t - kz\right) + \vec{y}_0 \frac{1}{2} E_x \sin\left(\omega t - kz\right)}_{\vec{E}_2} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2. \end{aligned} \tag{146}$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}E_x\vec{x}_0 \sin\left(\omega t - kz\right) + \dfrac{1}{2}E_x\vec{y}_0 \cos\left(\omega t - kz\right) + \\ +\dfrac{1}{2}E_x\vec{x}_0 \sin\left(\omega t - kz\right) + \dfrac{1}{2}E_x\vec{y}_0 \cos\left(\omega t - kz\right) \end{pmatrix} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2. \tag{147}$$

nes $H \,\square\, [\vec{z}_0,\vec{E}] = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\vec{x}_0 E_y$.

E_1, H_1 tenkina Maksvelo lygtis (E_2, H_2 – irgi).

Raskime elektrinio ir magnetinio laukų energijų (ne vidurkių) tankius.

$$W_E = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\vec{E}_1,\vec{E}_1\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\varepsilon E_x^2\left(\cos^2\left(\omega t - kz\right) + \sin^2\left(\omega t - kz\right)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\varepsilon E_x^2. \tag{148}$$

Analogiškai gausime, kad $W_H = W_E$. Matome, jog tankis nepriklauso nuo laiko (kas harmoniniam dydžiui nebūdinga).

Poitingo vektorius:

$$\vec{\Pi} = [E_1, H_1] = \vec{z}_0\left(E_x^1 H_y^1 - E_y^1 H_x^1\right) =$$
$$= \vec{z}_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_x^2}{4}\left(\cos^2\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{z}\right)\right) + \sin^2\left(\omega t - \left(\vec{k}, \vec{z}\right)\right)\right) = \vec{z}_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_x^2}{4}. \tag{149}$$

$$\vec{E}^1 = \vec{x}_0 \frac{E_x}{2} \cos\left(\omega t - kz\right) + \vec{y}_0 \frac{E_x}{2} \sin\left(\omega t - kz\right). \tag{150}$$

$$\vec{E}^1 = \vec{x}_0 E_x^1 + \vec{y}_0 E_y^1,$$
$$\vec{H}^1 = \vec{x}_0 \vec{H}_x^1 + \vec{y}_0 \vec{H}_y^1.$$

Pointingo teorema:

$$\operatorname{div}\underbrace{[\vec{E}, \vec{H}]}_{\text{const}} = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left\{\frac{\varepsilon}{2}\left(\vec{E}, \vec{E}\right) + \frac{\mu}{2}\left(\vec{H}, \vec{H}\right)\right\}}_{\text{const}}. \tag{151}$$

Matome, kad *Pointingo* teorema tenkinama, nes abi (151) lygybės pusės lygios nuliui. Be to, virpesiai vyksta plokštumoje, statmenoje plokštumai XY, t.y., $\vec{\Pi} \parallel \vec{z}_0$.

Energija XZ plokštumoje:

$$W_{\mathrm{E}}\left(x, z\right) = \varepsilon \frac{E_x^2}{4} \cos^2\left(\omega t - kz\right),$$

$$W_{\mathrm{M}}\left(x, z\right) = \varepsilon \frac{E_x^2}{4} \sin^2\left(\omega t - kz\right).$$

Energija YZ plokštumoje:

$$W_{\mathrm{E}}\left(y, z\right) = \varepsilon \frac{E_x^2}{4} \sin^2\left(\omega t - kz\right),$$

$$W_{\mathrm{H}}\left(y, z\right) = \varepsilon \frac{E_x^2}{4} \cos^2\left(\omega t - kz\right).$$

Taigi, elektromagnetinė banga sklinda tarsi virpamasis kontūras – jei viena komponentė $\sin^2$ dėsniu, tai kita – $\cos^2$.

Galima bangas užrašyti ir kitaip:

$$\vec{E}_1 = \frac{E_x}{2}\left(\vec{x}_0 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kz)}}{2} + \vec{y}_0 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kz)}}{2\mathrm{i}}\right),$$

$$\vec{H}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{E_x}{2}\left(-\vec{x}_0 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kz)}}{2\mathrm{i}} + \vec{y}_0 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kz)}}{2}\right).$$

$$\vec{E}_1 = \frac{E_x}{4}\left(\vec{x}_0 - \mathrm{i}\,\vec{y}_0\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)} + \frac{E_x}{4}\left(\vec{x}_0 + \mathrm{i}\,\vec{y}_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kz)},$$

$$\vec{H}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{E_x}{4}\left(\mathrm{i}\,\vec{x}_0 + \vec{y}_0\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{E_x}{4}\left(-\mathrm{i}\,\vec{x}_0 + \vec{y}_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - kz)},$$

$$\vec{E}_1 = \frac{E_x}{4}\left(\vec{x}_0 - \mathrm{i}\,\vec{y}_0\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)},$$

$$\vec{H}_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{E_x}{4}\left(\mathrm{i}\,\vec{x}_0 + \vec{y}_0\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}.$$

Kadangi

$$\cos\left(\omega t - kz\right) = \cos\omega t\cos kz + \sin\omega t\sin kz,$$

$$\sin\left(\omega t - kz\right) = \sin\omega t\cos kz - \cos\omega t\sin kz.$$

tai

$$\vec{E}_1 = \frac{E_x}{2}\left(\vec{x}_0\cos\omega t\cos kz + \vec{x}_0\sin\omega t\sin kz\right) + \frac{E_x}{2}\left(\vec{y}_0\sin\omega t\cos kz - \vec{y}_0\cos\omega t\sin kz\right),$$

$$\vec{E}_1 = \frac{E_x}{2}\underbrace{\left(\vec{x}_0\cos\omega t + \vec{y}_0\sin\omega t\right)}_{\vec{x}_0'}\underbrace{\cos kz}_{const} + \frac{E_x}{2}\underbrace{\left(\vec{x}_0\sin\omega t - \vec{y}_0\cos\omega t\right)}_{\vec{y}_0'}\underbrace{\sin kz}_{const}. \tag{152}$$

Operacija, apibrėžiama

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha, \\ z' = z; \end{cases} \tag{153}$$

vadinama *koordinačių sistemos pasukimu*, kuris ir buvo atliktas (152) lygtyje.

Pažiūrėkime, kaip bėgant laikui, kis elektrinis laukas. Kadangi z = const, o

$$\left|\vec{x}_0\cos\omega t + \vec{y}_0\sin\omega t\right| = \sqrt{\left(\vec{x}_0, \vec{x}_0\right)\cos^2\omega t + 2\left(\vec{x}_0, \vec{y}_0\right)\cos\omega t\sin\omega t + \left(\vec{y}_0, \vec{y}_0\right)\sin^2\omega t} = 1,$$

gauname, kad elektrinis laukas sudarytas iš dviejų apskritimu besisukančių bangų.

Panagrinėkime elektrinio lauko matematines savybes.

$$\vec{E}_1 = \vec{x}_0 E_x + \vec{y}_0 E_y = \vec{x}_0\sin\left(\omega t - kz\right) + \vec{y}_0\cos\left(\omega t - kz\right),$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}_1 = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = -\vec{x}_0\frac{\partial E_y}{\partial z} + \vec{y}_0\frac{\partial E_x}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}_1 = \left\{-\vec{x}_0\frac{\partial}{\partial z}\sin\left(\omega t - kz\right) + \vec{y}_0\frac{\partial}{\partial z}\cos\left(\omega t - kz\right)\right\} =$$
$$= \frac{E}{2}\left(k\vec{x}_0\cos\left(\omega t - kz\right) + k\vec{y}_0\sin\left(\omega t - kz\right)\right) = k\left(\frac{E}{2}\vec{x}_0\cos\left(\omega t - kz\right) + \frac{E}{2}\sin\left(\omega t - kz\right)\right) = k\vec{E}_1.$$

Taigi, $\operatorname{rot}\vec{E}_1 = k\vec{E}_1, \operatorname{rot}\vec{H}_1 = k\vec{H}_1$; apskritai poliarizuotos bangos $\vec{E}, \vec{H}$ yra rotoriaus operatoriaus tikrinės funkcijos. Tuomet iš *Maksvelo* lygčių seka:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = k\vec{H}_1, \\ \mu \dfrac{\partial \vec{H}_1}{\partial t} = -k\vec{E}_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\varepsilon}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\varepsilon}\vec{E}_1\right) = \dfrac{k}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\mu}\vec{H}_1, \\ \sqrt{\mu}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\mu}\vec{H}_1\right) = -\dfrac{k}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon}\vec{E}_1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\varepsilon}\vec{E}_1\right) = \dfrac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\mu\vec{H}_1\right), \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{\mu}\vec{H}_1\right) = -\dfrac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\varepsilon\vec{E}_1\right). \end{cases} \tag{154}$$

Pasižymėkime $\sqrt{\mu}\vec{H}_1 = \tilde{\vec{H}}$, $\sqrt{\varepsilon}\vec{E}_1 = \tilde{\vec{E}}$, ir įsiveskime banginę funkciją $\vec{\psi} = \tilde{\vec{E}} + \mathrm{i}\,\tilde{\vec{H}}$. Tuomet vietoj (154) galime taip parašyti:

$$\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t} + \mathrm{i}\frac{\partial\tilde{\vec{H}}}{\partial t} = \frac{k}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(-\mathrm{i}\,\vec{E} + \vec{H}\right),$$

iš čia

$$\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial t} = -\mathrm{i}\frac{k}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\vec{\psi}.$$

$$\frac{k}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \omega, \text{ ir}$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\psi} = \omega\vec{\psi}. \tag{155}$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\vec{\psi} = \hbar\omega\vec{\psi} \leftrightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi.$$

Maksvelo lygtis (apskritai poliarizuotos bangos) virsta *Šredingerio* lygtimi. Elgiasi kaip dviejų lygmenų sistema. Skersinės magnetinės bangos statmenos *Pointingo* vektoriui.

Sūkurinės elektromagnetinės bangos

Ieškokim tokio *Maksvelo* lygčių sprendinio:

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \left\{U(x,y)\vec{x}_0 - \vec{z}_0\frac{\mathrm{i}}{k}\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}, \text{ čia} \tag{156}$$

čia $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, be to, $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ (dvimatė *Laplaso* lygtis).

Tegu $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H}$. Turi būti

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E} = -\mathrm{i}\,\omega\mu\vec{H}, \\ \operatorname{rot}\vec{H} = \mathrm{i}\,\omega\varepsilon\vec{E}. \end{cases} \qquad (157), (158)$$

Užtenka dviejų lygčių, nes

$$\operatorname{div}\mu\vec{H} = -\frac{1}{\mathrm{i}\,\omega}\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{E} = 0,\ \operatorname{div}\varepsilon\vec{E} = 0 = \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega}\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H} = 0\,.$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & 0 & E_z \end{vmatrix} = \vec{x}_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\mathrm{i}}{k} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \vec{z}_0 \frac{\partial E_x}{\partial y} = \tag{159}$$

$$= -\mathrm{i}\,\omega\mu \left(H_x \vec{x}_0 + H_y \vec{y}_0 + H_z \vec{z}_0 \right).$$

Matome, kad (157) lygtis tenkinama. Kadangi

$$E_x = U(x, y)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)},$$

$$E_z = -\frac{1}{k} \frac{\partial U}{\partial x} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}; \text{ tai}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu} \left\{ \vec{x}_0 \underbrace{\left(-\frac{\mathrm{i}}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)}_{H_x} + \vec{y}_0 \underbrace{\left(-\mathrm{i}\, kU + \frac{\mathrm{i}}{k} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)}_{H_y} - \vec{z}_0 \underbrace{\frac{\partial U}{\partial y}}_{H_z} \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}.$$

Pažiūrėkime, ar bus tenkinama (158) lygtis:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right).$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\mathrm{i}\,\omega\varepsilon} \cdot \frac{1}{\omega\mu} \left\{ \vec{x}_0 \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U - \frac{k}{k} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + \vec{y}_0 \left(-\frac{k}{k} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) + \right.$$

$$\left. + \vec{z}_0 \left(\mathrm{i}\, k \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\mathrm{i}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{i}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}.$$

$$\vec{E} = \frac{1}{k^2} \left\{ \left(\vec{x}_0 k^2 U \right) + \vec{y}_0 \cdot 0 + \vec{z}_0 \left(-\mathrm{i}\, k \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)} = \left\{ \vec{x}_0 U(x, y) - \vec{z}_0 \frac{\mathrm{i}}{k} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \right\} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kz)}. \tag{160}$$

(159) ir (160) yra (156) lygties sprendiniai. Tačiau neaišku, į kurią pusę sklinda elektromagnetinė banga, nes magnetinio lauko vektorius turi tris komponentes, o elektrinio – tik dvi. Suskaičiuokim *Pointingo* vektorių:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2} \left[\dot{\vec{E}}, \vec{H}^* \right] = \frac{1}{2} \left\{ \vec{x}_0 \left(\dot{E}_y H_z^* - \dot{E}_z H_y^* \right) + \vec{y}_0 \left(\dot{E}_z H_x^* - \dot{E}_x H_z^* \right) + \vec{z}_0 \left(\dot{E}_x H_y^* - \dot{E}_y H_x^* \right) \right\}.$$

Sustačius gausime:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2\omega\mu} \left\{ \vec{x}_0\, \mathrm{i} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + \vec{y}_0\, \mathrm{i} \left(-\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \vec{z}_0 \left(kU^2 - \frac{1}{k} U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \right\}.$$

Plokščios bangos *Poitingo* vektorius turėjo tik realią dalį (galios vidurkis). O čia $\vec{x}_0, \vec{y}_0$ kryptimi – tik menama dalis, o $\vec{z}_0$ kryptis – tik reali. $\mathrm{Re}\,\vec{\Pi} \,\square\, \vec{k} \,\square\, \vec{z}_0$. Taigi, galia ir čia pernešama $\vec{z}_0$ kryptimi, tačiau vektoriai nukreipti ir kitų ašių kryptimis.

Suskaičiuokime realias dalis:

$$\vec{E} = \vec{x}_0 U \cos(\omega t - kz) + \vec{z}_0 \frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial x}\sin(\omega t - kz),$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu}\left\{\vec{x}_0 \frac{1}{k}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cos(\omega t - kz) + \vec{y}_0\left(kU - \frac{1}{k}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\cos(\omega t - kz) + \vec{z}_0 \frac{\partial U}{\partial y}\sin(\omega t - kz)\right\}.$$

Tuomet

$$\vec{\Pi} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right] = \frac{1}{\omega\mu}\left\{-\vec{x}_0 \frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial x}\left(kU - \frac{1}{k}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\sin(\omega t - kz)\cos(\omega t - kz) + \right.$$

$$\left. +\vec{y}_0\left(\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{1}{k}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - U\frac{\partial U}{\partial y}\right)\sin(\omega t - kz)\cos(\omega t - kz) + \vec{z}_0 U\left(kU - \frac{1}{k}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\cos^2(\omega t - kz)\right\}.$$

Kadangi $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x,$

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2\omega\mu}\left\{-\vec{x}_0 \frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial x}\left(kU - \frac{1}{k}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\sin 2(\omega t - kz) + \vec{y}_0\left[\frac{1}{k}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{1}{k}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - U\frac{\partial U}{\partial y}\right]\sin 2(\omega t - kz) - \right.$$

$$\left. -\vec{z}_0 U\left(kU - \frac{1}{k}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\cos 2(\omega t - kz)\right\} + \frac{1}{2\omega\mu}\vec{z}_0 U\left(kU - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right).$$

(161)

Atsiranda dviejų tipų nariai, priklausantys nuo sinuso arba kosinuso. Kai galia pernešama $\vec{z}_0$ kryptimi, tiek (xz), tiek (yz) plokštumose vyksta sukimasis. Jei amplitudės vienodos, suksis apskritimu.

Pavyzdėlis: tegu $U = x^2 - y^2$. Tuomet

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \frac{\partial U}{\partial y} = -2y, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2;$$

$$\vec{E} = \vec{x}_0\left(x^2 - y^2\right)\cos(\omega t - kz) + \vec{z}_0 \frac{2x}{k}\sin(\omega t - kz),$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2\omega\mu}\vec{y}_0 k\left(x^2 - y^2\right)\cos(\omega t - kz) - \frac{2}{k}\sin(\omega t - kz) - \vec{z}_0 2y\sin(\omega t - kz),$$

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{2\omega\mu}\left(-\vec{x}_0 2x\left(x^2 - y^2 - \frac{2}{k^2}\right)\sin 2(\omega t - kz) + \vec{y}_0 2y\left(x^2 - y^2\right)\sin 2(\omega t - kz) + \right.$$

$$\left. +\vec{z}_0\left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 - y^2 - \frac{2}{k^2}\right)\cos 2(\omega t - kz) + \frac{1}{2\omega\mu}\vec{z}_0\left(x^2 - y^2\right)k\left(x^2 - y^2 - \frac{2}{k}\right)\right).$$

Kai $x = 0, y = 0$ (koordinačių pradžioje), $\vec{\Pi} = 0$ (galia lygi nuliui). Matome, kad amplitudė didėja (plokščiai bangai ji yra pastovi).

Kai $U = A = \text{const}$, gauname plokščiąją bangą (optiniai kompiuteriai, kristalai). Taigi, elektromagnetinės bangos nėra visiškai skersinės $\left(\vec{H} \text{ nebūtinai} \perp \vec{E} \text{ ar } \vec{k}\right)$.

Apibendrintos skersinės elektromagnetinės bangos

Ar gali būti skersinės bangos, kurių amplitudė priklauso nuo koordinačių?

Tegul:

$$\vec{k} = \vec{z}_0 k \ .$$

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \left(\vec{x}_0 E_x(x,y) + \vec{y}_0 E_y(x,y)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k},\vec{z}\right)\right)};$$

$$\vec{H}(x,y,z,t) = \left(\vec{x}_0 H_x(x,y) + \vec{y}_0 H_y(x,y)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k},\vec{z}\right)\right)}.$$

Surašom į Maksvelo lygtis:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\vec{E}(x,y,z,t) = -\mathrm{i}\,\omega\mu\vec{H}(x,y,z,t); \\ \operatorname{rot}\vec{H}(x,y,z,t) = \mathrm{i}\,\omega\varepsilon\vec{E}(x,y,z,t); \\ \mu \operatorname{div}\vec{H}(x,y,z,t) = 0; \\ \varepsilon \operatorname{div}\vec{E}(x,y,z,t) = 0. \end{cases}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \vec{B} = \mu\vec{H} \ .$$

Suprastinkime iš $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$:

$$\vec{E} = \vec{x}_0 E_x + \vec{y}_0 E_y, H = \vec{x}_0 H_x + \vec{y}_0 H_y \ .$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} = \vec{x}_0\,\mathrm{i}\,kE_y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} - \vec{y}_0\,\mathrm{i}\,kE_x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} + \vec{z}_0\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) = -\mathrm{i}\,\omega\mu\vec{H}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} \ .$$

Užrašom kiekvieną komponentę atskirai:

$$\mathrm{i}\,kE_y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} = -\mathrm{i}\,\omega\mu H_x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} .$$

$$-\mathrm{i}\,kE_x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} = -\mathrm{i}\,\omega\mu H_y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} \ .$$

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} = 0 \ .$$

$$\operatorname{rot}\vec{H}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} = \mathrm{i}\,\omega\vec{E}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} \ .$$

Analogiškai

$$\mathrm{i}\,kH_y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} = \mathrm{i}\,\omega\mu E_x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} \ .$$

$$-\mathrm{i}\,k^{E}{}_{x}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} = \mathrm{i}\,\omega\mu E_y\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} \ .$$

$$\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} = 0 \ .$$

$$\operatorname{div} E\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} = 0 \ ,$$

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} = 0 \ ;$$

$$\left(\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}=0\,.$$

$$\begin{cases} kE_y+\omega\mu H_x=0; \\ kE_x-\omega\mu H_y=0; \\ kH_y-\omega\varepsilon E_x=0; \\ kH_x+\omega\varepsilon E_y=0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=0;\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}=0.$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=0;\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}=0.$$

Sugrupuojam:

$$\begin{cases} kE_y+\omega\mu H_x=0; \\ \omega\varepsilon E_y+kH_x=0. \end{cases} k^2-\omega^2\varepsilon\mu=0\Rightarrow k=\pm\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\begin{cases} kE_x-\omega\mu H_y=0; \\ -\omega\varepsilon E_x+kH_y=0. \end{cases} k^2-\omega^2\varepsilon\mu=0\Rightarrow k=\pm\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial x}-\dfrac{\partial E_x}{\partial y}=0; \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial x}+\dfrac{\partial E_y}{\partial y}=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_y}{\partial x}-\dfrac{\partial H_x}{\partial y}=0; \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial x}+\dfrac{\partial H_y}{\partial y}=0. \end{cases}$$

$$f\left(\vec{z}_0\right)=u\left(x,y\right)+\mathrm{i}\,v\left(x,y\right)=u+\mathrm{i}\,v\,.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Tegu $E_x=u, B_y=v$,tai

$$H_x=-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}v\,;$$

$$H_y=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}u\,.$$

$$\vec{E}\left(x,y,z,t\right)=\left(\vec{x}_0u\left(x,y\right)+\vec{y}_0v\left(x,y\right)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\left(\vec{k},\vec{z}\right)\right)}\,.$$

$$\vec{H}\left(x,y,z,t\right)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(-\vec{x}_0 v\left(x,y\right)+\vec{y}_0 u\left(x,y\right)\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\left(\vec{k},\vec{z}\right)\right)}$$ $\Rightarrow$ egzistuoja tokios skersinės bangos.

$\vec{\Pi}=\frac{1}{2}\left[\vec{E},\vec{H}\right]=\frac{1}{2}\vec{z}_0\left(E_x H_y-E_y H_x\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(u\cdot u+v\cdot v\right)$ – $\vec{z}_0$ kryptimi banga skersinė (visuose kabeliuose sklinda tokio tipo bangos).

Tegu

$$f\left(x+\mathrm{i}\,y\right)=u\left(x,y\right)+\mathrm{i}\,v\left(x,y\right).$$

$$E_x\left(x,y\right)=u\,\mathrm{i}\,,E_y\left(x.y\right)=v;$$

Iš to kad

$$H_x=-\frac{k}{\omega\mu}E_y=-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_y=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}u;$$

$$H_y=\frac{k}{\omega\mu}E_x=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_x=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}u.$$

$$\vec{E}=\left(x,y,z,t\right)=\left(\vec{x}_0 u+\vec{y}_0 v\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\left(\vec{k},\vec{z}\right)\right)};$$

$$\vec{H}\left(x,y,z,t\right)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(-\vec{x}_0 v+\vec{y}_0 u\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t-\left(\vec{k},\vec{z}\right)\right)}.$$

Jei $u=v=\mathrm{const}$, gauname plokščią bangą. Taigi atskiras apibendrintų bangų atveją.

Jei turim analizinę funkciją, tai jos modulis apibrėžtas. Jo prasmė:

Raskim kompleksinį poitingo vektorių $\vec{\Pi}$:

$$\left[\vec{E},\vec{H}\right]=\begin{vmatrix}\vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0\\ E_x & E_y & 0\\ H_x^* & H_y^* & 0\end{vmatrix}=\vec{z}_0\left(E_x H_y^*-E_y H_x^*\right)=\vec{z}_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(\underbrace{u\cdot u+v\cdot v}_{\text{analizinės funkcijos modulis}}\right).$$

Tarkim turime du laidus

$$\mathrm{d}\vec{l}=\vec{x}_0\,\mathrm{d}\,x+\vec{y}_0\,\mathrm{d}\,y;$$

$$\mathrm{d}\,\vec{S}=-\vec{y}_0\,\mathrm{d}\,x\cdot l+\vec{x}_0\,\mathrm{d}\,y\cdot l;\ l=1;$$

$$\oiint_{S_1}\left(\vec{D},\mathrm{d}\,\vec{S}\right)=\varepsilon\oiint_{S_1}\left(\vec{E},\mathrm{d}\,\vec{S}\right)=Q_1;$$

$$\oint_{L_1}\left(\vec{H},\mathrm{d}\,\vec{l}\right)=I_1;$$

$$\oint_{L_{12}}\left(\vec{E},\mathrm{d}\,\vec{l}\right)=u_{12};$$

$$\oiint_{S}\left(\vec{B},\mathrm{d}\,\vec{S}\right)=\mu\int\left(\vec{H},\mathrm{d}\,\vec{S}\right)=\Phi_{12}\ .\frac{Q}{u_{12}}=C;$$

$$\frac{\Phi_{12}}{I_1} = \text{ilgio vieneto induktyvumas};$$

$$C = \left| \frac{\varepsilon \oint_{S_1} \left(\vec{E}, \mathrm{d}\vec{S}\right)}{\oint_{L_{12}} \left(\vec{E}, \mathrm{d}\vec{l}\right)} \right|;$$

$$L = \left| \frac{\mu \oint_{S_{12}} \left(\vec{H}, \mathrm{d}\vec{S}\right)}{\oint_{L_1} \left(\vec{H}\, \mathrm{d}\vec{l}\right)} \right|;$$

$$LC = \left| \frac{\varepsilon\mu \oint_{S_1} \left(\vec{E}, \mathrm{d}\vec{S}\right) \oint_{S_{12}} \left(\vec{H}, \mathrm{d}\vec{S}\right)}{\oint_{L_{12}} \left(\vec{E}, \mathrm{d}\vec{l}\right) \oint_{L_1} \left(\vec{H}, \mathrm{d}\vec{l}\right)} \right|.$$

Plokščia elektromagnetinė banga laidžioje aplinkoje

Tegul į laidžią aplinką pateko elektromagnetinis laukas. Laidžioj aplinkoj srovių nėra; $\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega}\varepsilon''$, μ.

Plokščių elektromagnetinių bangų atspindys ir lūžio dėsnis

Tegu turim dvi aplinkas, atskirtas plokščiu skiriamuoju paviršiumi. $\vec{k}_k, \vec{k}_p, \vec{k}_a$ pasirenkam taip, kad jie priklausytų plokštumai (zy). Be to, pažymėkime $\left|\vec{k}_k\right| = \left|\vec{k}_a\right| = k_1$, $\left|\vec{k}_p\right| = k_2$. Tuomet galime užrašyti:

$$\begin{aligned} \vec{k}_k &= \vec{z}_0 k_1 \cos\beta + \vec{y}_0 k_1 \sin\beta, \\ \vec{k}_a &= -\vec{z}_0 k_1 \cos\gamma + \vec{y}_0 k_1 \sin\gamma, \\ \vec{k}_p &= \vec{z}_0 k_2 \cos\alpha + \vec{y}_0 k_2 \sin\alpha. \end{aligned} \tag{179}$$

Išskirkime du atvejus:

1. $\vec{E} \perp$ kritimo plokštumai. Tuomet $\vec{E} \parallel \vec{x}_0$. Pasirinkime $z \neq 0$, kad neprarastume kai kurios informacijos. Tada:

$$\begin{aligned} \vec{E}_k &= \vec{x}_0 E_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k}_k, \vec{r}\right)\right)}, \\ \vec{E}_a &= \vec{x}_0 E_a\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k}_a, \vec{r}\right)\right)}, \\ \vec{E}_p &= \vec{x}_0 E_p\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k}_p, \vec{r}\right)\right)}. \end{aligned} \tag{180}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= \omega\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}, \\ k_2 &= \omega\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}; \\ \vec{k}_k &= \vec{n}_k k_1,\ \vec{k}_a = \vec{n}_a k_1,\ \vec{k}_p = \vec{n}_p k_2. \end{aligned} \tag{181}$$

Padarykime prielaidą, kad visi vektoriai k yra vienoje plokštumoje, be to, tenkinamos kraštinės sąlygos (jei tenkinamos *Maksvelo lygtys* ir nėra $\rho, \eta,$ užtenka dviejų kraštinių sąlygų). Tuomet iš (179) ir (181) išplaukia:

$$\begin{aligned} \vec{n}_k &= \vec{z}_0 \cos\beta + \vec{y}_0 \sin\beta, \\ \vec{n}_a &= -\vec{z}_0 \cos\gamma + \vec{y}_0 \sin\gamma, \\ \vec{n}_p &= \vec{z}_0 \cos\alpha + \vec{y}_0 \sin\alpha. \end{aligned} \tag{182}$$

Dabar suskaičiuokime magnetinį lauką:

$$\begin{aligned} \vec{H}_k &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \left[\vec{n}_k, \vec{E}_k \right] = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \\ E_k & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k}_k, \vec{r}\right)\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \left(\vec{y}_0 E_k \cos\beta - \vec{z}_0 E_k \sin\beta \right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k}_k, \vec{r}\right)\right)}. \end{aligned} \tag{183}$$

Analogiškai gauname, kad

$$\begin{aligned} \vec{H}_a &= -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_a \left(\vec{y}_0 \cos\gamma + \vec{z}_0 \sin\gamma \right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k}_a, \vec{r}\right)\right)}, \\ \vec{H}_p &= \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_p \left(\vec{y}_0 \cos\alpha - \vec{z}_0 \sin\alpha \right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k}_p, \vec{r}\right)\right)}. \end{aligned} \tag{184}$$

Dabar:

$$\begin{aligned} \left(\vec{k}_k, \vec{r}\right) &= k_1 z \cos\beta + k_1 y \sin\beta, \\ \left(\vec{k}_a, \vec{r}\right) &= -k_1 z \cos\gamma + k_1 y \sin\gamma, \\ \left(\vec{k}_p, \vec{r}\right) &= k_2 z \cos\alpha + k_2 y \sin\alpha. \end{aligned} \tag{185}$$

Prisiminę, kad skiriamasis paviršius yra $z = z_0,$ ir suprastinę iš $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \neq 0,$ gausime, kad tangentinės skiriamajam paviršiui komponentės:

$$\begin{cases} E_k \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 z_0 \cos\beta}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 y \sin\beta} + E_a \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 z_0 \cos\gamma}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 y \sin\gamma} = E_p \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 z_0 \cos\alpha}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 y \sin\alpha}, \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_k \cos\beta \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 z_0 \cos\beta}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 y \sin\beta} - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}} E_a \cos\gamma \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 z_0 \cos\gamma}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 y \sin\gamma} = \\ = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}} E_p \cos\alpha \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 z_0 \cos\alpha}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 y \sin\alpha}. \end{cases} \tag{186}$$

Kadangi kraštinės sąlygos tenkinamos bet kokiems y, eksponentės su y turi būti lygios (nes visi y taškai ekvivalentiški):

$$k_1 \sin\beta = k_1 \sin\gamma = k_2 \sin\alpha. \tag{187}$$

Iš pastarosios formulės išplaukia *Snelijaus* dėsniai: $\beta = \gamma,$ *kritimo kampas lygūs atspindžio kampui*. Taip pat gauname, kad

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{188}$$

Dabar (186) sistema suprastėja:

$$\begin{cases} E_k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 z_0\cos\beta} + E_a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 z_0\cos\gamma} = E_p\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 z_0\cos\alpha}, \\ \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_k\cos\beta\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 z_0\cos\beta} - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_a\cos\gamma\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 z_0\cos\gamma} = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_p\cos\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_2 z_0\cos\alpha}. \end{cases} \tag{189}$$

Jei tarsim, kad žinome E_k, gausime:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{2\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\beta}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\beta + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha}E_k\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_1\cos\beta - k_2\cos\alpha)z_0}, \\ E_a &= \frac{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\beta - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\beta + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha}E_k\cdot\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z_0 k_1\cos\beta}. \end{aligned} \tag{190}$$

(190) formulės vadinamos *Frenelio formulėmis.* Eksponentiniai nariai juose parodo fazės pokytį. Jei būtume pasirinkę $z = 0$, šią informaciją būtume praradę; paprastai ji nėra svarbi, tačiau kai kuriose srityse, pvz., praskaidrinimo optikoje, ji yra esminė.

2. $\vec{H} \perp$ kritimo plokštumai. Tuomet

$$\begin{aligned} \vec{H}_k &= \vec{x}_0 H_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k}_k,\vec{r}\right)\right)}, \\ \vec{H}_a &= \vec{x}_0 H_a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k}_a,\vec{r}\right)\right)}, \\ \vec{H}_p &= \vec{x}_0 H_p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \left(\vec{k}_p,\vec{r}\right)\right)}. \end{aligned} \tag{191}$$

Padauginkime abi išraiškos $H = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\left[\vec{n},\vec{E}\right]$ puses vektoriškai iš $\vec{n}$. Gausime:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\vec{n},\vec{H}\right] = \left[\vec{n},\left[\vec{n},\vec{E}\right]\right] = \vec{n}\left(\vec{n},\vec{E}\right) - \vec{E}\left(\vec{n},\vec{n}\right) = -\vec{E}. \tag{192}$$

Matyti, kad šiuo atveju gautume tas pačias *Frenelio* formules, tik reikėtų μ keisti į ε ir atvirkščiai, o E – į H.