Vigirdas Mackevičius

3. Skaičių eilutės

Paskaitų konspektas

Tas, kuris mokosi nemąstydamas, suklys. Tas, kuris mąsto nenorėdamas mokytis, susidurs su sunkumais.
Konfucijus

Dar mokykloje gerai žinojome *visų* nykstamai mažėjančios geometrinės progesijos narių sumos formulę

$$S := b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots = \frac{b_1}{1-q};$$

čia q – progresijos vardiklis. Kaip suprasti tokią formulę? Kodėl ji teisinga tik tada, kai $|q| < 1$? Tokie klausimai iškyla, kai norime susumuoti be galo daug skaičių ir griežtai apibrėžti visų jų sumą. Juos nagrinėja skaičių eilučių teorija.

Tarkime, kad turime skaičių seką $\{a_n, n \in N\}$. Reiškinys

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

arba trumpai –

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

simbolizuojantis visų sekos narių sumą (kol kas dar neapibrėžtą), vadinamas *skaičių eilute*, o sekos nariai a_n vadinami *eilutės nariais.*

3.1. Apibrėžimas. Skaičių eilutės

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

N-ąja *daline suma* vadinamas skaičius $S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_N$. Jei dalinių sumų seka $\{S_N\}$ turi ribą (baigtinę arba begalinę)

$$S := \lim_{N\to\infty} S_N,$$

tai skaičius S vadinamas eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ suma ir rašoma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Jei, be to, ši suma yra baigtinė, tai sakoma, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja (arba, kad ji sumuojama). Priešingu atveju (kai riba $\lim_{N\to\infty} S_N$ neegzistuoja arba ji lygi $\pm\infty$) sakoma, kad eilutė *diverguoja.*

$\mathcal{VM}$-TEX, 2003 04 01

3.2. Teiginys.

1) (Eilutės konvergavimo Koši kriterijus.) *Eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguoja tada ir tik tada, kai*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon, \text{ kai } n > m > N.$$

2) (Būtina konvergavimo sąlyga.) *Jei eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguoja, tai* $a_n \to 0$, *kai* $n \to \infty$[1].

3) *Jei* $a_n \geqslant 0$, *tai eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguoja tada ir tik tada, kai dalinių sumų seka* $\{S_n\}$ *aprėžta,* (*t.y. egzistuoja tokia konstanta* $C \in \mathbb{R}$, *kad* $S_n \leqslant C$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Įrodymas. 1) Pakanka pritaikyti sekų konvergavimo Koši kriterijų dalinių sumų sekai $\{S_n\}$, pastebėjus, kad $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$.

2) Jei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ (t.y. $S_n \to S \in \mathbb{R}$), tai $a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$, $n \to \infty$.

3) Jei $a_n \geqslant 0$, tai seka $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, $N \in \mathbb{N}$, didėja (nes $S_{N+1} = S_N + a_{N+1} \geqslant S_N$). Todėl seka $\{S_N\}$ konverguoja tada ir tik tada, kai ji aprėžta (2.13 teorema). $\triangle$

3.3. Pastaba. Jei $a_n \geqslant 0$, tai seka $\{S_n\}$ visada turi ribą (baigtinę arba lygią $+\infty$), todėl apie tokią (neneigiamų narių) eilutę galima sakyti, kad ji konverguoja tada ir tik tada, kai $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

3.4. Pavyzdžiai. 1) Nagrinėkime eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + \cdots + x^{n-1} + \cdots$. Su kokiais $x \in \mathbb{R}$ ši eilutė konverguoja? Kadangi eilutės nariai sudaro geometrinę progresiją, tai

$$S_n = 1 + x + \ldots + x^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-x^n}{1-x}, & \text{kai } x \neq 1, \\ n, & \text{kai } x = 1. \end{cases}$$

Panagrinėkime du atskirus atvejus.

a) $|x| < 1$. Tada $x^n \to 0$ ir todėl $S_n \to \frac{1}{1-x}$. Taigi šiuo atveju eilutė konverguoja ir

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

b) $|x| \geqslant 1$. Tada $|x^{n-1}| = 1$ (kai $|x| = 1$) arba $|x^{n-1}| \to +\infty$ (kai $|x| > 1$), ir abiem šiais atvejais neišpildyta būtina konvergavimo sąlyga. Todėl eilutė diverguoja. Be to, jei $x \geqslant 1$, tai

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = +\infty,$$

o jei $x \leqslant -1$, tai eilutės suma iš viso neapibrėžta, nes dalinių sumų riba neegzistuoja.

2) Eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots$$

diverguoja (ir jos suma lygi $+\infty$), nes esame įrodę, kad $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) = +\infty$. Ši eilutė vadinama *harmonine eilute*.

[1] Atvirkštinis teiginys neteisingas!

3) Daug konverguojančių eilučių pavyzdžių galime gauti prisiminę Teiloro formulės pavyzdžius. Pavyzdžiui, esame įrodę lygybę

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

su liekamuoju nariu $R_n(x) \to 0$, kai $n \to \infty$, su visais $x \in \mathbb{R}$. Todėl su visais $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \to e^x, \text{ kai } n \to \infty.$$

Kitaip tariant,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lygiai taip pat iš kitų nagrinėtų Teiloro eilutės pavyzdžių gauname išraiškas

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}, \quad x \in (-1, 1].$$

Apskritai, jei funkcija f yra be galo diferencijuojama taško x_0 aplinkoje, jos Teiloro eilute vadinama eilutė

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Griežtai kalbant, čia jau turime *funkcijų* eilutę, tačiau su kiekvienu fiksuotu $x \in \mathbb{R}$ ją galime nagrinėti kaip įprastą skaičių eilutę.) Jos dalinės sumos yra funkcijos f Teiloro daugianariai $P_n(x_0; x)$. Pati eilutė konverguoja ir, kas svarbiausia, jos suma lygi $f(x)$, jei Teiloro formulės liekamasis narys $R_n(x_0, x) \to 0$, kai $n \to \infty$.

3.5. Teiginys. (Eilučių palyginimas ir sumavimas.)

1) *Jei* $|a_n| \leqslant c_n$, $n \in \mathbb{N}$, *ir* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$ (*konverguoja*), *tai eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *taip pat konverguoja.*
2) *Jei* $a_n \geqslant d_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, *ir* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = +\infty$ *(diverguoja), tai taip pat* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ (*diverguoja*).
3) *Jei* $a_n > 0$ *ir* $b_n > 0$ *su visais* $n \in \mathbb{N}$, $L := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty$ *ir* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$ (*konverguoja*), *tai ir* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ (*konverguoja*).

Atskiru atveju, jei $\exists L := \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$, *tai*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty.$$

4) *Jei eilutės* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ir* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguoja, tai konverguoja ir eilutės* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *bei* $\sum_{n=1}^{\infty}(Ca_n)$ $(C \in \mathbb{R})$*; be to,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \textit{ir} \ \sum_{n=1}^{\infty}(Ca_n) = C\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Įrodymas. Pradėsime nuo paskutinės savybės.

4) Jei nurodytos eilutės konverguoja, tai

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N}(a_n + b_n) = \lim_{N\to\infty}\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=1}^{N} b_n\Big)$$
$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Panašiai

$$\sum_{n=1}^{\infty}(Ca_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N}(Ca_n) = C \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = C\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1) Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Remiantis Koši kriterijumi, atsiras toks $N \in \mathbb{N}$, kad

$$\sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon, \ \text{kai } n > m > N.$$

Iš čia

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\Big| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} c_k < \varepsilon, \ \text{kai } n > m > N.$$

Vėl pasinaudoję Koši kriterijumi gauname, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ konverguoja.

2) Kadangi $a_n \geqslant 0$, tai suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ visada apibrėžta (baigtinė arba lygi $+\infty$). Jei būtų $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$, tai iš 1) dalies gautume, kad $\sum_{n=1}^{\infty} d_n < +\infty$ – prieštara!

3) Pažymėkime

$$L := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} \frac{a_k}{b_k} < +\infty.$$

Tada atsiras toks $n_0 \in \mathbb{N}$, kad $\sup_{k\geqslant n_0} \frac{a_k}{b_k} < L + 1$. Kitaip tariant,

$$\frac{a_k}{b_k} < L + 1, \ \text{kai } k \geqslant n_0,$$

arba

$$0 < a_n \leqslant (L + 1)b_n, \ \text{kai } n \geqslant n_0.$$

Kadangi bet koks baigtinis skaičius eilutės narių neturi įtakos eilutės konvergavimui arba divergavimui, tai nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $0 < a_n \leqslant (L+1)b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Todėl

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (L+1)b_n = (L+1)\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty.$$

Atskiru atveju, jei $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{L} < +\infty.$$

Todėl pritaikę ką tik įrodytą faktą sukeistoms vietomis eilutėms, gauname, kad iš eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergavimo išplaukia eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergavimas. △

3.6. Lema. *Tarkime, kad* $a_n \geqslant a_{n+1} \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Tada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} < +\infty.$$

Įrodymas. Pažymėkime

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ ir } B_n := \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jei $n > 2^m$, tai

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots \\ &\quad\; + (a_{2^{m-1}+1} + \cdots + a_{2^m}) + (a_{2^m+1} + \cdots + a_n) \\ &\geqslant a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{m-1}a_{2^m} = a_1 + \frac{1}{2}B_m. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Jei $n < 2^m$, tai

$$\begin{aligned} A_n &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{m-1}} + \ldots + a_n) \\ &\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{m-1}a_{2^{m-1}} = a_1 + B_{m-1} \leqslant a_1 + B_m. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Iš $(*)$ ir $(**)$ gauname, kad

$$a_1 + \frac{1}{2}\sup_{m\in\mathbb{N}} B_m \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} A_n \leqslant a_1 + \sup_{m\in\mathbb{N}} B_m.$$

Iš čia gauname, kad dalinių sumų sekos $\{A_n\}$ ir $\{B_n\}$ yra arba abi aprėžtos, arba abi neaprėžtos. Todėl jų ribos arba abi baigtinės, arba abi lygios $+\infty$. Kitaip tariant, nagrinėjamos eilutės arba abi konverguoja, arba abi diverguoja. △

3.7. Išvada.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty \iff p > 1;$

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_a^p n} < +\infty \iff p > 1 \ (a > 1).$

Įrodymas. 1) Pasinaudoję lema gauname:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < +\infty \overset{3.6}{\iff} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-p)} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{(1-p)})^k < +\infty$$
$$\iff 2^{(1-p)} < 1 \iff 1 - p < 0 \iff p > 1.$$

2)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_a^p n} < +\infty \overset{3.6}{\iff} \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log_a^p 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p \log_a^p 2} < +\infty$$
$$\overset{1)}{\iff} p > 1.$$

$\triangle$

3.8. Teiginys. (Eilučių konvergavimo Koši požymis.) *Bet kokiai skaičių eilutei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *pažymėkime* $\alpha := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Tada*

1) *Jei* $\alpha < 1$, *tai eilutės* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *ir* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguoja. Be to,*

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

2) *Jei* $\alpha > 1$, *tai eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguoja.*
3) *Yra tiek konverguojančių, tiek diverguojančių eilučių, su kuriomis* $\alpha = 1$.

Įrodymas. 1) Imkime bet kokį $q \in (\alpha, 1)$. Kadangi

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geqslant n} \sqrt[k]{|a_k|} < q,$$

tai

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \sup_{k \geqslant n_0} \sqrt[k]{|a_k|} < q,$$

t.y.

$$\sqrt[k]{|a_k|} < q, \text{ kai } k \geqslant n_0,$$

arba

$$|a_k| < q^k, \text{ kai } n \geqslant n_0.$$

Kadangi $\sum_{n=1}^{\infty} q^k < +\infty$, tai remiantis 3.5.1 teiginiu eilutės $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ir $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguoja. Nelygybę jų sumoms gauname perėję prie ribos, kai $N \to \infty$, nelygybėje jų dalinėms sumoms

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} a_n\Big| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |a_n|.$$

2) Remiantis 2.21 teiginiu, egzistuoja toks sekos $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ posekis $\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\}$, kad $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to \alpha$. Kadangi $\alpha > 1$, tai atsiras toks $K \in \mathbb{N}$, kad $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$, kai $k > K$. Iš čia $|a_{n_k}| > 1$, kai $k \geqslant K$. Taigi neišpildyta būtina eilutės konvergavimo sąlyga, t.y. $a_n \not\to 0$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, nors abiejų eilučių $\alpha = 1$. $\triangle$

3.9. Teiginys. (Eilučių konvergavimo Dalambero požymis.) *Tarkime, kad eilutės* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nariai* $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. *Tada*

1) *Jei* $\alpha = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, *tai eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguoja.*

2) *Jei* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1$, *kai* $n \geqslant N$ (N *– fiksuotas skaičius*), *tai eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguoja; atskiru atveju eilutė diverguoja, kai* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| > 1$.

3) *Yra tiek konverguojančių, tiek diverguojančių eilučių, su kuriomis*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1.$$

Įrodymas. 1) Imkime bet kokį $q \in (\alpha, 1)$. Kaip ir ankstesnio teiginio įrodyme gauname, kad

$$\exists K \in \mathbb{N} : \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q, \text{ kai } k > K.$$

Kadangi baigtinis eilutės narių skaičius neturi įtakos eilutės konvergavimui, tai nemažindami bendrumo galime laikyti, kad

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Todėl iš lygybės

$$|a_n| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_2}{a_1}\right| \cdot |a_1|$$

gauname, kad

$$|a_n| < |a_1| \cdot q^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kadangi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_1| \cdot q^{n-1} < +\infty$, tai, remiantis 3.5.1 teiginiu, duotoji eilutė konverguoja.

2) Jei $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1, n \geqslant N$, tai $|a_n| \geqslant |a_N| > 0$, $n \geqslant N$. Tai reiškia, kad neišpildyta būtina konvergavimo sąlyga ir todėl nagrinėjama eilutė diverguoja.

3) $\sum \frac{1}{n} = +\infty$, $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$. △

3.10. Pavyzdžiai.

1) Rasime visus $x \in \mathbb{R}$, su kuriais eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguoja. Taikome Koši požymį:

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = 0 < 1.$$

Taigi eilutė konverguoja su visais $x \in \mathbb{R}$.

2) Dabar pritaikykime Dalambero požymį tai pačiai eilutei:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Vėl įsitikinome, kad eilutė konverguoja su visais $x \in \mathbb{R}$.

3) Nagrinėkime eilutę

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots.$$

Pradžioje pritaikykime Koši požymį. Turime

$$\alpha_n := \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[2k]{\frac{1}{3^k}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2}, & \text{kai } n = 2k, \\ \sqrt[2k-1]{\frac{1}{2^k}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k/(2k-1)}, & \text{kai } n = 2k-1. \end{cases}$$

Todėl

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_{2k} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ir } \lim_{k\to\infty}\alpha_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Iš čia

$$\alpha = \varlimsup_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{k\to\infty}\alpha_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Todėl ši eilutė konverguoja.

4) Dabar tai pačiai eilutei pritaikysime Dalambero požymį:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{3^n}}, & \text{kai } n = 2k, \\ \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{2^n}}, & \text{kai } n = 2k-1, \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n, & \text{kai } n = 2k, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n, & \text{kai } n = 2k-1. \end{cases}$$

Kadangi $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ ir $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, tai

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty \text{ ir } \varliminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Taigi, skirtingai nuo Koši požymio, Dalambero požymis šiai eilutei atsakymo neduoda.

Pasirodo, kad ne tik šia eilutei, bet ir bendru atveju Koši požymis yra „stipresnis“ už Dalambero požymį – jei Dalambero požymis duoda atsakymą, tai jį duoda ir Koši požymis. Tačiau dažnai Dalambero požymiu yra paprasčiau pasinaudoti.

3.11. Teiginys. (Abelio–Dirichlė požymis.) *Tarkime, kad:*

1) *eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dalinių sumų seka $\{A_n\}$ yra aprėžta, t.y. egzistuoja konstanta $c > 0$, su kuria*

$$|A_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant c,\ n \in \mathbb{N};$$

2) *$b_n \downarrow 0$, kai $n \to \infty$, t.y. $b_n \geqslant b_{n+1} \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, ir $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.*

Tada eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguoja.

Įrodymas. Pažymėkime eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ dalines sumas $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$. Tada, imdami $n \geqslant m \geqslant 1$, turime

$$\begin{aligned}
|S_n - S_m| &= \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=m+1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m+1}^{n} A_{k-1} b_k\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_{k+1}\right| \\
&= \left|\sum_{k=m+1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_m b_{m+1}\right| \\
&\leqslant \sum_{k=m+1}^{n-1} |A_k| (b_k - b_{k+1}) + |A_n| b_n + |A_m| b_{m+1} \\
&\leqslant c \sum_{k=m+1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + c b_n + c b_{m+1} \\
&= c(b_{m+1} - b_n) + c b_n + c b_{m+1} = 2c b_{m+1}.
\end{aligned}$$

Laisvai pasirinkę $\varepsilon > 0$ ir prisiminę, kad $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, turėsime, kad

$$\exists N \in \mathbb{N} : 0 \leqslant b_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2c}, \text{ kai } n > N.$$

Iš čia gauname, kad

$$|S_n - S_m| \leqslant 2c b_{m+1} < 2c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon, \text{ kai } n \geqslant m \geqslant N.$$

Remiantis Koši kriterijumi, seka $\{S_n\}$ turi baigtinę ribą, ir todėl eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguoja. △

3.12. Išvada. (Leibnico teorema.) *Jei $c_n \downarrow 0$, tai eilutė*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{n+1} c_n + \cdots$$

(*vadinama alternuojančia eilute*) *konverguoja.*

Įrodymas. Pakanka Abelio–Dirichlė požymyje paimti $b_n = c_n$ ir $a_n = (-1)^{n+1}$. Tada turėsime, kad $A_{2k-1} = 1$, $A_{2k} = 0$, t.y. $|A_n| \leqslant 1$. △

3.13. Pavyzdžiai. 1) Ištirsime eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konvergavimą, t.y. išsiaiškinsime, su kokiais x ši eilutė konverguoja. Turime

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x|.$$

Todėl, remiantis Koši požymiu, eilutė konverguoja, kai $|x| < 1$, ir diverguoja, kai $|x| > 1$. Liko ištirti atvejus $x = \pm 1$.

Kai $x = 1$, tai gauname harmoninė eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, t.y. eilutė diverguoja.

Kai $x = -1$, tai $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguoja, remiantis Leibnico teorema.

2) Eilutė $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{\lg n} = \frac{1}{\lg 2} + \frac{\sqrt{2}}{2\lg 3} + \frac{0}{\lg 4} - \frac{\sqrt{2}}{2\lg 5} + \cdots$.

Abelio–Dirchlė požymyje paimkime $a_n = \sin\frac{\pi n}{4}$ ir $b_n = \frac{1}{\lg n}$, $n \geqslant 2$. Įsitikinsime, kad eilutės $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ dalinių sumų seka $\{A_n\}$ aprėžta. Turime

$$
\begin{aligned}
A_2 &= a_2 = 1;\\
A_3 &= A_2 + a_3 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2};\\
A_4 &= A_3 + a_4 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2};\\
A_5 &= A_4 + a_5 = 1;\\
A_6 &= A_5 + a_6 = 0;\\
A_7 &= A_6 + a_7 = -\frac{\sqrt{2}}{2};\\
A_8 &= A_7 + a_8 = -\frac{\sqrt{2}}{2};\\
A_9 &= A_8 + a_9 = 0;\\
A_{10} &= A_9 + a_{10} = 1.
\end{aligned}
$$

Matome, kad $A_{n+8} = A_n$, $n \geqslant 2$. Todėl

$$|A_n| \leqslant 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad n \geqslant 2.$$

Remiantis Abelio–Dirichlė požymiu, eilutė konverguoja.

3.14. Apibrėžimas. Sakoma, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja absoliučiai, jei $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

Jei eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja, o eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguoja, tai sakoma, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja reliatyviai.

3.15. Teiginys. *Jei eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja absoliučiai, tai ji konverguoja.*

Įrodymas. Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Pritaikę Koši kriterijų konverguojančiai eilutei $\sum |a_n|$, turime

$$\exists\, N \in \mathbb{N} : \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon, \text{ kai } n > m \geqslant N.$$

Tada

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon, \text{ kai } n > m \geqslant N.$$

Vėl remdamiesi Koši kriterijumi matome, kad pradinė eilutė $\sum a_n$ taip pat konverguoja. $\triangle$

3.16. Apibrėžimas. Dviejų eilučių $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ir $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sandauga vadinama eilutė $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, kurios nariai yra

$$c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

3.17. Teorema. (Mertenso teorema.) *Jei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ *ir bent viena iš šių eilučių konverguoja absoliučiai, tai šių eilučių sandauga konverguoja ir* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.

Įrodymas. Apibrėžtumo dėlei tarkime, kad absoliučiai konverguoja eilutė $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Pažymėkime

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Taip pat pažymėkime A_n, B_n ir C_n atitinkamų eilučių dalines sumas bei $\beta_n := B_n - B$, $n \geqslant 0$. Tada

$$\begin{aligned}
C_n &= \sum_{k=1}^{n} c_k \\
&= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots + (a_0 b_n + \cdots + a_n b_0) \\
&= a_0(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) + a_1(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_n b_0 \\
&= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 \\
&= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n(B + \beta_0) \\
&= (a_0 B + a_1 B + \cdots + a_n B) + (a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0) \\
&= A_n B + (a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0) =: A_n B + \gamma_n.
\end{aligned}$$

Kadangi $A_n \to A$, tai $A_n B \to AB$. Todėl teorema bus įrodyta, jei įsitikinsime, kad $\gamma_n \to 0$, $n \to \infty$.

Laisvai pasirinkime $\varepsilon > 0$. Tada atsiras toks $N \in \mathbb{N}$, kad $|\beta_n| < \varepsilon$, kai $n > N$. Imdami $n > N$, įvertinsime γ_n:

$$\begin{aligned}
|\gamma_n| &\leqslant (|a_0 \beta_n| + |a_1 \beta_{n-1}| + \cdots + |a_{n-N-1} \beta_{N+1}|) \\
&\qquad + (|a_{n-N} \beta_N| + |a_{n-N+1} \beta_{N-1}| + \cdots + |a_n \beta_0|) \\
&\leqslant \varepsilon(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1-N}|) \\
&\qquad + (|a_{n-N}|\,|\beta_N| + |a_{n-N+1}|\,|\beta_{n-1}| + \cdots + |a_n|\,|b_0|) \\
&\leqslant \varepsilon\alpha + |a_{n-N}|\,|\beta_N| + |a_{n-N+1}|\,|\beta_{n-1}| + \cdots + |a_n|\,|b_0|.
\end{aligned}$$

Perėję gautoje nelygybėje prie ribos, kai $n \to \infty$, gauname:

$$0 \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leqslant \alpha\varepsilon + 0 = \alpha\varepsilon.$$

Dėl laisvo ε pasirinkimo turime $\varlimsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leqslant 0$. Iš apatinės ir viršutinės ribų savybių turime

$$0 \leqslant \varliminf_{n\to\infty} |\gamma_n| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \leqslant 0 \implies \varliminf_{n\to\infty} |\gamma_n| = \varlimsup_{n\to\infty} |\gamma_n| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} |\gamma_n| = 0. \qquad \triangle$$

3.18. Pavyzdys. Nagrinėkime eilutes

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Pastebėkime, kad pagal Leibnico teoremą ši eilutė konverguoja. Be to, kadangi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty,$$

tai eilutė konverguoja absoliučiai.

Šių eilučių sandaugos n-tasis narys

$$|c_n| = \left| \sum_{k+l=n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^l}{\sqrt{l+1}} \right| = \left| (-1)^n \sum_{k+l=n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{l+1}} \right|$$

$$= \sum_{k+l=n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{l+1}} \geqslant \sum_{k+l=n} \frac{2}{k+l+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \to 2. \quad n \to \infty$$

Gavome, kad neišpildyta būtina eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergavimo sąlyga. Taigi dviejų konverguojančių eilučių sandauga gali ir diverguoti. Todėl Mertenso toremos reikalavimas, kad bent viena iš eilučių konverguotų absoliučiai yra esminis.

3.19. Apibrėžimas. Tarkime, kad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yra skaičių eilutė, o $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ – bijekcija. Tada eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$, kurioje $\tilde{a}_n := a_{f(n)}$, vadinama eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ perstata.

3.20. Teorema. (Teorema apie eilučių perstatas.) *Tarkime, kad eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$ yra eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ perstata. Tada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

jei išpildyta bent viena iš šių dviejų sąlygų:

1) $a_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$;
2) *eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja absoliučiai.*

Pastaba. Pirmuoju atveju abi sumos gali būti lygios ir $+\infty$, antruoju atveju perstata taip pat konverguoja absoliučiai.

Įrodymas. 1) Pažymėkime

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ ir } S := \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \sup\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\} \leqslant +\infty$$

ir analogiškai

$$\tilde{S}_n := \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \text{ ir } \tilde{S} := \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \sup\{\tilde{S}_n,\ n \in \mathbb{N}\} \leqslant +\infty.$$

Imkime bet kokį skaičių $S' < S$. Tada $\exists n \in \mathbb{N} : S_n > S'$. Kadangi f yra siurjekcija (nes ji – bijekcija), tai $\exists \tilde{n} \in \mathbb{N} : \{f(1), f(2), ..., f(\tilde{n})\} \supset \{1, 2, \dots, n\}$. Tada

$$\tilde{S}_{\tilde{n}} = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \cdots + \tilde{a}_{\tilde{n}} = a_{f(1)} + a_{f(2)} + \cdots + a_{f(\tilde{n})} \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n > S'.$$

Iš čia išplaukia, kad $\tilde{S} > S'$. Dėl laisvo $S' < S$ pasirinkimo gauname, kad $\tilde{S} \geqslant S$, t.y. perstatos suma ne mažesnė už pradinės eilutės sumą.

Kadangi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_{f^{-1}(n)}$ (f – bijekcija ir todėl turi atvirkštinę funkciją $f^{-1}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$), tai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yra eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ perstata. Todėl sukeitę ankstesniame samprotavime eilutes vietomis gausime priešingą nelygybę $S \geqslant \tilde{S}$. Taigi $\tilde{S} = S$.

2) Pažymėkime $a_n^+ := \max\{a_n, 0\}$ ir $a_n^- := \max\{-a_n, 0\}$[2]. Tada

$$a_n = a_n^+ - a_n^- \quad \text{ir} \quad |a_n| = a_n^+ + a_n^-.$$

Kadangi $0 \leqslant a_n^{\pm} \leqslant |a_n|$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$, tai

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm} < +\infty.$$

Neneigiamų narių eilutėms $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ pritaikę pirmąją teoremos dalį, gauname, kad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n^+ - \tilde{a}_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^- \stackrel{1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Be to, perstata taip pat konverguoja absoliučiai, nes

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{a}_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n^+ + \tilde{a}_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^- \stackrel{1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- < +\infty.$$

△

3.21. Pastabos. 1) Panašiai galima įrodyti ir kitus teiginius apie absoliučiai konverguojančių eilučių „gerą“ elgseną. Pavyzdžiui, absoliučiai konverguojančiose „dvigubose“ eilutėse galima keisti sumavimo tvarką:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk},$$

jei $a_{nk} \geqslant 0$, $n, k \in \mathbb{N}$, arba bent viena iš „dvigubų“ eilučių konverguoja absoliučiai, t.y.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nk}| < +\infty \text{ arba } \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < +\infty.$$

2) Jei eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja reliatyviai, tai galima įrodyti visiškai priešingą savybę (Rymano teorema), kad kiekvienam skaičiui $S \in \overline{\mathbb{R}}$ egzistuoja tokia eilutės perstata $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$, kad $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = S$.

---

[2] Skaičiai $x^+ = \max\{x, 0\}$ ir $x^- = \max\{-x, 0\}$ vadinami skaičiaus x teigiama ir neigiama dalimis. Teisingi tokie tiesiogiai patikrinami sąryšiai: $0 \leqslant x^{\pm} \leqslant |x|$, $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$.