Aleksandras KRYLOVAS, Olga SUBOČ

DISKREČIOSIOS MATEMATIKOS UŽDAVINYNAS

Mokomoji knyga

Vilnius, 2004

UDK 5***: *** (***)
***

A. Krylovas, O. Suboč. Diskrečiosios matematikos uždavinynas. Mokomoji knyga. Vilnius, 2004. 87 p.: iliustr.

Autoriai A.Krylovas ir O.Suboč yra VGTU Matematinio modeliavimo katedros docentai.

ISBN 9986-05-****

Mokomoji priemonė skirta dirbti kartu su knyga "Aleksandras Krylovas. Diskrečioji matematika. Paskaitų konspektas. Vilnius, 2004, 124 p."

(64 psl.) Atitinkamos vietos pažymėtos taip. Pavyzdžiui, šis ženkliukas rodo, kad naudojama teorinė medžiaga yra iš A.Krylovo paskaitų konspekto 64 puslapio.

Uždavinyną sudaro keturios dalys: Matematinė logika ir bulio funkcijos, aibės ir kombinacijos, sąryšiai bei grafai. Kiekviename knygos skyriuje pateikiami uždavinių sprendimo pavyzdžiai bei savarankiško darbo pratimai.

Šiuo ženkleliu žymimi sprendžiami pavyzdžiai.

Visi knygos skyriai numeruojami vienu arabišku skaitmeniu (1…6); iliustracijų numeravimas yra bendras.

Aleksandras Krylovas, Olga Suboč

1. MATEMATINĖ LOGIKA IR BULIO FUNKCIJOS

Loginių operacijų lentelė

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$x \vee y$	$x \& y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0

Įrodyti antrąjį de Morgano dėsnį $\overline{(x \vee y)} \Leftrightarrow (\overline{x} \& \overline{y})$.

Sprendimas. Naudodamiesi pagrindinių loginių operacijų lentele sudarome antrojo de Morgano dėsnio teisingumo lentelę:

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \& \overline{y}$	$\overline{(x \vee y)} \Leftrightarrow (\overline{x} \& \overline{y})$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Kadangi paskutiniame lentelės stulpelyje yra tik vienetai, formulė yra tautologija (tapatingai teisinga).

Loginė funkcija $L(x, y)$ **nekeičia nulio**, jeigu $L(0, 0) = 0$.
Loginė funkcija $L(x, y)$ **nekeičia vieneto**, jeigu $L(1, 1) = 1$.

(24 psl.)

Loginė lygtis $L(x, y) = 0$ turi tiek **sprendinių**, kiek paskutiniame teisingumo lentelės stulpelyje yra **nulių**.

Analogiškai, loginė lygtis $L(x, y) = 1$ turi tiek **sprendinių**, kiek paskutiniame teisingumo lentelės stulpelyje yra **vienetų**.

Ar funkcijos $\overline{x}$ ir $x \vee y$ keičia nulį?
Sprendimas. Funkcija $\overline{x}$ keičia ir nulį, ir vienetą, nes $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$.
$x \vee y$ nekeičia nei nulio, nei vieneto, nes $0 \vee 0 = 0$, $1 \vee 1 = 1$.

Loginė lygtis $x \vee y = 0$ turi **vieną** sprendinį, $x \vee y = 1$ turi **tris** sprendinius.

Bulio funkcija $S(w,u)$ apibrėžta formule $(\overline{w} \Rightarrow u)\&(w \Rightarrow \overline{u})$.
Ar ji keičia nulį ir vienetą? Kiek sprendinių turi loginės lygtys $S(w,u) = 1$ ir $S(w,u) = 0$?

Sprendimas. Pasinaudojus loginių operacijų lentele sudarome funkcijos $S(w,u)$ **teisingumo lentelę**:

w	u	$\overline{w}$	$\overline{w} \Rightarrow u$	$\overline{u}$	$w \Rightarrow \overline{u}$	$(\overline{w} \Rightarrow u)\&(w \Rightarrow \overline{u})$
0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0

Kadangi $S(0,0) = 0$, tai Bulio funkcija **nekeičia nulio**. Paskutiniame lentelės *stulpelyje* yra du vienetai, taigi loginė lygtis $S(w,u) = 1$ turi **du sprendinius**.

Bulio funkcija $L(a,c,z)$ apibrėžta formule $((\overline{c} \oplus a) \mid z) \downarrow c$.
Ar ji keičia nulį ir vienetą? Kiek sprendinių turi loginės lygtys $L(a,c,z) = 1$ ir $L(a,c,z) = 0$?

Sprendimas Pasinaudojus loginių operacijų lentelėmis (žr. 20-21 psl.) sudarome funkcijos $L(a,c,z)$ **teisingumo lentelę**:

a	c	z	$\overline{c}$	$\overline{c} \oplus a$	$(\overline{c} \oplus a)\|z$	$L(a,c,z)$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0

Kadangi $L(0,0,0) = 0$, tai funkcija nekeičia nulio. $L(1,1,1) = 0$, todėl funkcija keičia vienetą. Taigi $L \in T_0$ ir $L \notin T_1$.

Loginė lygtis $L(a,c,z) = 0$ turi tiek sprendinių, kiek paskutiniame lentelės stulpelyje yra nulių, t.y. **septynis**. Loginė lygtis $L(a,c,z) = 1$ turi **vieną** sprendinį.

Funkcijos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **dualiąja funkcija** vadiname funkciją $\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$. Ją žymėsime $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(21 psl.)

Funkcija $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vadinama **savidualiąja**, jeigu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(22 psl.)

Kurios iš funkcijų $x \oplus y$, $\overline{x}$, $x \& y$ yra savidualiosios?

Sprendimas. Funkcijos $\overline{x}$ dualioji funkcija yra $\overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$, t.y. ji yra savidualioji. Funkcijos $x \oplus y$ dualioji yra $\overline{\overline{x} \oplus \overline{y}}$. Sudarykime jos **teisingumo lentelę**:

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \oplus \overline{y}$	$\overline{\overline{x} \oplus \overline{y}}$	$x \oplus y$
0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0

Palyginus paskutinius du lentelės *stulpelius* matome, kad jie sutampa. Galime padaryti išvadą, kad $x \oplus y$ **yra** savidualioji funkcija.

Funkcijos $x \& y$ dualioji yra $\overline{\overline{x} \& \overline{y}}$. Pasinaudojus **de Morgano** dėsniais, pertvarkome šią išraišką:

$$\overline{\overline{x} \& \overline{y}} = x \vee y \neq x \& y.$$

Matome, kad funkcija $x \& y$ **nėra savidualioji.**

Bulio funkcija $L(a, c, z)$ apibrėžta formule $((\overline{c} \oplus a) \mid z) \downarrow c$. Ar ji yra savidualioji?

Sprendimas. Pasinaudojus loginių operacijų lentelėmis sudarome funkcijos $L(a, c, z)$ **teisingumo lentelę**:

a	c	z	$\overline{c}$	$\overline{c} \oplus a$	$(\overline{c} \oplus a)\|z$	$L(a,c,z)$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	0

Dualioji funkcijai $L(a,c,z)$ yra tokia $\overline{L(\overline{a},\overline{c},\overline{z})}$, t.y. funkcija $L^* = \overline{((c \oplus \overline{a}) \mid \overline{z}) \downarrow \overline{c}}$. Sudarome jos **teisingumo lentelę**:

a	c	z	$\overline{a}$	$c \oplus \overline{a}$	$\overline{z}$	$(c \oplus \overline{a}) \mid \overline{z}$	$\overline{c}$	$((c \oplus \overline{a}) \mid \overline{z}) \downarrow \overline{c}$	L^*
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0	0	1

Kadangi funkcijų L ir L^* teisingumo lentelių paskutinieji stulpeliai nesutampa, tai funkcija $L(a,c,z)$ **nėra savidualioji**.

Pastebėkime, kad greičiau galima gauti funkciją L^* iš funkcijos L teisingumo lentelės:

$$L^*(0,0,0) = \overline{L(1,1,1)} = \overline{0} = 1,$$

$$L^*(0,0,1) = \overline{L(1,1,0)} = \overline{0} = 1,$$

$$L^*(0,1,0) = \overline{L(1,0,1)} = \overline{0} = 1,$$

$$L^*(0,1,1) = \overline{L(1,0,0)} = \overline{0} = 1,$$

$$L^*(1,0,0) = \overline{L(0,1,1)} = \overline{0} = 1,$$

$$L^*(1,0,1) = \overline{L(0,1,0)} = \overline{0} = 1,$$

$$L^*(1,1,0) = \overline{L(0,0,1)} = \overline{1} = 0,$$

$$L^*(1,1,1) = \overline{L(0,0,0)} = \overline{0} = 1,$$

(23 psl.)

Kiekviena (išskyrus $const = 0$) loginė funkcija užrašoma **tobuląja disjunkcine normaliąja forma**:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}.$$

(23 psl.)

Panašiai apibrėžiama **tobuloji konjunkcinė normalioji forma**:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathop{\&}_{f^*(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)=1} (x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}).$$

Parašykite funkcijos $x \Leftrightarrow y$ tobuląsias disjunkcinę ir konjunkcinę formas.
Sprendimas. Bulio funkcija $x \Leftrightarrow y$ lygi vienetui su tokiomis kintamųjų kombinacijomis: (0,0) ir (1,1). Todėl jos **tobuloji disjunkcinė normalioji forma** yra tokia:

$$x \Leftrightarrow y = \overline{x} \& \overline{y} \vee x \& y.$$

Ši funkcija lygi nuliui su tokiomis kintamųjų kombinacijomis: (0,1) ir (1,0). Keičiant kintamųjų reikšmes į priešingas (t.y. į (1,0) ir (0,1)), surašome **tobuląją normaliąją konjunkcinę formą**:

$$x \Leftrightarrow y = (\overline{x} \vee y) \& (x \vee \overline{y}).$$

Parašykite funkcijos $x \downarrow y$ tobuląsias disjunkcinę ir konjunkcinę formas.
*Sprendimas.*Funkcija $x \downarrow y$ lygi vienetui tik su (0,0), ir nuliui su šiomis kintamųjų kombinacijomis: (0,1), (1,0) ir (1,1). Todėl ją galime užrašyti tokiais būdais:

$$x \downarrow y = \overline{x} \& \overline{y},$$

$$x \downarrow y = (x \vee \overline{y}) \& (\overline{x} \vee y) \& (\overline{x} \vee \overline{y}).$$

Bulio funkcija $Q(h, e)$ apibrėžta formule $\overline{e \& (h \vee \overline{(h \Rightarrow \overline{e})})}$.
Parašykime jos tobulasias konjunkcinę ir disjunkcinę normaliąsias formas.

Sprendimas. Sudarykime Bulio funkcijos $Q(h, e)$ **teisingumo lentelę**:

h	e	$\overline{e}$	$h \Rightarrow \overline{e}$	$\overline{(h \Rightarrow \overline{e})}$	$h \vee \overline{(h \Rightarrow \overline{e})}$	$e\&(h \vee \overline{(h \Rightarrow \overline{e})})$	$Q(h, e)$
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0

Kadangi Bulio funkcija $Q(h, e)$ lygi vienetui su šiomis kintamųjų kombinacijomis – (0,0), (0,1) ir (1,0), tai jos tobuloji disjunkcinė normalioji forma yra

$$\overline{e\&(h \vee \overline{(h \Rightarrow \overline{e})})} = \overline{h}\&\overline{e} \vee \overline{h}\&e \vee h\&\overline{e}.$$

Funkcija lygi nuliui tik su (1,1). Sukeitus kintamųjų reikšmes į priešingas, surašome tobuląją disjunkcinę normaliąją formą:

$$\overline{e\&(h \vee \overline{(h \Rightarrow \overline{e})})} = (\overline{h} \vee \overline{e}).$$

(25 psl.)

Monotoninių funkcijų klasė apibrėžiama taip:

$$T_{\leqslant} = \{f : \alpha \preccurlyeq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)\}.$$

Funkcija $F(x, y) = x \Rightarrow y$ nėra monotoninė, nes $(0, 0) \preccurlyeq (1, 0)$, tačiau $F(0, 0) = 1$ o $F(1, 1) = 0$, t.y. $F(0, 0) \geq F(1, 0)$.

Ištirkime funkcijos $N(x, y) = y\&((\overline{x} \vee \overline{y}) \vee (x\&y))$ monotoniškumą.

Sprendimas. Sudarykime funkcijos $N(x, y)$ teisingumo lentelę:

x	y	$x\&y$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \vee \overline{y}$	$(x\&y) \vee (\overline{x} \vee \overline{y})$	$N(x, y)$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1	1

Matome, kad $(0, 0) \preccurlyeq (0, 1) \preccurlyeq (1, 1)$ ir $N(0, 0) \leqslant N(0, 1) \leqslant N(1, 1)$. Taip pat $(0, 0) \preccurlyeq (1, 0) \preccurlyeq (1, 1)$ ir $N(0, 0) \leqslant N(1, 0) \leqslant N(1, 1)$. Kintamųjų (0,1) ir

(1,0) reikšmių palyginti negalime (žr. 25 psl.). Taigi funkcija $N(x, y)$ yra monotoninė.

(25 psl.)

Tiesinių funkcijų klasė apibrėžiama taip:

$$T_L = \{f : f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c_0 \oplus c_1 \& x_1 \oplus c_2 \& x_2 \oplus \cdots \oplus c_n \& x_n\}$$

Ištirkime funkciją $K(x, y) = x \& y$. Jeigu ji yra tiesinė, tai

$$x \& y = c_0 \oplus c_1 \& x \oplus c_2 \& y.$$

Pasinaudojus funkcijos $K(x, y)$ teisingumo lentele surasime koeficientus c_i. Įstatysime į gautą išraišką kelias kintamųjų kombinacijas ir prilyginsime rezultatą atsakymui iš teisingumo lentelės:

$$K(0, 0) = 0, \quad \text{tuomet} \quad c_0 \oplus c_1 \& 0 \oplus c_2 \& 0 = c_0 = 0,$$

$$K(0, 1) = 0, \quad \text{tuomet} \quad 0 \oplus c_1 \& 0 \oplus c_2 \& 1 = c_2 = 0,$$

$$K(1, 0) = 0, \quad \text{tuomet} \quad 0 \oplus c_1 \& 1 \oplus 0 \& 0 = c_1 = 0,$$

Taigi gavome, kad $x \& y = 0 \oplus 0 \& x \oplus 0 \& y$. Tačiau, įstačius į šią išraišką $(1, 1)$ gauname, kad $1 \& 1 = 1$, bet $0 \oplus 0 \& 1 \oplus 0 \& 1 = 0$. Tai reiškia, kad funkcija $K(x, y)$ nėra tiesinė.

Bulio funkcija $L(w, b, v)$ apibrėžta formule $\overline{((\overline{b} \oplus w) \mid v) \downarrow \overline{b}}$. Ar ji yra tiesinė?

Sprendimas. Jeigu funkcija yra tiesinė, tai ją galime perrašyti tokiu pavidalu:

$$L(w, b, v) = \overline{((\overline{b} \oplus w) \mid v) \downarrow \overline{b}} = c_0 \oplus c_1 \& w \oplus c_2 \& b \oplus c_3 \& w.$$

Sudarykime teisingumo lentelę:

w	b	v	$\overline{b}$	$\overline{b} \oplus w$	$(\overline{b} \oplus w)\vert v$	$((\overline{b} \oplus w)\vert v) \downarrow \overline{b}$	$L(w,b,v)$
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1	0

Pasinaudojus funkcijos $L(w,b,v)$ teisingumo lentele surasime koeficientus c_i. Įstatysime į gautą išraišką kelias kintamųjų kombinacijas ir prilyginsime rezultatą reikšmei iš teisingumo lentelės:

$$
\begin{aligned}
&L(0,0,0) = c_0 \oplus c_1\&0 \oplus c_2\&0 \oplus c_3 \oplus 0 = c_0 \oplus 0 = 1, \quad \text{t.y.} \quad c_0 = 1;\\
&L(0,0,1) = 1 \oplus c_1\&0 \oplus c_2\&0 \oplus c_3 \oplus 1 = c_3 \oplus 1 = 1, \quad \text{t.y.} \quad c_3 = 0;\\
&L(0,1,0) = 1 \oplus c_1\&0 \oplus c_2\&1 \oplus 0\&0 = c_2 \oplus 1 = 1, \quad \text{t.y.} \quad c_2 = 0;\\
&L(1,0,0) = 1 \oplus c_1\&1 \oplus 0\&0 \oplus 0\&0 = c_1 \oplus 1 = 1, \quad \text{t.y.} \quad c_1 = 0;
\end{aligned}
$$

t.y. $L(w,b,v) = 1 \oplus 0\&w \oplus 0\&b \oplus 0\&v \equiv 1$, kas reikštų, kad visos funkcijos $L(w,b,v)$ reikšmės lygios vienetui ir nepriklauso nuo loginių kintamųjų. Tačiau iš teisingumo lentelės matome, kad $L(1,1,1) = 0$. Kadangi gavome prieštaravimą, tai funkcija $L(w,b,v)$ **nėra tiesinė**.

Formulės gylis, prefiksinis pavidalas

(12 psl.)

Nustatykite propozicinės formulės
$(((\overline{p} \oplus \overline{z}) \Rightarrow b) \mid (\overline{z}\&e)) \vee (b \Leftrightarrow (p \Rightarrow z))$ gylį.

Sprendimas

Loginiai kintamieji b, e, p, ir z yra nulinio gylio formulės. Pirmojo gylio formulės gaunamos iš jų, panaudojus vieną propozicinę jungtį (atlikus vieną loginę operaciją). Pažymėkime pirmojo gylio formules A_i, kur i yra formulės numeris: $A_1 = \overline{p}$, $A_2 = \overline{z}$, $A_3 = p \Rightarrow z$. Perrašykime pradinę formulę, naudojant šiuos žymėjimus:

$$(((A_1 \oplus A_2) \Rightarrow b) \mid (A_2\&e)) \vee (b \Leftrightarrow A_3).$$

Antrojo gylio formulės gaunamos iš pirmojo gylio formulių, su jomis atlikus vieną loginę operaciją. Žymint gautas antrojo gylio formules B_i, gauname, kad $B_1 = A_1 \oplus A_2$, $B_2 = A_2 \& e$, $B_3 = b \Leftrightarrow A_3$ ir tuomet propozicinę formulę galime perrašyti tokiu būdu:

$$((B_1 \Rightarrow b) \mid B_2) \vee B_3.$$

Trečiojo gylio formulė yra viena: $C_1 = B_1 \Rightarrow b$, tuomet propozicinė formulė atrodys taip: $(C_1 \mid B_2) \vee B_3$; ketvirtojo gylio formulė – $D_1 = C_1 \mid B_2$, tai gauname $D_1 \vee B_3$, o pastarosios formulės gylis yra lygus penkiems.

Perrašykite formulę $(((\overline{p} \oplus \overline{z}) \Rightarrow b) \mid (\overline{z} \& e)) \vee (b \Leftrightarrow (p \Rightarrow z))$ prefiksiniu pavidalu.

Sprendimas.

Galime pastebėti, kad $(((\overline{p} \oplus \overline{z}) \Rightarrow b) \mid (\overline{z} \& e)) \vee (b \Leftrightarrow (p \Rightarrow z)) = A \vee B = \vee AB$, čia $A = ((\overline{p} \oplus \overline{z}) \Rightarrow b) \mid (\overline{z} \& e)$, o $B = b \Leftrightarrow (p \Rightarrow z)$. Gautas A ir B išraiškas galima perrašyti kitaip: $A = C \mid D = \mid CD$, kur $C = (\overline{p} \oplus \overline{z}) \Rightarrow b$, o $D = \overline{z} \& e$,
$B = (b \Leftrightarrow E) = (\Leftrightarrow bE)$, čia $E = (p \Rightarrow z) = (\Rightarrow pz)$.

Perrašykime gautas išraiškas C ir D:
$C = (F \Rightarrow b) = (\Rightarrow Fb)$, $F = \overline{p} \oplus \overline{z}$;
$D = I \& e = \& Ie$, $I = \overline{z} = \neg z$.
Čia $F = J \oplus K = \oplus JK$, kur $J = \overline{p} = \neg p$, $K = \overline{z} = \neg z$.

Įstatome gautas išraiškas į pradinę: $\vee AB = \vee \mid CD \Leftrightarrow bE = \vee \mid \Rightarrow Fb \& Ie \Leftrightarrow b \Rightarrow pz = \vee \mid \Rightarrow \oplus JKb \& \neg ze \Leftrightarrow b \Rightarrow pz = \vee \mid \Rightarrow \oplus \neg p \neg zb \& \neg ze \Leftrightarrow b \Rightarrow pz$.

Turnyre dalyvauja šeši sportininkai: Jonas, Jurgis, Vilius, Petras, Mindaugas, Marius.
Tą pačią rungtynių vietą gali užimti tik vienas sportininkas.
Penki sportinės loterijos lošėjai prognozavo tokius rezultatus:

1) Mindaugas – antras, Petras – ketvirtas;
2) Mindaugas – penktas, Marius – pirmas;
3) Petras – trečias, Jurgis – pirmas;
4) Jonas – ketvirtas, Marius – trečias;
5) Vilius – penktas, Jonas – ketvirtas.

Yra žinoma, kad kiekvienas lošėjas atspėjo bent vieną turnyro rezultatą. Kas kokią vietą užėmė?

Sprendimas

Pažymėkime tyrnyre dalyvaujančius sportininkus : Jonas – Jo, Jurgis –Ju, Vilius – V, Petras – P, Mindaugas – Mi, Marius – Ma. Tuomet galima sudaryti lošėjų prognozes tokiu būdu (sportininko uzimtą vietą rašysime prie jo vardo sutrumpinimo):

$$(Mi2 \vee P4)\&(Mi5 \vee Ma1)\&(P3 \vee Ju1)\&(Jo4 \vee Ma3)\&(V5 \vee Jo4)$$

Pasinaudodami **distributyvumo** dėsniu atidarysime pirmus skliaustus:

$((Mi2\&Mi5) \vee (Mi2\&Ma1) \vee (P4\&Mi5) \vee (P4\&Ma1))\&(P3 \vee Ju1)\&(Jo4 \vee Ma3)\&(V5 \vee Jo4)$

Matome, kad $Mi2\&Mi5 = 0$, kadangi tas pats žmogus negali užimti dviejų vietų. Šio reiškinio toliau nerašysime. Atidarome sekančius skliaustus:

$((Mi2\&Ma1\&P3) \vee (P4\&Mi5\&P3) \vee (P4\&Ma1\&P3) \vee (Mi2\&Ma1\&Ju1) \vee (P4\&Mi5\&Ju1) \vee (P4\&Ma1\&Ju1))\&(Jo4 \vee Ma3)\&(V5 \vee Jo4)$

Kaip matome, galime nerašyti reiškinių

$P4\&Mi5\&P3$, $P4\&Ma1\&P3$, $Mi2\&Ma1\&Ju1$ ir $P4\&Ma1\&Ju1$. T.y. lieka

$((Mi2\&Ma1\&P3) \vee (P4\&Mi5\&Ju1))\&(Jo4 \vee Ma3)\&(V5 \vee Jo4)$

Atidarome sekančius skliaustus:

$((Mi2\&Ma1\&P3\&Jo4) \vee (P4\&Mi5\&Ju1\&Jo4) \vee (Mi2\&Ma1\&P3\&Ma3) \vee (P4\&Mi5\&Ju1\&Ma3))\&(V5 \vee Jo4)$

Kaip matome, negalimi atvejai yra šie:

$P4\&Mi5\&Ju1\&Jo4$, $Mi2\&Ma1\&P3\&Ma3$.

Tuomet

$(Mi2\&Ma1\&P3\&Jo4\&V5) \vee (P4\&Mi5\&Ju1\&Ma3\&V5) \vee$
$\vee (Mi2\&Ma1\&P3\&Jo4\&Jo4) \vee (P4\&Mi5\&Ju1\&Ma3\&Jo4)$

Supaprastinus gauname:

$(Mi2\&Ma1\&P3\&Jo4\&V5) \vee (Mi2\&Ma1\&P3\&Jo4) =$
$= Ma1\&Mi2\&P3\&Jo4\&(V5 \vee V6)$

Tai reiškia, kad Marius buvo pirmas, Mindaugas antras, Petras trečias, Jonas ketvirtas. Penktą ir šeštą vietas pasidalino Vilius su Jurgiu.

2. AIBĖS IR KOMBINACIJOS

Veiksmai su aibėmis

Aibių A ir B **sąjunga** vadinama aibė, kurios elementai priklauso *bent vienai* aibei A arba B. Sąjungą žymime $A \cup B$:

(35 psl.)

$$A \cup B = \{x \in U : \quad a(x) \vee b(x)\}.$$

Aibių A ir B **sąnkirta** vadinama aibė, kurios elementai priklauso *ir aibei A, ir aibei B* (t.y. abiems aibėms). Sąnkirtą žymima $A \cap B$:

(35 psl.)

$$A \cap B = \{x \in U : \quad a(x) \& b(x)\}.$$

Aibių A ir B **skirtumas** $A \backslash B$ – aibė, sudaryta iš tų aibės A elementų, kurie *nėra aibės B elementai*:

(35 psl.)

$$A \backslash B = \{x \in U : \quad x \in A \quad \& \quad x \notin B\}.$$

Aibės A **papildinys** yra aibė $\overline{A}$, sudaryta iš tų (universaliosios aibės U elementų), kurie *nėra aibės A elementai*:

(35 psl.)

$$\overline{A} = U \diagdown A = \{x \in U : \quad x \overline{\in} A\}.$$

Pastebėsime, kad

$$A \backslash B = A \cap \overline{B}.$$

Aibės A, B ir C yra pavaizduotos 1 paveiksle (dalis a)). Pavaizduokite aibę $(B \cup C) \backslash (B \cap A)$.

Sprendimas. Užduotį išspręsime grafiškai (žr. 1 ir 2 pav.).

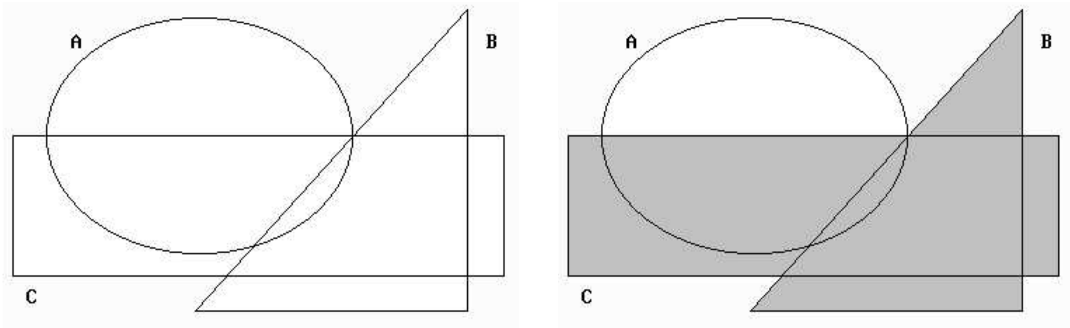
Aibės A, B ir C yra pavaizduotos 3 paveiksle (dalis a)). Pavaizduokite aibę $(C \backslash A) \cap (B \backslash A)$.

Sprendimas. Užduotį išspręsime grafiškai (žr. 3 ir 4 brėžinius).

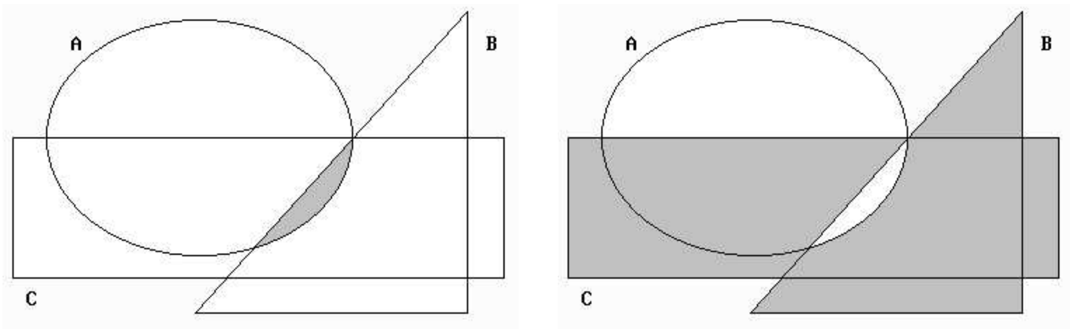
Kėliniai, gretiniai, deriniai, skaidiniai.

Kėliniai. n skirtingų elementų galima sukeisti vietomis $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ būdais.

(31 psl.)



1 . a) Aibės A, B ir C. b) Aibė $B \cup C$



2 . a) Aibė $B \cap A$. b) Aibė $(B \cup C) \setminus (B \cap A)$

(33 psl.)

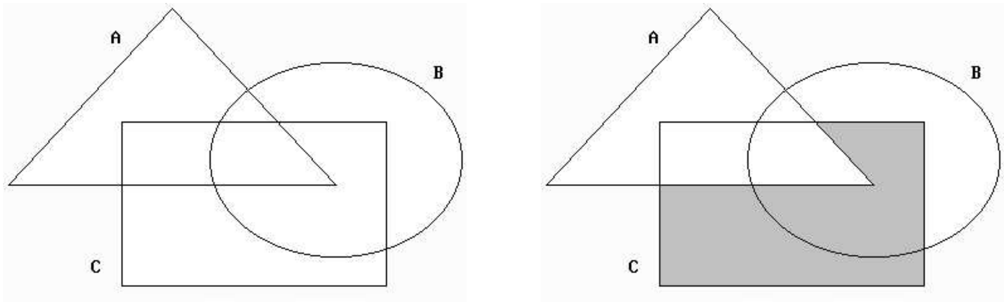
Deriniai. Tarkime, $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ yra baigtinė aibė. Poaibių, turinčių po k elementų yra

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

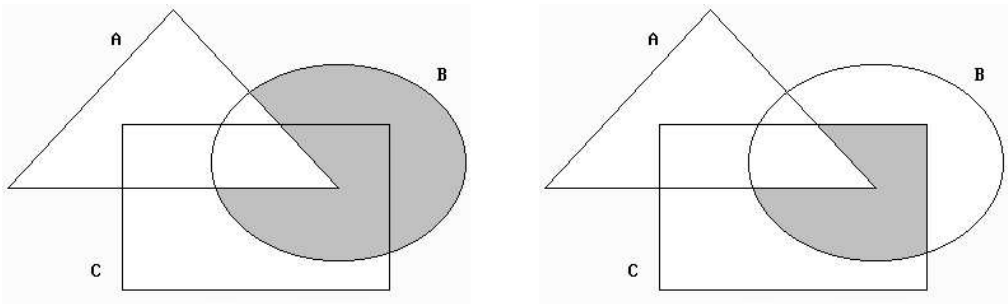
(34 psl.)

Elementų junginius, kurie vienas nuo kito skiriasi arba pačiais elementais, arba jų eile vadinami **gretiniais**. Gretinių iš n po k elementų yra

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$



3 . a) Aibės A, B ir C. b) Aibė $C\backslash A$



4 . a) Aibė $B\backslash A$. b) Aibė $(C\backslash A) \cap (B\backslash A)$

(37 psl.)

Tarkime, kad aibės A poaibiai
B_1, B_2, $\ldots B_k$ ($B_j \subset A$) tenkina šias sąlygas:
1. $B_j \neq \varnothing$;
2. $B_i \cap B_j \neq \varnothing \quad \forall i \neq j$;
3. $\cup_{j=1}^{k} B_j = A$. Tada sakome, kad poalibių B_1, B_2, $\ldots B_k$ rinkinys yra aibės A **skaidinys**.Poaibiai B_j vadinami skaidinio **blokais**.

(38 psl.)

Tokių skaidinių skaičiai, kai $|A| = n$ vadinami **antrosios rūšies Stirlingo skaičiais** ir žymimi $S(n, k)$.

(39 psl.)

Visų aibės A ($|A| = n$) skaidinių skaičius vadinamas **Belo skaičiumi**:
$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n, k), \quad B(0) = 1.$

(41 psl.)

Pirmosios rūšies Stirlingo skaičiai žymimi $s(n,k)$ ir apibrėžiami taip:
$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k), \quad k \leqslant n,$
$s(0,0) = 1.$
Iš n skirtingų elementų k **ciklų** galima sudaryti $|s(n,k)|$ būdais.

(42 psl.)

Kombinacijų daugybos taisyklė: jei elementą $a \in A$ galima išrinkti n būdais, o elementą $b \in B$ – m būdais, tai elementų poras (a,b) galima išrinkti $n \cdot m$ būdais.

(43 psl.)

Tarkime, kad iš abėcėlės $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ raidžių sudaryti ilgio k žodžiai taip, kad raidė a_j pasikartoja lygiai $p_j \geqslant 0$ kartų: $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = k$.
Tokie žodžiai vadinami **kartotiniais gretiniais**. Jų yra

$$\frac{k!}{p_1!p_2!\cdots p_n!}.$$

Aibės A poaibis $B \subset A$ vadinamas *tikriniu*, kai $B \neq \emptyset$ & $B \neq A$. Kiek *tikrinių* poaibių turi aibė $\{\xi, \{\theta, \beta, \xi\}, \{\theta\}\}$?

Sprendimas. Baigtinė aibė A, $|A| = n$ turi 2^n poaibių. Tikrinių poaibių yra dviem mažiau. Kadangi $n = 3$, tai tikrinių poaibių bus

$$2^3 - 2 = 6.$$

Kiek poaibių turi aibė
$\{\{\{\delta\}, \{\delta, \xi, \alpha\}, \{\alpha\}\}, \{\{\delta\}, \{\delta, \xi, \alpha\}, \{\alpha\}\}, \{\delta\}\}$?

Sprendimas. Kadangi aibė yra sudaryta iš trijų elementų, tai poaibių bus

$$2^3 = 8.$$

Kiek skirtingų kombinacijų galima sudaryti iš žodžio DOMINUOTI raidžių?

Sprendimas. Naudojames **kartotinių gretinių** formule. Šiuo atveju $k = 9$, o raidės D, O, M, I, N, U ir T pasikartoja atitinkamai 1, 2, 1, 2, 1, 1 ir 1 kartų. Tuomet skirtingų kombinacijų bus

$$\frac{k!}{p_1!p_2!\cdots p_n!} = \frac{9!}{1!2!1!2!1!1!1!} = \frac{362880}{4} = 90720.$$

Keliais būdais galima įdėti aštuonis skirtingus atvirukus
į šešis vienodus vokus, jei kai kurie vokai gali būtų tušti ?

Sprendimas. Apskaičiuojame skaičių

$$S(8,1) + S(8,2) + S(8,3) + S(8,4) + S(8,5) + S(8,6) =$$

$$= 1 + 127 + 966 + 1701 + 1050 + 266 = 4111.$$

Keliais būdais galima įdėti vienuolika skirtingų spalvų
rutuliukų į keturias vienodas dėžutes ?

Sprendimas. Turime suskaidyti aibę $|A| = 11$ į 4 blokus. Pasinaudojame **antrosios rūšies Stirlingo skaičių savybe**

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k).$$

Tuomet

$$S(11,4) = S(10,3) + 4 \cdot S(10,4) = 9330 + 4 \cdot 34105 = 145750.$$

Keliais būdais vienuolika šokėjų gali sudaryti ratelį iš šešių
šokėjų?

Sprendimas Iš vienuolikos šokėju išinkti šešis galima $C_{11}^6 = 462$ būdais. Siklų iš šešių šokėjų yra 120 (žr. vadovėlio 41 psl.) Sudauginus gauname:

$$462 \cdot 120 = 55440.$$

(45 psl.)

Tarkime, kad $\{a_0, a_1, \ldots\}$ yra skaičių seka. Sudarome laipsninę eilutę $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kurią vadiname sekos $\{a_n\}$ **generuojančiąja funkcija**.

Kurią skaičių seką generuoja funkcija $P(y) = \dfrac{10 - 56y}{1 - 13y + 40y^2}$?

Sprendimas. Išskaidykime funkciją į dviejų trupmenų sumą:

$$\frac{10 - 56y}{1 - 13y + 40y^2} = \frac{10 - 56y}{(1-5y)(1-8y)} = \frac{A}{1-5y} + \frac{B}{1-8y}.$$

Subendravardiklinus gauname, kad

$$\frac{10-56y}{1-13y+40y^2}=\frac{A(1-8y)+B(1-5y)}{(1-5y)(1-8y)}.$$

Kadangi trupmenos yra lygios, jų vardikliai yra lygūs, tai ir skaitikliai turi būti lygūs:

$$10-56y=A-8Ay+B-5By,\quad \text{t.y.}\quad A=2,\quad B=8.$$

Gauname:

$$\frac{10-56y}{1-13y+40y^2}=\frac{2}{1-5y}+\frac{8}{1-8y},$$

o ši funkcija generuoja seką (žr. vadovėlio 48 psl.)

$$2\cdot 5^n+8\cdot 8^n.$$

3. SĄRYŠIAI

(60 psl.)

Sąryšis $f \subset A \times B$ vadinamas **funkcija**, kai

$$\forall (a,b) \in f \& (a,c) \in f \quad \Rightarrow \quad b = c,$$

t.y. vieną elementą a negali atitinkti du skirtingi elementai b ir c.

Sąryšis $A = \{(p,h),(h,h),(z,p)\}$ yra **funkcija**.

Sąryšis $B = \{(u,x),(t,b),(w,w),(w,e),(b,t),(e,u)\}$
nėra funkcija, kadangi $(w,w) \in B$ ir $(w,e) \in B$, kur $w \neq e$.

Sąryšis $C = \{(y,w),(y,c),(g,c),(w,b),(b,h),(h,g)\}$
nėra funkcija, kadangi $(y,w) \in C$ ir $(y,c) \in C$, kur $w \neq c$.

(61 psl.)

Funkcija vadinama **injekcija**, kai
$b = f(a_1) \quad \& \quad b = f(a_2) \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2.$

(61 psl.)

Funkcija vadinama **siurjekcija**, kai
$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad b = f(a).$

(psl.)

Funkcija vadinama **bijekcija**, kai ji yra *injekcija* ir *siurjekcija*.

Ar funkcija $A = \{(c,a),(a,d),(t,u),(y,c),(d,t),(u,y)\}$
yra bijekcija?

Sprendimas. Patikrinkime, ar funkcija yra **injekcija**. Kadangi visos funkcijos reikšmės (a,d,u,c,t,y) yra skirtingos, tai funkcija A yra injekcija.

Kadangi funkcija yra ir **siurjekcija**, tai ji yra ir **bijekcija**.

Ar funkcija $B = \{(t,u),(d,t),(z,q),(r,t),(q,q),(u,d)\}$
yra bijekcija?

Sprendimas. Kadangi yra poros su vienodomis funkcijos reikšmemis – (d,t) ir (r,t), (z,q) ir (q,q), tai funkcija **nėra injekcija**, tuomet ji **nėra bijekcija**.

(55 psl.)

Sąryšis R aibėje A vadinamas **refleksyviuoju**, jei
$\forall a \in A \quad (a, a) \in R.$

(55 psl.)

Sąryšis vadinamas **antirefleksyviuoju**, kai
$\forall a \in A \quad \overline{\exists}(a, a) \in R.$

Ar sąryšis
$\{(w, b), (w, x), (w, v), (w, p), (b, v), (b, p), (x, b), (x, v), (x, p)\}$
yra antirefleksyvusis?

Sprendimas. Sąryšis yra **antirefleksyvus**, kadangi nėra porų (w, w), (b, b) ir (x, x).

Ar sąryšis
$A = \{(w, w), (w, v), (v, w), (v, v), (d, d), (b, b), (u, u)\}$
yra refleksyvusis?

Sprendimas. Sąryšis yra **refleksyvusis**, kadangi visiems kintamiesiems w, v, d, b ir u yra poros (w, w), (v, v), (d, d), (b, b), ir (u, u).

Ar sąryšis
$B = \{(f, f), (f, x), (f, w), (x, f), (x, x), (v, v), (w, x), (c, c)\}$
yra refleksyvusis?

Sprendimas. Sąryšis nėra **refleksyvusis**, kadangi nėra poros (w, w), tačiau jis nėra ir **antirefleksyvusis**, kadangi yra poros (f, f), (x, x), (v, v) ir (c, c).

(55 psl.)

Sąryšis R vadinamas **simetriniu**, kai
$(a, b) \in R \quad \Rightarrow \quad (b, a) \in R.$

(55 psl.)

Sąryšis R vadinamas **antisimetriniu**, kai
$(a, b) \in R \quad \& \quad (b, a) \in R \quad \Rightarrow \quad a = b.$

Ar sąryšis
$A = \{(z, c), (z, a), (b, d), (a, c), (c, z), (a, z), (c, a), (d, b)\}$
yra simetrinis?

Sprendimas. Sąryšis yra **simetrinis**, kadangi į jį įeina poros (z, c) ir (c, z), (z, a) ir (a, z), (b, d) ir (d, b), (a, c) ir (c, a).

Ar sąryšis $B = \{(a, b), (b, c), (d, s), (s, a)\}$ yra antisimetrinis?

Sprendimas. Sąryšis yra **antisimetrinis**, kadangi nėra porų (b, a), (c, b), (s, d) ir (a, s).

Ar sąryšis $C = \{(a, b), (c, b), (d, a), (a, z), (b, c), (z, x)\}$
yra simetrinis, ar antisimetrinis?

Sprendimas. Sąryšis **nėra antisimetrinis**, kadangi į jį įeina poros (c, b) ir (b, c), ir **nėra simetrinis**, nes nėra, pavyzdžiui, (b, a).

Pastaba. Sąryšis, pasižymintis **refleksyvumo** savybe, **nėra antisimetrinis**, tačiau jis gali **nebūti** ir **simetriniu**.

(55 psl.)

Sąryšis R vadinamas **tranzityviuoju**, kai
$(a, b) \in R \quad \& \quad (b, c) \in R \quad \Rightarrow \quad (a, c) \in R.$

Ar sąryšis
$A = \{(w, w), (w, v), (v, w), (v, v), (d, d), (b, b), (u, u)\}$
yra tranzityvusis?

Sprendimas. Sąryšis yra **tranzityvus**, nes yra tokios ryšių grandinės:

$$(w, w), \quad (w, v), \quad (w, v),$$

$$(v, w), \quad (w, w), \quad (v, w),$$

$$(v, w), \quad (w, v), \quad (v, v),$$

$$(w, v), \quad (v, w), \quad (w, w).$$

Ar sąryšis
$B = \{(f, f), (f, x), (f, w), (x, f), (x, x), (v, v), (w, w), (c, c)\}$
yra tranzityvusis?

Sprendimas. Sąryšis **nėra tranzityvusis**, kadangi yra (x, f) ir (f, w), tačiau nėra (x, w).

(57 psl.)

Sąryšis $R \subset A^2$ vadinamas **ekvivalentumo sąryšiu**, jei jis yra
1) refleksyvusis;
2) simetrinis;
3) tranzityvusis.

Ar sąryšis
$A = \{(w,w),(w,v),(v,w),(v,v),(d,d),(b,b),(u,u)\}$
turi ekvivalentumo sąvybę?

Sprendimas.

1) Patikrinkime, ar sąryšis yra **refleksyvusis**. Jis yra apibrėžtas aibėje $\{w,v,d,b,u\}$, ir kiekvienam iš šių elementų yra atvaizdis į jį patį: į sąryšį įeina (w,w), (v,v), (d,d), (b,b), (u,u).

2) Šis sąryšis yra ir **simetrinis**: porai (w,v) yra pora (v,w), o (w,w), (v,v), (d,d), (b,b), (u,u) yra simetriškos (sukeitus elementus vietomis gauname tą patį).

3) Sąryšis yra **tranzityvusis**, nes yra tokios elementų porų grandinės:

$$
\begin{array}{ccc}
(v,w), & (w,w), & (v,w), \\
(v,w), & (w,v), & (v,v), \\
(w,v), & (v,v), & (w,v), \\
(w,v), & (v,w), & (w,w), \\
(w,w), & (w,v), & (w,v), \\
(v,v), & (v,w), & (v,w).
\end{array}
$$

Sąryšis yra refleksyvusis, simetrinis ir tranzityvusis, taigi jis yra ir **ekvivalentumo** sąryšis.

Ar sąryšis
$B = \{(f,f),(f,x),(f,w),(x,f),(x,x),(v,v),(w,w),(c,c)\}$
turi ekvivalentumo sąvybę?

Sprendimas.

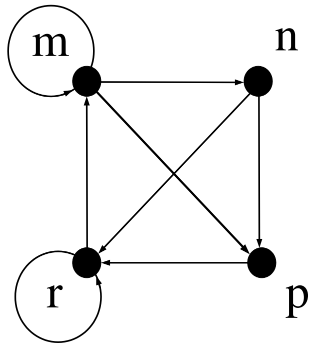
1) Patikrinkime, ar sąryšis yra **refleksyvusis**. Jis yra apibrėžtas aibėje $\{f,x,w,v,c\}$, ir į jį įeina poros
(f,f), (x,x), (v,v), (w,w), (c,c).

2) Sąryšis **nėra simetrinis**, nes porai (f,w) nėra poros (w,f). Tai reikštų, kad sąryšis **neturi ekvivalentumo sąvybės**.

Sąryšis R vadinamas **pilnuoju**, kai
$\forall a,b \in A \quad \& \quad a \neq b \quad \Rightarrow \quad (a,b) \in R \quad \vee \quad (b,a) \in R,$
t.y bet kurie du elementai a ir b turi bent vieną ryšį (a,b) arba (b,a).

(55 psl.)

Ar sąryšis $G = \{(a,b),(a,d),(b,c),(c,c),(c,a),(d,b)\}$
yra pilnasis?



5 . Sąryšis H

Sprendimas. Sąryšis **nėra pilnasis**, nes į jį neįeina nei (c, d) nei (d, c).

Ar sąryšis
$H = \{(m, p), (m, n), (m, m), (n, r), (r, m), (r, r), (n, p), (p, r)\}$
yra pilnasis?

Sprendimas. Sąryšis yra **pilnasis**. Kaip matome iš žemiau pateiktos iliustracijos (5), kiekvienas taškas yra sujungtas su visais likusiais taškais.

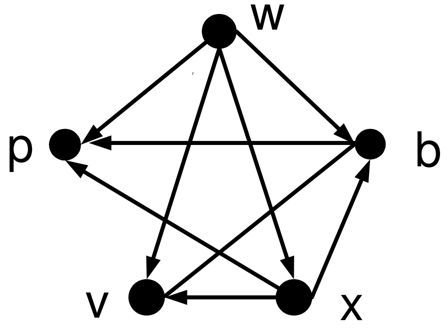
(58 psl.)

Antisimetrinis ir tranzityvusis sąryšis vadinamas **tvarkos sąryšiu**. Jei sąryšis dar tenkina refleksyvumo arba antirefleksyvumo sąlygas, jis vadinamas **negriežtosios** arba **griežtosios** tvarkos sąryšiu. Apibendrinus, galime sudaryti lentelę:

Sąryšio savybės	Sąryšio pavadinimas
antisimetrinis ir tranzityvusis	**tvarkos** sąryšis
refleksyvusis	**negriežtosios** tvarkos
antirefleksyvusis	**griežtosios** tvarkos
pilnasis	**pilnosios** tvarkos
nėra pilnasis	**dalinės** tvarkos

Ar sąryšis
$A = \{(w, b), (w, x), (w, v), (w, p), (b, v), (b, p), (x, b), (x, v), (x, p)\}$
yra tvarkos sąryšis? Jei taip, nustatyti tvarkos tipą.

Sprendimas.



6 . Sąryšis A

1) Sąryšis yra apibrėžtas aibėje $\{w, b, x, v, p\}$, . Jis yra **antisimetrinis**, nes į jį neįeina poros (b, w), (x, w), (v, w), (p, w), (v, b), (p, b), (b, x), (v, x) ir (p, x). Kaip matome iš 6 iliustracijos, visi ryšiai yra vienpusiai.

2) Sąryšis yra **tranzityvusis**, kadangi į jį įeina tokios elementų grandinės:

$$(w, b), \quad (b, v), \quad (w, v);$$
$$(w, b), \quad (b, p), \quad (w, p);$$
$$(w, x), \quad (x, b), \quad (w, b);$$
$$(w, x), \quad (x, p), \quad (w, p);$$
$$(w, x), \quad (x, v), \quad (w, v);$$
$$(x, b), \quad (b, v), \quad (x, v);$$
$$(x, b), \quad (b, p), \quad (x, p).$$

Kadangi sąryšis A yra antisimetrinis ir tranzityvusis, tai jis yra **tvarkos** sąryšis. Nustatykime tvarkos tipą.

3) Kaip matome iš 6 brėžinio, nei vienas taškas nėra susietas pats su savimi. Taigi sąryšis yra **antirefleksyvusis**. Galėjome tai nustatyti kitaip: į sąryšį neįeina poros (w, w), (b, b), (x, x), (v, v) ir (p, p). Taigi sąryšis A yra **griežtosios** tvarkos sąryšis.

4) Kaip matome iš 6 brėžinio, taškai v ir p liko nesujungti, taigi sąryšis A **nėra pilnasis**. Tai reikštų, kad sąryšis A yra **griežtosios dalinės** tvarkos sąryšis.

(55 psl.)

Sąryšis
$R^{-1} = \{(a, b) \quad : \quad (b, a) \in R\}$
vadinamas **atvirkštiniu** sąryšiui R.

Raskime sąryšį, atvirkštinį sąryšiui
$G = \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, c), (c, a), (d, b)\}$.
Sukeisime kiekvienos poros reikšmes vietomis:

$$G^{-1} = \{(b, a), (d, a), (c, b), (c, c), (a, c), (b, d)\}.$$

(56 psl.)

Apibrėžtų aibėje A sąryšių φ ir ψ **kompozicija** vadinamas sąryšis
$\varphi \circ \psi = \{(a, b) \quad \exists c \in A \quad (a, c) \in \varphi \quad \& \quad (c, b) \in \psi\}$.

Aibėje $\{p, c, e, y\}$ apibrėžti sąryšiai
$G = \{(c, p), (c, c), (c, e), (e, y), (y, p), (y, c), (y, e), (y, y)\}$,
$K = \{(p, c), (p, e), (c, p), (y, p), (y, e), (y, y)\}$.
Raskite sąryšių kompozicijas
$P = G \circ K$ ir $J = K \circ G$.

Sprendimas.

Į sąryšį G įeina (c, p), todėl išrenkame iš sąryšio K visas poras, prasidedančias elementu p: (p, c) ir (p, e). Todėl į sąryšių kompoziciją įeina šios poros:

$$(c, c), \quad (c, e).$$

Kita sąryšio G pora yra (c, c), todėl iš sąryšio K išrenkame visas poras, prasidedančias elementu c. Tokia pora yra viena: (c, p). Tuomet į sąryšių kompoziciją įeis

$$(c, p).$$

Sąryšio G porai (c, e) nieko neišrenkame, nes sąryšyje K nėra porų, prasidedančių e. Porai (e, y) galime parinkti šias: (y, p), (y, e) ir (y, y). Todėl į sąryšių kompoziciją įeis

$$(e, p), \quad (e, e), \quad (e, y).$$

Porai (y, p) parenkame (p, c) ir (p, e), porai (y, c) – porą (c, p), porai (y, e) neparenkame nieko, nes į sąryšį K neįeina poros, prasidedančios e, o porai (y, y) – poras (y, p), (y, e) ir (y, y). Kompoziciją papildys

$$(y, c), \quad (y, e), \quad (y, p), \quad (y, y).$$

Pastebėkime, kad tų pačių elementų antrą kartą nerašome. Taigi,
$P = G \circ K = \{(c,c),(c,e),(c,p),(e,p),(e,e),(e,y),(y,c),(y,e),(y,p),(y,y)\}$.

Analogiškai randame $J = K \circ G$:

Sąryšio K pirmoji elementų pora yra (p,c), todėl randame visas sąryšio G poras, kurios prasideda c. Jų yra trys: (c,p), (c,c) ir (c,e), taigi į kompoziciją įeis šios poros:

$$(p,p), \quad (p,c), \quad (p,e).$$

Antroji sąryšio K elementų pora – (p,e). Vienintelė sąryšio G pora, prasidedanti e yra (e,y), todėl kompoziciją papildys

$$(p,y).$$

Trečioji ir ketvirtoji sąryšio K poros yra (c,p) bei (y,p), tačiau į sąryšį G neįeina nei viena pora, prasidedanti p. Penktoji sąryšio K pora yra (y,e), ir ją atitinka (e,y); šeštoji pora – (y,y), ir ją atitinka kelios poros: (y,p), (y,c), (y,e) bei (y,y). Taigi kompoziciją papildys

$$(y,y) \quad (y,c), \quad (y,p), \quad (y,e).$$

Galutinis atsakymas yra
$J = K \circ G = \{(p,p),(p,c),(p,e),(p,y),(y,y),(y,c),(y,p),(y,e)\}$

(56 psl.)

Sąryšių A ir B **sąjunga** vadinamas sąryšis, kurio elementai priklauso bent vienam iš sąryšių. Sąjungą galime aprašyti taip:

$$A \cup B = \{(x,y) \quad : \quad (x,y) \in A \quad \vee \quad (x,y) \in B\}.$$

(56 psl.)

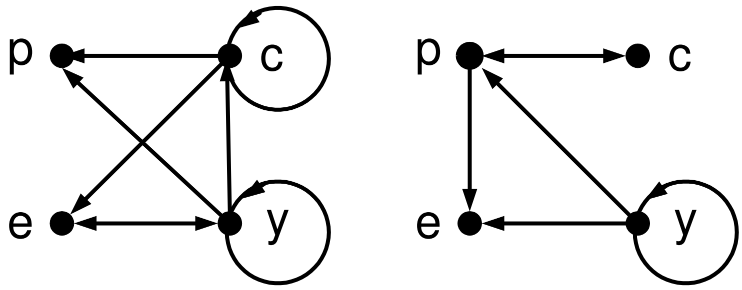
Sąryšių A ir B **sankirta** vadinamas sąryšis, kurio elementai priklauso abiems sąryšiams. Sąnkirtą galime aprašyti taip:

$$A \cap B = \{(x,y) \quad : \quad (x,y) \in A \quad \& \quad (x,y) \in B\}.$$

(56 psl.)

Sąryšių A ir B **skirtumu** vadinamas sąryšis, kuris sudarytas iš tokių sąryšio A elementų, kurie neįeina į sąryšį B. Skirtumą galime aprašyti taip:

$$A \backslash B = \{(x,y) \quad : \quad (x,y) \in A \quad \& \quad (x,y) \notin B\}.$$



7 . Sąryšiai G ir K

(56 psl.)

Sąryšio A **papildiniu** vadinamas sąryšis, sudarytas iš tų elementų, kurie neįeina į sąryšį A. Papildinį galime aprašyti taip:

$$\overline{A} = \{(x, y) \quad : \quad (x, y) \notin A\}.$$

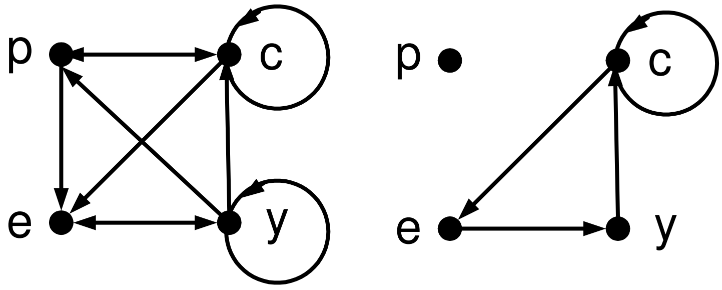
Aibėje $\{p, c, e, y\}$ apibrėžti sąryšiai
$G = \{(c, p), (c, c), (c, e), (e, y), (y, p), (y, c), (y, e), (y, y)\}$,
$K = \{(p, c), (p, e), (c, p), (y, p), (y, e), (y, y)\}$.
Raskite
a) $M = G \cup K$,
b) $N = G \backslash K$, ir
c) $Q = \overline{P \cap J}$, čia $P = G \circ K$ ir $J = K \circ G$.

Sprendimas.

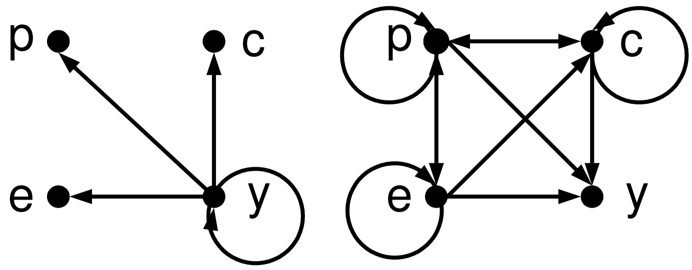
a) Sudarykime sąryšį $M = G \cup K$. Pasinaudokime brėžiniais. 7 iliustracijoje yra pavaizduoti sąryšiai G ir K. Į sąryšį M įeis elementai, kurie įeina į sąryšį G arba į K. Kaip matome iš brėžinio 8, sąryšio G brėžinį papildome ryšiais, kurie įeina į K. T.y.
$M = \{(c, p), (c, c), (c, e), (e, y), (y, p), (y, c), (y, e), (y, y), (p, c), (p, e)\}$.

b) Sudarykime sąryšį $N = G \backslash K$. Tam iš sąryšio G išmetame elementus, kurie įeina į sąryšį K (žr. 8 brėžinį). T.y. $N = \{(c, c), (c, e), (e, y), (y, c)\}$.

c) Raskime ir sąryšį $Q = \overline{P \cap J}$. Sąryšius P ir J jau buvome radę spręsdami ankstesnį uždavinį:
$P = G \circ K = \{(c, c), (c, e), (c, p), (e, p), (e, e), (e, y), (y, c), (y, e), (y, p), (y, y).\}$
$J = K \circ G = \{(p, p), (p, c), (p, e), (p, y), (y, y), (y, c), (y, p), (y, e)\}$



8 . Sąryšiai $M = G \cup K$ ir $N = G \backslash K$



9 . Sąryšiai $P \cap J$ ir $Q = \overline{P \cap J}$

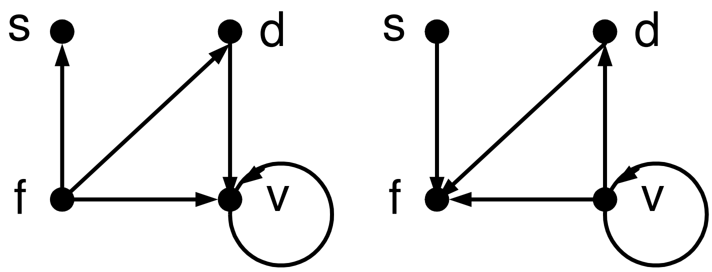
Rasime šių sąryšių **sąnkirtą**. Ją sudarys poros, kurie įeina į abu sąryšius. T.y.

$$P \cap J = \{(y, c), (y, e), (y, p), (y, y)\}$$

Į sąryšį $Q = \overline{P \cap J}$ įeis visos poros, kurios neįeina į sąryšį $P \cap J$. Šį uždavinį patogiau spręsti grafiškai:

Aibėje $\{s, d, f, v\}$ apibrėžti sąryšiai
$Y \ = \{(s, s), (s, v), (d, s), (d, v), (f, s), (f, d), (f, f), (f, v),$
$(v, d), (v, f), (v, v)\}$,
$U = \{(d, d), (d, f), (d, v), (f, s), (f, d), (v, s), (v, f), (v, v)\}$.
Raskite sąryšį $R \ = \ (Y \ \cap \ U)^{-1}$.

Sprendimas. Randame elementus, kurie įeina į abu sąryšius (žr. 10 brėžinį): $Y \ \cap \ U = \{(d, v), (f, s), (f, d), (v, f), (v, v)\}$.
Jam atvirkštinį randame, sukeitus kiekvienos poros elementus vietomis. Grafiškai tai reikštų, kad jungtys lieka tos pačios, tik pasikeičia judėjimo kryptys (žr. 10 brėžinį).



10 . Sąryšiai $Y \cap U$ ir $R = (Y \cap U)^{-1}$

(59 psl.)

Sąryšis
$R^+ = \{(a,b) \in R : \quad \exists c_1, c_2, \ldots, c_k \in A$
$(a, c_1) \in R \& (c_1, c_2) \in R \& \ldots \& (c_k, b) \in R\}$
vadinamas sąryšio R **tranzytiviuoju uždariniu**.
Jeigu R yra tranzityvus, tai $R^+ = R$.

Raskite sąryšio
$U = \{(p,p), (v,e), (h,p), (h,v), (h,h)\}$
tranzityvųjį uždarinį $K = U^+$.

Sprendimas.

Pirmoji sąryšio U elementų pora yra (p,p), tačiau iš taško p neįšeina nei vienas ryšys.
Antroji sąryšio U elementų pora yra (v,e), bet nėra ryšių, prasidedančių e.
Trečioji pora yra (h,p), prasidedančių p yra tik viena pora – (p,p), taigi į uždarinį turėtų įeiti (h,p), tačiau jis jau įeina į sąryšį U.
Ketvirtoji pora yra (h,v), jai galime parinkti (v,e), taigi į uždarinį įeis (h,e).
Penktoji pora yra (h,h), jai parenkame (h,v), tačiau pora (h,v) įeina į sąryšį.
Į uždarinį įeis visi elementai, kurie jau buvo įeję į sąryšį U, ir elementas (h,e), t.y.

$$K = U^+ = \{(p,p), (v,e), (h,p), (h,v), (h,h), (h,e)\}.$$

Pastebėkime, kad sąryšio tranzityvusis uždarinys visada yra tranzityvusis sąryšis.

4. GRAFŲ TEORIJA

Grafų apibrėžimo būdai

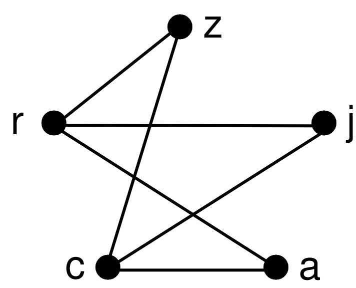
(64 psl.)

Grafas gali būti apibrėžiamas **viršūnių gretimumo aibėmis**. Tokiu atveju rašoma $\Gamma(x) = \{y, z\}$, jeigu viršūnė x yra sujungta su viršūnėmis y ir z.

Grafas G apibrėžtas savo viršūnių gretimumo aibėmis:
$\Gamma(z) = \{c, r\},\ \Gamma(j) = \{r, c\},\ \Gamma(a) = \{c, r\},$
$\Gamma(c) = \{j, a, z\},\ \Gamma(r) = \{z, a, j\}.$
Pavaizduokite šį grafą.

Sprendimas. Kaip matome, grafas turi penkias viršūnes – z, j, a, c ir r. Viršūnė z yra sujungta su viršūnėmis c ir r, viršūnė j – su r ir c, viršūnė a – su c ir r, viršūnė c – su j, a ir z, o r – su z, a ir j.

Pavaizduokime šį grafą (žr. 11 brėžinį).



11 . Grafas G

(96, 98 psl.)

Grafą galima apibrėžti **gretimumo matrica** arba **incidentumo matrica**.

$V = \{g, d, o, x, p, k\}$ – viršūnių aibė,
Grafai $G_1(V, B_2)$ ir $G_2(V, B_3)$ apibrėžti jų gretimumo ir incidentumo matricomis:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pavaizduokite šiuos grafus.

Sprendimas.

Surašykime prie kiekvienos pirmosios matricos eilutės ir stulpelio viršūnes ta pačia tvarka, kaip jos nurodytos aibėje V:

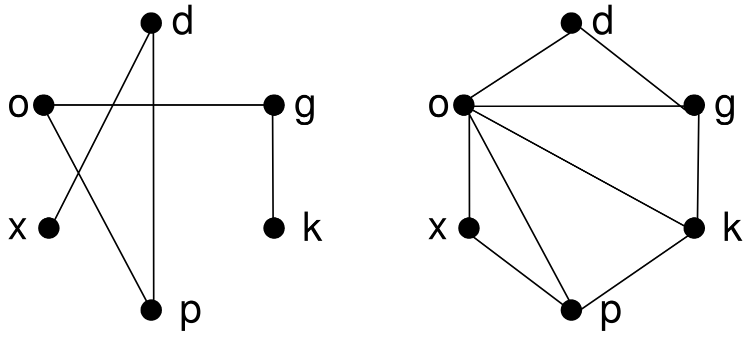
	g	d	o	x	p	k
g	0	0	1	0	0	1
d	0	0	0	1	1	0
o	1	0	0	0	1	0
x	0	1	0	0	0	0
p	0	1	1	0	0	0
k	1	0	0	0	0	0

Pirmojoje eilutėje parašyta raidė g. Tai reiškia, kad ieškosime viršūnių, kurios yra gretimos šiai viršūnei. Pirmojoje eilutėje yra du vienetai: prie o ir k. Tai reikštų tą patį, kaip ir užrašas $\Gamma(g) = \{o, k\}$.
Antroje eilutės yra raidė d, šioje eilutėje vienetai yra prie x ir p. Taigi viršūnė d yra gretima viršūnėms x ir p, arba užrašius kitaip, $\Gamma(d) = \{x, p\}$. Panašiai galime perrašyti ir kitų viršūnių gretimumo aibes: $\Gamma(o) = \{g, p\}$, $\Gamma(x) = \{d\}$, $\Gamma(p) = \{d, o\}$, $\Gamma(k) = \{g\}$. Šis grafas yra pavaizduotas 12 brėžinyje.

Prie kiekvienos antros matricos eilutės parašykime viršūnes ta pačia tvarka, kaip jos nurodytos aibėje V:

g	1	1	1	0	0	0	0	0	0
d	1	0	0	1	0	0	0	0	0
o	0	1	0	1	1	1	1	0	0
x	0	0	0	0	1	0	0	1	0
p	0	0	0	0	0	1	0	1	1
k	0	0	1	0	0	0	1	0	1

Grafas turės tiek briaunų, kiek matricoje yra stulpelių. Pirmame stulpelyje vienetai yra prie g ir d, t.y. yra briauna, incidentinė šioms viršūnėms. Antrame



12 . Grafai G_1 ir G_2

stulpelyje vienetai yra prie g ir o, tai šios viršūnės yra sujungtos. Panašiai randame ir kitas briaunas: $\{g, k\}$, $\{d, o\}$, $\{o, x\}$, $\{o, p\}$, $\{o, k\}$, $\{x, p\}$ ir $\{p, k\}$. Grafas yra pavaizduotas 12 brėžinyje.

(64 psl.)

Grafo viršūnės **laipsniu** vadinamas briaunų, incidentinių šiai viršūnės skaičius.

Grafo G_1 (ankstesnis pavyzdys) viršūnių laipsniai yra šie:
$p(g) = 2$, $p(d) = 2$, $p(o) = 2$, $p(x) = 1$, $p(p) = 2$, $p(k) = 1$.

Operacijos su grafais

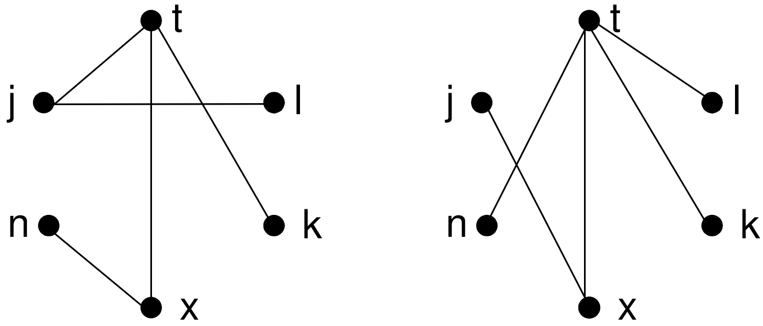
(75 psl.)

Tarkime, turime du grafus $G_1 = (V_1, B_1)$ ir $G_2 = (V_2, B_2)$.
Grafų G_1 ir G_2 **sąjunga** vadinsime grafą $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, B_1 \cup B_2)$.

(75 psl.)

Grafų G_1 ir G_2 **sąnkirta** vadinsime grafą $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, B_1 \cap B_2)$.

Grafas $G_1 = (V, B_1)$ apibrėžtas savo viršūnių bei briaunų aibėmis:
$V = \{l, t, j, n, x, k\}$,
$B_1 = \{\{l, j\}, \{t, j\}, \{t, x\}, \{t, k\}, \{n, x\}\}$.



13 . Grafai G_1 ir G_2

Grafas $G_2(V, B_2)$ apibrėžtas gretimumo matrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pavaizduokite $G_1 \cup G_2$ bei $G_1 \cap G_2$.

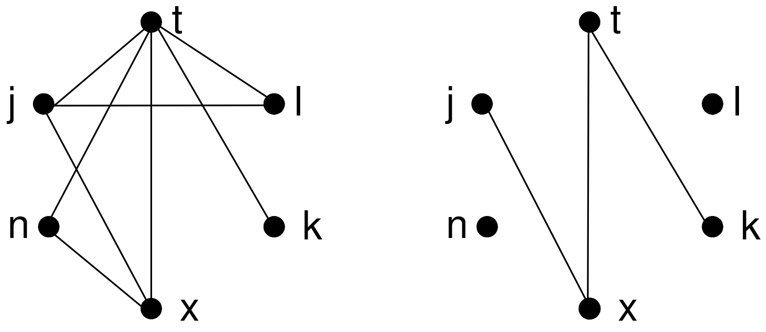
Sprendimas.

Pavaizduokime abu grafus (žr. 13 pav.):

Kadangi grafų G_1 ir G_2 viršūnių aibės sutampa, $G_1 \cup G_2$ sudarys tos pačios viršūnės, o briaunų aibę sudarys šių grafų briaunų aibių sąjunga. Grafą $G_1 \cap G_2$ sudarys tik tos briaunos, kurios įeina į abu grafus (žr. 14 brėžinį). Galime pastebėti, kad į grafą $G_1 \cap G_2$ įeina dvi **izoliuotos** viršūnės – l ir n: jos nėra sujungtos nei su viena iš kitų viršūnių.

(86 psl.)

Grafo $G = (V, B)$ **briauniniu** grafu vadinamas grafas $G_b = (V_b, B_b)$, kurio viršūnių aibė turi tiek elementų, kiek briaunų turi grafas G: $|V_b| = |B|$ ir jo viršūnės yra gretimos, jei buvo gretimos atitinkamos grafo G briaunos:



14 . Grafai $G_1 \cup G_2$ ir $G_1 \cap G_2$

$$\{v^b, w^b\} \in B_b \quad \Leftrightarrow \quad v^b = \{v_i, v_j\}, \quad w^b = \{w_i, w_j\} \quad \&$$
$$(v_i = w_i \vee v_i = w_j \vee v_j = w_i \vee v_j = w_j).$$

Grafas G su viršūnėmis $1, 2, \ldots, 6$ apibrėžtas savo briaunomis:
$r = \{1, 2\}$, $n = \{1, 3\}$, $t = \{2, 3\}$, $s = \{2, 4\}$,
$y = \{2, 5\}$, $f = \{3, 4\}$, $g = \{3, 5\}$, $w = \{3, 6\}$.
Sudarykite jo briauninį grafą.

Sprendimas.

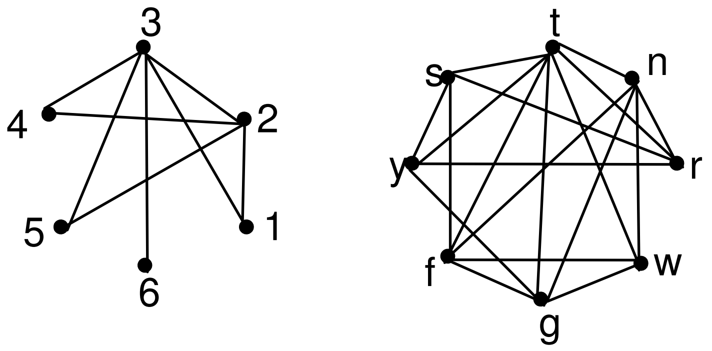
Briauna $r = \{1, 2\}$ jungia viršūnes 1 ir 2. Jai gretimos briaunos išeina iš viršūnių 1 ir 2. Šios briaunos yra $n = \{1, 3\}$, $t = \{2, 3\}$, $s = \{2, 4\}$, $y = \{2, 5\}$. Taigi į briauninį grafą įeis šios briaunos:

$$(r, n), \quad (r, t), \quad (r, s), \quad (r, y).$$

Briauna $n = \{1, 3\}$ jungia viršūnes 1 ir 3. Jai gretimos briaunos išeina iš viršūnių 1 ir 3. Šios briaunos yra $r = \{1, 2\}$, $t = \{2, 3\}$, $f = \{3, 4\}$, $g = \{3, 5\}$, $w = \{3, 6\}$. Taigi į briauninį grafą įeis šios briaunos:

$$(n, r), \quad (n, t), \quad (n, f), \quad (n, g), \quad (n, w).$$

Briaunai $t = \{2, 3\}$ gretimos yra visos briaunos: $r = \{1, 2\}$, $n = \{1, 3\}$, $s = \{2, 4\}$, $y = \{2, 5\}$, $f = \{3, 4\}$, $g = \{3, 5\}$, $w = \{3, 6\}$. Briauninį grafą



15 . Grafai G ir G_b

papildys briaunos

$$(t,r), \quad (t,n), \quad (t,s), \quad (t,y), \quad (t,f), \quad (t,g), \quad (t,w).$$

Briaunai $s = \{2,4\}$ gretimos yra $r = \{1,2\}$, $t = \{2,3\}$, $y = \{2,5\}$, $f = \{3,4\}$. Taigi į briauninį grafą įeis

$$(s,r), \quad (s,t), \quad (s,y), \quad (s,f).$$

Analogiškai randame ir likusias briauninio grafo briaunas:

$$(y,r), \quad (y,t), \quad (y,s), \quad (y,g);$$

$$(f,n), \quad (f,t), \quad (f,s), \quad (f,g), \quad (f,w);$$

$$(g,n), \quad (g,t), \quad (g,y), \quad (g,f), \quad (g,w);$$

$$(w,n), \quad (w,t), \quad (w,f), \quad (w,g).$$

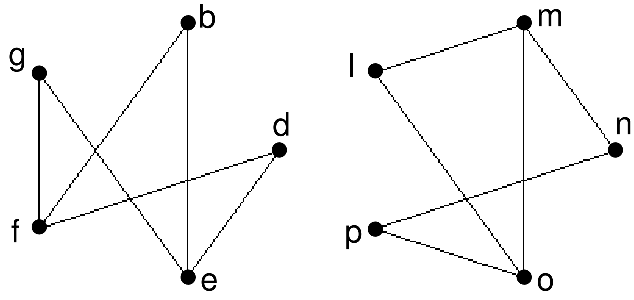
Grafai G ir jam briauninis grafas G_b yra pavaizduoti 15 brėžinyje.

(66 psl.)

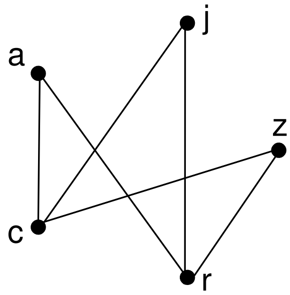
Grafai $G_1 = (V_1, B_1)$ ir $G_2 = (V_2, B_2)$ yra vadinami **izomorfiniais** (rašome $G_1 \cong G_2$), jei egzistuoja tokia *bijekcija* $f : V_1 \to V_2$, kad

$$\forall \{v_i^1, v_j^1\} \in B_1 \quad \Rightarrow \quad \{f(v_i^1), f(v_j^1)\} \in B_2,$$

$$\forall \{v_i^2, v_j^2\} \in B_2 \quad \Rightarrow \quad \{f^{-1}(v_i^2), f^{-1}(v_j^2)\} \in B_1.$$



16 . Grafai A ir B



17 . Grafas G

Grafas G apibrėžtas savo viršūnių gretimumo aibėmis:
$\Gamma(z) = \{c, r\},\ \Gamma(j) = \{r, c\},\ \Gamma(a) = \{c, r\},$
$\Gamma(c) = \{j, a, z\},\ \Gamma(r) = \{z, a, j\}.$
Kuriam pavaizduotam 16 brėžinyje grafui yra izomorfinis grafas G ?

Pavaizdavus grafą G matome (žr. 17 pav.), kad jis atrodo lygiai taip pat, kaip ir grafas A, tik jo viršūnės yra kitaip pavadintos (tai ir reiškia, kad šie grafai **yra izomorfiniai**). Apibrėžimo sąlygas tenkina ši bijekcija:

$$f(z) = d, \quad f(j) = b, \quad f(a) = g, \quad f(c) = f, \quad f(r) = e.$$

Palyginkime grafus G ir B. Grafo G viršūnės, turinčios trečią laipsnį nėra gretimos (nėra briaunos, jungiančios viršūnes c ir r), o grafo B viršūnės m ir o, turinčios trečią laipsnį, yra gretimos. Todėl iš grafo G negalima padaryti grafo B pervadinus viršūnes, taigi jie **nėra izomorfiniai**.

Grafo metrinės charakteristikos

(74 psl.)

1. Grafo **skersmeniu** vadinamas maksimalus atstumas tarp grafo viršūnių:

$$d(G) = \max_{v,w \in V} \rho(v, w).$$

2. Viršūnės **ekscentrisetu** vadinamas jos atstumų nuo kitų grafo viršūnių maksimumas:

$$e(u) = \max_{v \in V} \rho(v, u).$$

3. Viršūnė vadinama grafo **centru**, jei jos ekscentrisetas yra minimalus:

$$e(c) = \min_{v \in V} e(v).$$

4. Centro ekscentrisetas vadinamas grafo **spinduliu**:

$$r(G) = \min_{v \in V} e(v).$$

5. Paprastąją grandinę vadiname **skersmenine**, jei jos ilgis lygus grafo skersmeniui bei nėra trumpesnio, jungiančio jos galus, kelio.

Grafas G apibrėžtas savo viršūnių gretimumo aibėmis:
$\Gamma(o) = \{e, u\},\ \Gamma(b) = \{e, l\},\ \Gamma(u) = \{e, o\},$
$\Gamma(e) = \{l, u, o, b\},\ \Gamma(l) = \{b, e\}.$
Raskite
a) atstumą tarp grafo G viršūnių $\rho(o, b)$;
b) viršūnės o ekscentricitetą $e(o)$;
c) grafo G skersmenį;
d) grafo G spindulį;
e) grafo G centrų skaičių.

Sprendimas.
Pavaizduokime grafą G (žr. 18 brėžinį).
a) Trumpiausią kelią iš viršūnės o į viršūnę b sudaro šios **dvi** briaunos:

$$(o, e), \quad (e, b).$$

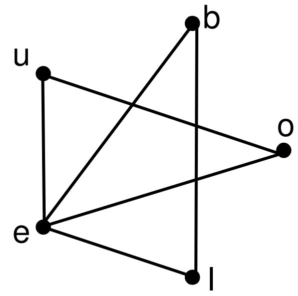
Taigi atstumas tarp grafo G viršūnių $\rho(o, b) = 2$.

b) Rasime atstumus nuo viršūnės o iki kitų grafo viršūnių. Jau radome, kad $\rho(o, b) = 2$. Atstumas tarp gretimų viršūnių lygus 1:

$$\rho(o, u) = 1, \quad \rho(o, e) = 1.$$

Iš viršūnės o į l galime nukeliauti per **dvi** briaunas

$$(o, e), \quad (e, l),$$



18 . Grafas G

tada

$$\rho(o, l) = 2.$$

Kadangi maksimalus atstumas yra lygus **dviem**, tai $e(o) = 2$.

c) Rasime visų grafo viršūnių ekscentrisetus:

$$e(o) = 2, \quad e(l) = 2, \quad e(e) = 1, \quad e(u) = 2, \quad e(b) = 2.$$

Kadangi didžiausias skaičius yra **du**, tai grafo G **skersmuo** yra lygus **dviem**.

d) Mažiausias ekscentrisetas yra lygus **vienam**, taigi grafo G **spindulys** yra lygus **vienam**.

e) Tik vienos viršūnės ekscentrisetas yra lygus grafo spinduliui ($e(e) = 1$), taigi viršūnė e yra grafo G **centras**.

(90 psl.)

Grafo $G = (V, B)$ **ciklomatiniu skaičiumi** vadinamas skaičius

$$\nu(G) = m - n + k,$$

čia k – grafo G jungiųjų komponenčių skaičius, $|V| = n$, $|B| = m$.

(91 psl.)

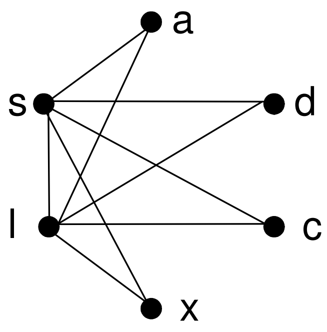
TEOREMA

Bet kuris grafas (multigrafas) turi lygiai $\nu(G)$ nepriklausomų ciklų (uždarųjų maršrutų).

Grafas G apibrėžtas savo viršūnių gretimumo aibėmis:
$\Gamma(c) = \{s, l\},\ \Gamma(d) = \{s, l\},\ \Gamma(a) = \{s, l\},$
$\Gamma(s) = \{d, x, c, a, l\},\ \Gamma(l) = \{c, d, x, a, s\},\ \Gamma(x) = \{s, l\}$.
Kiek nepriklausomų ciklų turi grafas G ?

Sprendimas

Pavaizduokime grafą G (žr. 19 pav.)



19 . Grafas G

Kaip matome, grafas neturi izoliuotųjų viršūnių, t.y. **jungiųjų komponenčių** yra viena ir

$$k = 1.$$

Viršūnių yra šešios, t.y.

$$n = |V| = 6.$$

Briaunų yra devynios, t.y.

$$m = |B| = 9.$$

Pasinaudojus teoremos sąlygomis gauname, kad nepriklausomų ciklų bus

$$\nu(G) = m - n + k = 9 - 6 + 1 = 4.$$

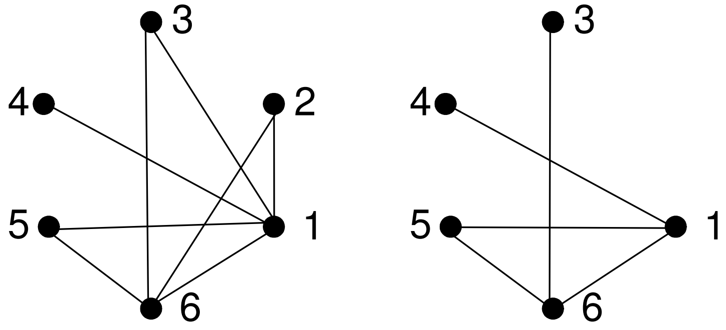
(78 psl.)

Grafo $G = (V, B)$ viršūnė $v \in G$ yra vadinama jo **sujungimo tašku**, jei grafas $G - v$ turi daugiau jungiųjų komponenčių negu grafas G.

(81 psl.)

Grafo briauną vadiname **siejančiąja** arba *tiltu*, kai pašalinus ją iš grafo, didėja jo jungiųjų komponenčių skaičius.

Grafas K yra pavaizduotas paveiksle (žr. 20 $a)$ pav.).
a) Kiek sujungimo taškų turi grafas K?
b) Kiek siejančiųjų briaunų turi grafas K?
c) Raskite grafo $\tilde{K} = K - 2 - \{3, 1\}$ briaunų skaičių.
d) Kiek jungiųjų komponenčių turi grafas $\tilde{K}$?



20 . Grafai a) K ir b) $\tilde{K}$

Sprendimas.

a) Kaip matome iš brėžinio, pašalinus viršūnę 1, viršūnė 4 taps izoliuotąja. Pašalinus kitas viršūnes, jungiųjų komponenčių skaičius nepadidės. Taigi, grafas turi **vieną** sujungimo tašką.

b) Kadangi tik vienos viršūnės laipsnis yra lygus vienetui, grafas turi **vieną** siejančiąją briauną.

c) Grafas $\tilde{K}$ yra pavaizduotas 20 brėžinio dalyje b). Kaip matome, jis turi **penkias** briaunas.

d) Kadangi grafo $\tilde{K}$ visos viršūnės nėra izoliuotos, jis turi tik **vieną** jungiąją komponentę.

Uždarieji maršrutai M_1, M_2, $\ldots M_k$ vadinami **nepriklausomais**, jei atitinkami vektoriai ciklai $\overrightarrow{M_1}$, $\overrightarrow{M_2}$, $\ldots \overrightarrow{M_k}$ yra tiesiškai nepriklausomi.

(88 psl.)

Kiek tarp pilnojo grafo K_5 ciklų $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5$ yra nepriklausomų ?
$C_1 = \{v_3, v_2, v_4, v_5, v_2, v_1, v_5, v_3\}$, $C_2 = \{v_4, v_5, v_2, v_1, v_5, v_3, v_2, v_4\}$,
$C_3 = \{v_1, v_5, v_3, v_2, v_4, v_5, v_2, v_1\}$, $C_4 = \{v_3, v_5, v_1, v_2, v_5, v_4, v_2, v_3\}$,
$C_5 = \{v_1, v_2, v_5, v_4, v_2, v_3, v_5, v_1\}$.

Sprendimas.
Sunumeruokime visas grafo briaunas:
$\{v_1, v_2\} - 1,\quad \{v_1, v_3\} - 2,\quad \{v_1, v_4\} - 3,\quad \{v_1, v_5\} - 4,$
$\{v_2, v_3\} - 5,\quad \{v_2, v_4\} - 6,\quad \{v_2, v_5\} - 7,\quad \{v_3, v_4\} - 8,$
$\{v_3, v_5\} - 9,\quad \{v_4, v_5\} - 10.$

Pirmas ciklas yra $C_1 = \{v_3, v_2, v_4, v_5, v_2, v_1, v_5, v_3\}$. Kaip matome, 2–oji, 3–oji ir 8–oji briaunos į šį ciklą neįeina, vektoriuje–cikle jas atitiks nuliai; 4–oji, 6–oji ir 10–oji briaunos praeinamos ta pačia kryptimi, kaip ir buvo apibrėžtos, todėl jas atitiks vienetai; 1–oji, 5–oji, 7–oji ir 9–oji briaunos praeinamos atvirkštine tvarka, todėl jas atitiks -1. Sudarome vektorių–ciklą:

$$M_1 = \{-1, 0, 0, 1, -1, 1, -1, 0, -1, 1\}.$$

Analogiškai sudarome ir kitus vektorius – ciklus:

$$M_2 = \{-1, 0, 0, 1, -1, 1, -1, 0, -1, 1\},$$

$$M_3 = \{-1, 0, 0, 1, -1, 1, -1, 0, -1, 1\},$$

$$M_4 = \{1, 0, 0, -1, 1, -1, 1, 0, 1, -1\},$$

$$M_5 = \{1, 0, 0, -1, 1, -1, 1, 0, 1, -1\},$$

Sudarykime iš vektorių–ciklų matricą ir apskaičiuokime jos rangą:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ketvirtąjį stulpelį pridėkime prie penktojo, septintojo ir devintojo. Pirmąjį stulpelį pridėkime prie ketvirtojo ir dešimtojo. Tuomet matrica atrodys taip:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Išbraukime nulinius stulpelius ir pridėkime ketvirtąją eilutę prie antros ir trečios, o pirmąją eilutę prie ketvirtos ir penktos.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Šios matricos rangas yra lygus **vienam**, todėl nepriklausomų ciklų bus **vienas**.

(92 psl.)

Grafo $G = (V, B)$ viršūnių aibės poaibis $S \subset V$ vadinamas **stabiliuoju iš vidaus**, jei bet kurios dvi jo viršūnės nėra gretimos grafo viršūnės:
$\{v, u\} \notin B \quad \forall v, u \in B.$

(93 psl.)

Grafo **vidinio stabiliumo skaičiumi** vadiname skaičių
$\alpha(G) = \max\limits_{S \in F} |S|.$

(94 psl.)

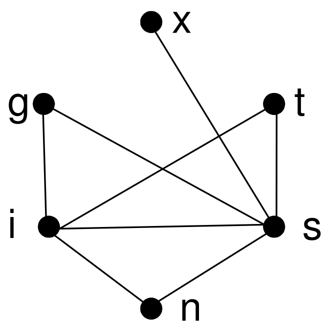
Grafo $G = (V, B)$ viršūnių aibės poaibis $S \subset V$ vadinamas **stabiliuoju iš išorės**, jei bet kuri nepriklausanti šiam poaibiui grafo viršūnė u yra gretima kuriai nors poaibio viršūnei $v \in S$:
$\forall u \in V \backslash S \quad \exists v \in S : \quad \{v, u\} \in B.$

(95 psl.)

Grafo **išorinio stabiliumo skaičiumi** vadiname skaičių
$\beta(G) = \min\limits_{S \in F} |S|.$

Grafas $M = (V, B)$ apibrėžtas savo viršūnių bei briaunų aibėmis:
$V = \{s, t, x, g, i, n\}$,
$B = \{\{s, t\}, \{s, x\}, \{s, g\}, \{s, i\}, \{s, n\}, \{t, i\}, \{g, i\}, \{i, n\}\}.$
Ar viršūnių aibė $S = \{s, n, g\}$ yra:
a) iš vidaus stabili?
b) iš išorės stabili?
c) Raskite grafo M vidinio ir išorinio stabilumo skaičius.

Sprendimas



-

21 . Grafas M

a) Kaip matome iš brėžinio (žr. 21 pav.), viršūnė s yra gretima viršūnėms n ir g, todėl viršūnių aibė $S = \{s, n, g\}$ **nėra iš vidaus stabili**.

b) Viršūnės t, x ir i yra gretimos viršūnei s, todėl viršūnių aibė $S = \{s, n, g\}$ yra **iš išorės stabili**.

c) Vidinio stabilumo skaičius yra lygus **keturiems**, nes iš grafo M viršūnių aibės galime išrinkti **keturias** negretimas viršūnes:

$$x, \quad t, \quad n, \quad g.$$

Išorinio stabilumo skaičius yra lygus **vienam**, nes yra viršūnė s, kuri yra gretima visoms likusioms viršūnėms.