Vigirdas Mackevičius

6. Funkcijų sekos ir eilutės

Paskaitų konspektas

> Užrašysiu čia savo mintis be tvarkos, bet gal šis išdrikimas nėra be tikslo. Tai tikra tvarka, ir ji visuomet ženklina mano tikslą pačia savo netvarka. Teikčiau per daug garbės savo dalykui, jei jį dėstyčiau tvarkingai, nes noriu parodyti, kad tai neįmanoma.
>
> *Blaise Pascal, Mintys*

6.1. Apibrėžimas. Sakoma, kad funkcijų seka $\{f_n\}$ konverguoja į funkciją f (pataškiui) aibėje E, jei su visais $x \in E$ turime $f_n(x) \to f(x)$, kai $n \to \infty$, t.y.

$$\forall\, x \in E,\ |f_n(x) - f(x)| \to 0,\ \text{kai } n \to \infty. \tag{$*$}$$

Žymėsime $f_n \to f$, $n \to \infty$ (aibėje E).

Sakoma, kad funkcijų seka $\{f_n\}$ konverguoja į funkciją f tolygiai aibėje E, jei (palyginkite su $(*)$!)

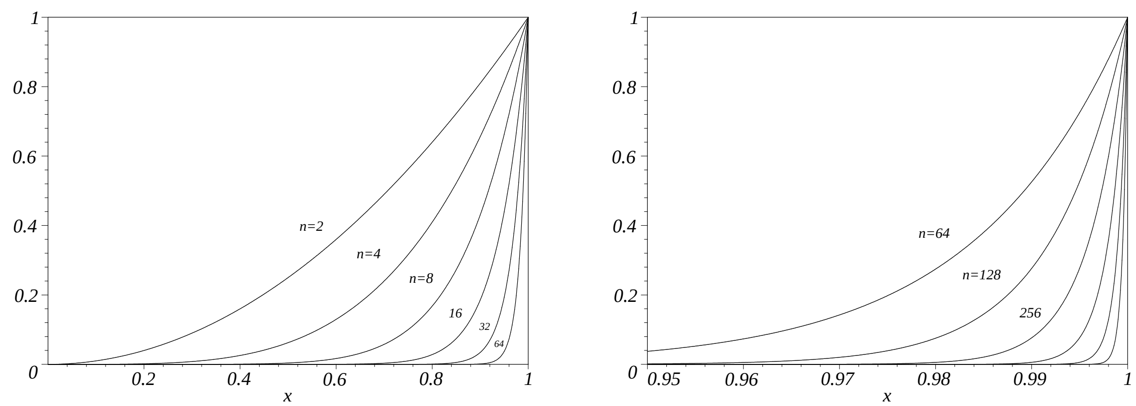
$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0,\ \text{kai } n \to \infty.$$

Žymėsime $f_n \rightrightarrows f$, $n \to \infty$ (aibėje E).

6.2. Pavyzdžiai. 1) $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$. Turime

$$f_n(x) \to f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

t.y. funkcijų seka $\{f_n\}$ konverguoja į funkciją f (pataškiui) intervale $[0, 1]$.



1 pav. Funkcijų $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, grafikai su $n = 2, 4, 8, \ldots, 2048$.

$\mathcal{VM}$-TEX, 2003 04 01

Ar $f_n \rightrightarrows f$ intervale $[0,1]$? Turime

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \begin{cases} x^n, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1. \end{cases} = 1 \not\to 0, \quad n \to \infty.$$

Taigi, nors $f_n \to f$ (pataškiui), bet $f_n \not\rightrightarrows f$. Tačiau $f_n \rightrightarrows 0$ intervale $[0,a]$ su bet kokiu $a < 1$, nes

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = a^n \to 0, \quad n \to \infty,$$

kai $a < 1$.

2) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0,1]$. Tada $f_n(x) \to f(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Ar $f_n \rightrightarrows f$ intervale $[0,1]$? Turime

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n - x^{n+1}|.$$

Funkcijos išvestinė $(x^n - x^{n+1})' = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x) = 0$, kai $x = 0$ ir $x = \frac{n}{n+1}$. Turime

$$f_n(0) = f_n(1) = 0$$

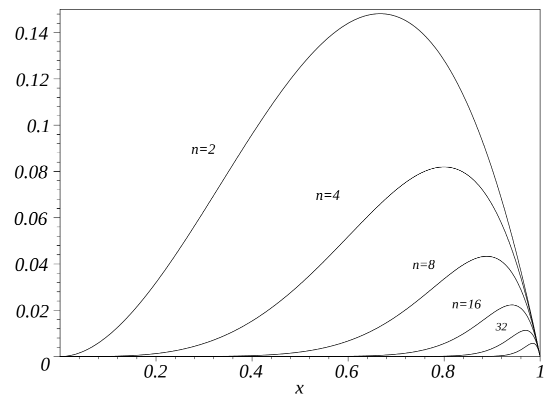
ir

$$f_n\Big(\frac{n}{n+1}\Big) = \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n\Big(1 - \frac{n}{n+1}\Big) = \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n \frac{1}{n+1}.$$

Kadangi $(n/(n+1))^n \to 1/e$ bei $1/(n+1) \to 0$, tai

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\Big(\frac{n}{n+1}\Big) \to 0.$$

Taigi $f_n \rightrightarrows 0$ intervale $[0,1]$.



2 pav. Funkcijų $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0,1]$, grafikai su $n = 2, 4, \ldots, 64$.

3) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0,1]$. Tada $f_n(x) \to f(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Pažymėkime

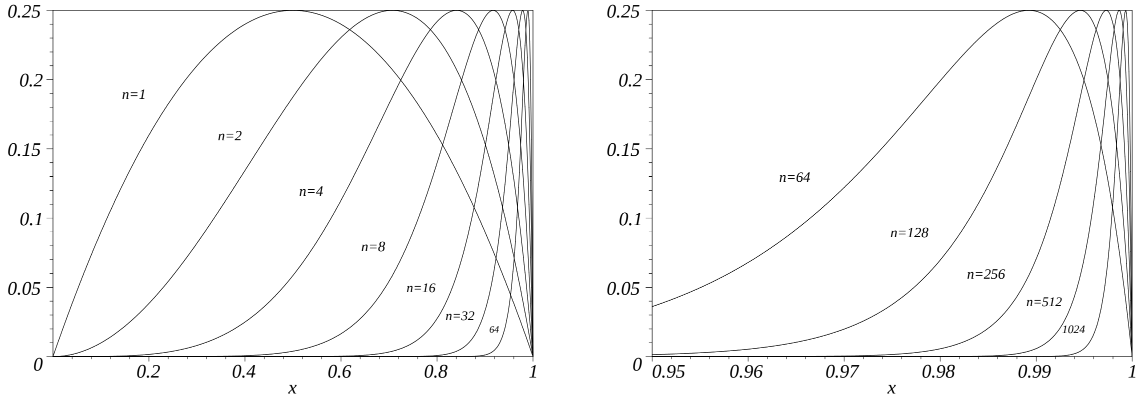
$$\varepsilon_n := \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \max_{x\in[0,1]} f_n(x).$$

Rasime ε_n, t.y. funkcijos f_n maksimumą intervale $[0,1]$. Kadangi $f_n(0) = f_n(1) = 0$ ir

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n) = 0, \text{ kai } x = 0 \text{ ir } x = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{1}{n}},$$

tai

$$\varepsilon_n = f_n\Big(\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \not\to 0, \text{ kai } n \to \infty.$$



3 pav. Funkcijų $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0,1]$, grafikai su $n = 1, 2, 4, \dots, 1024$.

6.3. Pastaba. Tarkime, kad $f\colon E \to \mathbb{R}$ ir $g\colon E \to \mathbb{R}$. Pažymėkime

$$d(f;g) = d_E(f;g) := \sup_{x\in E} |f(x) - g(x)|.$$

Funkcijos d savybės:

1) $d(f;g) \geqslant 0$; $\quad d(f;g) = 0 \iff f(x) = g(x),\ x \in E$;
2) $d(f;g) = d(g;f)$;
3) $d(f;g) \leqslant d(f;h) + d(h;g)$, $f, g, h\colon E \to \mathbb{R}$.

Funkcijos d, pasižyminčios tokiomis savybėmis, vadinamos *metrikomis* arba *atstumais*. Trečioji savybė vadinama *trikampio nelygybe*. Pastebėkime, kad

$$f_n \rightrightarrows f, \quad n \to \infty \text{ (aibėje } E) \iff d(f_n;f) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Dėl šios priežasties dažnai d vadinama tolygaus konvergavimo metrika.

6.4. Teiginys. (Funkcijų sekos tolygaus konvergavimo Koši kriterijus.) *Funkcijų seka $\{f_n\}$ konverguoja tolygiai aibėje E tada ir tik tada, kai*

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| \to 0, \text{ kai } n, m \to \infty,$$

t.y.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N} : \sup_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \text{ kai } n, m > N.$$

Įrodymas. Būtinumas („$\Longrightarrow$“). Įrodymas toks pat kaip realiųjų skaičių sekų atveju, pakeičiant atstumą tiesėje tolygaus konvergavimo atstumu:

Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Tada pažymėję $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$, turime, kad

$$\exists N \in \mathbb{N} : d(f_n; f) < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kai } n > N.$$

Tada

$$d(f_n; f_m) \leqslant d(f_n; f) + d(f; f_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ kai } n, m > N.$$

Pakankamumas („$\Longleftarrow$“). Pastebėsime, kad su visais $x \in E$ skaičių seka $\{f_n(x)\}$ yra Koši seka ir todėl konverguoja. Pažymėkime $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in E$. Įsitikinsime, kad $f_n \rightrightarrows f$.

Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Tada

$$\exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kai } n, m > N, \ x \in E.$$

Perėję prie ribos šioje nelygybėje, kai $m \to \infty$, gauname, kad

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kai } n > N, \ x \in E,$$

t.y.

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ kai } n > N.$$

Iš paskutiniosios nelygybės ir laisvo $\varepsilon > 0$ pasirinkimo išplaukia, kad $f_n \rightrightarrows f$ aibėje E. $\triangle$

6.5. Apibrėžimas. Sakoma, kad funkcijų, apibrėžtų aibėje E, eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguoja aibėje E, jei jos dalinių sumų seka $S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$, $N \in \mathbb{N}$, konverguoja su visais $x \in E$.

Jei seka $\{S_N\}$ konverguoja tolygiai aibėje E, tai sakoma, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguoja tolygiai aibėje E.

6.6. Teiginys. (Vejerštraso požymis.) *Jei* $|f_n(x)| \leqslant c_n$, $x \in E$, *ir* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$, *tai eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguoja tolygiai aibėje* E.

Įrodymas. Pažymėkime $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, ir laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Tada

$$\exists N \in \mathbb{N} : \sum_{n=p+1}^{q} c_n < \varepsilon, \text{ kai } q > p > N.$$

Iš čia

$$|S_p(x) - S_q(x)| = \Bigl| \sum_{n=p+1}^{q} f_n(x) \Bigr| \leqslant \sum_{n=p+1}^{q} |f_n(x)| \leqslant \sum_{n=p+1}^{q} c_n < \varepsilon, \text{ kai } q > p > N,$$

su visais $x \in E$. Remdamiesi 6.4 teiginiu, gauname, kad eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ dalinių sumų seka (o kartu ir pati eilutė) konverguoja tolygiai aibėje E. $\triangle$

6.7. Teorema. *Tarkime, kad* $f_n \rightrightarrows f$ *aibėje* E, $x \in E'$ *ir su visais* $n \in \mathbb{N}$ *egzistuoja baigtinė riba*

$$A_n = \lim_{t\to x} f_n(t).$$

Tada egzistuoja riba

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

Kitaip tariant, galima sukeisti vietomis dvi ribas:

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t).$$

Pastaba. Be tolygaus konvergavimo šių ribų sukeisti negalima. Pavyzdžiui, nagrinėkime $f_n(t) = t^n$, $t \in (0,1)$, $x = 1$. Tada $\lim\limits_{t\uparrow 1}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = 0$, bet $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{t\uparrow 1} f_n(t) = 1$.

Įrodymas. Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Remiantis Koši kriterijumi,

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : |f_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kai } n, m > N, \ t \in E.$$

Šioje nelygybėje perėję prie ribos, kai $t \to x$, gauname, kad

$$|A_n - A_m| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ kai } n, m > N.$$

Tai reiškia, kad skaičių seka $\{A_n\}$ – Koši seka. Pažymėkime jos ribą $A := \lim_{n\to\infty} A_n \in \mathbb{R}$. Įsitikinsime, kad $\lim_{t\to x} f(t) = A$. Įvertinsime skirtumą

$$|f(t) - A| \leqslant |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|, \quad t \in E, \ n \in \mathbb{N}.$$

Vėl laisvai pasirinkame $\varepsilon > 0$. Tada

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : |f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad t \in E, \quad \text{ir} \quad |A_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ kai } n > N.$$

Iš čia

$$|f(t) - A| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_n(t) - A_n|, \text{ kai } t \in E, \ n > N.$$

Fiksuokime bet kokį $n_0 > N$. Tada

$$\exists\, \delta > 0 : |f_{n_0}(t) - A_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ kai } 0 < |t - x| < \delta, \ t \in E.$$

Iš čia

$$|f(t) - A| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \text{ kai } 0 < |t - x| < \delta, \ t \in E.$$

Tai reiškia, kad $\lim\limits_{t\to x} f(t) = A$. △

6.8. Išvada. *Jei* $f_n \in C(E)$, $n \in \mathbb{N}$, *ir* $f_n \rightrightarrows f$ *aibėje* E, *tai* $f \in C(E)$.

Įrodymas. Paėmę 6.7 teoremoje $x \in E \cap E'$ ir

$$A_n = \lim_{t \to x} f_n(t) = f_n(x),$$

gauname

$$\lim_{t \to x} f(t) \overset{6.7}{=\!=} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Jei $x \in E \backslash E'$, tai taške x bet kokia funkcija (kartu – ir funkcija f) yra tolydi. △

6.9. Pastaba. Atvirkštinis teiginys 6.7 išvadai nėra teisingas: jei $f_n, f \in C(E)$ ir $f_n \to f$, $n \to \infty$, tai nebūtinai $f_n \rightrightarrows f$ (žr. 6.2.3 pavyzdį). Tačiau yra teisingas toks teiginys:

6.10. Teorema. (Dinio lema.) *Jei monotoniška funkcijų seka $f_n \in C[a, b]$, $(n \in \mathbb{N})$, konverguoja į funkciją $f \in C[a, b]$ intervale $[a, b]$, tai $\{f_n\}$ konverguoja tolygiai.*

Įrodymas. Apibrėžtumo dėlei tarkime, kad seka $\{f_n\}$ yra mažėjanti. Pažymėkime $g_n := f_n - f \in C[a, b]$. Tada $g_n \downarrow 0$, $x \in [a, b]$. Reikia įrodyti, kad $g_n \rightrightarrows 0$. Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. . Tada su visais $x \in [a, b]$

$$\exists\, n_x > 0 : g_{n_x}(x) < \varepsilon.$$

Dėl g_{n_x} tolydumo taške x

$$\exists\, \delta_x > 0 : g_{n_x}(t) < \varepsilon, \text{ kai } t \in U_{\delta_x}(x) \cap [a, b].$$

Akivaizdu, kad

$$\bigcup_{x \in [a,b]} U_{\delta_x}(x) \supset [a, b].$$

Remiantis teorema apie baigtinį denginį, galima išrinkti baigtinį skaičių taškų

$$x_1, x_2, \ldots, x_k \in [a, b] : U_{\delta_{x_1}}(x_1) \cup U_{\delta_{x_2}}(x_2) \cup \ldots \cup U_{\delta_{x_k}}(x_k) \supset [a, b].$$

Pažymėkime $N := \max\{n_{x_1}, \ldots, n_{x_k}\} \in \mathbb{N}$. Imkime bet kokius $n > N$ ir $t \in [a, b]$. Tada $\exists\, i : t \in U_{\delta_{x_i}}$. Iš čia dėl sekos $\{g_n\}$ mažėjimo $g_n(t) \leqslant g_N(t) \leqslant g_{n_{x_i}}(t) < \varepsilon$. Taigi

$$0 \leqslant g_n(t) < \varepsilon, \text{ kai } t \in [a, b], \ n > N.$$

Tai ir reiškia, kad $g_n \rightrightarrows 0$. △

Pastaba. Intervalo uždarumas yra esminė sąlyga. Pavyzdžiui, $x^n \downarrow 0$, $x \in [0, 1)$, bet konvergavimas nėra tolygus, nes $\sup_{x \in [0;1)} |x^n - 0| = 1 \not\to 0$ (žr. 6.2.1 pavyzdį).

6.11. Lema. *Egzistuoja daugianarių sistema $P_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, pasižyminti savybėmis:*

1) $P_{n,k}(x) \geqslant 0$, $x \in [0, 1]$, $\forall n, k$;
2) $\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) \equiv 1$, $n \in \mathbb{N}$;
3) $c_n := \max_{x \in [0,1]} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 P_{n,k}(x) \to 0$, $n \to \infty$.

Įrodymas. Niutono binomo formulėje

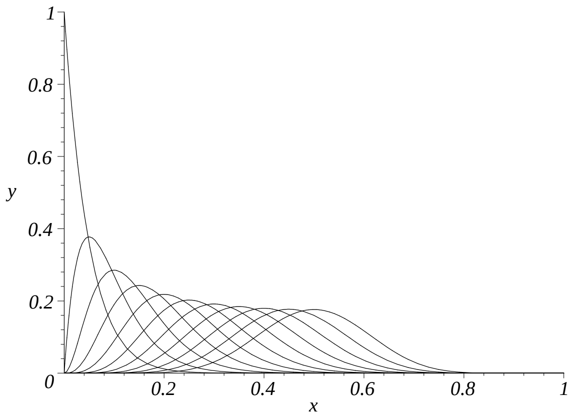
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

paėmę $a = x$ ir $b = 1 - x$, gauname

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Pažymėkime

$$P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$



5 pav. Daugianariai $P_{n,k}$, $n = 20$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

Daugianariai $P_{n,k}$ akivaizdžiai tenkina pirmąją ir antrąją lemoje suformuluotas savybes. Lieka patikrinti trečiąją. Pasinaudoję formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, $k \geqslant 1$, turime

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k P_{n,k}(x) &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \cdot \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= nx \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k} \\ &= nx \cdot \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1,k}(x) = nx. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Analogiškai, pasinaudoję formule $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$, $k \geqslant 2$, gauname lygybę

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1) P_{n,k}(x) = n(n-1)x^2.$$

Sudėję šią ir prieš tai gautą lygybes, turėsime

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 P_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx. \tag{$\star\star$}$$

Remdamiesi antrąja savybe ir lygybėmis ($\star$) bei ($\star\star$), gauname

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 P_{n,k}(x) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(k^2-2knx+n^2x^2)P_{n,k}(x)\\ &= \frac{1}{n^2}\Big[n(n-1)x^2+nx-2nx\cdot nx+n^2x^2-1\Big]\\ &= \frac{nx-nx^2}{n^2} = \frac{x(1-x)}{n}, \quad x\in[0,1].\end{aligned}$$

Todėl

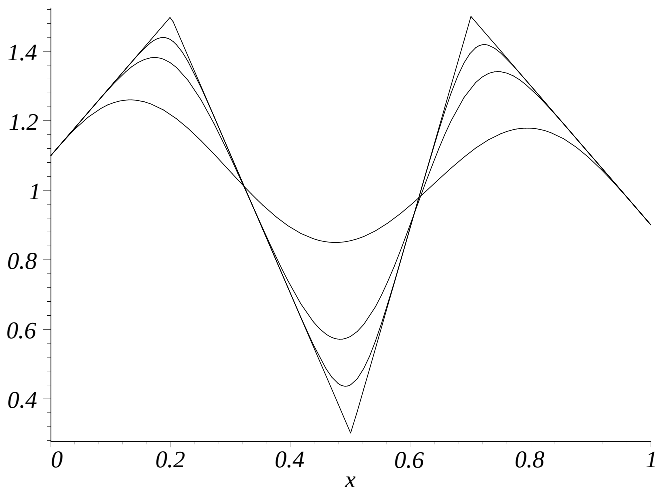
$$c_n = \max_{x\in[0,1]}\frac{x(1-x)}{n} = \frac{1}{4n} \to 0, \quad n\to\infty. \qquad \triangle$$

6.12. Teorema. (Vejerštraso teorema apie tolydžių funkcijų aproksimavimą daugianariais.) *Bet kokiai funkcijai $f\in C[a,b]$ egzistuoja daugianarių seka $\{P_n\}$, konverguojanti tolygiai (intervale $[a,b]$) į funkciją f.*

Įrodymas. Pradžioje tarsime, kad $f\in C[0,1]$. Pažymėkime $M := \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ ir

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)P_{n,k}(x), \quad x\in[0,1], \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Daugianariai P_n vadinami funkcijos f Bernšteino daugianariais. Įrodysime, kad $P_n \rightrightarrows f$ intervale $[0,1]$. 6 paveiksle matome tolydžią, bet nediferencijuojamą („kampuotą“) funkciją ir kelis ją aproksimuojančius Bernšteino daugianarius.



6 pav. Funkcija $f(x) = 2-3|x-2|+4|x-7|+5|x-5|$ ir jos Bernšteino daugianariai P_n, $n = 10, 50, 200$.

Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Kadangi funkcija f yra tolygiai tolydi intervale $[0,1]$, tai

$$\exists\, \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kai } |x - y| < \delta,\ x, y \in [0,1].$$

Įvertinsime skirtumą

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_n(x)| &= \Big|\sum_{k=0}^{n} f(x) P_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) P_{n,k}(x)\Big| \\
&= \Big|\sum_{k=0}^{n} \Big(f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) P_{n,k}(x)\Big| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \Big|f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \cdot P_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k:|\frac{k}{n}-x|<\delta} \Big|f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \cdot P_{n,k}(x) + \sum_{k:|\frac{k}{n}-x|\geqslant \delta} \Big|f(x) - f\Big(\frac{n}{k}\Big)\Big| \cdot P_{n,k}(x) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sum_{k:|\frac{k}{n}-x|<\delta} P_{n,k}(x) + 2M \cdot \sum_{k:|\frac{k}{n}-x|\geqslant \delta} P_{n,k}(x) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \sum_{k:|\frac{k}{n}-x|\geqslant \delta} \frac{\big(\frac{k}{n} - x\big)^2}{\delta^2} P_{n,k}(x) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \cdot \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{k}{n} - x\Big)^2 P_{n,k}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \cdot c_n, \quad x \in [0,1].
\end{aligned}$$

Kadangi $c_n \to 0$, $n \to \infty$, tai

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : \frac{2M}{\delta^2} c_n < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ kai } n > N,$$

todėl $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$, kai $n > N$. Taigi $P_n \rightrightarrows f$ intervale $[0,1]$.

Dabar nagrinėkime bendrą atvejį, t.y. $f \in C[a,b]$. Pažymėkime $\widetilde{f}(x) := f(a + (b-a)x)$, $x \in [0,1]$. Aišku, kad $\widetilde{f} \in C[0,1]$. Remiantis prieš tai įrodytu, egzistuoja daugianarių seka $\{\widetilde{P}_n\} : \widetilde{P}_n \rightrightarrows \widetilde{f}$ intervale $[a,b]$.

Pažymėkime

$$P_n(x) := \widetilde{P}_n\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big), \quad x \in [a,b].$$

Aišku, kad P_n – daugianariai. Be to,

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \Big|\widetilde{f}\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big) - \widetilde{P}_n\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big)\Big| = \sup_{y\in[0,1]} |\widetilde{f}(y) - \widetilde{P}_n(y)| \to 0,$$

kai $n \to \infty$. △

6.13. Teiginys. (Funkcijų sekų ir eilučių diferencijavimas.)

1) *Tarkime, kad*

a) $f_n \in C^1[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$,

b) $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(a) \in \mathbb{R}$,

c) $f_n' \rightrightarrows g$ *intervale* $[a,b]$.

Tada egzistuoja $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in C^1[a,b]$ *(konvergavimas tolygus) ir*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\big(= g(x)\big), \quad x \in [a,b].$$

2) *Tarkime, kad*

a) $f_n \in C^1[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$,

b) *skaičių eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ *konverguoja,*

c) *funkcijų eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ *konverguoja tolygiai intervale* $[a,b]$.

Tada funkcijų eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *taip pat konverguoja tolygiai ir*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in [a,b].$$

Pastabos. 1) Vietoje taško a galima imti bet kokį intervalo $[a,b]$ tašką.

2) Štai paprastas pavyzdėlis, rodantis, kad išvestinių konvergavimo sąlyga esminė: $\frac{1}{n}\sin nx \rightrightarrows 0$, $n\to\infty$, bet $(\frac{1}{n}\sin nx)' = \cos nx$ konverguoja, kai $n\to\infty$, tik viename taške $x=0$.

Įrodymas.

1) Pažymėkime

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(a) + \int_a^x g(t)\,dt, \quad x\in[a,b].$$

Tada $f'(x) = g(x)$, $x\in[a,b]$, ir

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \big(f_n(x) - f_n(a)\big) - \big(f(x) - f(a)\big) + \big(f_n(a) - f(a)\big) \\ &\overset{NL}{=\!=} \int_a^x f_n'(t)\,dt - \int_a^x f'(t)\,dt + \big(f_n(a) - f(a)\big) \\ &= \int_a^x \big(f_n'(t) - f'(t)\big)\,dt + \big(f_n(a) - f(a)\big). \end{aligned}$$

Kadangi $f_n(a) \to f(a)$, $n\to\infty$, tai pakanka įsitikinti, kad integralas su kintamu viršutiniu rėžiu konverguoja į 0 tolygiai intervale $[a,b]$. Pažymėkime

$$\varepsilon_n := \sup_{x\in[a,b]} \left|f_n'(x) - f'(x)\right| \to 0, \quad n\to\infty.$$

Tada

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x \big(f_n'(t) - f'(t)\big)\,dt\right| &\leqslant \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x \left|f_n'(t) - f'(t)\right| dt \\ &\leqslant \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x \varepsilon_n\,dt = \sup_{x\in[a,b]} \varepsilon_n(x-a) = \varepsilon_n(b-a) \to 0, \quad n\to\infty. \end{aligned}$$

2) Pakanka pritaikyti pirmąją dalį eilutės dalinių sumų sekai. △

6.14. Apibrėžimas. Laipsnine eilute vadinama funkcijų eilutė, turinti pavidalą

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n;$$

čia $a \in \mathbb{R}$, $c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Skaičiai c_n vadinami laipsninės eilutės koeficientais, a – centru.

6.15. Teiginys. *Laipsninei eilutei* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *pažymėkime*

$$R := \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} \in [0, +\infty].$$

Tada

1) *Laipsninė eilutė* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *konverguoja absoliučiai, kai* $|x-a| < R$, *ir diverguoja, kai* $|x-a| > R$.[1]
2) *Jei egzistuoja riba* $R' := \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$, *tai* $R' = R$.

Pastaba. R vadinamas laipsninės eilutės konvergavimo spinduliu, o intervalas $(a-R; a+R)$ – laipsninės eilutės konvergavimo intervalu. Kai $R = +\infty$, jos konvergavimo intervalas yra visa skaičių tiesė $\mathbb{R}$.

Įrodymas. 1) Remsimės eilučių konvergavimo Koši požymiu:

$$\alpha := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n| \cdot |x-a|^n} = |x-a| \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < 1, \text{ kai } |x-a| < R,$$

ir $\alpha > 1$, kai $|x-a| > R$. Todėl eilutė konverguoja absoliučiai, kai $|x-a| < R$, ir diverguoja, kai $|x-a| > R$.

2) Remsimės Dalambero požymiu:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}\right| = |x-a| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{|x-a|}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|} = \frac{|x-a|}{R'}.$$

Todėl eilutė konverguoja absoliučiai, kai $|x-a| < R'$, ir diverguoja, kai $|x-a| > R'$. Palyginę šį faktą su pirmąja dalimi, gauname, kad $R = R'$. $\triangle$

6.16. Pavyzdžiai.

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Šios eilutės konvergavimo spindulys lygus

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Eilutės konvergavimo intervalas yra $\mathbb{R}$.

[1] Kai $|x-a| = R$, galimi įvairūs atvejai.

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Šios eilutės konvergavimo spindulys lygus

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Taigi eilutės konvergavimo intervalas yra $(-1, 1)$. Intervalo galus $x = \pm 1$ reikia ištirti atskirai. Taške $x = 1$ eilutė $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmoninė eilutė) diverguoja, o taške $x = -1$ eilutė $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguoja pagal Leibnico požymį; be to, ji konverguoja reliatyviai, nes modulių eilutės suma $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Todėl eilutės konvergavimo intervalas yra $(-1; 1)$, o konvergavimo aibė yra $[-1; 1)$.

2') $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$ $(\alpha > 1)$. Konvergavimo intervalas $(-1; 1)$, o konvergavimo aibė – $[-1; 1]$ (taškuose $x = \pm 1$ eilutė šįkart konverguoja absoliučiai).

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ $(R = 0)$. Konvergavimo intervalas yra $\emptyset$, o konvergavimo aibė – $\{0\}$.

6.17. Teiginys. *Tarkime, kad* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *yra laipsninė eilutė su konvergavimo spinduliu* $R > 0$ *ir* $0 < \tilde{R} < R$. *Tada*

1) *eilutė* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *konverguoja tolygiai intervale* $[a-\tilde{R}, a+\tilde{R}]$*;*

2) *eilutės suma* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *yra tolydi funkcija intervale* $(a-R, a+R)$.

Įrodymas. 1) $|c_n(x-a)^n| \leqslant |c_n|\tilde{R}^n$, $x \in [a-\tilde{R}, a+\tilde{R}]$. Remiantis 6.6 teiginiu (Vejerštraso požymiu), pakanka įsitikinti, kad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|\tilde{R}^n < +\infty$. Pritaikę Koši požymį, turime, kad $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|\tilde{R}^n} = \frac{\tilde{R}}{R} < 1$. Todėl eilutė konverguoja.

2) Imkime bet kokį tašką $x \in (a-R, a+R)$ $(|x-a| < R)$. Jam atsiras toks $\tilde{R} < R$, su kuriuo $|x-a| < \tilde{R}$. Remiantis 6.8 išvada, f yra tolydi intervale $[a-\tilde{R}, a+\tilde{R}]$, todėl atskiru atveju ji tolydi ir taške $x \in (a-R, a+R)$. △

6.18. Išvada. (Laipsninės funkcijos diferencijavimas ir integravimas panariui.) *Laipsninę eilutę galima diferencijuoti ir integruoti panariui jos konvergavimo intervale: jei* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ – *laipsninė eilutė su konvergavimo spinduliu* R, *tai*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}, \quad x \in (a-R, a+R),$$

ir

$$\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-a)^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}, \quad x \in (a-R, a+R).$$

Įrodymas. Išvestinių eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$ konvergavimo spindulys yra lygus

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim_n} \sqrt[n]{n|c_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|c_n|}} = R,$$

tai yra, jis sutampa su nagrinėjamos eilutės konvergavimo spinduliu. Todėl išvestinių eilutė konverguoja tolygiai kiekviename intervale $(a-\widetilde{R}, a+\widetilde{R})$ su $0 < \widetilde{R} < R$. Remiantis 6.13 teiginiu, laipsninę eilutę galima diferencijuoti panariui kiekviename tokiame intervale, taigi ir visame intervale $(a-R, a+R)$.

Integravimo panariui teisėtumas įrodomas panašiai: kadangi laipsninė eilutė bet kokiame intervale $[a-\widetilde{R}, a+\widetilde{R}] \subset (a-R, a+R)$ konverguoja tolygiai, todėl jame ją galima integruoti panariui.[2] Todėl tai galima daryti ir visame intervale $(a-R, a+R)$. △

6.19. Pavyzdžiai.

1) Nagrinėkime laipsninę eilutę $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1,1)$. Konvergavimo intervale $(-1,1)$ ją galime diferencijuoti panariui:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1,1).$$

Integruodami gautąją lygybę, gauname

$$f(x) \overset{NL}{=} f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = f(0) + \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x), \quad x \in (-1,1).$$

Vietoje x įrašę $-x$, gauname jau pažįstamą formulę

$$\ln(1+x) = -f(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad x \in (-1,1).$$

2) Panariui integruodami laipsninę eilutę

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \quad x \in (-1,1),$$

gauname

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^x \biggl(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\biggr)dt = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_0^x t^n\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}, \quad x \in (-1,1).\end{aligned}$$

Dabar diferencijuodami gauname

$$f(x) = \Bigl(\frac{x}{1-x}\Bigr)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1,1).$$

---

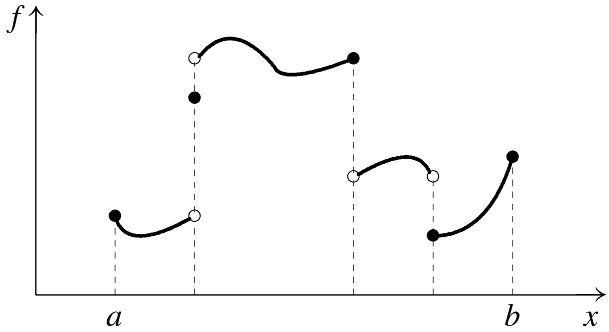
[2] Prisiminkime integralų savybę $D[a,b] \ni f_n \rightrightarrows f \in D[a,b] \implies \int_a^b f_n \to \int_a^b f$ ir pritaikykime ją eilutės dalinių sumų sekai.

6.20. Apibrėžimas. Bet kokiam intervalui $I \subset \mathbb{R}$ žymėsime $D(I)$ aibę visų funkcijų $f : I \to \mathbb{R}$, neturinčių antro tipo trūkio taškų intervale I. Tokias funkcijas vadinsime reguliariomis.

Pastabos. 1) Intervalo I galuose reikalaujama baigtinių vienpusių ribų egzistavimo (jei tie galai priklauso I).

2) $D[a,b]{:}= D([a,b])$, $D[0,+\infty){:}= D([0,+\infty))$ ir t.t.

3) Akivaizdu, kad $C[a,b] \subset D[a,b]$.



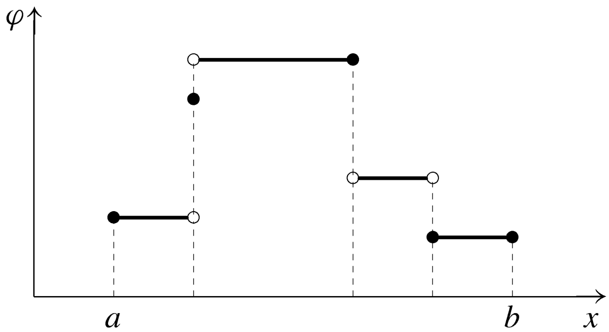
7 pav. Funkcija $f \in D[a,b]$.

6.21. Teiginys. *Jei seka* $D(I) \ni f_n \rightrightarrows f$ *intervale* I*, tai* $f \in D(I)$ *(kitaip tariant,* $D(I)$ *yra uždara tolygaus konvergavimo atžvilgiu.)*

Įrodymas. Įrodoma kaip 6.8 išvada, tik vietoje $A_n = \lim\limits_{t\to x} f_n(t) = f_n(x)$ reikia imti $A_n{:}= \lim\limits_{t\to x+0} f_n(t)$ arba $A_n{:}= \lim\limits_{t\to x-0} f_n(t)$. △

6.22. Apibrėžimas. Funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ vadinama láiptine, jei intervalą $[a,b]$ galima taip suskaidyti į baigtinį skaičių intervalų I_k, $k = 1, 2, \dots, m$ ($[a,b] = \bigcup_{i=1}^m I_i$ ir $I_k \cap I_{k'} = \emptyset$, kai $k \neq k'$), kad kiekviename iš šių intervalų I_k funkcija f yra pastovi, t.y. egzistuoja tokios konstantos y_k, $k = 1, 2, \dots, m$, kad $f(x) = y_k$, $x \in I_k$, $k = 1, 2, \dots, m$. Intervalai I_k vadinami funkcijos f pastovumo intervalais.[3]

Visų laiptinių funkcijų klasę žymėsime $S[a,b]$. Akivaizdu, kad $S[a,b] \subset D[a,b]$.



8 pav. Funkcija $\varphi \in S[a,b]$.

Pastaba. Remiantis 6.21 teiginiu, jei $S[a,b] \ni f_n \rightrightarrows f$, tai $f \in D[a,b]$. Vėliau (6.25 teorema) pamatysime, kad tolygios laiptinių funkcijų ribos „išsemia“ visą klasę $D[a,b]$.

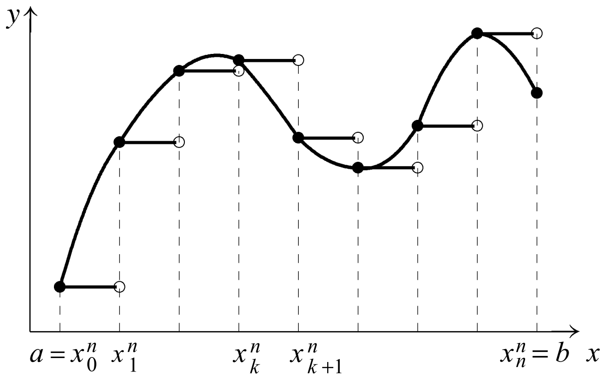
[3] Čia vientaškė aibė $\{a\}$ laikoma uždaru intervalu $[a,a]$.

6.23. Teiginys. *Sakykime, $f \in C[a,b]$. Apibrėžkime laiptinių funkcijų seką $\{\varphi_n\}$ lygybėmis*

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} f\big(x_k^n\big), & \textit{kai } x \in \big[x_k^n, x_{k+1}^n\big),\ k = 0, 1, \dots, n-1, \\ f(b), & \textit{kai } x = x_n^n = b; \end{cases}$$

$$x_k^n := a + \frac{b-a}{n} k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Tada $\varphi_n \rightrightarrows f$ intervale $[a,b]$, t.y. seka $\{\varphi_n\}$ konverguoja į f tolygiai intervale $[a,b]$.



9 pav. Tolydžiosios funkcijos aproksimavimas laiptinėmis funkcijomis.

Įrodymas. Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Kadangi f yra tolygiai tolydi intervale $[a,b]$ (Kantoro teorema), tai atsiras toks $\delta > 0$, kad

$$\big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon, \quad \text{kai } |x-y| < \delta,\ x, y \in [a,b].$$

Paėmę tokį $N \in \mathbb{N}$, kad $\frac{b-a}{N} < \delta$, gauname, kad su visais $x \in [a,b]$ turime $|\varphi_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, kai $n > N$. Iš tikrųjų, jei $n > N$, tai bet kokiam taškui $x \in [a,b)$ paimkime intervalą $[x_k^n, x_{k+1}^n)$, kuriam jis priklauso. Tada $|x_k^n - x| < \delta$, ir todėl $|\varphi_n(x) - f(x)| = |f(x_k^n) - f(x)| < \varepsilon$. O taške $x = b$ visada turime $\varphi_n(b) - f(b) = 0 < \varepsilon$. Tai ir reiškia, kad $\varphi_n \rightrightarrows f$ intervale $[a,b]$ (N pasirinkimas priklauso tik nuo $\varepsilon > 0$ ir nepriklauso nuo $x \in [a,b]$). △

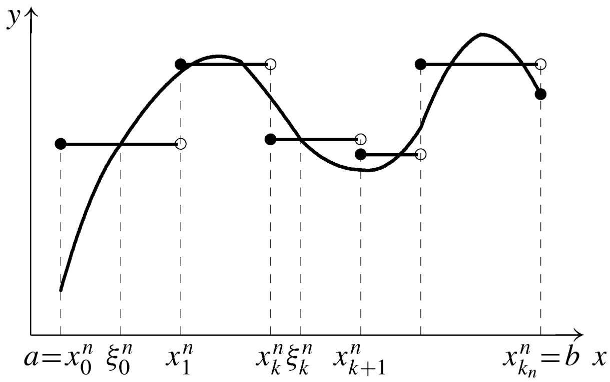
6.24. Pastaba. Iš teoremos įrodymo nesunku matyti, kad tolygus konvergavimas $\varphi_n \rightrightarrows f$ intervale $[a,b]$ išliks, jei (žr. 9a pav.):

a) vietoje taškų $x_k^n = a + \frac{b-a}{n}$, suskaidančių intervalą $[a,b]$ į n vienodo ilgio $\frac{b-a}{n}$ intervalų $[x_k^n, x_{k+1}^n]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, imsime bet kokius taškus $a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{k_n}^n = b$, $n \in \mathbb{N}$, tenkinančius sąlygą

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant k_n - 1} \big|x_{k+1}^n - x_k^n\big| \to 0, \quad \text{kai } n \to \infty;$$

b) laiptinės funkcijos φ_n reikšmes apibrėšime ne funkcijos f reikšmėmis *kairiuosiuose* atitinkamo skaidinio intervalų $[x_k^n, x_{k+1}^n]$ galuose, o *bet kokiuose* tų intervalų taškuose $\xi_k^n \in [x_k^n, x_{k+1}^n]$, t.y. imsime

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} f\big(\xi_k^n\big), & \text{kai } x \in \big[x_k^n, x_{k+1}^n\big),\ k = 0, 1, \dots, n-1, \\ f(b), & \text{kai } x = x_{k_n}^n = b. \end{cases}$$



9a pav. Bendresnis tolydžiosios funkcijos aproksimavimas laiptinėmis funkcijomis.

6.25. Teorema.

1) *Bet kokiai funkcijai* $f \in D[a,b]$ *egzistuoja laiptinių funkcijų seka* $\{\varphi_n\} \subset S[a,b]$, *konverguojanti į* f *tolygiai intervale* $[a,b]$.

2) *Kiekvienos funkcijos* $f \in D[a,b]$ *trūkio taškų aibė yra baigtinė arba skaiti.*

3) *Kiekviena funkcija* $f \in D[a,b]$ *yra aprėžta.*

Įrodymas.

1) Imkime bet kokią funkciją $f \in D[a,b]$. Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Tada su kiekvienu $x \in [a,b]$ atsiras toks $\delta_x > 0$, kad

$$\big|f(t) - f(x+0)\big| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kai } t \in (x, x+\delta_x) \cap [a,b],$$

ir

$$\big|f(t) - f(x-0)\big| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kai } t \in (x-\delta_x, x) \cap [a,b].$$

Kadangi

$$\bigcup_{x\in[a,b]} U_{\delta_x}(x) = \bigcup_{x\in[a,b]} (x-\delta_x, x+\delta_x) \supset [a,b],$$

tai, remiantis intervalo $[a,b]$ kompaktiškumu (teorema apie baigtinį denginį), atsiras tokie x_1, $x_2, \dots, x_n \in [a,b]$, kad

$$U_{\delta_{x_1}}(x_1) \cup U_{\delta_{x_2}}(x_2) \cup \dots \cup U_{\delta_{x_n}}(x_n) \supset [a,b].$$

Imkime aibę $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$, sudarytą iš skaičių a, b, x_i, $x_i - \delta_{x_i}$, $x_i + \delta_{x_i}$, priklausančių intervalui $[a,b]$ ir surašytų didėjimo tvarka: $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$.

Apibrėžkime funkciją $\varphi \in S[a,b]$ šiomis lygybėmis:

$$\varphi(a_i) := f(a_i), \quad i = 0, 1, \dots, k;$$
$$\varphi(x) := f(c_j), \quad \text{kai } x \in (a_{j-1}, a_j);$$

čia c_j – bet koks fiksuotas taškas iš intervalo (a_{j-1}, a_j) (pavyzdžiui, $c_j = \frac{1}{2}(a_{j-1} + a_j)$).

Tada $|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$ su visais $x \in [a, b]$. Iš tikrųjų, imkime bet kokį tašką $x \in [a, b]$. Jei $x = a_j$ $(j = 0, 1, \dots, k)$, tai $|\varphi(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$. Jei $x \in (a_{j-1}, a_j)$, tai atsiras toks i, kad

$$(a_{j-1}, a_j) \subset (x_i, x_i + \delta_{x_i}) \tag{1}$$

arba

$$(a_{j-1}, a_j) \subset (x_i - \delta_{x_i}, x_i). \tag{2}$$

Tarkime, kad, pavyzdžiui, teisingas (1) atvejis. Tada

$$\begin{aligned} \left|\varphi(x) - f(x)\right| &= \left|f(c_j) - f(x)\right| \\ &\leqslant \left|f(c_j) - f(x_i + 0)\right| + \left|f(x_i + 0) - f(x)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

nes $0 < c_j - x_i < a_j - x_i < \delta_{x_i}$ ir $0 < x - x_i < \delta_{x_i}$.

Taigi laisvai pasirinktam $\varepsilon > 0$ sudarėme tokią funkciją $\varphi \in S[a, b]$, kad su visais $x \in [a, b]$ yra teisinga nelygybė $|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$. Imdami $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, gausime tokią seką $\{\varphi_n\} \subset S[a, b]$, kad $|\varphi_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$, $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$. Aišku, kad $\varphi_n \rightrightarrows f$ intervale $[a, b]$.

2) Nagrinėkime funkciją $f \in D[a, b]$ ir anksčiau sudarytą seką $\{\varphi_n\} \subset S[a, b]$ $(\varphi_n \rightrightarrows f)$. Kiekvienos funkcijos φ_n trūkio taškų aibė T_n (sudaryta iš pastovumo intervalų galų) yra baigtinė. Visos funkcijos φ_n yra tolydžios aibėje $A = [a, b] \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)$. Todėl ir f yra tolydi aibėje A (tolygiai konverguojančios tolydžių taške funkcijų sekos riba – taip pat tolydi tame taške). Tai reiškia, kad funkcija f gali turėti trūkį tik aibės $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ taškuose. Kadangi aibė T yra baigtinė arba skaiti (baigtinių aibių skaiti sąjunga), tai teiginys įrodytas.

3) Bet kokiai funkcijai $f \in D[a, b]$ imkime tokią funkciją $\varphi \in S[a, b]$, kad

$$\left|f(x) - \varphi(x)\right| \leqslant 1, \quad x \in [a, b].$$

Laiptinė funkcija įgyja tik baigtinį skaičių reikšmių. Todėl galime pažymėti

$$M := \max_{x \in [a, b]} |\varphi(x)| < +\infty.$$

Iš čia gauname

$$\left|f(x)\right| \leqslant \left|\varphi(x)\right| + 1 \leqslant M + 1, \quad x \in [a, b]. \qquad \triangle$$