Bronislovas Martinėnas

Eksperimento duomenų statistinė analizė

Mokomoji knyga

2-asis pataisytas ir papildytas leidimas

Vilnius „Technika“ 2004

UDK 517(075.8)
Ma 513

Bronislovas Martinėnas. Eksperimento duomenų statistinė analizė. Mokomoji knyga. 2-asis pataisytas ir papildytas leidimas. Vilnius: Technika, 2004. 101 p.

Leidinyje pateikti svarbiausi ir dažniausiai eksperimento duometų analizėje taikomi statistiniai metodai. Nagrinėtos diskretinių ir tolydinių skirstinių ypatybės, į juos įeinančių parametrų nustatymo bei hipotezių apie parinktą skirstinį tikrinimo būdai, geriausio atitikimo principas, rgresinė analizė ir koreliacinė analizė. Pagrindinis dėmesys skirtas statistinėje duomenų analizėje taikomoms idėjoms bei principams atskleisti.

Leidinys skirtas inžinerinių specialybių magistrantūros studijoms. Jis gali būti naudingas ir inžinieriams tyrėjams.

Recenzavo:
prof. habil. dr. A. Česnys (VGTU),
prof. habil. dr. A. Audzijonis (VPU)

VGTU leidyklos „Technika“ 542 mokomosios metodinės literatūros knyga

ISBN 9986-05-529-6

Bronislovas Martinėnas
Eksperimento duomenų statistinė analizė
Mokomoji knyga
2-asis pataisytas ir papildytas leidimas

Redagavo N. Žuvininkaitė

SL 136. 2004 10 08. 11,25 apsk.leid. l.
Saulėtekio al. 11, 10223, Vilnius-40

TURINYS

PRATARMĖ

Eksperimentu gautas matuojamojo dydžio įvertis, be naudingos informacijos, visuomet turi ir šalutinę, kurios įtaką vertinant eksperimento rezultatą stengiamasi sumažinti taikant matematinės statistikos metodus. Čia susiduriama su idealizuotų matematinės statistikos modelių ir jų pagrindu gautų metodų pritaikymo realiam eksperimentui problema, kuri beveik visuomet turi būti sprendžiama kūrybiškai ir dažnai savitai atskirose mokslo srityse.

Matematinės statistikos metodai eksperimento duomenų analizei pirmiausia pritaikyti fizikos moksle ir jų taikymo ypatybėms atskirose srityse atskleisti skirtos išsamios monografijos. Pažymėtina, kad šių metodų taikymas susijęs su nemažais matematiniais skaičiavimais ir tik kompiuterijos laimėjimai sudarė sąlygas jiems paplisti technikos mokslų, inžinerijos ir kitose srityse, susijusiose su duomenų vertinimu. Be to, taikant praktiškai dažnai atsisakoma eksperimento savitumo analizės, pirmumą teikiant vertinimų unifikavimui naudojant kompiuterinių programų paketus. Toks supaprastintas statistinių metodų taikymo duomenų analizei požiūris gali gerokai pakeisti eksperimento įverčius ir skatinti klaidingas prognozes, ypač kai jos sudaromos iš mažos duomenų imties arba skirtos eksperimentui, kurio atlikti negalima, pavyzdžiui, vertinant atominio reaktoriaus patikimumą. Iš čia išplaukia statistinės duomenų analizės teorinių pagrindų poreikis.

Šioje knygoje pateikti eksperimento duomenų statistinės analizės pagrindiniai metodai: statistinio modelio parinkimas ir paklaidų vertinimas, mažiausių kvadratų metodas, geriausio atitikimo metodas, koreliacinė analizė ir jos reikšmė regresinei analizei bei paklaidoms.

Ši knyga nepretenduoja į išsamų statistinės analizės metodų ypatybių atskleidimą vertinant eksperimentą matematine ir taikomąja prasme. Tai pernelyg plati ir greitai besiformuojanti matematinės statistikos mokslo tyrimų kryptis, kurią aprėpti vienoje knygoje beveik neįmanoma. Dėl tos pačios priežasties nepateikti ir svarbių tikimybių teorijos bei matematinės statistikos teoremų įrodymai. Pagrindinis dėmesys skiriamas statistinių metodų taikymo eksperimento duomenų analizėje pagrindimui bei juos taikant gautų įverčių kokybės vertinimui, taikant tam skirtus kriterijus. Atskleista šių kriterijų matematinė-statistinė prasmė. Pateikta pavyzdžių, kaip išplėtus eksperimento sąvoką gamybos srityje, t. y. duomenis siejant su serijiniais gaminiais, galima šiuos metodus taikyti gamybos kontrolei ir prognozei.

Statistiniai duomenų vertinimo metodai šiuo metu plačiai taikomi tiek moksle, tiek gamyboje, tačiau ne visuomet pagrįstai ir sėkmingai – dažniausiai dėl neįsigilinimo į jų statistinę esmę, statistinių modelių ir kriterijų ypatybes. Tam turi įtakos ir literatūros lietuvių kalba šiuo klausimu stoka.

Ši mokomoji knyga skirta VGTU visų technikos specialybių magistrantams, o matematiškai sudėtingesni daugiamačių atsitiktinių dydžių statistinės analizės klausimai – daugiausia tiems, kurių tiriamasis darbas susijęs su daugiaparametrių dydžių matavimais, pavyzdžiui, aplinkos taršos, termomechaninių, pjezoelektrinių ir kitų reiškinių tyrimuose.

Autorius

ĮVADAS

Eksperimento duomenų analizė yra esminis eksperimento etapas, kurio metu ne tik nustatomas gautas rezultatas, bet ir eksperimento kokybė, o kartais tokia analizė lemia ir eksperimento sėkmę. Dėl šios priežasties duomenų analizei skirta daug darbų. Juos galima suskirstyti į **dvi grupes**:

1. **Pirmoji** – tai **darbai**, nagrinėjantys matavimo paklaidų teoriją ir pagrindinius (tradicinius) duomenų analizės metodus (iš esmės statistinius).
2. **Antroji** – matematinės statistikos **darbai** apie tyrimo kryptis, kurios gali būti pritaikytos eksperimento duomenims analizuoti. Iš esmės jie skirti įvairioms geriausio atitikimo principo ir mažiausiųjų kvadratų metodo ypatybėms bei jų naujoms kryptims taikomojoje matematikoje vystyti skaičiavimų optimizavimo linkme.

Tarp jų pažymėtina: stabilių analizės metodų pavienių eksperimento duomenų nekorektiškumo požiūriu bei skirtumų tarp analizėje taikomo ir eksperimento duomenims būdingo skirstinio atžvilgiu statistika, neparametrinė statistika, duomenų neryškių aibių teorija ir intervalinė analizė, kai matematinis duomenų analizės būdas taikomas uždaviniams, kuriems klasikiniai duomenų analizės metodai neefektyvūs. Tai **ne statistiniai metodai**, bet jais remiantis nustatyti būdai **jungtinių ir kompleksinių** matavimų duomenims analizuoti. Pagal tai, kokie duomenų analizės būdai taikomi, dažnai ir matavimai skirstomi į tam tikras grupes. Tai byloja apie duomenų analizės svarbą.

1. Bendroji matavimų samprata

1.1. Įvadas

Matavimu vadiname mus dominančio dydžio ir tam tikros jo vertės, priimtos laikyti lyginimo pagrindu (vienetu), palyginimo eksperimentu procesą. Pažymėtina, kad matavimas dažniausiai nėra galutinis tikslas, o visada – tik mus dominančio objekto arba reiškinio (proceso) kurios nors ypatybės kiekybinis įvertinimas. Kadangi tarp matuojamojo bei kitų objektų esti sudėtingas ryšys ir objekto negalima tirti visumoje – **tiriama jo modelio pagrindu**. Objekto modelis – tai teorinė-fizikinė ir matematinė konstrukcija, atspindinti esmines sprendžiamam uždaviniui objekto savybes. Tiesiogiai matavimo elementu visada būna konkretus fizikinis dydis, t. y. kokybiškai išskirta tam tikra objekto pusė (ypatybė). Sudarant matavimo modelį (ką ir kaip matuoti) nepaprastai svarbu išskirti esminius fizikinį modelį apibūdinančius fizikinius dydžius. Bet kuris fizikinis dydis yra kokybiškai apibrėžta objekto ypatybė, gaunama abstrahuojantis nuo tikrovės, nors ir skirtingu lygiu. Pvz., laikas ir ilgis tiesiogiai atspindi materijos egzistavimo formas, masė ir temperatūra siejasi su visų materialių objektų esminėmis savybėmis, elektros srovės stipris apibūdina tam tikrų objektuose vykstančių procesų tipą, kietumas – tai objektų (kūnų) ypatybių, kurias lemia daugelis jų fundamentinių fizikinių savybių „išorinis aprašymas".

Matuojamasis dydis yra **pastovus objekto modelio parametras**, žymintis tą jo ypatybę, kurios kiekybinį įvertinimą ir siekiame gauti eksperimentu. Be to:

1) **matuojamasis (mus dominantis) dydis gali sutapti su tam tikru fizikiniu dydžiu** (pvz., matuojant kūnų geometrinius parametrus ar nuolatinės elektros srovės stiprį);
2) jeigu objekto savybės keičiasi laikui einant arba priklauso nuo erdvinių koordinačių, tai matuojamasis dydis yra pradinio parinkto fizikinio dydžio parametras (funkcionalas). Pavyzdžiui, kintamajai **įtampai** matuoti **parenkamas šio kitimo modelis** ir matuojamas išskirtas būdingas parametras. Tokiu parametru gali būti amplitudinė arba efektinė įtampa.

1.2. Matavimų grupavimas

Matavimai pagal įvairius požymius tradiciškai skirstomi į grupes. Nepatogiausias yra skirstymas pagal matuojamąjį dydį, kadangi dabar tokių dydžių – apie du tūkstančiai [1].

Kitas skirstymas (labiausiai paplitęs) – pagal fizikos mokslo sritį: mechanikos, termodinamikos, elektromagnetizmo, optikos, molekulinės bei atomo fizikos. Skirstoma ir smulkiau: erdvės bei laiko matavimai, akustiniai, temperatūros ir šilumos, elektriniai, magnetiniai, elektromagnetiniai, taikomi chemijoje, šviesos, optiniai, jonizuojančiojo spinduliavimo ir branduolio fizikos. Dar toliau jie skirstomi pagal matuojamojo dydžio diapazoną (pvz.: labai didelių temperatūrų (>3000 K), vidutinių (273...3000 K), mažų (<273 K); tas pats – dažnių ir kt.).

Pagal matavimo įrangos režimą matavimai grupuojami į **statinius** ir **dinaminius**. Dinaminiu vadinamas matavimas, kai matavimo eigoje keičiasi sąlygos (pvz., temperatūra, drėgmė), ir tai turi esminę reikšmę matavimo **rezultatui** bei jo paklaidai. Taigi pats matuojamasis **dydis irgi kinta**. **Dinaminio matavimo režimo pagrindinis požymis - kintamas registruojamasis signalas**.

Pagal tai, kiek kartų matuojama, skiriami **vienkarčiai** ir **daugiakarčiai** matavimai. Vienkarčiais matavimais praktikoje laikomi tokie, kai matuojama ne daugiau kaip **tris kartus**, o pakartotinai matuojama, **kad išvengtume galimos stambios matavimo klaidos**. Daugiakarčiai – atliekami **esant nemažoms atsitiktinėms paklaidoms**, kai tikslinga taikyti statistinius duomenų analizės metodus.

Matavimai pagal standartizuotas metodikas vadinami techniniais. Tokiu atveju eksperimento duomenų analizė minimali (gerai žinoma), o paklaidos iš anksto nurodytos atestuojant matavimų metodiką.

Matavimo duomenų analizės atžvilgiu vis tik **svarbiausias** [1] yra matavimų skirstymas į:

1) tiesioginius;
2) netiesioginius;
3) jungtinius (gretutinius);
4) kompleksinius.

1) **Tiesioginiai** – kai matuojamas tiesiog mus dominantis dydis Q arba jam proporcingas dydis $\boldsymbol{x}$ ir proporcingumo konstanta žinoma su nuline paklaida:

$$Q = cx, \qquad c = const\,, \tag{1.1}$$

2) **Netiesioginiai** – kai matuojamasis, t.y. mus dominantis dydis Q, yra tiesiogiai matuojamų dydžių $x_1, x_2 ... x_m$ žinoma funkcija:

$$Q = f(x_1, x_2 ... x_m)\,, \tag{1.2}$$

3) **Jungtiniai (gretutiniai)** – kai nustatoma funkcinė priklausomybė $Y=f(X)$ tarp kintamųjų dydžių X ir Y, matuojant daug $X_1, X_2 ... X_m$ verčių ir jas atitinkančių $Y_1, Y_2 ... Y_m$:

$$Y_i = f(X_i)\,, \tag{1.3}$$

4) **Kompleksiniai** – kai vienodo pobūdžio dydžių Q_1**,** $Q_2 ... Q_k$ vertės nustatomos matuojant įvairių jų tarpusavio derinių sumas ir skirtumus:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{k} C_{ij} Q_j\,, \tag{1.4}$$

čia C_{ij} yra ±1 arba 0. Taikoma kalibruojant, pavyzdžiui, svarelių rinkinius, rezistorius ir kt.

Pažymėsime, kad matavimai į grupes skirstomi gana laisvai. Pavyzdžiui, dinaminiai – gali būti laikomi jungtiniais jau pagal jų apibrėžimą (t. y. iš karto brėžiama funkcinė priklausomybė). Tačiau antra vertus, esant dinaminiam režimui galima **tiesiogiai** matuoti dydžius, turint tikslą rasti mums rūpimus kitus, susijusius su jais žinoma priklausomybe. Tai būtų dinaminiai **netiesioginiai** matavimai.

Nepaisant trūkumų, toks matavimų skirstymas į minėtas 4 kategorijas visuotinai priimtas bei plačiai taikomas.

Parinkus objekto modelį nustatomi ir fizikiniai dydžiai, kuriuos reikia matuoti norint jo pagrindu įvertinti rūpimą objekto ypatybę. Kartu numatoma parinktų dydžių matavimo metodika tų dydžių vertėms nustatyti.

Matavimo rezultatas nebūtinai turi būti kokio nors fizikinio dydžio vertė, o tarkime, kiekybinis sąryšis tarp matuojamųjų dydžių – **fizikinis dėsnis, nustatytas eksperimentu**. Tai gali būti ir fizikinio dydžio kitimą žyminti laiko funkcija, jo vertės bei laiko momentų visuma ir t. t.

Pabrėžtina, kad matuojamasis fizikinis dydis visada yra konkretaus objekto **modelio parametras**. Kai modelis pasikeičia, pasikeičia ir matuojamojo dydžio prasmė – reikia naujai nustatyti matuojamųjų parametrų vertes.

Visų matavimo kategorijų pagrindas – tiesioginiai matavimai. Tad galima sakyti, kad tiesioginio **statinio matavimo rezultatas yra skaičius**, o kitų kategorijų – fizikine prasme vienodų, skirtingų arba vienalaikių ir t. t. – vieno arba įvairių objektų dydžių rinkiniai.

Matavimo kokybę dažniausiai lemia tai, kiek gautoji vertė artima tikrajai matuojamojo dydžio vertei. Matavimo rezultato nuokrypį nuo tikrosios (suprantama, pasirinktojo modelio parametro) vertės vadiname paklaida. Kadangi tikroji vertė dažniausiai nežinoma, tai paklaidų metrologijoje stengiamasi įvertinti, o ne tiksliai išreikšti paklaidą, ir čia susiduriama su nemažomis problemomis.

2. Tiesioginių matavimų paklaidos

2.1. Paklaidų rūšys matuojant tiesiogiai

Kaip jau minėta, parinkus tiriamojo objekto modelį tiesiogiai matuojamas arba konkretus tam modeliui būdingas fizikinis dydis (pvz., nustatant kūno medžiagos tankį tiesiogiai matuojami to kūno modeliui – stačiakampiui gretasieniui, cilindrui, rutuliui ir kt. būdingi fizikiniai dydžiai: ilgis, aukštis, diametras, masė ir t. t.), arba jam būdingas parametras. Pavyzdžiui, tirdami kintamąją įtampą jos modeliu laikydami sinusoidę $U = U_0 \sin(\omega t + \alpha)$, kai $\omega = 2\pi/T$, o T - įtampos kitimo periodas, – galime tiesiogiai matuoti parametrus – įtampos amplitudę U_0, pradinę fazę α arba jos efektinę reikšmę U_{ef}. Beje, ryšys tarp šių parametrų:

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_O^T U^2 dt} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} .$$

Matavimų nuokrypius nuo tikrosios fizikinio dydžio ar parametro vertės (paklaidas) lemia daugelis su matavimu susijusių ypatybių, todėl juos įvertinti gana sunku. Tad priimta pirmiausia nuokrypius suskirstyti į **grupes pagal priežastį**. **Įprasta sakyti, kad įvertindami paklaidas pirmiausia sudarome jų modelį**:

1) išskiriamos paklaidos, atsirandančios dėl modelio neatitikimo tiriamajam objektui (pvz., tiriamojo kūno modeliu parinkome cilindrą, o iš tikrųjų jis toks nėra; matavimo metu veikia pašalinės termo EVJ; dėl temperatūros pokyčių kinta objekto savybės, nors sudarant modelį į tai neatsižvelgta);
2) paklaidos, susijusios su matavimo prietaisų, įrenginių ypatybėmis, **vadinamosios prietaisų paklaidos**;
3) paklaidos, susidarančios dėl matavimo metodų netobulumo (pvz., laidininko varžą matuojame pagal Omo dėsnį remdamiesi nuostoviai į grandinę įjungtų ampermetro ir voltmetro rodmenimis), taikomų fizikinių sąryšių netikslumo**. Tai vadinamosios metodinės paklaidos**.

Įvertinant paklaidų įtaką matavimo rezultatui įprasta jas skirstyti į **sistemingąsias** ir **atsitiktines**.

1. **Sistemingosios paklaidos** susijusios arba su pasirinktojo modelio ir realaus objekto neatitikimu, matavimo įrangos (prietaisų) ypatybėmis, arba matavimų metodika. Joms būdinga tam tikra tendencinga įtaka rezultatui, paprastai nustatoma tik specialiai atliekamais tyrimais. Ta įtaka gali būti pastovaus fizikinio dydžio arba kito parametro (pvz., temperatūros, laiko) funkcijos. Jei sistemingąją paklaidą pasiseka nustatyti – vėliau galima pakoreguoti matavimo rezultatą. Tai vadinamosios determinuotosios (apibrėžtos) paklaidos, įvertinamos pagal nustatytas funkcijas.
2. **Atsitiktinės paklaidos** susidaro dėl to, kad matavimo metu matavimo prietaisas tiesiogiai „sąveikauja“ su objektu (o ne modeliu) ir turi jam įtakos. Dėl tos sąveikos

sudėtingumo matuojant gauname skirtingas to paties fizikinio dydžio (ar parametro) vertes. Taip atsiradę nuokrypiai nuo tikrosios vertės vadinami atsitiktinėmis paklaidomis. Jas įprasta įvertinti statistiniais metodais. Kai paklaidos atsitiktinės, tais pačiais metodais kartu vertinamas ir matavimo rezultatas. Pažymėsime, kad atsitiktinės paklaidos susijusios ir su prietaisų paklaidomis.

3. Trečia paklaidų rūšis matuojant tiesiogiai – **skaičių apvalinimo paklaidos**.

2.2. Tiesioginių matavimų duomenų analizė statistiniais metodais

2.2.1. Įvadas

Bet kokioje eksperimentinio mokslo srityje nustačius kokybinius ryšius tarp skirtingų mus dominančio reiškinio pusių tolesnis etapas – kiekybinis reiškinio aprašymas. Tuo tikslu panaudojami fizikiniai dydžiai, kokybiškai ir kiekybiškai apibūdinantys dominančio reiškinio savybes. Kiekvieną tiriamą reiškinį pilnai nusako tam tikras parinktų fizikinių dydžių, susijusių tam tikrais reiškinio modelio sąlygotais ryšiais, išreiškiamais matematinėmis formulėmis, skaičius. Be to, visuose be išimties eksperimentuose tarp fizikinių dydžių egzistuoja ryšiai, vadinami fizikiniais dėsniais.

Taigi eksperimentiniame darbe, be darbo planavimo ir jo įvykdymo, esminės reikšmės turi tikslus fizikinių dydžių, apibūdinančių tiriamąjį reiškinį, įvertinimas ir tinkamas jų panaudojimas nustatant sąryšius su kitais dydžiais tiriamame reiškinyje. Čia ir susiduriame su tipiškomis problemomis.

1) Pvz.: auginant monokristalus pagrindinė problema yra tikslaus santykio tarp įvairių atomų skaičiaus palaikymas tirpale, iš kurio auga kristalas (pvz.: NaCl yra 1:1; Ca_2O_3 – 2:3 ir t. t.). Jei norima įvertinti eksperimento sėkmę (kokybę) išauginus, pavyzdžiui, 700 monokristalų, pasirodo, pakanka ištirti tik jų nedidelę dalį - apie 30. Kyla klausimas, kaip iš tokio nedidelio ištirtų kristalų skaičiaus padaryti išvadas apie likusius 670. Tokia problema esti ir analizuojant gaminių kokybę kontrolės procese, tiriant automatinių matavimo priemonių patikimumą, visuomeninę nuomonę apklausomis ir t. t.
2) Vertinant gaminių (mėginių) savybes matuojami atitinkami jų parametrai. Dažnai vien šių parametrų vidutinių verčių apibūdinti gaminių visumai nepakanka, nes juos gali keisti ir nedidelis žymiai nuo vidurkio besiskiriančių įverčių skaičius. Be to, dažnai svarbu žinoti, kaip keitėsi parametrų nuokrypiai nuo vidurkio (pvz. defektų skaičius) priklausomai nuo medžiagų, technologijų, darbuotojų kvalifikacijos ir kt.
3) Tarkime, kad eksperimentu gavome tam tikrą fizikinio dydžio vertę ir norime įvertinti, ar ji neprieštarauja teorinei šio dydžio vertei arba ankstesniems eksperimentams. Šiuo atveju eksperimentas taikomas hipotezei patvirtinti, ir eksperimentu gauta vertė turi būti įvertinta kuo išsamiau.
4) Kartais iš teorijos žinomas apytikris matematinis ryšys tarp eksperimento metu matuojamų fizikinių dydžių, o norima eksperimentu nustatyti tikslias parametrų, siejančių fizikinius dydžius, vertes. Pvz.: radioaktyvaus skilimo metu likusių nesuskilusių branduolių skaičius N per iš pradžių (t=0) buvusių branduolių skaičių N_0 išreiškiamas taip:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{2.1}$$

čia λ – tiriamos medžiagos būdinga skilimo konstanta.

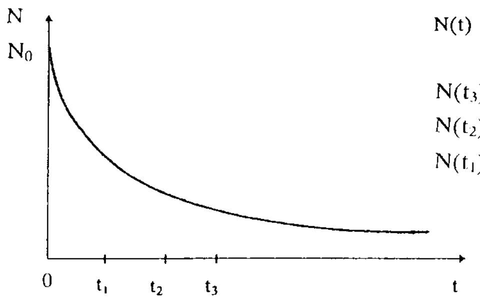
Dažniausiai eksperimento metu registruojami skilimo produktai, t. y. faktiškai suskilusių branduolių skaičius. Suskilusių per laiką t branduolių skaičių, taikydami formulę (1) išreiškiame:

$$N(t) = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}). \tag{2.2}$$

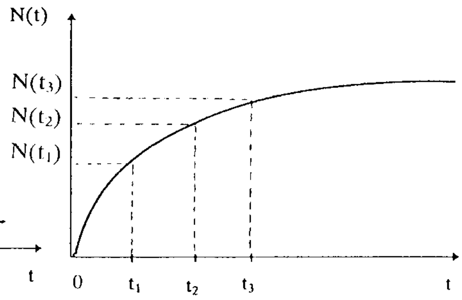
Tada skilimo konstanta λ ir jos nustatymo paklaida apskaičiuojamos iš kelių stebėjimo duomenų $N(t_1), N(t_2),\ldots$. Grafiškai tai pavaizduota (1) ir (2) paveiksluose. Ši parametro nustatymo problema yra įdomiausia daugeliui eksperimentatorių tyrėjų.

5) Kartais tenka paneigti arba patvirtinti ryšių tarp fizikinių dydžių buvimą ir, jei jis yra, nustatyti jų funkcinį pobūdį. Pavyzdžiui, ryšio tarp paukščių elgsenos rudenį ir prognozių apie artėjančios

žiemos pobūdį nustatymas; tarp žmogaus amžiaus ir jo „inercijos” aplinkos pokyčių ar ligų atžvilgiu; vidutinės oro paros temperatūros ir miškų gaisrų skaičiaus ir t. t.



1 pav. Atomo branduolių radio-aktyviojo skilimo dėsnis



2 pav. Suskilusių atomo branduolių skaičiaus laiko funkcija

Visi šie pavyzdžiai iliustruoja būdingas eksperimento duomenų analizės ypatybes. Visais atvejais eksperimento rezultatas net parinkus sąlygas nėra nulemtas vienareikšmiškai, o turi ir atsitiktinumo elementą, taigi yra **atsitiktinis dydis**. Šį dydžio matavimo duomenims (kartu ir galutiniam eksperimento rezultatui) būdingą atsitiktinumo bruožą lemia arba matuojamojo dydžio prigimtis (pvz.: radioaktyvumas yra atskirų branduolių skilimo reiškinys, kuris yra atsitiktinis), arba jis susijęs su neišvengiamomis tyrimų objekto (bandinio, mėginio) gavimo paklaidomis ir paklaidomis „matavimo“ eigoje, t. y. su matavimo netikslumais. Paklaida vadiname eksperimentu gautos dydžio vertės nuokrypį nuo tikrosios vertės ($\delta x = x_{eksp} - x_{tikra}$).

2.2.2. Tiesioginių matavimų atsitiktinių paklaidų statistinis įvertinimas

Fizikinių dydžių matavimo paklaidos skirstomos į **atsitiktines**, **sistemingąsias** ir **stambias** klaidas. Visos jos gali reikštis ir matuojant tiesiogiai. Paklaidos, kurių dydis ir ženklas nenumatomai keičiasi perėjus nuo vieno matavimo prie kito, vadinamos atsitiktinėmis. Jas dažniausiai lemia daug vienu metu pasireiškiančių priežasčių, kurių svarba matavimo duomeniui ir kryptingumas laikui bėgant keičiasi. Atsitiktinės paklaidos pasireiškia tuo, kad pakartojus bandymą (matavimą) nauja to paties fizikinio dydžio matavimo vertė gali skirtis nuo anksčiau gautos, nors matavimo sąlygos nepakinta. Išmatavus fizikinį dydį vieną kartą atsitiktinės paklaidos, suprantama, įvertinti negalima. Vis tik ją galima prognozuoti išmatavus kelis kartus ir šiuos duomenis analizuojant statistiniais metodais.

Matavimų patikimumą ir paklaidų įvertinimą pagrindžia specialus matematikos skyrius, taikant tikimybių teoriją.

Tikimybių teorijos tyrimo objektas – modeliai eksperimentų, kurių rezultatus nevienareikšmiškai nusako išorinės eksperimento sąlygos. Tokių eksperimentų pavyzdžiai yra: monetos mėtymas, telefono skambučių į “Greitosios pagalbos” stotį registracija per nustatytą laiko intervalą, taip pat – ir paprastas kūno ilgio ar jo masės matavimas kelis kartus, kai matavimo prietaisai pakankamai tikslūs. Tikimybių teorijos uždavinys yra kiekybinių santykių, būdingų tokių eksperimentų duomenims, nustatymas. Aptarsime tai nuosekliau.

Tarkime, kad rūpimą fizikinį dydį X tiesiogiai lygindami su šio dydžio etalonu, matavome N kartų, taigi turime N duomenų. Tarp jų gali būti ir dydžiu pasikartojančių. Besikartojančių skirtingų savo dydžiu iš viso gauta n rezultatų. Tarkime, kad N_1 kartų pasikartojo rezultatas x_1, N_2 kartų – x_2 ,..., N_n kartų – x_n. Dydis N_i vadinamas absoliutiniu rezultato x_i pasikartojimo dažniu. Suprantama:

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = N . \qquad (2.3)$$

Santykis ***i***-ojo rezultato pasikartojimo skaičiaus su bendru matavimų skaičiumi vadinamas **santykiniu šio rezultato pasikartojimo dažniu**:

$$W(x_i) = \frac{N_i}{N}. \tag{2.4}$$

Eksperimentai rodo, kad esant dideliam matavimų skaičiui, išraiška (2.4) artėja prie tam tikros ribos, kuri vadinama **aptariamojo įvykio** (t. y. kad matuojant būtų gauta x_i vertė), **tikimybe**:

$$P(x_i) = P(X = x_i) = \lim_{N\to\infty} W(x_i) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_i}{N}. \tag{2.5}$$

Toks tikimybės apibrėžimas pagal dažnumą, nors matematiškai ir nėra tikslus, bet labai patogus taikyti praktikoje.

Iš (2.3) išplaukia, kad

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{N} = 1. \tag{2.6}$$

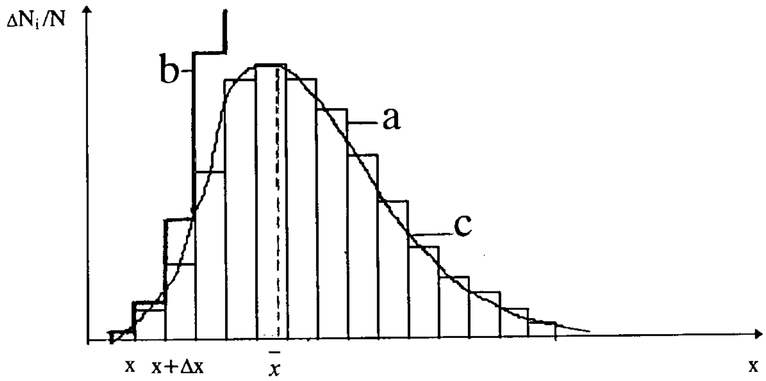
Šis sąryšis (normavimo sąlyga) išreiškia kurios nors vertės iš galimų x_i verčių pasirodymo vieno matavimo metu tikimybę.

Jei žinomos skirtingų x_i verčių pasirodymo tikimybės, – galima gauti x_i verčių vidurkį:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} N_i x_i \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{i=1}^{n} P(x_i) x_i = \hat{x}, \tag{2.7}$$

čia $\hat{x} = E(X)$ yra atsitiktinio dydžio X teorinis (matematinis) vidurkis.*

Tai atvejis, kai matuojamojo dydžio vertės yra diskretinės. Kitas atvejis – kai dydis X turi ištisinę reikšmių eilę. Pavyzdžiui, defektų skaičių gaminyje, jei jų (tarkim įbrėžimų) mažai, galima laikyti diskretiniu dydžiu (įgyjančiu fiksuotas vertes – vienas, du, trys ir t. t.). Tačiau kartu su gaminio medžiagos struktūriniais defektais (pvz., priemaišiniai nepageidaujami atomai) jų bus labai didelis skaičius, o skirtumai tarp dviejų gretimų, net ir palyginti nedidelių, skaičių, pvz., 1000 ir 1001, išreikšti procentais, nedideli. Šiuo atveju turime bene visas vertes, t. y. tolydųjį skirstinį.

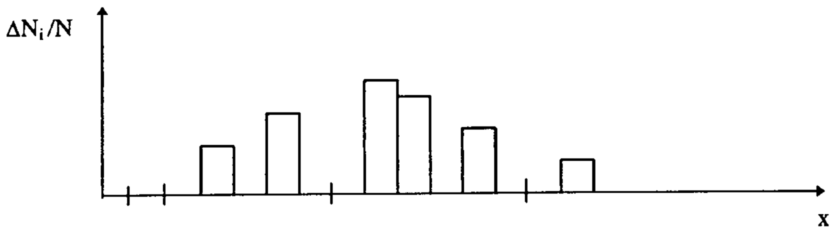


3 pav. Dydžio X matavimų serijos duomenų grafinis vaizdas: a) histograma; b) santykinius dažnius kaupiančioji histograma; c) histogramos ribinis atvejis, kai $\Delta x \to 0$, o $N \to \infty$.

Kadangi galimų X reikšmių be galo daug, tai vienos konkrečios vertės „pasirodymo" tikimybė lygi nuliui. Šiuo atveju galima kalbėti tik apie tikimybę matavimo duomeniui patekti į kurį nors X reikšmių intervalą. Grafiškai pateikdami matavimo duomenis visą X reikšmių sritį suskaidome į

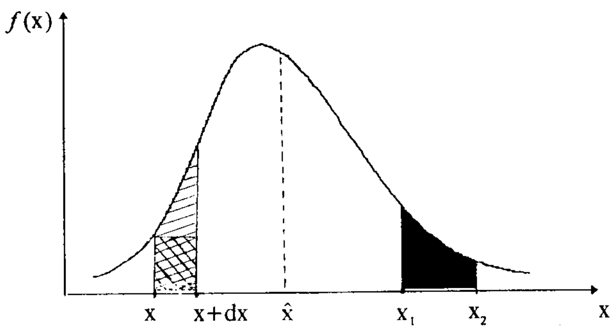
* Toliau tekste ženklas „^" virš raidės žymi ta raide pažymėto atsitiktinio dydžio matematinį vidurkį.

vienodo pločio intervalus Δx (3 pav.). Į vieną **i**-ąjį intervalą patenka, tarkime, ΔN_i duomenų. Tada ordinatės ašyje atidedame santykinį duomenų, patenkančių į kiekvieną intervalą, skaičių – santykinį duomenų dažnį matematinėje statistikoje vadinamą intervaliniu santykiniu dažniu. Taip gauname laužtinę liniją, kuri vadinama histograma. Nuosekliai sumuojant intervalinius santykinius dažnius iki fiksuotos x vertės $\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i / N \quad n = 2, 3, 4...$, gauname santykinius dydžius kaupiančio empirinio skirstinio $F_n(x)$ histogramą (3 pav. b). Beje atsitiktiniam dydžiui X turinčiam diskretinį spektrą ji gaunama sumuojant santykinius dažnius vertėms $x_i < x$. Kaupiančioji histograma visada yra kylanti kreivė ir sumuojant per visą dydžio X gautų verčių sritį $\sum_{i=1}^{n} \Delta N_i / N = 1$. Kai duomenų skaičius mažas (4 pav.), histogramą sudaryti sunku arba ir visai neįmanoma.



4 pav. Dydžio X matavimo serijos histograma, kai mažas duomenų skaičius

Tačiau jei padidiname matavimų skaičių N ir kartu sumažiname intervalo plotį, kai santykinis duomenų dažnis yra tolydinė x funkcija, tai ties riba, kai $N \to \infty$ ir $\Delta x \to 0$, laužtinė linija virsta ištisine kreive (3 pav. c). Ši kreivė apibūdina ribinį matavimo duomenų skirstinį, kurį galima gauti tokiu metodu, kai matavimo skaičius $N \to \infty$.



5 pav. Plotas po tikimybės tankio funkcija lygus vienetui. Užbrūkšniuoti plotai išreiškia tikimybę matavimo duomeniui patekti į intervalus $[x; x+dx]$ ir $[x_1; x_2]$

Jei sudarydami histogramą ordinatės kryptimi atidėtume rezultato pasirodymo dažnio santykį su intervalo pločiu $\Delta N/(N\Delta x)$, tai ties riba gautume kreivę, apibūdinančią tikimybės tankio pasiskirstymą, iš kurio nustatomas matavimo rezultatas $x_{mat} = E(X)$. Šios kreivės ordinatė – tikimybės tankis:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{\Delta N_x}{N \Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}, \tag{2.8}$$

čia $dF(x) = f(x)dx$ – du kartus užbrūkšniuotas plotas (5 pav.), beje, jis artimas visam užbrūkšniuotam plotui po kreive virš intervalo $[x; x+dx]$ (nors paveiksle atrodo kitaip, nes čia nykstamai mažas intervalas $[x; x+dx]$ išplėstas iki baigtinio), kuris ir išreiškia tikimybę matavimo duomeniui patekti į intervalą $[x; x+dx]$. Todėl plotas po kreive išreikš tikimybę gauti kokį nors matavimo duomenį ir bus lygus vienetui:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1 . \qquad (2.9)$$

Integruojama pagal visų dydžio X galimų reikšmių intervalą. Tikimybė, kad matavimo duomuo bus intervale $[x_1; x_2]$, lygi:

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx . \qquad (2.10)$$

Vidutinė matuojamojo dydžio vertė surandama iš formulės, analogiškos (7), integruojant pagal visą X dydžio galimų reikšmių intervalą:

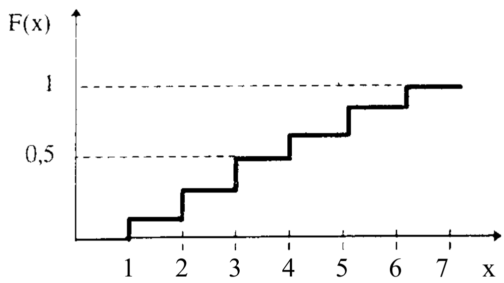
$$E(X) = \hat{x} = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx . \qquad (2.11)$$

Kreivė $f(x)$, pavaizduota 5 pav., kartu žymi ir absoliutinių matavimo paklaidų pasiskirstymą, laikant, kad matavimo rezultatas yra $\hat{x}$.

Praktikoje kartais labai svarbu nustatyti tikimybę, kad matavimo duomuo $\boldsymbol{x_i}$ bus mažesnis už vieną iš galimų jo verčių x, t. y. $(X<x)$. Ši tikimybė yra x funkcija ir **vadinama atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinio funkcija**:

$$F(x)=P(X<x) = \int_{-\infty}^{x} dF(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx . \qquad (2.12)$$

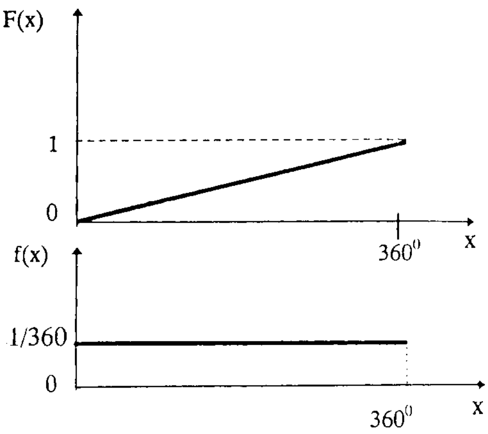
Jei atsitiktinis dydis X gali turėti tik baigtinį skaičių diskretinių verčių (pvz., akučių skaičius ant žaidimų kauliuko šonų) $F(x) = \sum_{x_i<x} P(x_i)$, – tikimybių skirstinio funkcija bus laiptuota (žr. 6 pav.). Šiuo atveju tikimybės tankio funkcija netaikoma.



6 pav. Idealaus žaidimų kauliuko tikimybių skirstinio funkcija

7 pav. pavaizduota tikimybių skirstinio funkcija $F(x)$ (čia $x \equiv \varphi$) ir tikimybės tankio funkcija kampo, žyminčio laikrodžio rodyklės padėtį. Visais atvejais $F(x)$ yra nemažėjanti funkcija, ir ties riba, kai $x \to \infty$, gauname:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} P(X < x) = 1 . \qquad (2.13)$$



7 pav. Laikrodžio rodyklės padėties kampo tikimybių skirstinio ir tikimybės tankio funkcijos

Iš čia išplaukia, kad

$$P(X \geq x)=1-P(X < x). \tag{2.14}$$

Tolydųjį verčių spektrą turinčio atsitiktinio dydžio tikimybių skirstinio ir to paties dydžio tikimybės tankio funkcijos tarpusavyje susijusios. Tuo atveju, kai tikimybių skirstinio funkcija netrūkioji ir diferencijuojama, jos pirmoji išvestinė

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{2.15}$$

yra dydžio X tikimybės tankio funkcija (2.8). Iš čia ir (2.12):

$$P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx\,, \tag{2.16}$$

$$P(a \leq X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{2.17}$$

ir tam tikru atveju kai $a \to -\infty$, $b \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,. \tag{2.18}$$

Tai būtinas reikalavimas tikimybės tankio funkcijai, kuris vadinamas jos normintąja sąlyga.

Paprastas tolygaus pasiskirstymo $(f(x)=const)$ pavyzdys pavaizduotas 7 pav.

Matuojamojo fizikinio dydžio teorinis vidurkis $\hat{x}$ (žr. (2.7) ir (2.11) formules) ir tikimybė vieno matavimo duomeniui patekti į mus dominantį intervalą $[a, b]$, $P(a \leq X < b)$ (žr. (2.17) formulę), yra pagrindinės statistinės duomenų analizės išvados. Paklaida įvertinama nurodant intervalą, simetrinį vidurkio atžvilgiu, į kurį vieno matavimo duomeniui patekti yra susitarta tikimybė $P=\alpha$. (Pvz., laboratoriniams eksperimentams – priimta taikyti $\alpha=0,95$). Galutinis matavimo rezultatas užrašomas $x=\hat{x} \pm \Delta x$, $\alpha=0,95$. Intervalas $[\hat{x} - \Delta x,\ \hat{x} + \Delta x]$ vadinamas pasikliautinuoju intervalu, o dydis α patikimumo lygmeniu.

2.2.3. Matematinio statistikos modelio parinkimas

Nors mes nagrinėjame tiesiogiai matuojamojo dydžio X matavimo duomenų pasiskirstymą, akivaizdu, kad ir bet kuri atsitiktinio dydžio X funkcija yra atsitiktinis dydis, pvz.,

$$Y=H(X). \tag{2.19}$$

Taigi Y kaip ir X turi **apibrėžtą tikimybių skirstinio funkciją ir tikimybės tankio funkciją**. Pateiktuose dviejuose pavyzdžiuose tik pagal aptartų reiškinių simetriją pavyko iš karto nustatyti (nubrėžti) (6 pav. ir 7 pav.) tikimybių skirstinio funkciją. Paprastai tai padaryti nelengva, ir esame priversti tikimybių skirstinio funkciją parinkti remdamiesi eksperimentu. Dažnai tikimybių skirstinio funkcija parenkama eksperimentu gavus tik kelis būdingus skirstiniui parametrus.

Šie parametrai parinkto taško c atžvilgiu yra specialios funkcijos tipo

$$H(X)=(X-c)^l, \quad l=0, 1, 2, 3... \tag{2.20}$$

matematiniai vidurkiai*,* vadinami atsitiktinio dydžio momentais. Kai $c=0$, momentai **vadinami pradiniais**. Dažniausiai tašku c parenkamas $E(X)=\hat{x}$. Tada

$$\mu_l = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\hat{x})^l f(x)dx \tag{2.21}$$

vadinamas ***l*-uoju centriniu atsitiktinio dydžio momentu**. Pirmieji du centriniai momentai lygūs:

$$\mu_0=1, \quad \mu_1=0. \tag{2.22}$$

Dydis

$$\mu_2 = \sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\hat{x})^2 f(x)dx \tag{2.23}$$

yra **mažiausios eilės momentas**, turintis informaciją apie atsitiktinio dydžio vidutinį nuokrypį nuo savo vidutinės vertės. Šis momentas **vadinamas atsitiktinio dydžio *X* dispersija**.

Nors praktiniuose vertinimuose pakanka pirmųjų keturių momentų, teoriniuose pagrindimuose svarbią reikšmę turi visas jų rinkinys. Labai dažnai žymiai lengviau surandamas pilnas momentų rinkinys, nei pats skirstinys $F(x)$. Tokiu atveju skirstinį galima surasti šių momentų pagrindu. Be to įrodoma, kad dvi tikimybės tankio funkcijos $f_1(x)$ ir $f_2(x)$ turinčios vienodus momentus yra tapačios $f_1(x)\equiv f_2(x)$ [3]. Yra būdas visą skirstiniui būdingą momentų rinkinį išreikšti bendru matematiniu užrašu, tam naudojant specialią momentus generuojančią funkciją (MGF).

Pradinius atsitiktinio dydžio X momentus generuojanti funkcija yra funkcijos e^{xt} matematinis vidurkis

$$M'_x = E(e^{xt}) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x)dx & \text{tolydiniam skirstiniui,} \\ \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} P(k) & \text{diskretiniam skirstiniui.} \end{cases} \tag{2.24}$$

čia t – papildomas dydis, leidžiantis pagal jo laipsnį skleidinio eilutėje t^n surasti momentą μ'_n. Išskleidus eksponentę eilute gauname

$$M'_x(t) = E\left[1 + xt + \frac{(xt)^2}{2!} + \frac{(xt)^3}{3!} + \cdots\right] = \\ = 1 + \mu'_1 t + \mu'_2 \frac{t^2}{2!} + \mu'_3 \frac{t^3}{3!} + \cdots, \tag{2.25}$$

taigi pradiniai momentai μ'_n yra koeficientai prie $\frac{t^n}{n!}$.

Kitas būdas surasti momentus μ'_n iš MGF yra jos diferencijavimas n kartų:

$$\frac{\partial^n M'_x(t)}{\partial t^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{xt} f(x)dx$$

ir po to prilyginant $t=0$

$$\frac{\partial^n M'_x(0)}{\partial t^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx = \mu'_n \tag{2.26}$$

Centrinius momentus generuojanti funkcija yra

$$M_x(t) = E\left[e^{(x-\hat{x})t}\right]. \tag{2.27a}$$

Ją skleidžiant eilute gauname

$$M_x(t) = E\left[1 + (x-\hat{x})t + (x-\hat{x})^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots\right] = \\ = 1 + 0 + \mu_2 \frac{t^2}{2!} + \mu_3 \frac{t^3}{3!} + \cdots \tag{2.27b}$$

Atkreipiame dėmesį, kad

$$M_x(t) = e^{-\hat{x}t} M'_x(t)$$

ir

$$M'_x(t) = e^{\hat{x}t} M_x(t). \tag{2.28}$$

Kai skirstinio tikimybės tankio funkcija $f(x)$ žinoma, momentai surandami iš (2.25-2.28) formulių.

Pateiksime kelių dažniausiai taikomų skirstinių pradinius ir centrinius momentus generuojančias funkcijas $M'(t)$ ir $M(t)$ [3].

1. **Binominiam skirstiniui**, kuris yra diskretinis

$$P(k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$$

iš (2.24) gauname:

$$M'_x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{kt} P(k) = \sum_{k=0}^{\infty} C_N^k (pe^t)^k (1-p)^{N-k} = (pe^t + 1 - p)^N. \tag{2.29}$$

Taigi

$$\frac{\partial M'_x(t)}{\partial t} = Npe^t (pe^t + 1 - p)^{N-1} \text{ ir } \mu'_1 = \frac{\partial M'_x(0)}{\partial t} = Np.$$

2. **Puasono skirstiniui**

$$P(k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!},$$

taigi

$$M'_x(t)=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{t})^{k}}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{t}}=e^{\lambda(e^{t}-1)},\qquad(2.30)$$

$$\frac{\partial M'_x(t)}{\partial t}=\lambda e^{t}e^{\lambda(e^{t}-1)}\ \text{ir}\ \mu'_1=\lambda .$$

Atitinkamai

$$\begin{aligned}M_x(t)&=e^{-\lambda t}M'_x(t)=e^{\lambda(e^{t}-t-1)}=e^{\lambda\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots-t-1\right)}=e^{\lambda\left(\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)}\\&=1+\lambda\left(\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)+\lambda^2\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)^2+\cdots\end{aligned}\qquad(2.31)$$

Koeficientas prie $\frac{t^2}{2!}$ yra λ. Taigi $\mu_2=\sigma^2=\lambda$.

3. **Gauso (normaliniam) skirstiniui**

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma^2}},$$

taigi

$$M'_x(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{xt}e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma^2}}dx .$$

Integruojant gauname

$$\begin{aligned}M'_x(t)&=e^{\hat{x}t+\sigma^2\frac{t^2}{2}}=e^{\hat{x}t}e^{\sigma^2\frac{t^2}{2}}=\\&=\left[1+\hat{x}t+\hat{x}^2\frac{t^2}{2!}+\cdots\right]\cdot\left[1+\sigma^2\frac{t^2}{2!}+\cdots\right].\end{aligned}\qquad(2.32)$$

Iš čia koeficientas

$$\text{prie } t\ -\ \mu'_1=\hat{x},$$

$$\text{prie}\quad \frac{t^2}{2!}\ -\ \mu'_2=\hat{x}^2+\sigma^2 .\qquad(2.33)$$

Centrinius momentus generuojanti funkcija

$$M_x(t)=e^{\sigma^2\frac{t^2}{2!}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sigma^2\frac{t^2}{2!}\right)^k\frac{1}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n\frac{t^n}{n!}.$$

Taigi

$$\mu_{2n} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}\sigma^{2n} \qquad \text{ir} \qquad \mu_{2n+1} = 0 \,. \tag{2.34}$$

Iš čia $\mu_2 = \sigma^2$ ir iš (2.33) gauname ryšį tarp pradinių ir centrinių antrųjų momentų:

$$\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 \tag{2.35}$$

4. Skirstiniui $y=ax+b$, kai a ir b konstantos. Kadangi

$$M_y'(t) = E(e^{yt}) = E(e^{bt}e^{axt}) = e^{bt}E(e^{xat}),$$

tai t pakeitę į at gauname

$$M_y'(t) = e^{bt}M_x'(at)\,.$$

Jei x pasiskirstymas normalinis su vidurkiu $\hat{x} = \mu$ ir dispersija $D = \sigma^2$, tai iš (2.32) gauname

$$M_x'(t) = e^{\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}}$$

$$M_y'(t) = e^{bt + \mu a t + \sigma^2 a^2 \frac{t^2}{2}} = e^{(a\mu + b)t + a^2\sigma^2 \frac{t^2}{2}}\,. \tag{2.36}$$

Ją palyginę su $M_x'(t)$, matome, kad y taip pat priklausys Gauso skirstiniui su

$$\hat{y} = a\mu + b \qquad \text{ir} \qquad D = a^2\sigma^2\,. \tag{2.37}$$

Dažnai tam tikro eksperimento skirstinio tikimybės tankio funkcija $f(x)$ yra nustatinėjama (nežinoma). Šiuo atveju momentai surandami iš eksperimento atsitiktinės imties, t. y. matuojant gauto ansamblio, turinčio N duomenų x_i pagal bendrąją išraišką:

$$m_l = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - c)^l\,, \tag{2.38}$$

ir tai bus tik apytikriai, be to, atsitiktiniai skirstinio momentai.

Kai $c = 0$, eksperimento momentas vadinamas pradiniu. Atrankos (imties) aritmetinis vidurkis yra pirmojo laipsnio - pirmasis pradinis momentas:

$$m_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - 0)^1 = \bar{x}\,. \tag{2.39}$$

Kai $c = \bar{x}$ iš (2.38) formulės, nulinis ir pirmasis centriniai atrankos momentai (juos žymėsime S raide) yra:

$$S^0 = 1, \qquad S^1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^1 = 0\,. \tag{2.40}$$

Antrasis centrinis momentas, atitinkantis imties empirinio pasiskirstymo dispersiją S^2:

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 . \qquad (2.41)$$

Trečiojo ir ketvirtojo momentų išraiškos:

$$S^3 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^3 , \qquad (2.42)$$

$$S^4 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^4 . \qquad (2.43)$$

Jos taikomos skirstinio asimetrijai bei smailumo laipsniui – ekscesui nustatyti. Dažniausiai remiantis šiais keturiais momentais eksperimento duomenų ansamblis priskiriamas kuriam nors matematiniam modeliui su jam būdinga skirstinio funkcija $F(x)$.

Nors matematiškai skirstinį paprasčiausia nusakyti jo matematiniu vidurkiu, dispersija ir minėtais momentais, kartais patogu nustatyti ir kitus dydžius, išsamiau apibūdinančius pasiskirstymą, t. y. **modą** ir **medianą**.

Moda x_m diskretinio skirstinio atveju yra atsitiktinio dydžio X reikšmė, atitinkanti didžiausią tikimybę:

$$P(X=x_m)=max. \qquad (2.44)$$

Kai skirstinys turi diferencijuojamą tikimybės tankio funkciją, moda (atitinkanti šios funkcijos maksimumą) surandama iš sąlygų:

$$\frac{d}{dx}f(x) = 0, \qquad \frac{d^2}{dx^2}f(x) < 0 . \qquad (2.45)$$

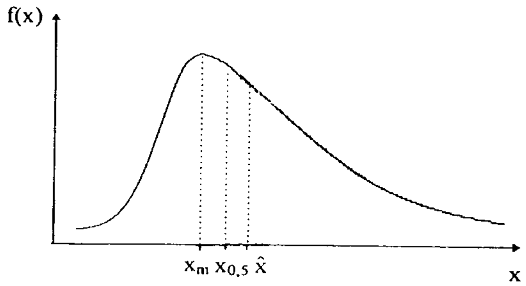
Skirstinys gali turėti vieną modą (smailę) arba kelias.

Mediana $x_{0,5}$ apibūdinama kaip argumento x reikšmė, kuriai tikimybių skirstinio funkcija lygi $0,5$:

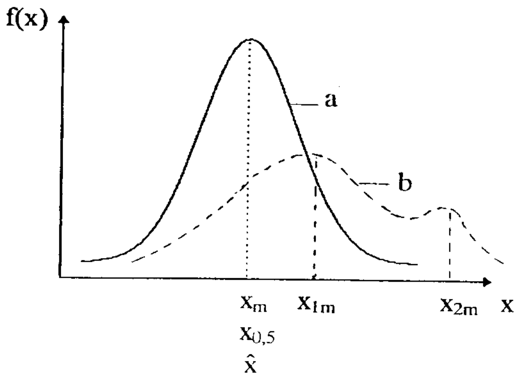
$$F(x_{0,5}) = P(x<x_{0,5}) = 0,5. \qquad (2.46)$$

Pavaizdavus grafiškai tikimybės tankio funkciją, mediana dalija plotą po kreive į dvi lygias dalis.

Moda, mediana ir vidutinės vertės pavaizduotos: nesimetrinio skirstinio – 8 pav., simetrinio – 9 pav. (šiuo atveju visos šių dydžių vertės sutampa).



8 pav. Asimetrinio skirstinio moda, mediana ir vidutinė vertė



9 pav. a) simetrinio skirstinio moda, mediana ir vidutinė vertė sutampa;
b) skirstinys, turintis dvi modas

Kai skirstinio tikimybės tankio funkcija netrūkioji, (2.46) sąlygą galima užrašyti taip:

$$F(x_{0,5}) = \int_{-\infty}^{x_{0,5}} f(x)dx = 0,5\,. \tag{2.47}$$

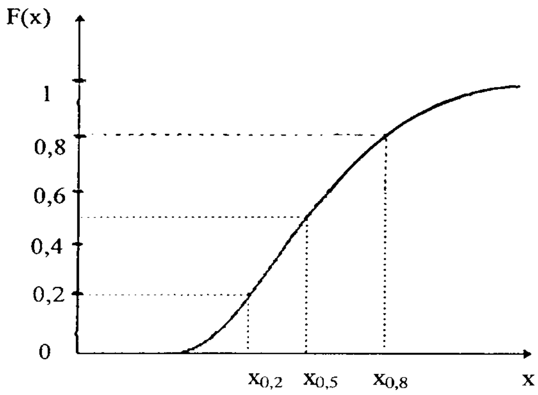
Analogiškai gali būti nustatyti **kvartiliai**

$$F(x_{0,25})=0,25, \qquad F(x_{0,75})=0,75$$

ir **deciliai** $x_{0,1}, x_{0,2}, ..., x_{0,9}$, arba apibendrintai vadinamieji **kvantiliai** x_q pagal formulę:

$$F(x_q) = \int_{-\infty}^{x_q} f(x)dx = q\,. \tag{2.48}$$

Mediana ir kvantiliai grafiškai pavaizduoti 10 pav.



10 pav. Mediana ir kvantiliai tolydžiojo pasiskirstymo atveju.

Dažniausiai taikomų matematinių modelių tikimybės tankio funkcija *f(x)* žinoma, o tada minėtieji dydžiai lengvai surandami pagal (2.48) arba pateikti statistinėse lentelėse. Taip pat žinomi arba pagal (2.25-2.28) surandami ir pirmieji šios funkcijos momentai. Taigi iš eksperimento duomenų, juos apytikriai įvertinus pagal imties atitinkamų parametrų vertes, galima parinkti ir eksperimento duomenų skirstiniui būdingą matematinį modelį, t. y. funkciją *f(x)* ir atitinkamai *F(x)*.

2.2.4. Atsitiktinėms paklaidoms įvertinti dažniausiai taikomi statistiniai modeliai

Praktikoje eksperimentų duomenų analizei taikomų statistinių modelių labai daug. Dažniausiai matematinis modelis parenkamas iš tų, kurių matematinis nusakymas [funkcija F(x)] gerai žinomas. Tarp jų – **binominis**, **Puasono**, **normalinis (Gauso)** ir **Stjūdento (t skirstinys)** skirstiniai.

a) Binominis skirstinys

Kai tirdami reiškinį A eksperimentu, kurio galutinio rezultato vienareikšmiškai nenusako pradinės sąlygos, galime gauti baigtinį skirtingų „elementarių įvykių" (įverčių) a_i skaičių ν, toks reiškinys **vadinamas atsitiktiniu diskretiniu**. Pavyzdžiui, metant lošimo kauliuką ($\nu = 6$ – šoninių plokštumų skaičius) galintis iškristi akučių skaičius yra $a_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Šiuo atveju kiekvienam a_i priskiriama tikimybė p_i:

$$P(A=a_i)=p_i\,. \tag{2.49}$$

Galimų įvykių a_i ir tikimybių jiems įvykti p_i visuma formuoja atsitiktinio reiškinio (dydžio) skirstinio dėsnį. Tuo atveju, kai atlikus eksperimentą gali būti tik dvi a_i vertės, tikimybių skirstinys vadinamas **binominiu**. Pvz., metant monetą į viršų gali atvirsti a_1 – „herbas" arba a_2 – „pinigas".

Eksperimento rezultatui įvertinti paprastai vartojami terminai: „palankus" ir „nepalankus" įvykis. Tarkime, kad palankus esti tada, kai atvirsta „herbas" – įvykis A, o nepalankus, kai atvirsta „pinigas" – įvykis $\overline{A}$. Rasime tikimybę gauti k palankių rezultatų, kai metame monetą N kartų. **Laikant, kad vieną įvykį atitinka monetos *N* metimų rezultatas**, skaičius k šiuo atveju bus atsitiktinis dydis, o jo pasirodymo tikimybę galima įvertinti taip. Tikimybė, kad metant pirmus k kartų iškris „herbas", vėlesniais – „pinigas", kai $P(A)=p$ ir $P(\overline{A})=(1-p)$, yra:

$$p^k(1-p)^{N-k}. \tag{2.50}$$

Tačiau tokia „herbo" ir „pinigo" atvirtimo seka yra tik vienas iš palankių atvejų. Palankūs bus ir kiti, net jei „herbas" iškris k kartų kita tvarka. Kiekvieno atvejo su pakitusia „herbo" atvirtimo tvarka tikimybė tokia pati, o jų skaičius bus lygus derinių skaičiui:

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}\,. \tag{2.51}$$

(Deriniai vienas nuo kito skiriasi bent vienu elementu, o ne jų tvarka. Pvz., deriniai iš 3-jų elementų $a=1, b=2, c=3$ po du bus ab, ac, bc, t. y. $12, 13, 23$).

Kadangi ieškome palankių įvykių skaičiaus k po N metimų iškritimo tikimybės, neatsižvelgiant į jų iškritimo tvarką, ji bus lygi:

$$P_N(k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}\,. \tag{2.52}$$

Pastaba. Tikimybę $P_N(k)$ buvo galima įvertinti ir kitaip:

$$P_N(k) = p^k \cdot (1-p)^{N-k} \cdot C_N^{N-k}\,,$$

t. y. išdėstant bet kuria tvarka nepalankius $N–k$ atvejus. Bet $C_N^{N-k} = C_N^k$, taigi rezultatas lieka tas pats.

Aptartas eksperimentas atitinka atsitiktinio dydžio $x=\sum_{i=1}^{N} x_i$ pasiskirstymo nagrinėjimą, kai x_i reikšmė – 1 arba 0 („taip" – 1, arba „ne" – 0).

Gaudami išsamią tikimybės išraišką, vaizdumo dėlei aptarėme monetos mėtymo rezultato tikimybių pasiskirstymą. Šiuo atveju $p=½$.
Suprantama, kad bendruoju atveju p vertės gali būti nuo 0 iki 1.

Binominiu skirstiniu bus vadinama $P_N(k)$ tikimybių visuma. Aptarsime kelis pavyzdžius, apibūdinančius šį skirstinį.

Sakykime, kad $p=0,3$, o $N=5;\ 10;\ ir\ 30$. Tada tikimybės, apskaičiuotos pagal (38), bus, kaip pavaizduota 11 pav. Šiame paveiksle atvejis $N=20$, kai $p=0,5$, atitiks mūsų pavyzdį su monetos mėtymu. Matyti, kad tikimybė iškristi „herbui" **tik** 1, 2 ir 3 kartus ($k=1,\ 2,\ 3$) artima nuliui. Taigi praktiškai jis iškris daugiau kartų.

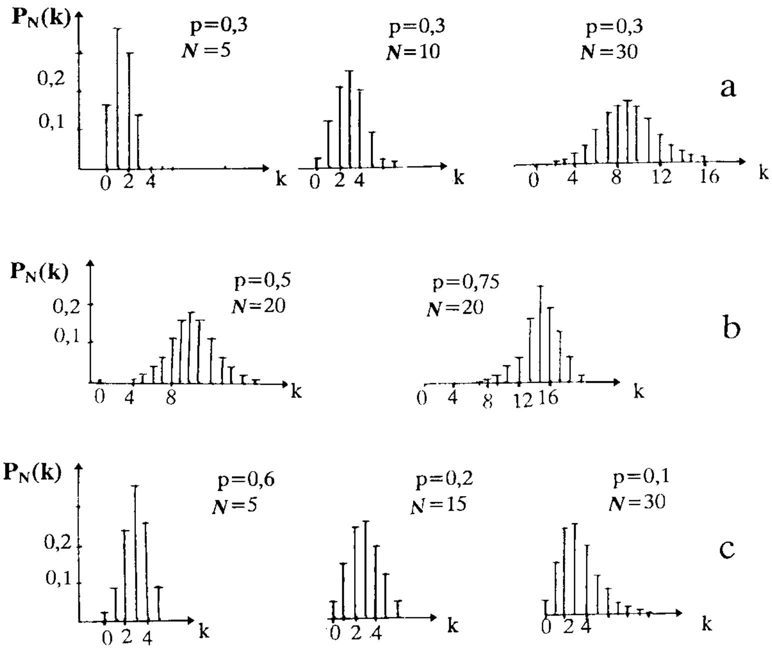
Apskritai, kai $\boldsymbol{N}$ didėja, k mažų reikšmių tikimybė mažėja. Be to, gaubiančioji histograma, kai $p<0,5$ – išplitusi į dešinę, kai $p=0,5$ – simetriška ir kai $p>0,5$ – išplitusi į kairę. Kai $N>30$, artėja į simetrišką. Kai $pN=const$, visais atvejais skirstiniai yra labai panašūs.

Binominio skirstinio dispersiją gauname iš (2.29) lygties įvertinę pradinį antrąjį momentą

$$\mu_2' = \frac{\partial^2 M'(0)}{\partial t^2} = Np(1-p+Np) \tag{2.53}$$

ir pasinaudoję sąryšiu (2.35) įskaičius, kad $\mu_1' = \hat{k} = pN$,

$$\mu_2 = Np(1-p)\,. \tag{2.54}$$



11 pav. Binominis skirstinys: a) fiksuotų p ir įvairių N; b) vieno N ir įvairių p; c) įvairių N ir p, kai $pN=const$

Toliau antruosius centrinius skirstinių momentus, vadinamus atsitiktinio dydžio dispersija, žymėsime σ^2 (2.23). Taigi (2.54), atsižvelgę į jo antrojo centrinio momento, prasmę užrašome:

$$\sigma^2(k) = \sum_{k=0}^{N} P_N(k)(k-\hat{k})^2 = Np(1-p)\,. \tag{2.55}$$

Binominis skirstinys, apibendrintas atvejams, kai eksperimento rezultatas yra daugiau kaip dvi galimos vertės $\nu>2$, vadinamas **polinominiu**.

Vaizdumo suteikia perėjimas nuo tikimybių aptarimo prie procentais išreikštų eksperimento rinkinių (serijų), kai „herbas" iškris tik vieną ($k=1$), tik du ($k=2$) ir t. t. kartų. Apskritai, tai bendresnis uždavinys nei tik monetų „mėtymas". Iš tikrųjų – mėtant monetas, $p=0,5$, tačiau bendruoju atveju p galima gauti labai įvairius. Tarkime, kad užuot mėtę monetas, mes „mėtome" vienodų parametrų kūgius ir domimės, kiek jų iškris viršūnėmis aukštyn. Šiuo atveju parinkdami skirtingą aukščio h ir pagrindo skersmens D santykį (h/D), tikimybės p kitimo ribas galime išplėsti.

Pateikiame vieną praktinį pavyzdį. Tarkime, kad detalės gamybos procese atlikta $N=5$ operacijų, po kiekvienos iš jų atsirado defektas su ta pačia tikimybe p (defektų prigimtis gali būti ir skirtinga). Tada dydis k reikš defektų skaičių detalėje po $N=5$ operacijų, o $P_N(k)$ – tikimybes, kad pagamintoje detalėje bus vienas, du, trys ir t. t. defektai. Padauginę iš 100, gautume, kiek procentų pagamintų detalių turės vieną, du, tris ir t. t. defektų.

1. Kai $N \to \infty$, binominis skirstinys artėja prie normalinio, jei vertinimo pagrindu imama binominio skirstinio sritis $\hat{k}$ aplinkoje.
2. Kai $Np=const$, binominis skirstinys artėja prie Puasono skirstinio, kai $N \to \infty$.

Šiuos du ribinius atvejus aptarsime nuosekliau.

b) Puasono skirstinys

Taikant binominį skirstinį, tikimybes $P_N(k)$ galima surasti visais, t. y. nepriklausomai nuo p ir N didumo, atvejais. Tačiau tai padaryti, kai didelis N, techniškai sunku, nes reikia nustatyti didelių skaičių faktorialus.

Todėl taikant praktiškai binominis skirstinys supaprastinamas, kai elementaraus įvykio tikimybė pakankamai maža:

$$p \ll 1, \tag{2.56}$$

ir mus domina atvejai, kai

$$k \ll N. \tag{2.57}$$

Matematikoje įrodoma [4], kad visada, t. y. bet kokiems p ir N, kai $pN = \lambda = const$ ir $N \to \infty$, binominis skirstinys artėja prie tam tikros ribos, kuri ir yra Puasono skirstinys

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \tag{2.58}$$

su $\hat{k} = pN = \lambda$ ir dispersija $\sigma^2 = \lambda$.

Puasono skirstinys gerai sutampa su binominiu, kai k labai maži ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Jie ir yra įdomiausi, nes kai $\lambda \geq 5$, Puasono skirstinys artėja prie Gauso skirstinio. Bet apskritai tai savarankiškas skirstinys su jam būdingomis savybėmis prie įvairių λ ir k verčių.

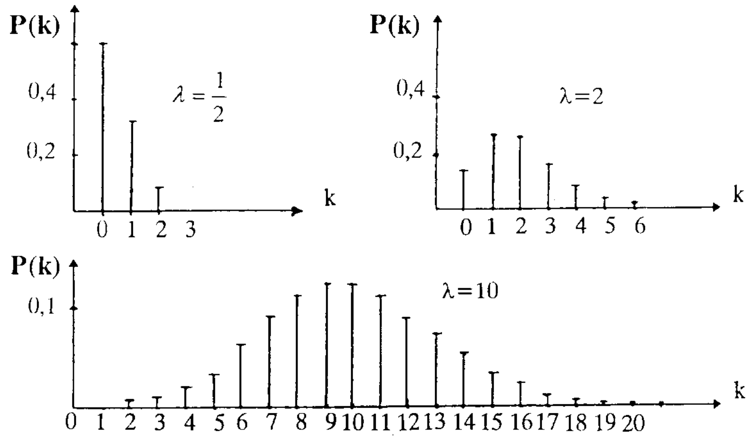
Reikalavimas $pN=\lambda=const$, kai $N \to \infty$, reiškia, kad galima tikėtis geros Puasono ir binominio skirstinių sutapties, kai turime skirstinius su mažomis p vertėmis. Tačiau iš 11 ir 12 pav. matyti, kad ir kai $p = 0,5$, $N = 20$, t. y. $pN = 10$, rezultatai artimi (žr. į VI statistinę lentelę).

Pvz., naudojant radiotelefono skaitmeninį ryšį kiekvieną skaičių ar raidę apibūdina 5 arba 7 impulsai (pvz., $\boxed{\mathbf{1}\,|\,\mathbf{1}\,|\,\mathbf{1}\,|\,\mathbf{0}\,|\,\mathbf{0}} \equiv a$), o vieną impulsą perduodant, tikimybė atsirasti klaidai, sakykime, pastovi, t. y. $p=const$, ir maža. Vienam perduoto teksto puslapiui spausdinti reikės N impulsų (pvz., 43 raidės eilutėje × 36 eilučių × 5 impulsų = 7740). Tikimybė, kad puslapyje pasitaikys viena, dvi ar kelios klaidos ($k \ll N$), bus aprašoma Puasono skirstiniu. Tai lengva padaryti įvertinus klaidų vidurkį viename puslapyje $\hat{k} = pN = \lambda$, nes Puasono skirstinio išraiška (2.58) paprasta, o λ ir k – nedideli skaičiai.

Suprantama, tą patį galima gauti ir iš binominio skirstinio:

$$P_N(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k}, \tag{2.59}$$

tik reikėtų nustatyti didelių skaičių ($N=7740$) faktorialus.



12 pav. Puasono skirstinys, kai λ vertės įvairios

Kai $pN=\lambda \geq 5$, Puasono skirstinys savo ypatybėmis primena normalinį su $\hat{k} = \sigma^2 = \lambda$ vertėmis.

c) Gauso (normalinis) skirstinys

Tai kitas ribinis atvejis, priešingas Puasono skirstiniui. Tarkime, kad mus domina binominis **skirstinys**, kai k įgyja tokias vertes, kurioms $P_N(k)$ vertė yra nemaža ir kai N didelis (teoriškai $N \to \infty$).

Kadangi binominis skirstinys:

$$P_N(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} \tag{2.60}$$

turi maksimumą, kurio smailė greitai didėja didėjant N, o suminė tikimybė:

$$\sum_{k=1}^{N} P_N(k) = 1, \tag{2.61}$$

tai reiškia, kad $P_N(k)$ yra nykstamai maži, kai k toli nuo $\hat{k}$. Vertinimo pagrindu imant binominio skirstinio sritį $\hat{k}$ aplinkoje ir sąlygą (2.61) visai k verčių sričiai matematiniu požiūriu palyginti lengvai iš binominio skirstinio gauname [4]:

$$\lim_{N\to\infty} P_N(k) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} exp\left[-\frac{(k-\hat{k})^2}{2\sigma^2}\right], \tag{2.62}$$

čia

$$\sigma^2 = E\{(k-\hat{k})^2\} = Np(1-p) \qquad \text{ir} \qquad \hat{k} = Np, \tag{2.63}$$

t. y. tokie, kaip ir binominių skirstinių, esant toms pačioms sąlygoms.

Tai simetrinis $\hat{k}$ atžvilgiu skirstinys, ir vadinamas Gauso arba normaliniu (normaliuoju) skirstiniu. Jis užima pagrindinę vietą matematinėje statistikoje ir ypač – paklaidų teorijoje.

Iki šiol nagrinėjome diskretinius skirstinius, tačiau kai kalbame apie Gauso skirstinį, įvertindami, kad N – didelis skaičius, ir domimės tik netoli $\hat{k}$ esančiomis vertėmis (taigi k kaip ir $\hat{k}$ artimi ir kartu dideli skaičiai), tai jau iš binominio skirstinio išeina, kad k pakitus per vienetą $P_N(k)$ kinta nežymiai (yra lėtai nuo k kintanti funkcija). Todėl ją galima laikyti tolydžiai kintančia netrūkiojo (tolydžiojo) kintamojo k funkcija. Tada tikimybė patekti į intervalą $[k;\ k+dk]$ $dF_N(k)=P_N(k)dk$ ir $P_N(k)=\frac{dF_N(k)}{dk}=f(k)$. Taigi šiuo atveju $P_N(k)$ turi tikimybės tankio prasmę.

Laplasas 1783 m. nagrinėdamas eksperimento metu stebimų matavimo paklaidų priežastis, jas sugrupavo. Vienai grupei priskirtos visos tarpusavyje nepriklausomos priežastys, su ta pačia tikimybe p_1 lemiančios vieno dydžio $\pm\varepsilon_1$ paklaidas, atliekant kiekvieną matavimą, kitai – $\pm\varepsilon_2$ su tikimybe p_2 ir t. t. Iš čia daroma išvada, kad kiekvienos paklaidų grupės įtaka duomenims daugiakarčiuose matavimuose gali būti įvertinta binominiu skirstiniu arba, kai matavimų skaičius N didelis, tam tikru Gauso skirstinio atveju – su jai būdinga σ_i verte, o jų visų – Gauso skirstinių suma, kurios rezultatas užrašomas irgi (2.62) forma (5.15), t. y. taip pat Gauso tipo skirstiniu. Šiuo atveju σ^2 bus visų pašalinių poveikių nulemtos duomenų dispersijos įvertinimas! Tai teorinės išvados.

Praktiškai nustatyta, kad kai yra pakankamai daug **nepriklausomų matavimo duomenų:**

1) jie išsidėsto simetriškai vidutinės vertės atžvilgiu, kai matuojamas parametras turi pastovią vertę (pvz., matuojant daug kartų tą patį fizikinį kūno parametrą; tomis pačiomis priemonėmis gaminant daug detalių ir tiriant joms būdingus parametrus);
2) didesni nuokrypiai nuo vidurkio pasitaiko rečiau negu maži, ir eksperimento duomenų skirstinys artėja prie normalinio (Gauso) skirstinio.

d) Pagrindinės Gauso skirstinio savybės

Gauso skirstinio tikimybės tankio funkcija užrašoma (2.62) lygtyje diskretinį dydį k, tolydiniu atsitiktiniu dydžiu x:

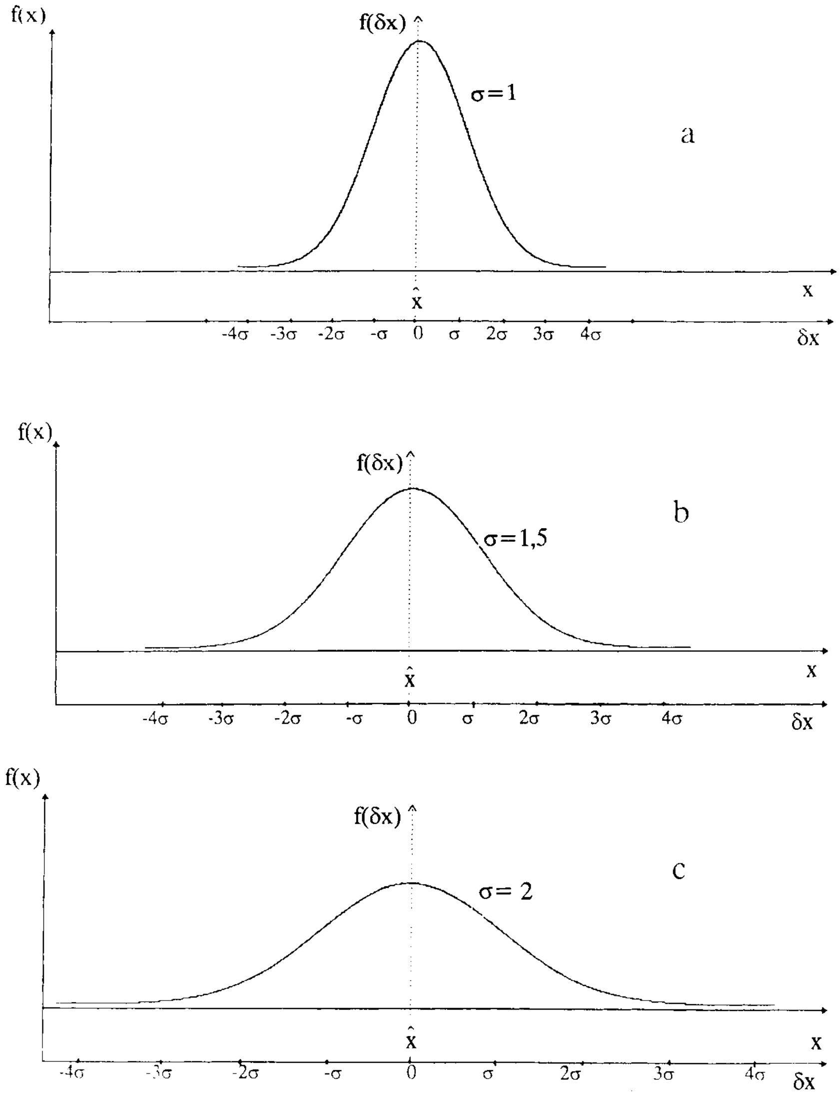
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left(-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma^2}\right). \tag{2.64}$$

Kai ją taikome paklaidoms skaičiuoti, įprasta funkciją (2.64) $f(x)\equiv f(x-0)$ užrašyti $f(x-\hat{x})$, t. y. perkeliant atskaitos pradžią iš taško $x=0$ į $x=\hat{x}$ (13 pav.). Tada pažymėjus $\delta x=x-\hat{x}$ ir $(\delta x)^2=(x-\hat{x})^2$ gauname:

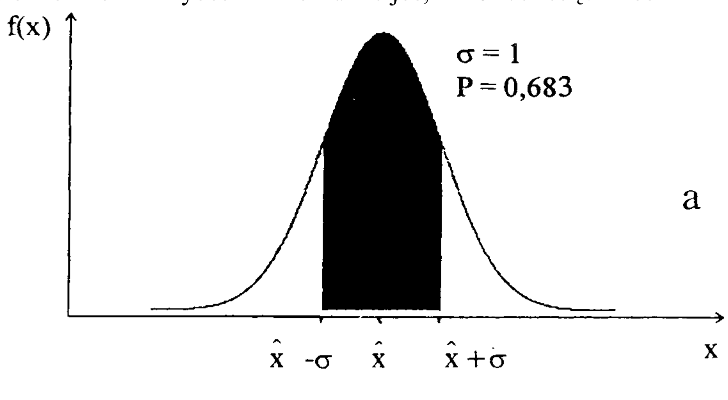
$$f(\delta x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}exp\left(-\frac{(\delta x)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{2.65}$$

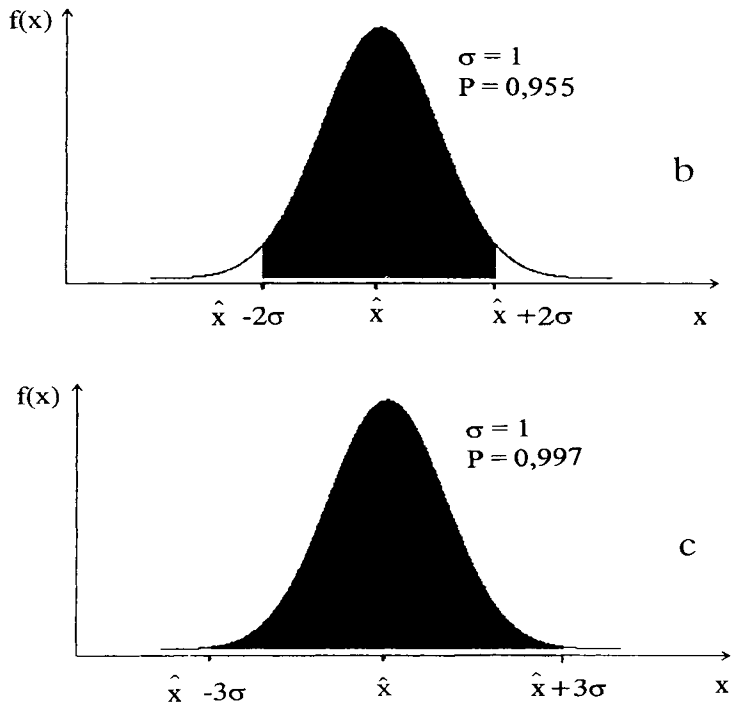
Tai yra simetrinė funkcija, kurios pobūdį lemia vienas parametras σ. Jo kvadratas (σ^2) vadinamas dispersija (2.23).

Dydis $\hat{x}$ vadinamas matavimo rezultatu, o δx – matavimo paklaida. Funkcijos $f(x)$ priklausomybė nuo σ vertės pavaizduota 13 pav. a, b, c.



13 pav. a, b, c. Gauso skirstinio tikimybės tankio funkcijos, kai σ vertės įvairios





14 pav. a, b, c. Tikimybės duomeniui patekti į simetrinius vidurkio atžvilgiu intervalus pagal Gauso skirstinį

Kuo didesnę pasirenkame paklaidos δx vertę, tuo didesnė tikimybė, kad rezultatas bus intervale $[\hat{x}-\delta x; \hat{x}+\delta x]$. 14 pav. a, b, c pavaizduotos tikimybės patekti į simetrinius intervalus $[\hat{x}-\sigma; \hat{x}+\sigma]$; $[\hat{x}-2\sigma; \hat{x}+2\sigma]$ ir $[\hat{x}-3\sigma; \hat{x}+3\sigma]$. Jos išreiškiamos užjuodintais plotais.

Arba galima teigti, kad į pirmąjį minėtą intervalą patenka 68%, į antrąjį - 95% ir į trečiąjį - 99,7% matavimo duomenų. Dispersija σ^2 yra antrasis Gauso skirstinio momentas:

$$E\left\{(\delta x)^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}(x-\hat{x})^2 exp\left(-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma^2}\right)dx = \sigma^2 . \tag{2.66}$$

Dydis σ vadinamas vidutine kvadratine paklaida.

Vidutinė kvadratinė paklaida σ dažnai sutapatinama su matavimo paklaida.

Užrašius Gauso skirstinio tikimybės tankio funkciją

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left(-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma^2}\right), \tag{2.67}$$

tikimybių skirstinio funkcija $F(x) = \sum_{x_i<x} P(X = x_i) = P(X < x)$ yra:

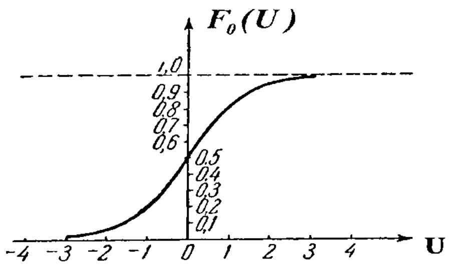
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} exp\left[-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma^2}\right]dx . \tag{2.68}$$

Arba taikant kintamąjį $U = \frac{x-\hat{x}}{\sigma}, \left(dU = \frac{dx}{\sigma}\right)$ gaunama:

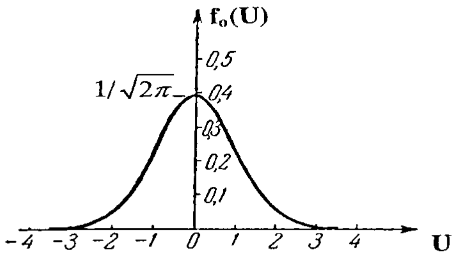
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{(x-\hat{x})/\sigma} exp(-U^2/2)dU = F_0\left(\frac{x-\hat{x}}{\sigma}\right)=F_0(U)\,. \qquad (2.69)$$

Taigi F_0 argumentas U matuojamas σ vienetais. Kai $x-\hat{x}=\sigma$, tai $\frac{x-\hat{x}}{\sigma}=1$. Funkcija $F_0(U)$ vadinama **standartinio normalinio tikimybių skirstinio funkcija** (15 pav.). Jos **argumentas** U – **standartizuotu normaliniu dydžiu**. Iš (2.69) išplaukia, kad jai atitinkančio Gauso skirstinio tikimybės tankio funkcijos $f_0(U)$ išraiškoje $\hat{U}=0,\ \sigma_U=1$, t. y.:

$$f_0(U)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{U^2}{2}\right). \qquad (2.70)$$



15 pav. Standartinio normalinio tikimybių skirstinio funkcija



16 pav. Gauso skirstinio standartinė ja tikimybės tankio funkcija

Ieškodami, kaip įprasta paklaidų teorijoje, tikimybės X nuokrypio nuo matematinio vidurkio $\hat{x}$ $n\sigma$ dydžiu pirmiausia iš (2.69) gauname:

$$1)\quad P\left[\left(\frac{x-\hat{x}}{\sigma}\right)<-n\right]=P[(x-\hat{x})<-n\sigma]=F_0(-n)\,, \qquad (2.71)$$

iš $f_0(U)$ simetrijos (16 pav.) išplaukia, kad

$$2)\quad P(|x-\hat{x}|>n\sigma)=2F_0(-n)=2[1-F_0(n)]\,, \qquad (2.72)$$

nes n ir σ teigiami,
arba

$$3)\qquad P(|x-\hat{x}|\le n\sigma)=1-P(|x-\hat{x}|\ge n\sigma)=2F_0(n)-1\,. \qquad (2.73)$$

Imdami įvairias n vertes, gauname simetrinį intervalą σ vienetais ir iš (2.73) bei (2.69) apskaičiuojame tikimybę matavimo duomeniui patekti į šį intervalą. Pvz.:

$$P(|x-\hat{x}|\le\sigma)=0{,}683;\ P(|x-\hat{x}|\le 2\sigma)=0{,}955;\ P(|x-\hat{x}|\le 3\sigma)=0{,}997.$$

$f_0(U)$ ir $P(|U|\le n)=2F_0(n)-1$ yra pateikta statistinėse lentelėse, kartais pateikiama ir $\boxed{}$ (žr. II ir III statistines lenteles).

2.2.5. Atsitiktinio dydžio funkcijos skirstiniai

a) Atsitiktinės imties vidurkio savybės

Dažnas matavimų atvejis, kai turime dydžio X, kurio tikimybės tankio funkcija yra $f(x)$, atsitiktinę imtį. Atsitiktinės imties iš n duomenų (n tūrio) vidurkis

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.74}$$

irgi yra atsitiktinis dydis. Jo matematinis vidurkis

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = E(x_i) = \hat{x}\,. \tag{2.75}$$

Taigi $\bar{x}$ yra nepaslinktasis (be sisteminės paklaidos) įvertis. Panašiai surandama ir jo dispersija

$$\begin{aligned}\sigma^2(\bar{x}) &= E\left\{(\bar{x}-\hat{\bar{x}})^2\right\} = E\left\{\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\hat{x}\right)^2\right\} = \\ &= \frac{1}{n}E\left\{\frac{\left((x_1-\hat{x})+(x_2-\hat{x})+\cdots+(x_n-\hat{x})\right)^2}{n}\right\}.\end{aligned} \tag{2.76}$$

Kadangi x_i tarpusavyje yra nepriklausomi, tai matematiniai vidurkiai

$$E\left\{(x_i-\hat{x})(x_j-\hat{x})\right\} = 0\,,$$

jei $i \neq j$. Taigi iš (2.76) gauname

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{1}{n}\sigma^2(x)\,, \tag{2.77}$$

arba

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{n}}\,. \tag{2.78}$$

Iš čia išplaukia, kad $\bar{x}$ matavimo tikslumas didėja (vidutinė kvadratinė $\bar{x}$ paklaida $\sigma(\bar{x})$ mažėja proporcingai $\sqrt{n}$).

b) **Centrinė ribinė teorema**

Iš esmės svarbu ne tik tai, kad $\bar{x}$ matematinis vidurkis yra $\hat{x}$ (2.75), nepriklausomai nuo imties tūrio, bet ir artėjimo prie šios ribos tendencija. Tikimybiškai ji išreiškiama Čebyševo didžiųjų skaičių dėsniu skirstiniams, kurių matematinis vidurkis $\hat{x}$ ir dispersija σ^2 yra baigtiniai dydžiai [2, 3]:

$$P\left[|x-\hat{x}| \geq k\sigma\right] \leq \frac{1}{k^2}\,,$$

čia k – bet koks realusis teigiamasis skaičius.

Taikydami šį dėsnį dydžiui $\bar{x}$, kurio vidutinė kvadratinė paklaida $\sigma_n = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, gauname

$$P\left[\left|\bar{x}-\hat{x}\right| \geq \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right] \leq \frac{1}{k^2}.$$

Tada pažymėjus $\frac{k\sigma}{\sqrt{n}} = \varepsilon$ ir pakeitus nelygybės prasmę priešinga

$$P\left[-\varepsilon < \bar{x}-\hat{x} < \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}. \tag{2.79}$$

Taigi paėmus kiek įmanoma mažą ε, kaip $\bar{x}$ priartėjimo prie $\hat{x}$ rodiklį, didinant n galima gauti $\left|\bar{x}-\hat{x}\right| < \varepsilon$. Arba tikimybė, kad $\bar{x} \to \hat{x}$, kai $n \to \infty$, artėja prie vieneto.

Centrinė ribinė teorema apibūdina ne tik parametrus $E(\bar{x})$ ir $\sigma(\bar{x})$, bet ir visą $\bar{x}$ skirstinį.

Teorema. Atsitiktinio dydžio X, kurio matematinis vidurkis $\hat{x} = \mu$ ir **baigtinė** dispersija $D=\sigma^2$, imties tūriui $n \to \infty$, $\bar{x}$ skirstinys artėja prie **normalinio** skirstinio su vidurkiu μ ir dispersija $\frac{\sigma^2}{n}$.

Įrodydami naudosime centrinius momentus generuojančią (MGF) funkciją (2.27):

$$\begin{aligned} M_x(t) &= E\left(e^{(x-\mu)t}\right) = 1 + \mu_1 t + \mu_2 \frac{t^2}{2!} + \mu_3 \frac{t^3}{3!} + \cdots = \\ &= 1 + 0 + \sigma^2 \frac{t^2}{2!} + \mu_3 \frac{t^3}{3!} + \cdots \end{aligned} \tag{2.80}$$

Imkime atsitiktinį dydį

$$w = (x-\mu)\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Kadangi σ ir n yra konstantos, daugiklis $\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}$ vienodai sumažina x_i ir μ (tik pakeičia jų įverčių skalę), taigi $M_w(t)$ bus ekvivalenti (2.80):

$$M_w(t) = E\left(e^{\frac{(x-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}t}\right) = E\left(e^{(x-\mu)\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = M_x\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right). \tag{2.81}$$

Taigi pereidami nuo M_x prie M_w parametrą t pakeičiame į $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$.

Bet tada iš (2.81) įskaitę (2.80) gauname

$$\begin{aligned} M_w(t) &= 1 + \sigma^2 \frac{t^2}{2!\sigma^2 n} + \mu^3 \frac{t^3}{3!\sigma^3 n\sqrt{n}} + \cdots = \\ &= 1 + \frac{t^2}{2n} + \mu^3 \frac{t^3}{6\sigma^3 n\sqrt{n}} + \cdots \end{aligned} \tag{2.82}$$

Dabar imkime dydį z, tiesiškai išreiškiamą per $\bar{x}$:

$$z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma(\bar{x})}. \tag{2.83}$$

Atsižvelgę į (2.78) ir (2.74), jį perrašome

$$z = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \mu)\sqrt{n}}{\sigma} = \sum_{i=1}^{n} w_i \,. \qquad (2.84)$$

Pasinaudojus (MGF) savybe, kad (MGF) suma vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių yra lygi vieno jų (MGF) pakeltai n -uoju laipsniu [3]. Taigi

$$M'_z(t) = \left[M_w(t)\right]^n \,, \qquad (2.85)$$

ir į ją įrašę (2.82) gauname:

$$M'_z(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{\mu_3 t^3}{6\sigma^3 n\sqrt{n}} + \cdots\right)^n \to e^{\frac{t^2}{2}}, \quad kai \quad n \to \infty \,. \qquad (2.86)$$

Bet iš (2.32) išplaukia, kad normalinis dėsnis su $\hat{x} = 0$ ir dispersija σ^2 (MGF) yra $e^{\sigma^2 \frac{t^2}{2}}$. Palyginę šią funkciją su (2.86) gauname, kad dydis *z,* kai , $n \to \infty$, pasiskirstęs pagal normalinį dėsnį ir $\hat{x} = 0$, o $\sigma_z^2 = 1$. Iš (2.83) išreikštas mus dominantis dydis $\bar{x}$ yra tiesinė *z* funkcija

$$\bar{x} = z\sigma(\bar{x}) + \mu = \frac{z\sigma}{\sqrt{n}} + \mu \,. \qquad (2.87)$$

Bet mes įrodėme (2.37), kad tiesinė funkcija (šiuo atveju $\bar{x}$) nuo normaliniu dėsniu pasiskirsčiusio dydžio *(z)* yra taip pat pasiskirsčiusi pagal **normalinį dėsnį**.

Taigi palyginę (2.87) ir (2.37) matome, kad atsitiktinis dydis $\bar{x}$ asimptotiškai artėja prie ribos, aprašomos normaliniu skirstiniu su vidurkiu μ ir dispersija

$$\sigma_n^2(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \,. \qquad (2.88)$$

Atkreipkime dėmesį, kad įrodant nebuvo keliama sąlygų x skirstiniui. Taigi teorema šiuo požiūriu bendra.

Tai svarbiausia statistikos teorema, vadinama centrine ribine, kuri laikoma viena iš nuostabiausių matematinių teoremų. Ją pagrindžiant dalyvavo įžymūs matematikai: Muavras, Laplasas, Gausas, Čebyševas ir Liapunovas.

Kai n maži, vidurkių skirstinys aprašomas Stjūdento – t skirstiniu su dispersija, atitinkančia centrinės ribinės teoremos išvadą.

c) Gauso ir Stjūdento skirstinių taikymas

Realiame eksperimente visada matavimų skaičius $n \neq \infty$, nors jis gali būti pakankamai didelis. Tada analizuojant duomenis Gauso metodu $\hat{x}$ ir dispersija σ^2 vertinama apytikriai pagal imties duomenis. Normaliniame skirstinyje $\hat{x}$ įvertinamas imties vidurkiu :

$$\hat{x} \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \,, \qquad (2.89)$$

o dispersijai σ^2 vertinti pirmajame artėjime taikoma imties dispersija

$$s'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 . \tag{2.90}$$

Jos matematinis vidurkis yra

$$\begin{aligned} E(s'^2) &= \frac{1}{n}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right\} = \frac{1}{n}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x} + \hat{x} - \bar{x})^2\right\} = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{E\left(x_i - \hat{x})^2\right) - E\left((\bar{x} - \hat{x})^2\right)\right\} \end{aligned} . \tag{2.91}$$

Įskaitę sąryšius (2.78) arba (2.88) antrajame naryje gauname:

$$E(s'^2) = \frac{1}{n}\left\{n\sigma^2(x) - n\left(\frac{1}{n}\sigma^2(x)\right)\right\} = \frac{n-1}{n}\sigma^2(x). \tag{2.92}$$

Taigi imties dispersijos s'^2 matematinis vidurkis $E\left(s'^2\right)$ skiriasi daugikliu $(n-1)/n$ nuo populiacijos, iš kurios eksperimentu ir gauta n duomenų imtis, dispersijos σ^2. Todėl s'^2 vadinamas paslinktuoju dispersijos σ^2 įverčių. Tačiau vietoje (2.90) imdami

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{2.93}$$

gauname $E(s^2) = \sigma^2$, t. y. nepaslinktąjį įvertį. Daugiklis n-1 vardiklyje atsiranda todėl, kad imties duomenys naudojami ir $\bar{x}$ nustatyti (vienas sąryšis) lygtyje (2.89). Taigi nepriklausomų imties elementų sumažėja ir tai galima įskaityti vardiklį sumažinant vienetu.

Atskiras atvejis yra vertinimas atsitiktinio dydžio X, sudaryto iš tos pačios prigimties dydžių $X_1, X_2,\ldots,X_r$ sumos, kurių tikimybės tankio funkcijos – $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_r(x)$. Vertinant X pagal imtį, sudarytą iš n_i duomenų tūrio, proporcingo kiekvienos populiacijos santykiniam svoriui, lyginant su visa populiacija, iš (2.89) ir (2.90), gauname [2]:

$$\bar{x}_p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i \bar{x}_i , \tag{2.94}$$

o jo dispersija

$$\sigma^2(\bar{x}_p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i}{n}\sigma_i^2 . \tag{2.95}$$

Taigi čia įskaitomi kiekvienos populiacijos svoriai $\frac{n_i}{n} = p_i$ ir p_i – atskiros populiacijos tikimybė.

Dažnai atskirų populiacijų dispersijos σ_i^2 yra nežinomos. Tada jos įvertinamos pagal (2.93), o iš (2.95) gauname dispersijos vertinimą

$$s_p^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\frac{n_i}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_i)^2 \ . \tag{2.96}$$

Praktiniuose matavimuose stengiamasi gauti populiacijas $\bar{x}_p$, užtikrinančias mažiausią dispersiją fiksuotam n. Tada n_i reikia parinkti tokius, kad $\sigma_i^2(\bar{x}_p)$ (2.95) būtų minimali. Tai galima padaryti ir kitaip ištyrus atskirų populiacijų reikšmę visos populiacijos vidutinei vertei (2.94).

Matematinėje statistikoje X dydžio verčių visuma, kurios skirstinys sutampa su jo teoriniu tikimybių skirstiniu, sudaro generalinę aibę. Matuojant gautas x_i rinkinys $i \geq 1, 2, ..., n,$ vadinamas imtimi, turi kuo geriau išreikšti generalinės aibės dėsningumus. Kai imčiai sudaryti turime nedaug objektų (pvz., būdingą požymio (defekto) statistiką nustatome iš palyginti nedidelio detalių skaičiaus), sudaroma grąžintinė imtis, t. y. įvertiname pasirinktojo objekto požymį ir vėl grąžiname į tiriamų objektų rinkinį. Paskui su rinkiniu elgiamės taip, lyg anksčiau nebūtume vieno jo objekto tyrę. Taip sudaroma tiriamo požymio vienodo duomenų kiekio imčių seka.

Imčių vidurkių $\bar{x}$ skirstinys aprašomas Stjūdento skirstiniu. Jo dispersija įvertinama remiantis centrine ribine teorema:

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2}{n} \approx \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2 = s_{\bar{x}}^2 \ . \tag{2.97}$$

Grąžintinės imties sudarinėti nereikia, kai generalinė aibė turi labai daug x reikšmių. Pavyzdžiui, matuojant kokį nors objektui priskirto modelio parametrą ir laikant, kad paklaidų skirstinys tolydinis, generalinė aibė yra begalinė.

d) Stjūdento skirstinio (t-skirstinio)ypatybės

Kaip jau minėta, Stjūdento skirstinys nusako atsitiktinio dydžio vienodo duomenų kiekio **imčių vidurkių** skirstinį.

Be to, šiuo atveju intervalą, į kurį patenka imčių vidurkiai, išreiškiame σ_n vienetais, o ne σ, t. y. parametru $t = (\bar{x} - x_{tikras}) / \sigma_n$. Suprantama, kad Stjūdento skirstinys priklauso nuo matavimų skaičiaus n vienoje imtyje. Parametro t tikimybės tankio funkcija:

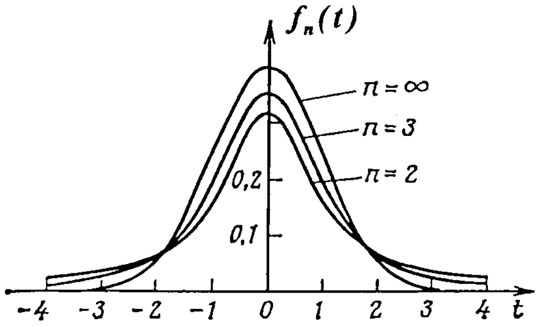
$$f_n(t) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}}(1+t^2)^{-(n+1)/2} \ , \tag{2.98}$$

čia Γ – Eilerio gama funkcija:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \ . \tag{2.99}$$

Tai yra simetrinė $t=0$ atžvilgiu funkcija, kurios dispersija

$$\sigma^2(t)=(n-1)/(n-3). \tag{2.100}$$



17 pav. Stjūdento skirstiniai, kai $n=2$, $n=3$ ir $n=\infty$

Lyginant su Gauso skirstiniu, ji yra labiau ištęsta (17 pav.). Ši aplinkybė taip pat dažnai naudojama pritaikant Stjūdento skirstinį eksperimento duomenims aprašyti. Tikimybė gauti, pvz., $|t|>|t_p|$ bus

$$p = 2\int_{t_p}^{\infty} f_n(t)dt\,, \tag{2.101}$$

arba

$$p\left(|t| \le |t_p|\right) = 1 - p\,. \tag{2.102}$$

Kai $n \to \infty$, Stjūdento skirstinys artėja prie normalinio (centrinė ribinė teorema). Tikslumas dažnai tampa pakankamas, kai $n \ge 30$. Todėl, kai $n<30$, taikomas Stjūdento skirstinys, o kai $n \ge 30$, – Gauso.

Taigi lygtis (2.102) nustato t reikšmių intervalą $[-t;\ t]$ ir tikimybę $\alpha=1-p$ duomeniui patekti į šį intervalą. Kadangi $t = \dfrac{(\bar{x} - \hat{x})}{\sigma_n}$, tai iš čia išplaukia $\bar{x} - \hat{x} = t_\alpha \sigma_n$. Vertinant paklaidas imamas t modulis ir įskaičius, kad t_α priklauso nuo n, gauname

$$\hat{x} = \bar{x} \pm t_\alpha(n)\sigma_n\,, \tag{2.103}$$

arba užrašant matavimo rezultatą $x = \bar{x} \pm \Delta x$,

$$\Delta x = t_\alpha(n)\cdot\sigma_n = t_\alpha(n)\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2}\,. \tag{2.104}$$

Koeficientai $t_\alpha(n)$ vadinami Stjūdento koeficientais ir pateikiami statistinėse lentelėse (žr. 5 lentelę). Pagal tai, koks eksperimentas atliekamas, α imamas įvairus. Pvz., laboratorinių darbų – 95%, artilerijos šaudymų – 50%, 80% intervalas taikomas automatikos priemonių, elektroninės ir elektros tiekimo (maitinimo) technikos patikimumui vertinti ir vadinamas patikimumu arba pasikliaujamuoju intervalu (tikimybe).

Bendrąją matavimo paklaidą, atsižvelgdami į matavimo prietaiso netikslumą, įvertiname pagal sąryšį (2.150):

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{ats.})^2 + (\Delta x_{prietaiso})^2}\,, \tag{2.105}$$

ir matavimo rezultatas užrašomas: $x = \bar{x} \pm \Delta x, \alpha = (\ldots)$.

2.2.6. Matematinio modelio eksperimento duomenims analizuoti parinkimas ir jo tinkamumo įvertinimas

a) Atsitiktinės imties charakteristikos

Akivaizdu, kad matematiniai modeliai gali būti taikomi tik tuo atveju, kai yra patenkintos esminės jų matematinės prielaidos. Paprastai jas patenkinti galimybių labai mažai. Todėl tam tikro eksperimento duomenims analizuoti parenkamas **apytikris modelis**. Dažniausiai jo parinkimo pagrindas yra imtis (arba grąžintinė imtis), kurios charakteristikos:

1) vidurkis

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \; ; \qquad (2.106)$$

2) duomenų išplitimo mediana, kuri, kai x_i išdėstyti didėjimo kryptimi, lygi:

$$x_m = x_{\frac{(n+1)}{2}}, \qquad \text{kai } n \text{ nelyginis;}$$

$$x_m = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right), \qquad \text{kai } n \text{ lyginis} \qquad (2.107)$$

3) moda, kuria vadinama x_i vertė, atitinkanti imties skirstinio maksimumą.

Imties sklaidą apibūdina:

1) dispersija

$$\sigma_{imt}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \; , \qquad (2.108)$$

arba vidutinė kvadratinė paklaida

$$S_{v.kv.} = \sigma_{imt.} \, , \qquad (2.109)$$

be to $\bar{x}$ ir $\sigma_{imt.}^2$ yra pagrindinės imties charakteristikos;

2) vidutinis nuokrypis (paklaida)

$$d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right| \; ; \qquad (2.110)$$

3) sklaidos plotis

$$r = x_{max} - x_{min} \; , \qquad (2.111)$$

kuris skirtingai negu kiti imties parametrai neartėja asimptotiškai prie normalinio skirstinio. Vis tik juo remiamasi, kai reikia apytikriai įvertinti σ_{imt} (žr. I statistinę lentelę). Be to, naudojami aukštesnieji momentai bei su jais susiję dydžiai. Taip, pvz., asimetriškumui įvertinti taikomas asimetrijos koeficientas

4)
$$A = \frac{1}{n \cdot \sigma_{imt}^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^3 = \frac{S^3}{\sigma_{imt}^3}. \quad (2.112)$$

Kai imties skirstinys simetrinis – $A=0$, kai $A>0$, ištęsta dešinioji imties skirstinio pusė, kai $A<0$, – kairioji.

5) Imties kreivės ištęstumą į viršų, t. y. smailumo laipsnį, normaliojo skirstinio grafiko atžvilgiu apibūdina nutolimo (eksceso) koeficientas:

6)
$$E = \frac{1}{n \cdot \sigma_{imt}^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^4 - 3. \quad (2.113)$$

Dešinėje pusėje atimtas trejetas, kuris atsiranda todėl, kad Gauso skirstinio $\mu^4 = 3\sigma^4$. Taigi E apibūdina nutolimą (ekscesą) nuo Gauso skirstinio.

Vietoje A ir E praktikoje dažnai taikomos jų vidutinės kvadratinės paklaidos 5[ ]:

$$S_A = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}} \quad (2.114)$$

ir

$$S_E = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}. \quad (2.115)$$

Jei $A \leq 3S_A$ ir $E \leq 3S_E$, tai tiriamąjį skirstinį galima laikyti normaliniu.

Tačiau duomenims aprašyti ir parinkus pagal imties parametrus kurį nors matematinį modelį lieka klausimas, kaip gerai jis parinktas. Tai labai svarbu, nes nuo to priklauso viso eksperimento išvados.

b) χ^2 skirstinys (Pirsono skirstinys) ir jo kaip suderinimo kriterijaus taikymas matuojant tiesiogiai

Matematinio modelio pasirinkimą pagrįsti galima įvairiais tam skirtais dydžiais, vadinamais **kriterijais**. Iš jų dažniausiai taikomas χ^2 kriterijus, apibūdinantis pasirinktojo matematinio modelio tinkamumą pagal **visas imties vertes**. Tuo tarpu kiti kriterijai pažymi ir lygina tam tikrą vieną ypatybę. Pvz., A ir E kriterijai.

Sakykime, kad atsitiktinio dydžio X skirstinys aprašomas **normaliniu dėsniu** su vidurkiu a ir dispersija σ^2. Tada pakeitę atsitiktinį kintamąjį x į $U=(x-a)/\sigma$ gauname (2.70):

$$f(U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-U^2/2), \quad (2.116)$$

aprašančią skirstinį su $\hat{U} = 0$ ir vidutine kvadratine paklaida $\sigma_U = 1$.

Matematinėje statistikoje įrodoma, kad pasirinkus imtį $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ir sudarius jos elementų kvadratų sumą

$$\chi^2 = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_n^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 \quad (2.117)$$

gaunamas naujo atsitiktinio dydžio χ^2 elementas. Dydžiui χ^2 būdingas skirstinys, kurio pasiskirstymo (skirstinio) tikimybės tankis –

$$f_n(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \cdot (\chi^2)^{\frac{(n-2)}{2}}, \tag{2.118}$$

ir tikimybių pasiskirstymas –

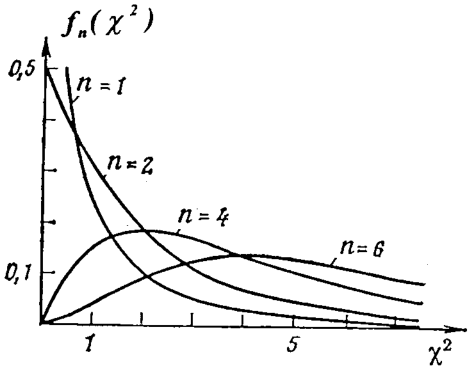
$$F(\chi^2) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)2^{\lambda}} \int_0^{\chi^2} U^{\lambda-1} \cdot e^{-\frac{U}{2}} du, \tag{2.119}$$

čia $\lambda = \frac{n}{2}$, o dydis n vadinamas laisvės laipsnių skaičiumi.

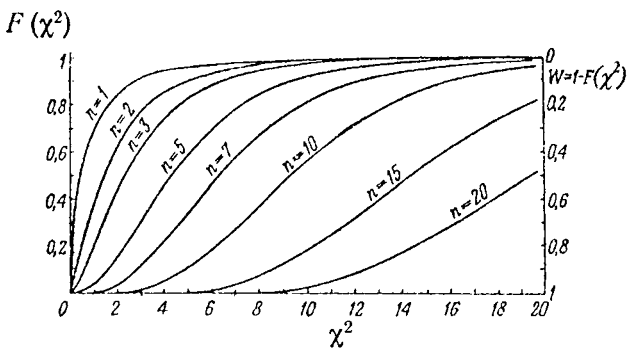
Funkcijos $F(\chi^2)$ kvantilių statistinės lentelės pateiktos 4 lentelėje, o $f_n(\chi^2)$ ir $F(\chi^2)$ grafinis vaizdas pateiktas 18 ir 19 pav.

Be to, $\hat{\chi}^2 = n$, o χ^2 dispersija $\sigma^2_{\chi^2} = 2n$.

Kai aptariama imties duomenų nuokrypių nuo imties vidurkio kvadratų suma ($\bar{x} \neq a$), t. y. $\tilde{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i + \bar{x})^2}{\sigma^2}$, ją atitiks skirstinys χ^2_{n-1} ir $\hat{\chi}^2_{n-1} = n-1$.



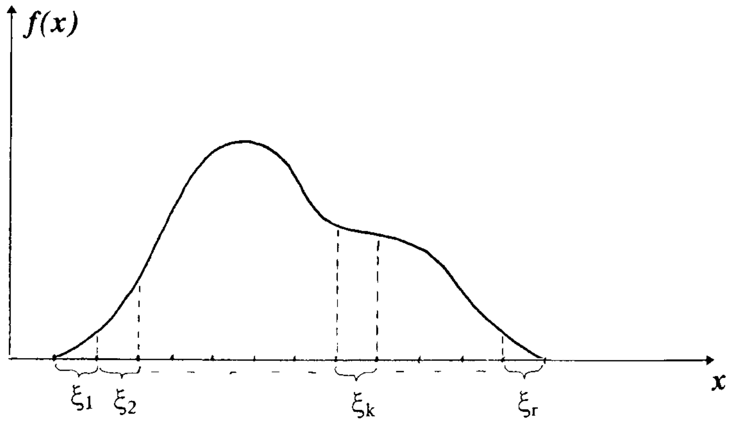
18 pav. χ^2 skirstinio tikimybės tankio funkcija



19 pav. χ^2 tikimybių skirstinio funkcija

Pagal aptartąjį χ^2 skirstinį **gaunamas vadinamasis suderinamumo kriterijus** χ^2 yra svarbiausias iš visų kitų kriterijų. Jis išreiškia atsitiktinio dydžio X imties duomenų pasiskirstymo ir generalinei aibei parinkto pasiskirstymo palyginimo rezultatą.

Tarkime, kad eksperimento metu matuojamojo dydžio X verčių spektras tolydinis, o jo tikimybės tankio funkcija yra $f(x)$. Tada x kitimo intervalą galime suskaidyti į r vienodų intervalų ξ_1, ξ_2,..., ξ_k,... ξ_r (20 pav.).



20 pav. Dydžio X, kurio skirstinys tolydinis, verčių sritis, suskaidyta į r vienodų intervalų, iš kurių vienam tenka n_i duomenų

Tikimybė atsitiktiniam dydžiui $\boldsymbol{x}$ patekti į intervalą išreiškiama plotu po kreive virš šio intervalo, arba

$$p_k = \int_{\xi_k} f(x)dx \quad \text{ir, be to,} \quad \sum_{k=1}^{r} p_k = 1 .$$

Kai skirstinys diskretusis, 20 pav. parodytas suskirstymas atitiktų atvejį, kai atsitiktinis dydis X gali įgauti r verčių, kurių tikimybės bendruoju atveju yra skirtingos. Pavyzdžiu galėtų būti lošimo kauliukas, kai jis yra ne visai kubinis.

Tada n kartų pakartojus eksperimentą galima apskaičiuoti tikimybę, kad į pirmąjį intervalą pateks n_1, į antrąjį – n_2 ir t. t. ir į r-ąjį n_r duomenų. Ji išreiškiama polinominiu skirstiniu:

$$P(n_1, n_2, ..., n_r) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} ... p_r^{n_r} , \tag{2.120}$$

čia $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.

Įsitikinkime šios išraiškos teisingumu, kai kauliukas ne visai kubinis. Kauliuko sienos – šešios, t. y. $r=6$, p_1 – tikimybė, kad „iškris" vienetas, p_2 – dvejetas ir t. t. ir p_6 – šešetas. Tada $P(n_1, n_2,..., n_6)$ išreiškia tikimybę, kad metant kauliuką n kartų arba n tokių pačių kauliukų vieną kartą, vienetas „iškris" n_1 kartų, dvejetas – n_2, t. t. ir šešetas – n_6 kartų.

Laukiamą eksperimento rezultatą galima vaizdžiai interpretuoti schema, kurioje – šešios dėžės (21 pav.) su atitinkamomis p_i ir n_i vertėmis, kai $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$ ir $\sum_{i=1}^{6} n_i = n$.

p_1 n_1	p_2 n_2	p_3 n_3	p_4 n_4	p_5 n_5	p_6 n_6

21 pav.

Tikimybę (pagal tikimybių teoriją), kad pirmieji iš n_1 metimų „teks 1-ajai dėžei", po jų einantys n_2 – antrajai, t. t., ir n_6 – šeštajai, galima išreikšti:

$$p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_6^{n_6} .$$

Tačiau po n metimų galutinis pasiskirstymo rezultatas nepriklauso nuo to, pagal kokį metimų eiliškumą n_1 kartų kauliukas „krito į 1-ąją dėžę", n_2 – į antrąją ir t. t. Taigi tikimybė gauti galutinį ekvivalentų pasiskirstymą padidės tiek kartų, kiek galima gauti pasiskirstymų, keičiant duomenis tarpusavyje vietomis iš skirtingų dėžių, nes kiekvieno iš jų tikimybė ta pati. Kadangi $n!$ išreiškia visus įmanomus perstatymus, o $n_1!\ n_2! \dots n_6!$ – perstatymų skaičių, kai duomenys perstatomi bent vienoje iš dėžių, gauname:

$$P(n_1, n_2 \dots n_6) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_6!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \dots p_6^{n_6} .$$

Gauta $P(n_1, n_2, \dots n_r)$ polinominio skirstinio išraiška labai greitai artėja prie standartinio **normalinio** – tam tikros šio skirstinio ribos.

Dabar tai aptarsime nuosekliau pagal 20 pav. pavyzdį. Tarkime, kiekvieno intervalo $\hat{n}_i = np_i = m_i$. Jei eksperimentą kartotume po n matavimų kelis kartus, tai gautume n_i skirtingas vertes, kurios **kiekviename *i* intervale** būtų pasiskirstę **pagal binominį dėsnį**. Binominis skirstinys greitai artėja prie Puasono (kai p_i maži) – su vidutine verte ir dispersija

$$\hat{n}_i = \sigma_i^2 = n \cdot p_i .$$

Įvertinant, kad x verčių intervalai ξ_i pasirinkti tokie, kad į juos patenka tik po nedidelę dalį visų matavimo duomenų, t. y. p_i maži, tikrai galima tikėtis, kad jų pasiskirstymas kiekviename intervale atskirai bus aprašomas Puasono skirstiniu, o didėjant duomenų skaičiui kiekviename intervale, t. y., kai n didėja, artės prie Gauso skirstinio su tomis pačiomis $\hat{n}_i$ ir σ_i^2 vertėmis:

$$\hat{n}_i = np_i \approx \sigma_i^2 .$$

Tada tiriant dydį

$$Z_i = \frac{n_i - \hat{n}_i}{\sigma_i} = \frac{n_i - np_i}{\sqrt{np_i}} = \frac{n_i - \hat{n}_i}{\sqrt{\hat{n}_i}} \tag{2.121}$$

jo skirstinys bus artimas normaliniam su $\hat{Z}_i = 0$ ir $\sigma_{Z_i} = 1$ visiems i. Iš čia kyla išvada, kad visi Z_i paimti iš standartinio normalinio skirstinio, taigi:

$$U = \sum_{i=1}^{r} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i} \tag{2.122}$$

vertė, kuri yra fiksuota vienai matavimų serijai iš n matavimų ir atitiks vieną χ^2 elementą (2.117), kartojant tokias serijas bus atsitiktinė, pasiskirsčiusi pagal χ^2_{r-1} dėsnį. Laisvės laipsnių skaičius n-1, nes n_i tenkina papildomą lygtį $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$, taigi n_i dydžiai nėra nepriklausomi.

Parinktos tikimybės tankio funkcijos $f(x)$ tinkamumas patikrinamas taip:

1. Eksperimentu gautus duomenis suskirstome pagal ξ_i intervalus į grupes, po n_i kiekvienoje.

2. Iš statistinių lentelių surandame tikimybių vertes duomeniui patekti į intervalą ξ_i $p_i = \int_{x_i}^{x_i+\xi} f(x)dx$.

3. Randame numatomas vidutines n_i reikšmes $\hat{n}_i = p_i n$.

4. Apskaičiuojame $U = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$.

Klaidingai parinkus hipotetinį skirstinį *f(x)* gaunama didelė U vertė. Kyla klausimas, su kuo ją palyginti.

Kadangi U verčių skirstinys yra χ^2_{r-1} tipo, tai lyginame su $\hat{U} = r - 1$, nes $\hat{\chi}^2_{r-1} = r - 1$.

Skaičius $\nu = r\text{-}1$ vadinamas laisvės laipsnių skaičiumi.

Praktikoje dažnai pasitaiko atvejų, kai galima aiškiai numatyti *f(x)*, arba skirstinio, nusakančio tikimybes p_i, tipą, bet išsamiai jo nustatyti nepavyksta, kol iš eksperimento sužinome vieną ar kelis tam skirstiniui būdingus parametrus.

Tada įtraukus l papildomų sąryšių skirstiniui būdingiems parametrams nustatyti, laisvės laipsnių skaičius tampa [3]:

$$r\text{-}l \quad \text{ir} \quad \hat{U} = r - l, \tag{2.123}$$

o kai tiriame imties verčių nuokrypių nuo jos vidurkio kvadratų sumą –

$$\nu = r\text{-}1\text{-}l \quad \text{ir} \quad \hat{U} = r - 1 - l. \tag{2.124}$$

Pavyzdys.

Tarkime, turime informaciją, gautą tiriant N gelžbetoninių iš anksto įtemptų elektros tiekimo linijų atramų stiebų defektus – išilginius plyšius stiebo galuose įtemptosios armatūros lygyje; nepakankamo išilginės ir skersinės armatūros apsauginio betono sluoksnio storį; nudaužto apsauginio betono sluoksnio vietas arba pvz., defektų skaičių kineskopo ekrane. Dominantį dydį, pvz., burbuliukų skaičių viename kineskopo ekrane, ištyrus $N=200$ kineskopų, pažymėkime x. Tada išdėstydami duomenis defektų didėjimo ekrane tvarka sudarome lentelę.

1 lentelė

Gaminys	Defektų skaičius (x)							
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**iš viso**
Kineskopų, turinčių x defektų, skaičius r_x	109	65	22	3	1	0	0	200
Pagal Puasoną apskaičiuotas kineskopų su defektais skaičius m_x	108,7	66,3	20,2	4,1	0,6	0,07	0,01	200

Pastaba: Eksperimento pavyzdys iš [3] – pritaikytas inžinerijoje.

Kadangi viename kineskope aptinkamų defektų skaičius mažas ir apskritai kineskopų su defektais nėra daug, galima tikėtis, kad skirstinys r_x bus Puasono:

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda},$$

čia $\lambda \equiv Np = \hat{k}$.

Kadangi p (tikimybės vienam defektui atsirasti) nežinome, tai negalime rasti tikrojo λ. Tada λ vertiname apytikriai iš imties:

$$\tilde{\lambda} \approx \frac{bendras\ visų\ kineskopų\ defektų\ skaičius}{tikrintų\ kineskopų\ skaičius} =$$
$$= \frac{0 \times 109 + 1 \times 65 + 2 \times 22 + 3 \times 3 + 4 \times 1}{200} = \frac{122}{200} = 0{,}61.$$

Įrašę šią vertę į Puasono skirstinio formulę, gauname 3-ą lentelės eilutę. Pagal 2 lentelės duomenis apskaičiuojame:

$$U = \sum_{x=0}^{3} \frac{(r_x - m_x)^2}{m_x} = \frac{0{,}3^2}{108{,}7} + \frac{1{,}3^2}{66{,}3} + \frac{1{,}8^2}{20{,}2} + \frac{0{,}8^2}{4{,}8} = 0{,}32\,.$$

Pastaba: paskutiniuosius mažus m_x sujungiame, kadangi r_x, kai $x>2$, maži.

2 lentelė

x	**0**	**1**	**2**	**≥3**
r_x	109	65	22	4
m_x	108,7	66,3	20,2	4,8

Kyla klausimas, ar gauta $U=0{,}32$ nėra per didelė?

Esami dažniai r_x tenkina lygtį $\sum r_x = 200$ ir papildomą vieną lygtį $\sum x \cdot r_x = 122$, kurias taikome $\tilde{\lambda}$ nustatyti. Taigi laisvės laipsnių liks: $\nu = 4 - 1 - 1 = 2$. Tad U pasiskirstys maždaug kaip χ_2^2. Iš $F(\chi_2^2)$ lentelių randame: kai patikimumas $\alpha=0{,}95$, $U = \chi_2^2$ turi būti tarp 0-$6{,}0$. Taigi $U=0{,}32$ ir yra tarp šių ribų, o tai reiškia, kad $f(x)$ įvertinimas Puasono skirstiniu pakankamai geras.

Kai x verčių spektras tolydinis, pradžioje x dydžio sritis suskirstoma į vienodus $\xi_1, \xi_2 ... \xi_r$ intervalus (20 pav.). Intervalai turi būti tokie, kad į kiekvieną patektų pakankamai didelis duomenų skaičius n_i, t. y. kad dydis

$$U = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$$

būtų patikimai pasiskirstęs pagal χ_{r-1}^2. Antra vertus, intervalų turi būti pakankamai daug, nes kitaip $f(x)$ neįmanoma net apytikriai parinkti iš labai laiptuotos histogramos. Paprastai tai daroma, kad būtų $n_i \geq 4$.

Paskui parenkamas mažas patikimumo koeficientas α, apskaičiuojamas U dydis ir palyginamas su $F(\chi_{r-1}^2)$ kvantiliu $\chi_{r-1}^2(1-\alpha)$. Jei $U > \chi_{r-1}^2(1-\alpha)$, tai prielaida, kad skirstinys atitinka pasirinktą tikimybės tankį $f(x)$, atmetama.

c) Fišerio F-skirstinys. F *kriterijus*

Atliekant matavimus įprasta prielaida, kad matuojamų atsitiktinių dydžių skirstinys yra normalinis, o kartais net ir keliems dydžiams priskiriama vienoda dispersija. Kai imties duomenų skaičius mažas ir nėra galimybės taikyti χ^2 kriterijų duomenų analizei aprašytu būdu, dviejų normalinių skirstinių dispersijoms palyginti taikomas F kriterijus. Tai dažnai sutinkamas atvejis moderniose technologijose, kai tas pats atsitiktinis dydis matuojamas keliais skirtingais prietaisais be sisteminės paklaidos, jų dispersijoms, taigi ir kokybei, palyginti.

Sakykime, jog dvi atsitiktinės tūrio n_1 ir n_2 imtys priklauso normaliniams skirstiniams su tuo pačiu vidurkiu ir reikia palyginti jų dispersijas. Tuo tikslu naudojamas tų imčių empirinių dispersijų (2.93) santykis

$$Z = \frac{s_1^2}{s_2^2}. \tag{2.125}$$

Jei dispersijos lygios, dydis Z turi būti artimas vienetui. Iš šių imčių duomenų galima sudaryti χ^2 skirstiniui priklausančius elementus (2.117):

$$\tilde{\chi}_1^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2}{\sigma_1^2} = \nu_1 \frac{s_1^2}{\sigma_1^2}, \tag{2.126}$$

$$\tilde{\chi}_2^2 = \frac{(n_2 - 1)s_2^2}{\sigma_2^2} = \nu_2 \frac{s_2^2}{\sigma_2^2}, \tag{2.127}$$

turinčius atitinkamai ν_1 ir ν_2 laisvės laipsnius.

Iš čia

$$Z = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{\nu_2 \tilde{\chi}_1^2}{\nu_1 \tilde{\chi}_2^2}. \tag{2.128}$$

Kadangi χ^2 skirstinių su ν laisvės laipsniais tikimybės tankio funkcija žinoma (2.118), gaunama ir tikimybių skirstinio funkcija $V(Q)$ santykiui $\frac{\tilde{\chi}_1^2}{\tilde{\chi}_2^2}$ [2, 3], išreiškianti tikimybę, kad šis santykis bus mažesnis už Q:

$$V(Q) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu_1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu_2\right)} \int_0^Q t^{\frac{1}{2}\nu_1 - 1}(t+1)^{-\frac{1}{2}\nu} dt. \tag{2.129}$$

Čia $\nu = \nu_1 + \nu_2$.

Iš čia ir (2.128) randame ir tikimybių skirstinio funkciją atsitiktiniam dydžiui Z:

$$W(F) = P(Z < F) = P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} < F\right) = P\left(\frac{\tilde{\chi}_1^2}{\tilde{\chi}_2^2} < \frac{\nu_1 F}{\nu_2}\right) = V\left(\frac{\nu_1}{\nu_2} F\right). \tag{2.130}$$

Tai ir yra Fišerio F-skirstinys, priklausantis nuo parametrų ν_1 ir ν_2. F-skirstinio tikimybės tankio funkcija yra

$$f(F) = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right) \cdot \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)\right]}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} F^{\frac{1}{2}\nu_1 - 1}\left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2} F\right)^{-\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)} \tag{2.131}$$

Tai panaši į χ^2 nesimetrinė funkcija (18 pav.), nelygi nuliui tik, kai $F>0$ (22 pav.). Kai $\nu_2>2$, $E(Z) = \frac{\nu_1}{\nu_2 - 2}$.

Dabar iš (2.130) galima nurodyti ribines F'_α vertes, kad

$$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} > F'_\alpha\right) = \int_{F'_\alpha}^{\infty} f(F)dF = \alpha. \tag{2.132}$$

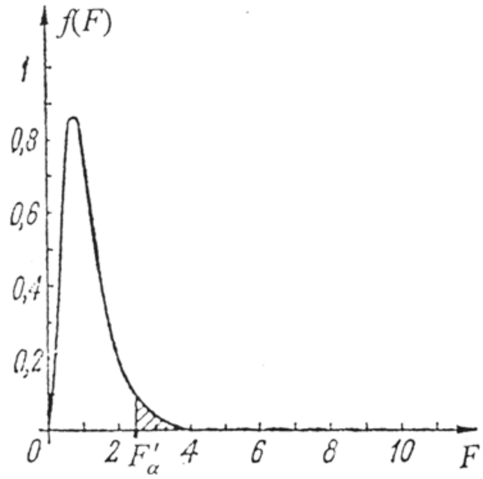
Čia α lygi 22 pav. užbrūkšniuotam plotui.

Tada ribinė F'_α vertė

$$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} < F'_\alpha\right) = 1 - \alpha\ , \tag{2.133}$$

ir atitinka F-skirstinio $1\text{-}\alpha$ kvantilį – $F_{1\text{-}\alpha}$:

$$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha\ . \tag{2.134}$$



22 pav. F-skirstinio tikimybės tankio funkcija, kai $\nu_1=9;\ \nu_2=20$

Taigi kiekvienai F'_α vertei atitinka kvantilis $F_{1\text{-}\alpha}$, 22 pav. išreikštas neužbrūkšniuotu plotu. Jei iš imčių įvertintas santykis $\frac{s_1^2}{s_2^2}$ didesnis už $F_{1\text{-}\alpha}$ vertę, gautą pasirinktam α, sakoma, kad $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ su reikšmingumo lygmeniu α. Kvantilių $F_{1\text{-}\alpha}$ reikšmės, atsižvelgiant į laisvės laipsnių ν_1 ir ν_2 skaičių, palyginamose imtyse pateiktos priede B.

Tarkime, kad, pvz., sudarius tūrio $n_1=10,\ \nu_1=9$ imtį vienu prietaisu ir kitą imtį $n_2=20,\ \nu_2=21$ – kitu prietaisu, jų duomenų pagrindu iš (2.93) surandame santykį $\frac{s_1^2}{s_2^2}=1{,}63$. Paėmę $\alpha=0{,}05$ iš lentelės, randame $F'_{\nu_1,\nu_2,\alpha} = F_{\nu_1,\nu_2(1-\alpha)} = 2{,}45$. Taigi abiejų imčių dispersijų skirtumas yra nedidelis, t. y. $\sigma_1^2 \approx \sigma_2^2$.

Dažniausiai taikomas dvipusis kriterijus, nurodantis Z dydžio intervalo ribas F''_α ir F'''_α, kad

$$P(Z > F''_\alpha) = P(Z < F'''_\alpha) = \frac{1}{2}\alpha\ . \tag{2.135}$$

Moksliniuose tyrimuose α parenkamas, atsižvelgiant į uždavinį, lygus 0,001; 0,01; 0,05; 0,1.

Kadangi Z yra dviejų skaičių santykis, tai sąlygą (2.135) galima užrašyti per du skirstinius $F(\nu_1 \nu_2)$ ir $F(\nu_2 \nu_1)$, be to, riba

$$Z < F'''_{\alpha}(\nu_1\nu_2) \quad ekvivalentiška \quad Z' = \frac{1}{Z} > F''_{\alpha}(\nu_2\nu_1).$$

Tada (2.135) galima pakeisti dviem sąryšiais:

$$\begin{aligned} &P(Z > F''_{\alpha}(\nu_1\nu_2)) = \frac{1}{2}\alpha, \\ &P(Z' > F''_{\alpha}(\nu_2\nu_1)) = \frac{1}{2}\alpha \end{aligned} . \tag{2.136}$$

Palyginus su (2.132), iš (2.134) išplaukia

$$F''_{\alpha}(\nu_1\nu_2) = F_{1-\frac{1}{2}\alpha}(\nu_1\nu_2). \tag{2.137}$$

Praktiškai visada, net ir $\alpha \le 0{,}1$ $F_{1-\frac{1}{2}\alpha} > 1$. Todėl (2.136) reikia patikrinti tik galiojimą nelygybės didesniam iš Z ir Z', t.y.

$$\frac{s_{>}^2}{s_{<}^2} > F_{1-\frac{1}{2}\alpha}(\nu_1\nu_2). \tag{2.138}$$

Čia indeksai „>“ ir „<“ žymi didesnę ir mažesnę dispersijas, t. y. $s_{>}^2 > s_{<}^2$. Jei (2.137) galioja dispersijų lygybės prielaida atmetama.

Taip anksčiau aptartame pavyzdyje buvo $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 1{,}63$, taigi $s_1^2 > s_2^2$. Tada iš (2.137) gauname

$$F''_{0,1}(\nu_1\nu_2) = F_{0,95}(9{,}20) = 2{,}94.$$

Taigi patikrinę pagal (2.138) (1,63<2,94) išplaukia, kad dispersijų lygybė neatmetama.

d) Stjūdento kriterijus

Stjūdento (arba t) kriterijus taikomas atsitiktiniam dydžiui, aprašomam t-skirstiniu. Pirmiausia tai parametrui $t = \frac{(\bar{x} - \hat{x})}{\sigma_n}$ tikslu patvirtinti hipotezei, kad $\hat{x}$ lygus numatytai vertei a. Pakeitę σ_n imties parametru $s_{\bar{x}}^2$ (2.97) gauname $s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$. Taigi parametrą t įvertiname

$$|t| = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{s_x} \quad ir \quad jei \quad |t| > t'_{\alpha} = t_{1-\frac{1}{2}\alpha} \tag{2.139}$$

t. y. $|t|$ daugiau už $t_{1-\frac{1}{2}\alpha}$ kvantilį, hipotezė atmetama. Tai dvipusis kriterijus. Jei svarbu nuokrypiai į vieną pusę, tai tikrinama ar

$$t = \frac{(\bar{x} \pm a)\sqrt{N}}{s_x} > t'_{2\alpha} = t_{1-\alpha} \tag{2.140}$$

Kartais Stjūdento skirstinio dydį galima sukonstruoti. Tokiu pavyzdžiu gali būti patikrinimas Stjūdento kriterijumi ar dviejų normalinių dydžių X ir Y imčių vidurkiai ženkliai skiriasi.

Tuo tikslu sudaromas skirstinys dydžio t proporcingo tų imčių vidurkių skirtumui:

$$t = k(\bar{x} - \bar{y}). \tag{2.141}$$

Mūsų tikslas taikant šį skirstinį, patikrinti hipotezę apie dydžių X ir Y matematinių vidurkių lygybę, t. y. ar $\hat{x} = \hat{y}$.

Įvertinę $\bar{x}$ ir $\bar{y}$ dispersijas dydžiais s_n^2 (2.97) gauname:

$$s_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n_1(n_1 - 1)} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2, \quad s_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{n_2(n_2 - 1)} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{y})^2. \tag{2.142}$$

Kadangi $\bar{x}$ ir $\bar{y}$ gaunami iš normalinių skirstinių verčių, tai $\bar{x}$ ir $\bar{y}$, o tuo pačiu ir $\Delta = \bar{x} - \bar{y}$ turi būti apytikriai aprašomi normaliniu skirstiniu (2.148) su dispersija $s_\Delta^2 = s_{\bar{x}}^2 + s_{\bar{y}}^2$.

Jei tikrai $\hat{x} = \hat{y}$, tai matematinis vidurkis $\hat{\Delta} = 0$, o santykis $\dfrac{\Delta}{\sigma(\Delta)}$ atitiktų standartinį normalinį skirstinį.

Dydžio $\sigma(\Delta)$ nežinome, todėl jį pakeitus dydžiu s_Δ, absoliutinė vertė santykio $\dfrac{|\Delta|}{s_\Delta}$ lyginama su Stjūdento skirstinio, turinčio $\nu = n_1 + n_2 - 2$ laisvės laipsnių kvantiliu, atitinkančiu reikšmingumo lygmenį α. Yra įrodoma [3], kad santykis $\dfrac{\Delta}{s_\Delta}$ priklauso skirstiniui su $\nu = n_1 + n_2 - 2$ laisvės laipsniais. Jei

$$|t| = \frac{|\Delta|}{s_\Delta} = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{s_\Delta} \ge t'_\alpha = t_{1-\frac{1}{2}\alpha}. \tag{2.143}$$

tai hipotezė, kad $\hat{x} = \hat{y}$ turi būti atmesta.

Kartais tikrinant hipotezę, kad $\hat{x} = \hat{y}$ daroma prielaida, kad $\sigma^2(x) = \sigma^2(y)$. Tada σ^2 įvertinama įvertinus imčių svorius dydžiui

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_x^2 + (n_2 - 1)s_y^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}. \tag{2.144}$$

Dispersijos $\bar{x}$ ir $\bar{y}$ vertinamos dydžiais $s_{\bar{x}}^2 = \dfrac{s^2}{n_1}$, $s_{\bar{y}}^2 = \dfrac{s^2}{n_2}$ ir s_Δ įvertinamas iš dispersijų sumavimo taisyklės (2.148)

$$s_\Delta^2 = s_{\bar{x}}^2 + s_{\bar{y}}^2 = \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2} s^2. \tag{2.145}$$

Dažnai skirstinys gali būti žinomas (nuspėjamas), tada jo parametrų vertinimas galimas ir pagal skirstiniui savitus kriterijus [5, 6]. Tokių pavyzdžių nemažai pateikta [7]. Kitais atvejais skirstinys parenkamas vadovaujantis bendrais empirinių formulių parinkimo metodais [8, 9], parinkimo tinkamumą tikrinant χ^2 kriterijumi.

Pažymėtina, kad apskritai kriterijai dažniausia taikomi patikrinimui ar imties skirstinys normalinis (F ir t kriterijai). Tačiau kai tiesiogiai matuojamo dydžio imties vertės nepriklausomos ir matavimo sąlygos maždaug vienodos, o matuojamas dydis yra nuspėjamai nepakitęs, praktiškai be tikrinimo imtis priskiriama normaliniam skirstiniui [10]. Tačiau, kai viename eksperimente tenka tiesiogiai matuoti kelis dydžius, norint patenkinti minėtas sąlygas, kartais tenka taikyti specialiai parinktus matavimo modelius.

Vis tik visų statistinių metodų tinkamumas grindžiamas **statistinių duomenų skirstinių pastovumu**. Jei jo nėra, statistiniai metodai netenka reikšmingumo.

2.2.7. Tiesioginių matavimų sistemingosios paklaidos

Matuojant sistemingųjų paklaidų neišvengiama. Jos pasižymi tam tikra kryptinga įtaka matavimo rezultatui. Šių paklaidų priežastys:

1) Tyrimo objekto ir jam taikomo modelio skirtumai bei nenustatytos matavimo įrenginio įtakos matuojamajam objektui prielaidos.
2) Metodinės paklaidos, susijusios su matavimo įrenginio (prietaiso) veikimo ypatybėmis arba būdingos matavimo rezultato įvertinimo algoritmui. (Pavyzdžiui, kvantavimo paklaidos, keičiant matavimo signalą skaitmenimis, ir matavimo rezultato įvertinimas vidurkiu).
3) Matavimo prietaisų ypatybių, jų nekokybiškumo, konstrukcijos ir technologijos trūkumų paklaidos, vadinamosios matavimo prietaisų paklaidomis.

Galimos sistemingųjų paklaidų priežastys ir jų įvertinimas numatomas aptariant matavimo metodiką. Visais atvejais tai, ką vadiname **sistemingąja paklaida**, **nėra pastovus dydis**. Jos gali priklausyti nuo matuojamojo dydžio ribų (pvz., signalo lygio ir t. t.). Todėl pirmiausia stengiamasi išskirti pastoviąją jų dalį (arba dalį, kurios kitimas determinuotas), nes paskui ją galima įskaityti į matavimo rezultatą ir jį pakoreguoti. Pagrindinė pastoviosios dalies ypatybė, kokia bebūtų jos kilmė – metodinė ar lemiama prietaisų ypatybių, – yra ta, kad jos negalima įvertinti taikant tik tą patį parinktą matavimo metodą ar įrangą. Ji randama tik tas priemones keičiant.

Kita sistemingosios paklaidos dalis iš esmės vertinama kaip ir atsitiktiniai dydžiai – **pagal tikimybių teorijos metodus**. Tai taikoma ir matavimo prietaisams, tik laikoma, kad pastovioji paklaidų dalis, lemiama prietaiso veikimo principo ir konstrukcijos ypatybių, **yra maža**, lyginant su paklaida, nulemta prietaisą gaminant taikytų technologijų ypatybių, prietaiso naudojimo laiko ir eksploatacijos sąlygų. **Pastarosios yra atsitiktinės paklaidos dalies priežastys**.

Dėl šios aplinkybės įprasta pagal kiekvieną ypatybę (prietaiso matavimo dažnių diapazoną, signalo lygį ir t. t.) prietaisus norminti, t. y. skirstyti į grupes.

Individualiosios matavimo priemonės norminamos pagal tarptautinius susitarimus skirstant į vadinamąsias **tikslumo klases**. Daroma taip.

Kiekvienam prietaisui būdingos įvairios kilmės paklaidos – konstrukcinės, technologinės ir t. t. Kaip minėta, vadovaujamasi prielaida, kad technologinės paklaidos yra didelės, lyginant su kitomis, tad jos įvertinamos statistiškai. Tarkime, kad sistemingąsias paklaidas, atsiradusias dėl netikslaus liniuotės, ampermetro ir kt., padalų sužymėjimo galime rasti lygindami su etalonais ir tuo remdamiesi nustatyti prietaiso paklaidą. Taip vertinant kiekvieno prietaiso paklaidos dydis būtų kitas. Taip pat būtų galima kiekvienam prietaisui parinkti jam būdingą tam tikrą skalę, bet tai labai brangu. Todėl vienam prietaisų tipui parenkama viena skalė, tokia, kad galimà **bendra prietaiso paklaida** neviršytų **ribinės** vertės. Suprantama, konkrečių to paties tipo prietaisų paklaida ir dabar skirsis ir dydžiu, ir ženklu, nes dviejų vienodų prietaisų neįmanoma pagaminti, bet jų visų paklaidos bus ne didesnės už ribinę, kurią garantuoja prietaisų gamintojai. Tada, nors kiekvieno prietaiso paklaida jam yra sistemingoji, bet nežinant jos dydžio ir ženklo, o tik tai, kad paklaida mažesnė už ribinę, skaičiavimuose **ją galima vertinti kaip atsitiktinę, t. y. statistinę**. Dėl to matavimo paklaida šiek tiek padidėja (nes konkretaus prietaiso tikroji paklaida gali būti ir mažesnė), bet lengviau ją įvertinti.

Kai kurių prietaisų nurodoma ribinė paklaida δ (pvz., liniuočių, slankmačių, chronometrų ir t. t.), kitų – tikslumo klasė k:

$$k = \frac{\delta}{x_{\max}} 100\%, \qquad (2.146)$$

čia x_{max} – didžiausia prietaisu leidžiama matuoti dydžio vertė.

Ant prietaisų nurodant tikslumo klasę *k,* ženklo **%** nebūna. Yra **8** elektros matavimo prietaisų **klasės**: 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 2,5; 4,0. Nelabai tikslių prietaisų tikslumo klasė nenurodoma.

Apskritai sudėtingos matavimo įrangos sistemingąsias įvairios kilmės paklaidas nustatyti gana sunku ir dar sunkiau – pateikti jų bendrą „suminį” vertinimą. Todėl jis dažniausiai būna apytikris. Pavyzdžiui, suminei paklaidai nustatyti laikomasi prielaidos, kad vieno pobūdžio paklaidos nepriklauso nuo kito pobūdžio paklaidų. Ką tai lemia?

2.2.8. Paklaidų sumavimas

Tarkime, kad atsitiktinė matavimo paklaida atsirado dėl kelių nepriklausomų priežasčių. Tada visa paklaida, kuri yra atsitiktinis dydis,–

$$\delta x=\delta x_1+\delta x_2+\ldots,$$

čia δx_i – paklaidos, nulemtos kelių priežasčių.

Tada paklaidos δx dispersija σ^2 bus:

$$\sigma^2 = E(\delta x)^2 = E\left\{(\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2 + \cdots + (\delta x_k)^2 + 2\sum_{i<j}^{k} \delta x_i \delta x_j\right\}. \qquad (2.147)$$

Kai kiekvienos paklaidos δx_i pasiskirstymas nulinės vertės atžvilgiu simetriškas, t. y. vienodo dydžio, bet skirtingo ženklo paklaida pasitaiko vienodai dažnai, tai šia savybe pasižymės ir sandaugos $\delta x_i \delta x_j$. Todėl jų vidurkiai bus lygūs nuliui. Tada:

$$E(\delta x)^2 = E\{(\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2 + \ldots + (\delta x_k)^2\},$$

arba

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_k^2 \,. \qquad (2.148)$$

Gavome nepriklausomų paklaidų kvadratinio sumavimo, arba dispersijų sumavimo, taisyklę. Jei kurios nors paklaidos δx_i skirstinys nėra simetrinis, tai taisyklė tik apytikrė.

Iš čia, kai yra tik dvi nepriklausomos sistemingosios paklaidos atsitiktinės dalies atsiradimo priežastys, gauname:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \,.$$

Arba norint gauti matavimo rezultato patikimumą α:

$$\Delta x_{sist} = t_\alpha \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2} \,. \qquad (2.149)$$

Šią taisyklę pritaikę sistemingosioms ir atsitiktinėms paklaidoms sumuoti, gauname jau turėtą (2.105) išraišką:

$$\Delta x_{bendra} = \sqrt{(\Delta x_{atsit})^2 + (\Delta x_{sist})^2} \,.$$

Kitu atveju, kai prietaiso atsitiktinė sistemingosios paklaidos dalis pasiskirsčiusi pagal normalinį dėsnį, gauname:

$$\Delta x_{bendra} = \sqrt{(\Delta x_{\alpha atsit})^2 + \left(\frac{\delta}{3}\right)^2 t_{\alpha}^2(\infty)}\,, \tag{2.150}$$

čia $\Delta x_{atsit.} = t_{\alpha}(n) \cdot \sigma_{imt.}$

3. Netiesioginių matavimų įvertinimas

Netiesioginiais matavimais **ieškomas dydis Y yra tiesiogiai matuojamųjų dydžių x_i žinoma funkcija**:

$$Y=f(x_1, x_2,..., x_m). \tag{3.1}$$

Vertinant netiesioginių matavimų duomenis, skiriami du skirtingi ribiniai atvejai:

1) Duomenų analizei taikomi „paprastųjų” netiesioginių matavimų metodai.
2) Tiriama kaip matuojant tiesiogiai.

Pirmasis atvejis taikomas, kai matuojant argumentų $\boldsymbol{x_i}$ vertės išlieka nepakitusios. Tada kiekvieno argumento duomenys vertinami kaip ir matuojant tiesiogiai, o tada randamas rezultatas:

$$\tilde{Y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2,..., \bar{x}_m)\,. \tag{3.2}$$

Antruoju atveju visos galimos gautų argumentų x_i verčių kombinacijos $\{x_{1i},..., x_{mj}\}$ įrašomos į (3.1) išraišką ir gaunama $Y_{ij}=f(x_{1i},..., x_{mj})$ verčių visuma analizuojama kaip ir matuojant tiesiogiai. Dažniau taikomas 1-as atvejis. Aptarsime jį paklaidų nustatymo požiūriu nuosekliau.

Tarkim, netiesiogiai matuojamas dydis y yra nepriklausomų dydžių $x_1, x_2,..., x_N$ žinoma funkcija

$$y=f(x_1, x_2,..., x_N), \tag{3.3}$$

čia $x_1, x_2,..., x_N$ – tiesiogiai matuojami dydžiai, ir eksperimento metu užtikrinamas jų verčių tarpusavio nepriklausomumas. Kai paklaidos δx_k nedidelės, tai taikant diferencialinį skaičiavimą galima užrašyti:

$$\delta y = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_0 \delta x_k\,, \tag{3.4}$$

arba

$$E\left\{(\delta y)^2\right\} = \sum_{k=1}^{N} E\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)_0 \delta x_k\right\}^2 . \tag{3.5}$$

Dvigubų sandaugų nariai išnyksta vidurkinant. Pvz., dviejų matuojamų x_i dydžių atveju $y=f(x_1,x_2)$ pažymėjus

$$a = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \text{ir} \quad a = \frac{\partial f}{\partial x_2}\,,$$

$$\delta y = a\delta x_1 + b\delta x_2\,.$$

Tada

$$(\delta y)^2 = a^2(\delta x_1)^2 + b^2(\delta x_2)^2 + 2ab\delta x_1 \delta x_2\,.$$

Vidurkinant

$$E\{2ab\delta x_1 \delta x_2\} = 0 \quad \text{ir} \quad E\left\{(\delta y)^2\right\} = a^2 E\left\{(\delta x_1)^2\right\} + b^2 E\left\{(\delta x_2)^2\right\}.$$

Pakeitę δx_i į patikimumo intervalus iš (2.150) gauname:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_0^2 (\Delta x_k)^2} \ . \tag{3.6}$$

Visos Δx_k paklaidos turi būti įvertintos, su tomis pačiomis α vertėmis. Čia $\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_0$ turi būti apskaičiuojama taikant $\bar{x}_k$ vertes. Kai tarp eksperimento metu išmatuotų x_k dydžių verčių atsiranda ryšys, uždavinys pasunkėja, nes reikia įvertinti ryšio stiprumą – koreliacijas. Tada nariai – tipo $\overline{2ab\delta x_i \delta x_j} \neq 0$.

Kartais norima nustatyti eksperimento rezultato santykinę paklaidą $\gamma = \frac{\Delta y}{y}$. Suprantama, ją galima gauti aprašytuoju būdu, nustačius Δy. Tačiau yra paprastesnis kelias santykinei paklaidai apskaičiuoti. Jis grindžiamas matematinio diferencijavimo taisykle, kad $d(\ln y) = \frac{1}{y} dy$.

Tada, kai $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ yra tiesiogiai matuojamųjų dydžių x_k funkcija, gauname:

$$ln\, y = ln\, f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\ .$$

Taigi

$$\frac{dy}{y} = dlnf(x_1, x_2, \ldots, x_N)\ , \tag{3.7}$$

arba diferencialus pakeitę paklaidomis, išreiškiame santykinę paklaidą:

$$\gamma = \frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial\, ln\, f}{\partial x_k} \Delta x_k \right)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k \right)^2}\ . \tag{3.8}$$

Kai $f(x_1,\ldots,x_N)$ išraiška tokia, kad argumentai x_k į ją įeina kaip daugikliai, paprasčiau iš pradžių surasti santykinę paklaidą γ, o tada jei reikia, – ir absoliutinę

$$\Delta y = \gamma y. \tag{3.9}$$

Tuo atveju, kai funkcijos $f(x_1,\ldots,x_N)$ argumentai x_k matuoti tik po vieną kartą:

$$\Delta y_r = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \ldots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_N} \right| \Delta x_N\ . \tag{3.10}$$

Šiuo atveju Δx_k yra ribinės paklaidos vertės, ir Δy_r vadiname ribine paklaida, o santykinė paklaida –

$$\gamma_r = \frac{\Delta y}{y} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{y} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right| \Delta x_k\ . \tag{3.11}$$

Paklaidos Δy_r ir γ_r dažnai taikomos prognozuojant eksperimentą.

4. Skaičių apvalinimo paklaidos

Apvalinimo paklaidos atsiranda nežinant, kaip skaičiavimo procese elgtis su apytikriais skaičiais. Jų išvengti padeda taisyklės, paremtos reikšminių skaičių sąvoka. Reikšminiais skaičiais vadinami visi skaitmenys, įeinantys į apytikrio skaičiaus išraišką, išskyrus nulius, kai jie skaičiaus pradžioje arba rodo jo didumą (eilę). Pvz., skaičiai 5,244; $2{,}094 \cdot 10^4$ ir 0,02703 – visi turi po keturis reikšminius skaičius. Iš tikrųjų trečią skaičių galima užrašyti kitaip: $2{,}203 \cdot 10^{-2}$. Tada suprantama, kodėl antrajame yra tik keturi reikšminiai skaičiai. Skaičių lentelėse pateikiami tik tikrieji skaičiai, t. y. jų paklaida mažesnė už pusę paskutinio skaitmens eilės vertės. Pvz., Hg tankis lentelėje nurodytas $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m^3, tai reiškia, kad $|\Delta\rho| < 0{,}05 \cdot 10^3$ kg/m^3. Jei skaičių užrašytume $\pi = 3{,}14$, tai $\Delta\pi = \pm 0{,}005$, o užrašius $\pi = 3{,}142$, – $\Delta\pi = \pm 0{,}0005$ ir t. t.

Sumuojant apytikrius skaičius, kai jie po kablelio turi nevienodą skaitmenų skaičių, rezultate reikia palikti tik tiek skaitmenų po kablelio, kiek jų yra mažiausiai skaitmenų po kablelio turinčiame skaičiuje. Pvz.:

$$22{,}4+3{,}54+0{,}2041=26{,}1441 \approx 26{,}1.$$

Ta pati taisyklė taikoma ir atimant.

Dauginant ir dalinant apytikrius skaičius rezultate paliekama tiek skaitmenų, kiek jų buvo mažiausiai skaitmenų turinčiame apytikriame skaičiuje. Pvz.:

$$163{,}2 \cdot 0{,}35=57{,}12 \approx 57.$$

Traukiant bet kokio laipsnio šaknį iš apytikrio skaičiaus rezultate reikia palikti tiek skaitmenų, kiek buvo pošakniniame skaičiuje. Pvz.:

$$\sqrt[3]{34{,}5} \approx 3{,}26\,.$$

Logaritmuojant apytikrio skaičiaus mantisėje paliekama tiek skaitmenų, kiek jų buvo logaritmuojamame skaičiuje. Pvz.:

$$\lg 27{,}38=1{,}4375.$$

Kai gauname tarpinį skaičiavimo rezultatą, paliekame vienu skaitmeniu daugiau nei nurodoma aptartose taisyklėse.

Užrašant galutinį skaičiavimo rezultatą paskutinis rezultato ir jo absoliutinės paklaidos skaitmuo turi būti tos pačios eilės. Be to, paklaidoje paliekama dažniausiai vienas, bet visada – ne daugiau kaip du skaitmenys. Pvz.:

$$h=(42{,}25 \pm 0{,}14)\ \text{mm}, \qquad v=(32{,}5 \pm 0{,}4)\ \text{m/s}.$$

Iš aptartų taisyklių paaiškėja, kodėl apytikrių skaičių vertės lentelėse bei fundamentinių fizikinių dydžių vertės pateikiamos su šiuo metu nustatytu dideliu šių dydžių skaitmenų skaičiumi.

Pvz. $\pi = 3{,}141592654$; skaičius $e = 2{,}7182818$; elementarusis krūvis $\pm e = (1{,}60217733 \pm 0{,}00000049) \cdot 10^{-19}$ C; Bolcmano konstanta $k = (1{,}380622 \pm 0{,}000044) \cdot 10^{-23}$ J/K.

Taigi vertinant netiesiogiai dydžius, kai jų funkcinėje išraiškoje per tiesiogiai matuojamus yra skaičiai π, e, elementarusis krūvis $\pm e$ arba Bolcmano konstanta k, galima gauti įverčius atitinkamai su 10, 8, 9 ir 7 reikšminiais skaičiais.

5. Jungtiniai ir kompleksiniai matavimai

Abiem šiais atvejais duomenims analizuoti taikomi panašūs metodai. Iš esmės abiem atvejais nustatoma funkcinė priklausomybė $y=f(x)$, kuri buvo nežinoma, tik kitaip pateikti (sugrupuoti) matavimo duomenys. Kadangi funkcijos $f(x)$ išraiška nežinoma, tai įstatinėti į ją x_i ir y_i atuojant gautas vertes negalima. Vis tik yra apytikris verčių $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_k$ radimo būdas pagal x_i rinkinio ir $\tilde{y}_i$ reikšmių optimalumo įvertinimo kriterijus, nesusijęs su tikimybiniu pradinių duomenų modeliu, t. y. su x_i ir y_i būdingais pasiskirstymais.

Dažniausiai stebimo reiškinio, kuris kiekybiškai apibūdinamas fizikiniu dydžiu Y, kitimo pobūdį lemia ne vienas, o daug veiksnių, kiekybiškai įvertinamų dydžiais $X, \alpha, \beta, \ldots, t$, kurie gali būti arba fiksuoti, arba tyrinėtojo (vienas, keli ir net visi) keičiami, kad kistų dydis Y. Pavyzdžiui, matuojant medžiagos sluoksnio varžą pagal Omo dėsnį ($I=U/R$) keičiant įtampą U, kai matavimai pakankamai tikslūs, R dar priklauso ir nuo aplinkos savybių (dujų adsorbcija ir kiti paviršiniai efektai, jei matavimai ilgai trunka, gali turėti įtakos duomenims), ir nuo temperatūros (kai temperatūros pakankamai mažos, galimi ir superlaidumo reiškiniai).

Tokių tyrimų pagrindinis tikslas – nustatyti ryšius tarp kompleksų ($x_i, \alpha_i, \beta_i, \ldots, t_i$) ir y_i.

Funkcinius ryšius tarp kompleksų ($x_i, \alpha_i, \beta_i, \ldots, t_i$) ir y_i padeda atskleisti regresinės analizės metodai. Tokiu metodu nustatant analitinę funkcijos išraišką, kartais jos pobūdis nuspėjamas teoriškai pagal fizikinę eksperimento prasmę. Kai tai padaryti negalima, tenka ieškomą priklausomybę modeliuoti, laikantis matematinio modelio paprastumo principo, pavyzdžiui, funkcinės priklausomybės apytikrio aproksimavimo daugianariais metodo arba tikimybinio modeliavimo.

5.1. Geriausio atitikimo principas

Sakykime, išskyrėme vieną fizikinį dydį X iš visų, turinčių įtakos Y, ir tiriame jo ryšį su Y. Iki šiol taikydami statistinius modelius, **kai tarp dydžių ryšiai yra žinomi**, įvertindavome tik tokius svarbius parametrus kaip matematinis vidurkis ir dispersija (netiesioginiai matavimai). Dabar aptarsime bendresnio uždavinio sprendimą. Tai būtina todėl, kad tikimybiniai matematiniai modeliai (pasiskirstymai) retokai pasitaiko grynuoju pavidalu, net ir matuojant tiesiogiai. Dažniausiai tenka nagrinėti žymiai sudėtingesnes $y_i = \tilde{f}(x_i)$ priklausomybes, **kurios nėra tiksliai žinomos**. Be to, norime tai išnagrinėti statistiškai, t. y. ieškoma tokios funkcijos $y=f(x)$, kuri **geriausiai atitiktų** x_i ir y_i sąryšį, t. y. eksperimento rezultatus.

Kaip vėliau pamatysime, šio uždavinio sprendimas išplaukia iš bendruoju metodu geriausiai tinkamos skirstinio tikimybės tankio funkcijos nustatymo, kai dydis X matuotas pasirinktuose matavimo „taškuose“. Todėl šią problemą aptarsime nuosekliau.

Tarkime, kad dydis X matuotas N matavimo „taškuose”, – po vieną kartą kiekviename, ir gauta x_i duomenų rinkinys. Tie „taškai” gali būti susiję su skirtingomis koordinatėmis (matuojant, pvz., aplinkos užterštumą) arba su skirtingais laiko momentais. Suprantama, kad kiekviename „taške” gali būti gauta ir imtis duomenų iš tam „taškui” būdingo duomenų pasiskirstymo $f(x_i)$, kurio vidurkis – $\hat{x}_i$ ir dispersija – σ_i^2. Be to, gali būti, kad kelių taškų $\hat{x}_i$ ir σ_i^2 vienodi.

Tam tikru atveju, kai $\hat{x}_i$ visų matavimo taškų vienodi, galime sakyti, kad matuotas pastovią vertę turintis dydis. Tada jei dispersijos σ_i^2 skiriasi, reiškia, kad matavimai tam tikruose „taškuose” nevienodo tikslumo, t. y. nelygiaverčiai, arba, statistikoje sakoma, kad jų svoriai įvairiuose taškuose skirtingi. Kai ir σ_i^2 visuose taškuose vienodi, –turime N lygiaverčių duomenų.

Bendruoju atveju nusakant „taškui” būdingą pasiskirstymą, gali būti ir daugiau parametrų, o ne tik vidurkis ir dispersija, kaip pvz., normaliniame skirstinyje. Juos visus, būdingus vienam taškui, pažymėję λ_i galime užrašyti „taškui” būdingą tikimybės tankio funkciją $f(x_i, \lambda_i)$. Tada tikimybė, kad gauti matavimo duomenys x_i po vieną duomenį iš kiekvieno taško pateks į „tūrio” elementą $d\tau=dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 \ldots dx_N$, bus:

$$dP = \prod_{i=1}^{N} f(x_i \lambda_i) d\tau , \qquad (5.1)$$

čia dx_i – paimti iš matavimo duomenų x_i aplinkos.

Tarkime, kad tokiu pat būdu sudarėme kitą išraišką dP', iš to paties tipo funkcijų su kitais parametrais λ'. Tada santykį

$$Q = \frac{dP}{dP'} = \frac{\prod_{i=1}^{N} f(x_i\lambda_i)}{\prod_{i=1}^{N} f(x_i\lambda_i')} \tag{5.2}$$

galima interpretuoti kaip rodiklį, kiek kartų parametrų rinkinys λ_i yra labiau tikėtinas nei λ'_i.

Funkcija

$$L = \prod_{i=1}^{N} f(x_i\lambda_i) \tag{5.3}$$

vadinama atitikimo funkcija. Kad gautume tinkamiausią jos išraišką, turime ieškoti ekstremumų, t. y. reikalauti, kad $dL/d\lambda_i = 0$. Dažniausiai L iš pradžių logaritmuojama, o paskui kiekvieno iš p_i parametrų įeinančių į λ_i atžvilgiu diferencijuojama, ir gaunama p lygčių sistema, iš kurios ir randami „geriausi" parametrai p_i, o tuo pačiu ir λ_i.

Apskritai gautų lygčių sistemai spręsti pagal sprendžiamo uždavinio pobūdį (pvz., pagal tai, ar visi λ_i tarpusavyje lygūs, ar skirtingi) taikoma daug būdų, tarp jų – ir iteracijų metodas [2]. Šiuo atveju, kai yra vienas λ parametras, pasirinkta funkcija skleidžiama eilute

$$L(\lambda)=L(\lambda_0)+L'(\lambda_0)\delta\lambda_0+... \tag{5.4}$$

ir palaipsniui įskaitoma vis daugiau šios eilutės narių. Kai λ_i skirtingi, tada skleidžiama:

$$L(\lambda)=L(\lambda_1, \lambda_2,...,\lambda_p). \tag{5.5}$$

Geriausio atitikimo metodu ne tik nustatomi „geriausi" parametrai λ_i, bet ir eksperimento duomenų pakankamumas spręsti apie gauto skirstinio tinkamumą. Beje, visada stengiamasi funkciją $L(\lambda)$ parinkti tokią, kurioje kuo mažesnis parametrų λ_i skaičius.

Atsitiktinio dydžio X tikimybės tankio funkcija visais atvejais gaunama normuojant $L(\lambda)$ ir yra $f(x,\lambda)=kL(\lambda)$. Čia k – normavimo daugiklis, užtikrinantis, kad apimantis visą x verčių sritį integralas $\int_{x_1}^{x_2} kL(\lambda) = 1$.

Labai dažnai praktikoje pasitaiko, kad $x_1, x_2,...,x_N$ duomenys savo vidurkių $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N$ atžvilgiu pasiskirstę pagal Gausą:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} exp\left[-\frac{(x_i-\hat{x}_i)^2}{2\sigma_i^2}\right]. \tag{5.6}$$

Šiuo atveju atitikimo funkcija yra:

$$L = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} exp\left[-\frac{(x_i-\hat{x}_i)^2}{2\sigma_i^2}\right]. \tag{5.7}$$

Kadangi parametrus σ_i ir $\hat{x}_i$ parenkame, kad L geriausiai „aprašytų" eksperimentą, ieškosime jos ekstremumų pagal σ_i ir $\hat{x}_i$. Paprasčiau jie randami iš pradžių išlogaritmavus L. Tai įmanoma, nes L ir lnL funkcijų ekstremumai sutampa. Taigi gauname:

$$l = lnL = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-\hat{x}_i)^2}{\sigma_i^2} + const'. \tag{5.8}$$

Iš čia $\frac{dl}{d\hat{x}_i} = 0$ ir $\frac{dl}{d\sigma_i} = 0$ lygčių sprendiniai ir bus „geriausios" σ_i ir $\hat{x}_i$ vertės.

1. Pavyzdžiui, kai turime x_i duomenų rinkinį (imtį), kuris priklauso duomenų aibei, aprašomai viena Gauso pasiskirstymo funkcija, tai visų $\hat{x}_i$ yra vienodi ir lygūs $\hat{x}$, ir visi σ_i lygūs σ, bet nenustatyti ir reikia parinkti jų tinkamiausias vertes. Tada:

$$l = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i - \hat{x})^2}{\sigma^2} - N\ln\sigma + const\ . \qquad (5.9)$$

Iš čia

$$\frac{\partial l}{\partial \hat{x}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i - \hat{x})}{\sigma^2} = 0 \quad \text{arba} \quad \sum_{i=1}^{N} x_i = N\hat{x}\ .$$

Taigi

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}\ . \qquad (5.10)$$

Atitinkamai

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma} = \sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i - \hat{x})^2}{\sigma^3} - \frac{N}{\sigma} = 0\ .$$

Arba

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{x})^2}{N}}\ . \qquad (5.11)$$

Taigi gavome duomenų imčiai Gauso pasiskirstymo taikymuose numatytos ir mūsų iki šiol dar neįrodytos prielaidos patvirtinimą, kad

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \quad \text{ir} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{x})^2}{N}} \qquad (5.12)$$

žinomoje Gauso funkcijoje

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2\sigma^2}}\ . \qquad (5.13)$$

Nors čia σ gauta kiek mažesnė, nes vardiklyje N, o ne $N-1$, kaip įrodoma matematinėje statistikoje, bet apskritai rezultatas gana tikslus.

2. Konkretus pavyzdys, kai σ_i skirtingi, gali būti grunto užterštumo matavimai parinktame taške netoli teršalų šaltinio (elektrinės arba tam tikrame jūros taške). Jei būtų matuojama skirtingo tikslumo aparatūra, tai σ_i būtų skirtingi, ir vienu metu įvertindami matavimo duomenis ($\hat{x}_i$ visais atvejais vienodi) gautume:

$$\frac{\partial l}{\partial \hat{x}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i - \hat{x})}{\sigma_i^2} = 0\ .$$

Iš čia:

$$\tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \rho_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} \rho_i} . \tag{5.14}$$

Taigi galima vertinti, kad matavimai buvo atlikti su svoriais $\rho_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$. Dispersija vertinama iš sąryšio

$$\sigma^2(\tilde{x}) = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} \right)_i^{-1} \tag{5.15}$$

Jo teisingumu galima įsitikinti paėmus visus σ_i vienodus. Tada iš (5.15) gauname $\sigma^2(\tilde{x}) = \frac{\sigma^2}{N}$, t. y. būdingą sąryšį tarp atsitiktinio dydžio ir jo imties dispersijų (2.97).

3. Kai $\hat{x}_i$ skirtingi, be to gali skirtis ir σ_i vertės, tikimybės tankio funkcija aprašanti bendrą skirstinį $f(x,\lambda)=kL(\lambda)$ turės kelias smailes. Pvz., kai gaminių pagamintų vienu įrenginiu parametro vidurkis $\hat{x}_1$, o kitu $\hat{x}_2$ bendra skirstinio funkcija $f(x,\lambda)$ turės dvi smailes.

Geriausio atitikimo metodu gaunamą parametrų įvertinimo tikslumo ribą nusako Kramerio-Rao nelygybė. Ji nepriklauso nuo atsitiktinio dydžio X skirstinio ir užrašoma per kvadratą vidutinės kvadratinės paklaidos parametro $t=t(x)$ vertinančio matuojamą dydį X jo matematinio vidurkio θ atžvilgiu. Vidutinės kvadratinės paklaidos kvadratą užrašius

$$E\left[(t-\theta)^2\right] = E(t-\hat{t})^2 + E(\hat{t}-\theta)^2 , \tag{5.16}$$

matome, kad pirmas sumos narys išreiškia vidutinį kvadratinį nuokrypį parametro t jo vidurkio $E(t)$ atžvilgiu, o antras poslinkį (sisteminę paklaidą) tarp parametro t ir θ, t. y. vertės, kurios įverčiu ir yra t. Taigi

$$E\left[(t-\theta)^2\right] = \sigma_t^2(\theta) + \beta^2(\theta) \ . \tag{5.17}$$

Kai imties tūris n Kramerio-Rao nelygybė teigia [3], kad

$$E\left[(t-\theta)^2\right] \geq \frac{\gamma^2(\theta)}{n} , \tag{5.18}$$

taigi t vertinimo tikslumas ne didesnis už

$$\frac{\sqrt{n}}{\gamma(\theta)} . \tag{5.19}$$

Čia

$$\gamma^2(\theta) = \frac{\left[1 + \frac{d\beta(\theta)}{d(\theta)}\right]^2}{\int_0^{\infty} \left[\frac{\partial \ln f(x/\theta)}{\partial\theta}\right]^2 f(x/\theta)dx} . \tag{5.20}$$

Įvertis t vadinamas **efektyviu**, jei jis tikrai pasiekia viršutinę t nelygybės ribą (5.19).

Geriausio atitikimo metodu gaunami įverčiai turi dvi savybes nepriklausomai didelis ar mažas imties tūris n.

1. Jei egzistuoja **pakankamas įvertis**, tai geriausio atitikimo metodas jį ir duoda išsemdamas visą žinomą imties informaciją. Statistikoje naudojamas terminas **pakankamas įvertis** reiškia, kad skirstinio parametrų įvertinimo atžvilgiu panaudota visa imties informacija. Taip pvz., Gauso skirstinį apibūdinantys du parametrai $\hat{x}$ ir σ^2 apsprendžiami sumomis $\sum x_i$ (2.89) ir $\sum \Delta x_i^2$ (2.97) ir jokios papildomos informacijos apie juos neduoda kiti iš imties sudaryti dydžiai: pvz., $\sum |x_i|$ arba $\sum x_i^3$. Todėl $\sum x_i$ ir $\sum \Delta x_i^2$ vadinami **pakankamomis statistikomis**, o jų pagrindu gauti parametrų įverčiai – **pakankamais įverčiais**.
2. Jei egzistuoja imties pagrindu **efektyvus įvertis**, tai jį ir duoda geriausio atitikimo metodas ir **tikslesnio įverčio gauti neįmanoma**.

   Taip pat dar yra dvi šiuo metodu gautų įverčių savybės teisingos tik asimtotiškai kai n didelis. Taigi jos visiškai teisingos riboje, kai $n \to \infty$, o kai n didelis – apytikrės.

3. Geriausio atitikimo įvertis yra asimptotiškai efektyvus.

4. Geriausio atitikimo įvertis yra asimptotiškai normalinis, su vidurkiu θ ir dispersija

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{-E\left[\dfrac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}\right]} \approx \frac{1}{-\left[\dfrac{\partial^2 l}{\partial \theta^2}\right]_{\theta=\hat{\theta}}} \tag{5.21}$$

čia $l=lnL$ – logaritminė atitikimo funkcija.

Pvz., normaliniam skirstiniui $f(\mu,\sigma_x^2)$, kai σ_x^2 – žinomas

$$l(x,\mu) = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}$$

ir iš (5.21) gauname

$$\frac{1}{-\left[\dfrac{\partial^2 l}{\partial \mu^2}\right]} = \sigma_x^2 .$$

Taigi nustatę l gauname ir skirstinio parametro σ_x įvertį. Apskritai šio metodo yra ir neigiama pusė, nes reikia pasirinkti skirstinio tipą, o tai kartais turi reikšmę rezultatui.

5.2. Mažiausiųjų kvadratų metodas

Tarkime, kad tyrinėtojas, tirdamas požymį X, kurio vertės fiksuotos (su nuline paklaida) stebėjo ir kitą požymį Y ir nustatė, kad pakitus požymio X vertei, pakinta ir Y vertė. Be to, nustatė kelias vienos x_1 vertės požymio Y vertes: $y_{11}, y_{12},...,y_{1n}$. Jų vidurkis, tarkime, yra $\bar{y}_1$. Čia n – baigtinis, bet gana didelis skaičius.

Požymio X vertės x_2 atitinkamai gavo: $y_{21}, y_{22},...,y_{2n}$ ir $\bar{y}_2$. Tokiu būdu tęsdamas matavimus nustatė funkcinę priklausomybę tarp $\bar{y}_i$ ir x_i verčių, kurią norėtų užrašyti analitiškai. Tada daromos prielaidos:

1. Kadangi n pakankamai didelis, tai $y_{11}, y_{12},...,y_{1n}$ vertės pagal normalinio pasiskirstymo dėsnį pasiskirstę apie $\hat{y}_1$ vertę, $y_{21}, y_{22},...,y_{2n}$ – apie $\hat{y}_2$ vertę ir t. t., visais atvejais su ta pačia $\sigma_i=\sigma$ verte.
2. Pagal $\hat{y}_i$ grafinę priklausomybės nuo x_i išraišką surandama apytikrė jį atitinkanti analitinė išraiška $E(y(x)) = \hat{y} = f(x)$.

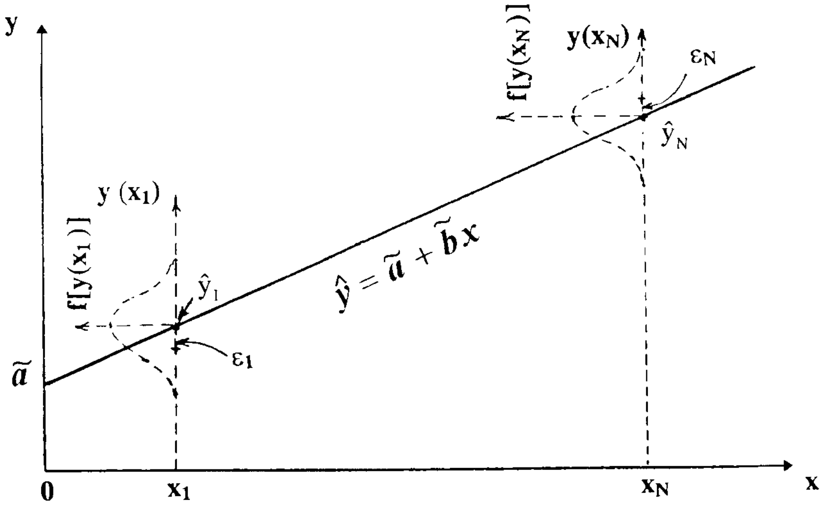
Dabar „užrašoma" logaritminė atitikimo funkcija imant po vieną (eksperimento metu gautą) y_i vertę kiekvienam x_i:

$$l = lnL = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2 + const\,, \tag{5.22}$$

tada jos maksimumas nustatomas pagal išraiškos S minimumą:

$$S = \sum_{i=1}^{N}(y_i - \hat{y}_i)^2\,. \tag{5.23}$$

Panagrinėkime nuosekliau labai dažnai pasitaikantį atvejį, kai $\hat{y}$ tiesiškai priklauso nuo x: $\hat{y} = a + bx$.



23 pav. Regresijos lygties sudarymas, kai priklausomybė $y=f(x)$ tiesinė.

Užrašytoji lygtis išreiškia geometrinę vietą taškų, atitinkančių vidutines $\hat{y}_i$ vertes, ir vadinama regresijos lygtimi (23 pav.). Ją įrašę į S išraišką ir ieškodami ekstremumo, gauname:

$$S = \sum_{i=1}^{N}(y_i - a - bx_i)^2\,, \tag{5.24}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - a - bx_i) = 0$$

ir (5.25)

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{N}(y_i - a - bx_i)x_i = 0\,. \tag{5.26}$$

Taip sudarome lygčių sistemą:

$$Na + b\sum_{i=1}^{N}x_i = \sum_{i=1}^{N}y_i \quad \text{ir} \tag{5.27}$$

$$a\sum_{i=1}^{N}x_i + b\sum_{i=1}^{N}x_i^2 = \sum_{i=1}^{N}x_i y_i\,. \tag{5.28}$$

Jos sprendiniai yra:

$$\tilde{a} = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{5.29}$$

ir

$$\tilde{b} = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \tag{5.30}$$

Taigi nustatėme regresijos lygtį:

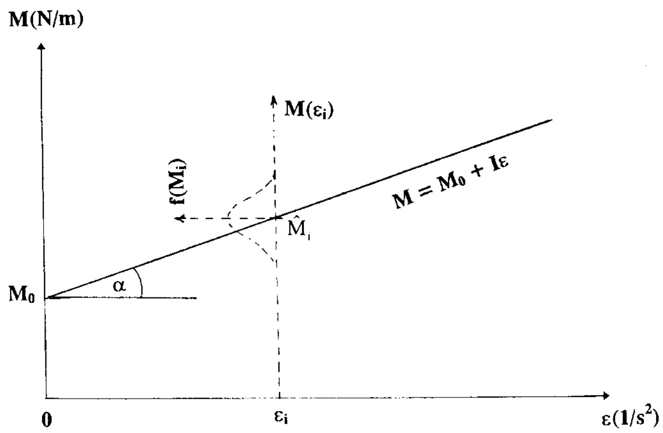
$$\hat{y} = \tilde{a} + \tilde{b}x. \tag{5.31}$$

1 pavyzdys.

Mechanikos laboratorijoje, nustatinėdami pagrindinio sukamojo judėjimo dėsnio teisingumą Oberbeko švytuokle, keičiame svarelius, o kartu – ir sukamąjį momentą M_i, ir dėl to keičiasi kampinis pagreitis. Pavaizdavę eksperimento duomenis grafiškai $M=f(\varepsilon)$, gauname apytikriai tiesinę priklausomybę (žr. 24 pav.), t. y. –

$$M=M_0+I\varepsilon.$$

Taigi M_0 įvertina trinties jėgų sukamąjį momentą, o $I = \frac{M - M_0}{\varepsilon}$ – besisukančios sistemos inercijos momentą pagal eksperimento duomenis ir yra lygus $tg\alpha$.



24 pav. Regresijos lygties sudarymas pagrindinei sukamojo judėjimo lygčiai tikrinti Oberbeko švytuokle.

Pastaba: šiuo atveju vieno ε_i sklaidą M_i lemia svarelių ir jėgos peties (radiuso) matavimo paklaidos.

2 pavyzdys.

Medžiagų laidumas elektros srovei apibūdinamas dydžiu $\sigma = \frac{1}{\rho}$. Čia ρ – medžiagos savitoji varža. Puslaidininkių laidumo priklausomybė nuo temperatūros išreiškiama lygtimi:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}, \tag{5.32}$$

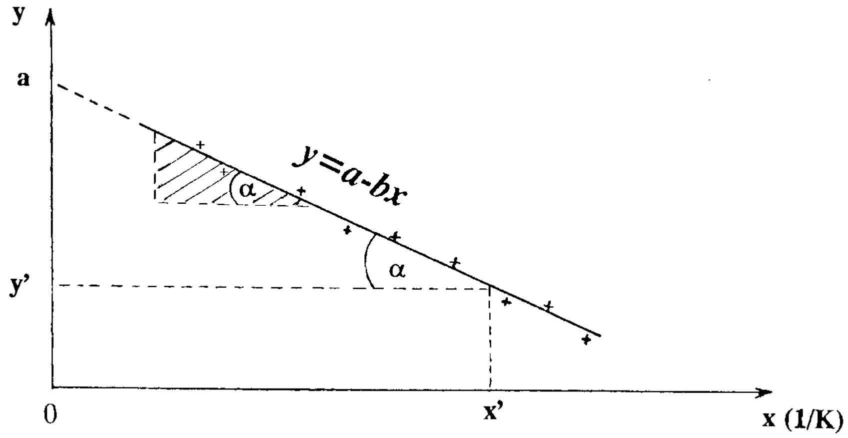
kur ΔE - draustinės juostos plotis. Tada:

$$ln\sigma = ln\sigma_0 - \frac{\Delta E}{2kT},$$

arba

$$y=a-bx.$$

čia $y=ln\sigma$, $a=ln\sigma_0$, $b=\frac{\Delta E}{2k}$, $x=\frac{1}{T}$ (25 pav.).



25 pav. Regresijos lygties sudarymas tiriant puslaidininkio laidumo priklausomybę nuo temperatūros

Kadangi $b=\frac{a-y'}{x'}=tg\alpha$, tai reiškia, kad apskaičiuojant b galima imti ir bet kurį panašų į pirmąjį trikampį, pavyzdžiui, paveiksle užbrūkšniuotą.

Taigi iš anksčiau užrašytų formulių (121) ir (122) apskaičiavę $\tilde{a}$ ir $\tilde{b}$ gauname:

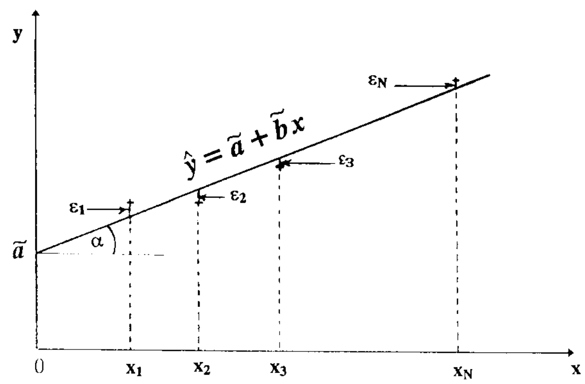
$$ln\sigma_0 = \tilde{a}, \quad \text{arba} \quad \sigma_0 = e^{\tilde{a}} \quad \text{ir} \quad \Delta E = 2k\tilde{b}.$$

Suprantama, σ_0 prasmė – tik riba, prie kurios artėtų laidumas, kai $T\rightarrow\infty$, ir liktų teisingas $\sigma(T)$ dėsningumas (5.32).

Belieka įvertinti eksperimento metu nustatytų koeficientų $\tilde{a}$ ir $\tilde{b}$ paklaidas.

5.3. Imties ir liekamoji dispersija

Pažymėsime, kad koeficientų $\tilde{a}$ ir $\tilde{b}$ vertės yra atsitiktinės, nes nustatytos matuojant gautų **atsitiktinių dydžių** rinkinio funkcinės priklausomybės optimizavimo pagrindu. Iš čia išeina išvada, kad jų nustatymo kokybę galima įvertinti vidutine kvadratine paklaida arba jos kvadratu – atrankos dispersija. Kaip ją gauti ir įvertinti?



26 pav. Regresijos lygties tinkamumo eksperimento duomenims analizuoti įvertinimas pagal liekamąsias paklaidas ε_i.

Tiriant paklaidas $\varepsilon_i = y_i - (\tilde{a} + \tilde{b} x_i)$ (žr. 26 pav.), galima apskaičiuoti liekamąją atrankos dispersiją:

$$S^2_{y\,liek.} = \sum_i \frac{\varepsilon_i^2}{N-2}. \tag{5.33}$$

Kadangi $\tilde{b} = tg\alpha = \sigma(Y)/\sigma(X)$ (6.29), tai

$$S^2_{\tilde{b}} = S^2_{tg\alpha} = \frac{S^2_{y\,liek.}}{S^2_x}, \tag{5.34}$$

nes

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum x_i}{N}\right)^2 = \frac{N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}{N^2} \tag{5.35}$$

yra fiksuotas dydis ir išreiškia x_i duomenų sklaidą $\bar{x}$ atžvilgiu.

Pastaba: Apskaičiuojant $S^2_{y\,liek.}$, vardiklyje *N-2* yra todėl, kad skaičiuojant S_y^2 imties vidurkio atžvilgiu, jei *y* būtų pastovus, vardiklyje būtų *N-1*, bet mes skaičiavome ne pagal vieną *y* vertę ir todėl panaudojome papildomą sąryšį tarp *y*-kų, *y=a+bx.*

Iš (119) išraiškos

$$a = \frac{1}{N}\sum y_i - \frac{b}{N}\sum x_i \tag{5.36}$$

įskaičius, kad $\sum y_i$ dispersija yra maža, nes $\sigma_\Sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$, pirmojo nario įtaką dydžiui S_a^2 galima laikyti nuline, nes vardiklyje dar yra ir N.

Tada $|\delta a| = \frac{|\delta b|}{N}\sum x_i$, nes $\delta(\sum x_i)\cdot\frac{b}{N}$ narį taip pat galima atmesti kaip nežymų dėl ką tik minėtos priežasties. Arba

$$S_a = \frac{S_b}{N}\sum x_i\,. \tag{5.37}$$

Taigi

$$\Delta\tilde{a} = t_\alpha(N-2)\cdot S_a \quad \text{ir} \quad \Delta\tilde{b} = t_\alpha(N-2)\cdot S_b\,.$$

Regresinės analizės būdu gautos $\tilde{a}$ ir $\tilde{b}$ reikšmės ir yra eksperimento rezultatas.

Daugelyje uždavinių svarbios išvados apie parametrus *a* ir *b* kiekvieną atskirai, kaip mes ir darėme, t. y. $\tilde{a}$ ir $\tilde{b}$ įverčiai ir jų paklaidos $\Delta\tilde{a}$ ir $\Delta\tilde{b}$. Tačiau galimas ir kitoks vertinimo būdas, taikant dvimatį parametrą *(a, b)*. Tada mažiausių kvadratų metodu arba geriausio atitikimo sprendiniu, nustatomas dvimatis taškinis įvertis $(\tilde{a}, \tilde{b})$ ir tikimybiškai nustatomas paklaidų intervalas, dvimačiam dydžiui *(a, b)*. Tuo tikslu taikoma logaritminė geriausio atitikimo funkcija *l* (5.8) apskritai aprašanti logaritminį atitikimo paviršių. Pasikliaujama sritis šiuo atveju nustatoma *l* verte, atžvilgiu maksimumo. Pavyzdžiui [3], kai *X* ir *Y* du nepriklausomi normaliniai dydžiai, kurių matematiniai vidurkiai atitinkamai $\hat{x}$ ir $\hat{y}$, o dispersijos lygios vienetui:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x-\hat{x})^2}{2}-\frac{(y-\hat{y})^2}{2}}.$$

Taigi

$$l(x,y)=-\frac{1}{2}(x-\hat{x})^2-\frac{1}{2}(y-\hat{y})^2=0,\quad kai\quad x=\hat{x},\quad y=\hat{y}.$$

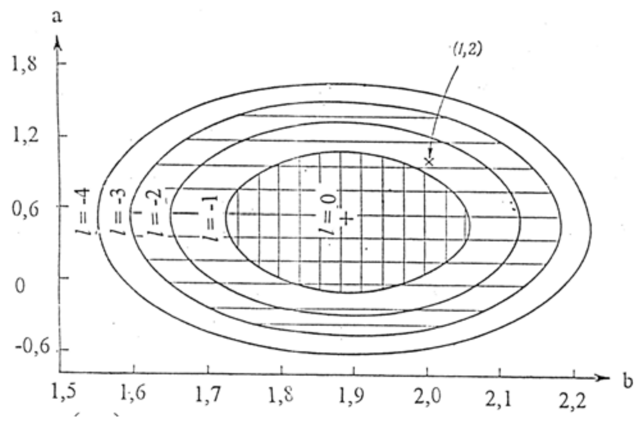
Antra vertus $(x-\hat{x})^2+(y-\hat{y})^2\sim\chi_2^2$ elementus, taigi dydis $-2l(xy)$ šiuo atveju aprašomas skirstiniu χ_2^2. Be to $l_{max}=0$, o kitoms reikšmėms pasikliautinasis lygmuo nustatomas pagal χ_2^2 skirstinį.

$$P(\chi_2^2<-2l).$$

Pateikiame kelias svarbias P ir l vertes:

l	0	-0,5	-1	-1,5	-2	-2,5	-3	$-\infty$
$P(\%)$	0	39,4	63,2	77,7	86,5	91,8	95	100

Iš 23 pav. išplaukia, kad jei mažiausių kvadratų metodu nustačius regresijos lygtį $\hat{y}=\tilde{a}+\tilde{b}x$ buvo gauta pvz., $\tilde{a}=1$, o $\tilde{b}=2$, tai pasikliaujamą intervalą dvimačiam dydžiui (a, b) reikėtų nurodyti tarp $l(a, b)=-1$ ir $l(a, b)=-3$ t. y. tarp (63,2 ir 95)%.



27 pav. $l(a,b/\hat{y})$ kontūrai

Tiek dėmesio tiesinei $y=f(x)$ priklausomybei skyrėme todėl, kad tai gana dažnai sutinkamas ir skaičiavimo požiūriu paprastas atvejis. Todėl neretai – ir sudėtingesnės priklausomybės pakeičiant kintamuosius užrašomos tiesinėmis išraiškomis.

Pvz., funkcija $y=\alpha e^{\beta x}$ pakeitus kintamąjį $\tilde{y}=\ln y$ užrašoma $\tilde{y}=ln\,\alpha+\beta x$; funkcija $y=(\alpha+\beta x)^{-1}$ pakeitus kintamąjį $\tilde{y}=\frac{1}{y}$ užrašoma $\tilde{y}=\alpha+\beta x$; funkcija $y=\alpha e^{\frac{\beta}{x}}$ pakeitus kintamuosius $\tilde{x}=\frac{1}{x}$ ir $\tilde{y}=\ln y$ išreiškiama $\tilde{y}=\ln\alpha+\beta\tilde{x}$ ir t. t.

Apibendrinant regresinės lygties nustatymo būdą, tam tikrais atvejais galima labai įvairi ne tik tiesinė $y=f(x)$ priklausomybė. Kaip minėjome, kartais jos orientacinę išraišką lemia teoriniai motyvai, o kartais ji visai nežinoma, ir tada taikoma parinkta pagal eksperimento duomenų (imties) išsidėstymą. Dažnai parenkama daugianarė $y=f(x)$ išraiška, nes matematiniu požiūriu paprastesni skaičiavimai sprendžiant mažiausiųjų kvadratų metodo lygtis.

Kadangi yra vidurkius nusakančios funkcijos $\hat{y}=f(x)$ pasirinkimo laisvė, kyla klausimas, kuri iš parinktų $f(x)$, $f^*(x)$ ar dar kita yra tinkamesnė eksperimento duomenims analizuoti?

Kad atsakytume į šį klausimą, prisiminkime χ^2 kriterijaus taikymus, nustatant pasiskirstymo tinkamumą tiesioginių matavimų atveju. Aptarėme, kad parinkimo tinkamumo rodiklis yra dydžio

$$u = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$$

vidurkis, lygus $\hat{u} = r - 1 - tu$, kai tarp imties dydžių yra t papildomų sąryšių.

Apibendrinus šį rezultatą pagal mažiausiųjų kvadratų metodą, galima tikėtis, kad funkcija $\hat{y} = f(x)$ parinkta tuo geriau, kuo mažesnis

$$z = \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\hat{y}_i}. \tag{5.38}$$

Pvz., tarkime, regresijos lygčiai surasti tų pačių duomenų bazėje taikėme funkcijas $f_1(x)=ax+b$ bei $f_2(x)=ax^2+bx+c$ ir gavome $\sum_{i=1}^{8} \frac{(y_i - f_1(x_i))^2}{f_1(x_i)} = 0{,}214$ ir $\sum_{i=1}^{8} \frac{(y_i - f_2(x_i))^2}{f_2(x_i)} = 0{,}021$. Tada daroma išvada, kad $f_2(x)$ geriau atitinka eksperimento duomenų imtį.

Galima $f_2(x)$ tinkamumą įvertinti ir tiksliau. Atsižvelgiant į tai, kad laisvės laipsnių skaičius šiuo atveju $\nu=8-2=6$ ir $\chi^2_{0,95}(6) = 12{,}592$, taigi daug didesnis už atsitiktinę mūsų gautą reikšmę $z \approx 0{,}021$, galima teigti, kad $f_2(x)$ pakankamai gerai parinkta.

Apibendrinant mažiausiųjų kvadratų metodu gautojo rezultato patikimumą, kai priklausomybė $y=f(x)$ tiesinė, remiamasi koeficientų $\tilde{a}$ ir $\tilde{b}$ paklaidomis, o apskritai vertinant proceso korektiškumą – parametru χ^2_ν.

6. Koreliacinė analizė

6.1. Dviejų atsitiktinių dydžių pasiskirstymas

Sakykime, kad turime du atsitiktinius dydžius X ir Y ir norime nustatyti tikimybių pasiskirstymo funkciją, t. y. tikimybes, kad vienu metu būtų $X<x$ ir $Y<y$. Kaip ir esant vienam atsitiktiniam dydžiui, tarkime, kad egzistuoja funkcija

$$F(x,y)=P(X<x,\ Y<y). \tag{6.1}$$

Tada iš jos gautą funkciją

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) \tag{6.2}$$

vadinsime dvimačio atsitiktinio dydžio (X, Y) tikimybės tankio funkcija. Praktiškai dominančiais atvejais funkcija $F(x,y)$ visada egzistuoja, ir kai ji diferencijuojama, galima taikyti funkciją $f(x,y)$.

Analogiškai, kaip ir esant vienam atsitiktiniam dydžiui, gauname:

$$P(a \le x < b, c \le y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dxdy. \tag{6.3}$$

Iš čia išplaukia, kad integruojant (6.3) visai y kitimo sričiai,

$$P(a \le x < b, -\infty \le y < \infty) = \int_a^b \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \right] dx = \int_a^b g(x)dx. \tag{6.4}$$

Čia

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad (6.5)$$

ir vadinama atsitiktinio dydžio X tikimybės tankio funkcija arba besąlyginiu (marginaliniu) dydžio X pasiskirstymu. Marginaliniais pasiskirstymais laikomi dvimačio atsitiktinio dydžio (X,Y) komponenčių X ir Y pasiskirstymai.

Atitinkamai Y marginalinis pasiskirstymas yra:

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx\ . \qquad (6.6)$$

Kai atsitiktiniai dydžiai X ir Y nepriklausomi, tikimybė x vertei patekti į intervalą [x, x+dx] bus $dP_x=dG(x)=g(x)dx$, o y vertei patekti į intervalą [y, y+dy] – $dP_y=dH(y)=h(y)dy$. Tikimybė dydžiui X įgyti vertę intervale [x, x+dx], o dydžiui Y įgyti vertę intervale [y, y+dy] bus $dP_{x,y}=dP_x\,dP_y$. Ši tikimybė per dvimačio dydžio (X,Y) tikimybės tankio funkciją išreiškiama $dP_{x,y}=dF(x,y)=f(x,y)dxdy$. Iš šių dviejų $dP_{x,y}$ išraiškų gauname:

$$f(x,y) = g(x)h(y)\ . \qquad (6.7)$$

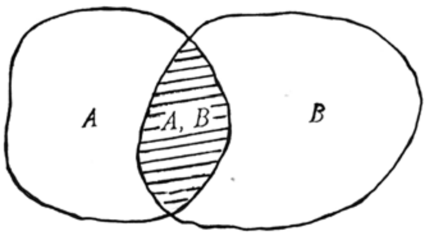
Dvimačiui atsitiktiniam dydžiui (X,Y) visada galima įtraukti sąlyginį tikimybės tankį, t. y. tikimybės tankį dydžiui Y, kai X fiksuotas:

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{g(x)}, \qquad (6.8)$$

ir

$$f(x,y) = f(y|x)g(x)\ . \qquad (6.9)$$

Sąlyginio tikimybės tankio taikymus ir prasmę galima vaizdžiai matyti nubrėžus eksperimentu matuojamų dydžių X ir Y galimų verčių A ir B (28 pav.) sritis. Kai verčių spektras tolydinis, jas apibūdins sritys, kuriose tikimybės tankio funkcijos *g(x) ir h(y)* nelygios nuliui.



28 pav.

Tarkime mus domina tikimybė, kad eksperimentu išmatavus, pvz., bandinio (mėginio) du parametrus, jų vertės x ir y pateks į tam tikrą bendrą (AB) sritį. Čia galimi du atvejai:

1) matuojami dydžiai visiškai nesusiję (nepriklausomi), taigi bandinio savybės nepriklauso nuo x ir y verčių;
2) dydžiai X ir Y tarpusavyje priklausomi (nors analiziškai ši priklausomybė neišreikšta) ir, kai jų vertės x ir y patenka į (AB) sritį, bandinys (mėginys) turi būdingą savybę.

Abiem atvejais tikimybę x ir y vertėms patekti į intervalus [x, x+xd], [y, y+dy] (AB) srities taško (x,y) aplinkoje galima užrašyti $dP_{x,y}=f(x,y)dxdy$. Iš čia išplaukia, kad tikimybė pagaminti bandinį su būdinga savybe bus $P_{xy}=\iint\limits_{(AB)} f(x,y)dxdy$. Tikimybę $dP_{x,y}$ galima išreikšti ir per dviejų tikimybių sandaugą: tikimybės vertei x patekti į intervalą [x, x+dx] – $g(x)dx$ ir vertei y patekti į intervalą [y, y+dy], kai x yra intervale [x, x+dx] – $dP_{xy}=f(y/x)dy\cdot g(x)dx$. Palyginę abi dP_{xy} išraiškas gauname sąryšį (6.9).

Tada iš (6.6) ir (6.9)

$$h(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y|x)g(x)dx\,. \tag{6.10}$$

Kai X ir Y yra nepriklausomi dydžiai, iš (6.7) ir (6.8) išplaukia

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}=h(y)\,. \tag{6.11}$$

To ir buvo galima tikėtis, nes nepriklausomų dydžių bet kokia vieno dydžio vertė neturi jokios įtakos kito dydžio vertei.

Bet kokios atsitiktinių dydžių X ir Y funkcijos $H(X,Y)$ matematinis vidurkis

$$E\big(H(X,Y)\big)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(x,y)f(x,y)dxdy \tag{6.12}$$

ir dispersija

$$\sigma^2\big(H(X,Y)\big)=E\Big(\big(H(X,Y)-E\big(H(X,Y)\big)\big)^2\Big). \tag{6.13}$$

Apibūdinti dvimačio atsitiktinio dydžio (X,Y) tikimybės tankio funkciją, panašiai kaip ir vienmačio (2.21), naudojami momentai. Tai yra specialios funkcijos

$$H(X,Y)=(X-a)^l(Y-b)^m \tag{6.14}$$

matematiniai vidurkiai surandami pagal (6.12)

$$\alpha_{lm}=E\big((X-a)^l(Y-b)^m\big). \tag{6.15}$$

Čia $l\geq 0$, $m\geq 0$ ir α_{lm} vadinamas *lm-tuoju* momentu taško a, b atžvilgiu. Iš esmės svarbiausi yra mažų l ir m verčių momentai nulio atžvilgiu, t. y. funkcijos $H=X^lY^m$ momentai λ_{lm} ir momentai taško $(\hat{x},\hat{y})$ atžvilgiu – μ_{lm}:

$$\lambda_{10}=\hat{x};\qquad \lambda_{01}=\hat{y};\qquad \mu_{00}=\lambda_{00}=1;\qquad \mu_{10}=\mu_{01}=0;$$
$$\mu_{11}=E\big((X-\hat{x})\cdot(Y-\hat{y})\big)=cov(X,Y);\qquad \mu_{20}=\sigma^2(X);$$
$$\mu_{02}=\sigma^2(Y)\,. \tag{6.16}$$

Dabar nuosekliau nagrinėsime atvejį, kai

$$H(X,Y)=aX+bY, \tag{6.17}$$

nes tai yra paprasčiausia bendruoju atveju užrašyta funkcija, turinti svarbiausius momentus (6.16).

Iš (6.12) ir (6.13) gauname:

$$E(aX+bY)=a\hat{x}+b\hat{y}\,, \tag{6.18}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2(aX+bY) &= E\Big(\big((aX+bY)-E(aX+bY)\big)^2\Big) = \\
&= E\Big(\big(a(X-\hat{x})+b(Y-\hat{y})\big)^2\Big) = \\
&= E\big(a^2(X-\hat{x})^2+b^2(Y-\hat{y})^2+2ab(X-\hat{x})(Y-\hat{y})\big)
\end{aligned} \tag{6.19}
$$

arba atsižvelgus, kad

$$\sigma^2(X)=E\big((X-\hat{x})^2\big) \text{ ir } \sigma^2(Y)=E\big((Y-\hat{y})^2\big), \tag{6.20}$$

$$\sigma^2(aX+bY)=a^2\sigma^2(X)+b^2\sigma^2(Y)+2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)\,. \tag{6.21}$$

Taigi

$$
\begin{aligned}
&cov(X,Y)=E\big((X-\hat{x})(Y-\hat{y})\big)= \\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\hat{x})(y-\hat{y})f(x,y)dxdy.
\end{aligned} \tag{6.22}
$$

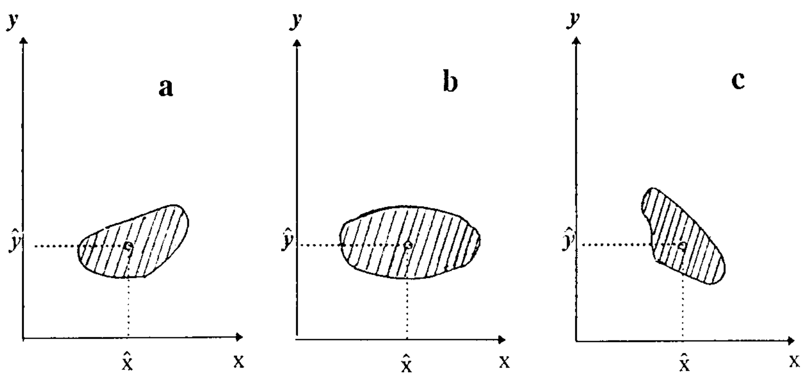
Dydžiai $\hat{x},\hat{y},\sigma^2(X),\sigma^2(Y)$ artimi analogiškiems, kai atsitiktinis dydis yra vienas. Tuo tarpu čia labai svarbi *cov(X,Y)* ir jos vieno atsitiktinio dydžio atveju nebuvo.

Iš kovariacijos apibrėžimo matyti, kad ji **teigiama**, kai „iškritus" $X>\hat{x}$ $(X<\hat{x})$ labiau tikėtina „iškristi" dydžiui $Y>\hat{y}$ $(Y<\hat{y})$, ir **neigiama** priešingu atveju. Kai Y vertės visai neturi įtakos X vertėms, kovariacija tampa lygi nuliui. Tai pavaizduota 29 pav.

Paprastai vietoje kovariacijų daugeliu atvejų patogiau taikyti **koreliacijos koeficientą**:

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}\,. \tag{6.23}$$

Kavariacija ir koreliacijos koeficientas apytikriai įvertina X ir Y tarpusavio ryšį.



29 pav. Kavariacija tarp atsitiktinių dydžių X ir Y: a) $cov(X,Y)>0$, b) $cov(X,Y)\approx 0$, c) $cov(X,Y)<0$

Kad įvertintume galimas $\rho(X,Y)$ vertes, užrašome dispersiją dydžio $H=U+V$, kuris yra atskiras atvejis funkcijos (6.17), kai $a=b=1$, užrašytos standartiniais normaliniais dydžiais. Čia $U=\frac{X-\hat{x}}{\sigma(X)}$ ir $V=\frac{Y-\hat{y}}{\sigma(Y)}$, t. y. standartiniai normaliniai dydžiai, taigi $\sigma^2(U)=\sigma^2(V)=1$. Tada

$$\sigma^2(U+V)=\sigma^2(U)+\sigma^2(V)+2\rho(U,V)\sigma(U)\sigma(V),$$

arba

$$\sigma^2(U+V)=2(1+\rho(U,V)), \tag{6.24}$$

ir atitinkamai

$$\sigma^2(U-V)=2(1-\rho(U,V)). \tag{6.25}$$

Kadangi bet kokio atsitiktinio dydžio, taigi ir dydžių $(U+V)$ bei $(U\text{-}V)$, $\sigma^2\geq 0$, tai

$$-1\leq\rho(U,V)\leq 1. \tag{6.26}$$

Tokios pačios ribos yra ir koreliacijos koeficiento $\rho(XY)$. Iš $\rho(X,Y)$ apibrėžimo (6.23) įskaitę, kad $\sigma(U)=\sigma(V)=1$ ir $\hat{u}=\hat{v}=o$, gauname:

$$\rho(XY)=\frac{cov(XY)}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=E\left(\frac{(X-\hat{x})}{\sigma_x}\cdot\frac{(Y-\hat{y})}{\sigma_y}\right)=\rho(UV). \tag{6.27}$$

Panagrinėsime ribinius atvejus $\rho=\pm 1$.

1) Kai $\rho(U,V)=1$, iš (6.25) gauname $\sigma^2(U\text{-}V)=0$. Taigi $U\text{-}V=const$, arba

$$U-V=\frac{X-\hat{x}}{\sigma(X)}-\frac{Y-\hat{y}}{\sigma(Y)}=const. \tag{6.28}$$

Ši lygybė galioja, kai $y=\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}x+const'$, arba

$$Y=a+bX, \tag{6.29}$$

čia a – bet kokia konstanta, o b – bet koks teigiamas skaičius, priklausantis nuo $\sigma(Y)$ bei $\sigma(X)$ ir lygus jų santykiui.

2) Kai $\rho(U,V)=-1$, b gali būti bet kuris neigiamas skaičius. Taigi ribiniais atvejais tarp X ir Y yra tiesinė funkcinė priklausomybė su konkrečiam eksperimentui būdinga b verte.
Kai X ir Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai,

$$cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\hat{x})(y-\hat{y})g(x)h(y)dxdy=$$
$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}(x-\hat{x})g(x)dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}(y-\hat{y})h(y)dy\right)=0. \tag{6.30}$$

Suprantama, to ir buvo galima tikėtis.

6.2. Daugiau kaip dviejų atsitiktinių dydžių skirstinys (matematiniai apibrėžimai)

Šiuo atveju pasiskirstymui aprašyti taikomas metodas panašus į dviejų atsitiktinių dydžių aprašymą. Atitinkamai vietoje (6.1) n atsitiktinių dydžių $X_1, X_2,...,X_n$ tikimybių pasiskirstymo funkcija užrašoma:

$$F(x_1,x_2,...,x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2,...,X_n < x_n). \tag{6.31}$$

Kai funkcija F turi dalines išvestines, bendra tikimybių tankio funkcija yra

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2,...,\partial x_n} F(x_1,x_2,...,x_n). \tag{6.32}$$

Atitinkamai marginalinis – vieno atsitiktinio dydžio X_r tikimybės tankis užrašomas:

$$g_r(X_r) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_{r-1}dx_{r+1}...dx_n, \tag{6.33}$$

o funkcijos $H(X_1, X_2,...,X_n)$ matematinis vidurkis lygus

$$E\big(H(X_1,X_2,...,X_n)\big) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} H(X_1,X_2,...,X_n)dx_1dx_2...dx_n, \tag{6.34}$$

Iš čia vienam atsitiktiniam dydžiui X_r, t. y. funkcijai $H=X_r$,

$$E(X_r) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} x_r f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} x_r g_r(x_r)dx_r. \tag{6.35}$$

Atsitiktiniai dydžiai yra nepriklausomi, kai

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = g_1(x_1)g_2(x_2)...g_n(x_n). \tag{6.36}$$

Bendras marginalinis bet kurių l atsitiktinių dydžių pasiskirstymas gaunamas integruojant (6.33) pagal likusius n-l kintamuosius

$$g(x_1,x_2,...,x_l) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,...,x_n)dx_{l+1}...dx_n. \tag{6.37}$$

Kai šie l dydžiai nepriklausomi,

$$g(x_1,x_2,...,x_l) = g_1(x_1)g_2(x_2)...g_l(x_l). \tag{6.38}$$

Momentai $l_1,...,l_n$ eilės nulio atžvilgiu yra funkcijos

$$H = x_1^{l_1} x_2^{l_2} ... x_n^{l_n}. \tag{6.39}$$

matematiniai vidurkiai

$$\lambda_{l_1 l_2 ... l_n} = E(X_1^{l_1} X_2^{l_2} ... X_n^{l_n}). \tag{6.40}$$

Pvz.:

$$\lambda_{100...0} = E(X_1) = \hat{x}_1, \lambda_{010...0} = E(X_2) = \hat{x}_2, \lambda_{000...1} = E(X_n) = \hat{x}_n . \qquad (6.41)$$

Momentai $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_n)$ atžvilgiu yra

$$\mu_{l_1 l_2 ... l_n} = E((X_1 - \hat{x}_1)^{l_1} (X_2 - \hat{x}_2)^{l_2} ... (X_n - \hat{x}_n)^{l_n}) . \qquad (6.42)$$

Taigi X_i dispersijos atitinkamai lygios:

$$\begin{aligned} \mu_{200...0} &= E((X_1 - \hat{x}_1)^2) = \sigma^2(X_1), \\ \mu_{020...0} &= E((X_2 - \hat{x}_2)^2) = \sigma^2(X_2), \\ &\vdots \\ \mu_{000...2} &= E((X_n - \hat{x}_n)^2) = \sigma^2(X_n). \end{aligned} \qquad (6.43)$$

Kai $l_i = l_j = 1$ ir $l_k = 0$, jei $k \neq i \neq j$, gaunamos koreliacijos tarp X_i ir X_j:

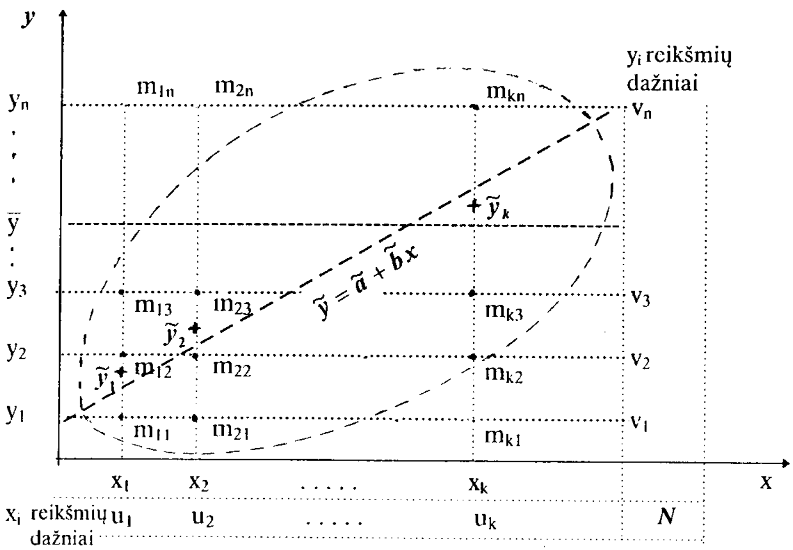
$$cov(X_i, X_j) = E((X_i - \hat{x}_i)(X_j - \hat{x}_j)) = C_{ij} . \qquad (6.44)$$

6.3. Koreliacijų vaidmuo sudarant regresijos lygtį

Kyla klausimas, kaip įvertinti koreliacijos dydį neribiniais atvejais pagal imties duomenis. Sakykime, kad su X dydžio x_1 verte Y dydžio y_1 vertė pasitaikė m_{11} kartų, $y_2 - m_{12}$ kartų ir t. t., vertė $y_n - m_{1n}$ kartų. Atitinkamai su x_2 vertė y_1 pasitaikė m_{21} kartų ir t. t., $y_n - m_{2n}$ kartų ir taip visoms x_k vertėms. Kartu dydžio X vertė x_1 pasitaikė u_1 kartų, $x_2 - u_2$ kartų ir t. t., $x_k - u_k$ kartų.

Šiuos duomenis pavaizduosime grafiškai (30 pav.). Punktyrine linija išskirtas plotas rodo eksperimento metu tiriamų X ir Y verčių sritį ir nebūtinai kiekvieno x_i bus gautos visos eksperimento metu pasitaikiusios y_i vertės.

Pažymėjus vienam x_i priklausančių y_i vidurkį $\tilde{y}_i$ iš brėžinyje pateiktų duomenų matyti, kad $\tilde{y}_i$ priklausomybė nuo x_i turi tiesės požymį.



30 pav. Apytikrio koreliacinio ryšio nustatymas grafiškai pavaizdavus eksperimento duomenis y_{ij}, kai x_i vertės įvairios

Suprantama, kad tokio ryškaus požymio kartais gali nebūti arba jis gali būti visai kito tipo. Visgi aišku, kad Y ir X funkcinei priklausomybei nustatyti tyrimą reikia pradėti apskaičiuojant $\tilde{y}_i$:

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{u_1}\sum_{i=1}^{n} m_{1i} y_i, \tilde{y}_2 = \frac{1}{u_2}\sum_{i=1}^{n} m_{2i} y_i, ..., \tilde{y}_k = \frac{1}{u_k}\sum_{i=1}^{n} m_{ki} y_i \,. \qquad (6.45)$$

Eksperimento metu gautam rezultatui pavaizduoti patogu remtis koreliacine lentele:

y	**x**					***y_i* reikšmių dažniai**
	x_1	**x_2**	**x_3**	**...**	**x_k**	
y_1	m_{11}	m_{21}	m_{31}	...	m_{k1}	**v_1**
y_2	m_{12}	m_{22}	m_{32}	...	m_{k2}	**v_2**
y_3	m_{13}	m_{23}	m_{33}	...	m_{k3}	**v_3**
...	...	...	...	...	...	**...**
y_n	m_{1n}	m_{2n}	m_{3n}	...	m_{kn}	**v_n**
***x_i* reikšmių dažniai**	**u_1**	**u_2**	**u_3**	**...**	**u_k**	**N**

Pagal lentelę patogu apskaičiuoti ir $\tilde{y}_i$. Iš jos surandame ir vidutinę Y reikšmę:

$$\bar{y} = \frac{1}{N}(y_1 v_1 + y_2 v_2 + ... + y_n v_n) \qquad (6.46)$$

(brėžinyje ji pavaizduota horizontalia punktyrine linija). Dydis

$$D(\bar{y}) = \frac{1}{N}\left[(\tilde{y}_1 - \bar{y})^2 u_1 + (\tilde{y}_2 - \bar{y})^2 u_2 + ... + (\tilde{y}_k - \bar{y})^2 u_k\right] \qquad (6.47)$$

vadinamas **tarpgrupine *Y* dispersija**, o dydis

$$D(y) = \frac{1}{N}\left[(y_1 - \bar{y})^2 v_1 + (y_2 - \bar{y})^2 v_2 + ... + (y_k - \bar{y})^2 v_k\right] \qquad (6.48)$$

bendrąja *Y* dispersija. Dydis

$$d_{yx} = \sqrt{\frac{D(\bar{y})}{D(y)}} \qquad (6.49)$$

vadinamas koreliaciniu santykiu ir yra Y tiesinės koreliacinės priklausomybės nuo X nagrinėjamoje imtyje matas. Jis visada turi vertes

$$0 \le d_{yx} \le 1 \,.$$

Kai d_{yx}=0, koreliacinės Y priklausomybės nuo X nėra. Kai d_{yx}=1, egzistuoja funkcinė priklausomybė $Y=f(X)$. Kuo d_{yx} yra arčiau 1, tuo koreliacinė Y priklausomybė nuo X stipresnė. Kai ji didelė, galima sudaryti regresijos lygtį. Dydis d_{yx} įvertina koreliacinę priklausomybę nepriklausomai nuo to, ar ji tiesinė ar kreivinė.

Analizuojant eksperimento duomenis labai svarbus atvejis, kai visų x_i verčių dažniai u_i vienodi. Tai atitiktų eksperimentą, kai kiekvienai dydžio X vertei x_i dydis Y matuojamas po tiek pat kartų.

Šiuo atveju iš x_i ir atitinkamų $\tilde{y}_i$ duomenų sudarius lentelę,

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
$\tilde{y}_i$	$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$	$\tilde{y}_3$	...	$\tilde{y}_k$

kai d_{yx} nėra mažas, sudaroma tiesinės regresijos lygtis $\tilde{y} = a + bx$ (30 pav.). Jos parametrus a ir b apskaičiuojame mažiausiųjų kvadratų metodu pagal (5.27) ir (5.28) lygčių sistemą ir užrašome šiam atvejui lygtis:

$$\begin{cases} b\sum_{i=1}^{k} x_i + ka = \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i \\ b\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + a\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \tilde{y}_i . \end{cases} \tag{6.50}$$

Kaip išplaukia iš (5.21) ir (5.22), jos sprendiniai yra:

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i - \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{i=1}^{k} x_i \tilde{y}_i}{k\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} x_i)^2}, \tag{6.51}$$

$$\tilde{b} = \frac{k\sum_{i=1}^{k} x_i \tilde{y}_i - \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i}{k\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} x_i)^2}. \tag{6.52}$$

Suprantama, kad pagal šios lentelės eksperimento duomenis galima apskaičiuoti ir viso eksperimento (imties), susidedančio iš N matavimų, $cov_{eks}(X,Y) = \overline{(X - \tilde{x})(Y - \tilde{y})}$, o tada – ir $\tilde{\rho}(X,Y) = \dfrac{cov_{eks}(X,Y)}{\sigma_{eks}(X)\sigma_{eks}(Y)}$. Čia $\tilde{x}$ ir $\tilde{y}$ gauti vidurkinant x_i ir $\tilde{y}_i$ vertes.

Pagal apibrėžimą:

$$\begin{aligned} cov_{eks}(X,Y) &= \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} (x_i - \tilde{x})(\tilde{y}_i - \tilde{y})\right) = \\ &= \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} (x_i\tilde{y}_i - x_i\tilde{y} - \tilde{y}_i\tilde{x} + \tilde{x}\tilde{y})\right) = \\ &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\tilde{y}_i - \tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}\tilde{x} + \tilde{x}\tilde{y} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\tilde{y}_i - \tilde{x}\tilde{y} = \\ &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i\tilde{y}_i - \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i}{k} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i}{k} = \frac{k\sum_{i=1}^{k} x_i\tilde{y}_i - \sum_{i=1}^{k} x_i \sum_{i=1}^{k} \tilde{y}_i}{k^2}. \end{aligned} \tag{6.53}$$

Kadangi

$$\begin{aligned} \sigma_{eks}^2(X) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_i - \tilde{x})^2}{k} = \frac{\sum x_i^2}{k} - \frac{2\sum x_i \tilde{x}}{k} + \tilde{x}^2 = \\ &= \frac{\sum x_i^2}{k} - \tilde{x}^2 = \frac{\sum x_i^2}{k} - \left(\frac{\sum x_i}{k}\right)^2 = \frac{k\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} x_i)^2}{k^2} \end{aligned} \tag{6.54 a}$$

ir atitinkamai

$$\sigma_{eks}^2(Y) = \frac{k\sum_i^k \tilde{y}_i^2 - (\sum_i^k \tilde{y}_i)^2}{k^2}, \tag{6.54 b}$$

iš čia **koreliacijos koeficientas**

$$\tilde{\rho}(X,Y) = \frac{cov_{eks}(X,Y)}{\sigma_{eks}(X)\sigma_{eks}(Y)} = \\ = \frac{k\sum_{i=1}^k x_i\tilde{y}_i - \sum_{i=1}^k x_i \sum_{i=1}^k \tilde{y}_i}{\sqrt{\left[k\sum_{i=1}^k x_i^2 - (\sum_{i=1}^k x_i)^2\right]\left[k\sum_{i=1}^k \tilde{y}_i^2 - (\sum_{i=1}^k \tilde{y}_i)^2\right]}}. \tag{6.55}$$

Palyginę koeficientą $\tilde{b}$ ir $\tilde{\rho}(X,Y)$ gauname:

$$\tilde{b} = \frac{cov_{eks}(X,Y)}{\sigma_{eks}^2(X)} = \frac{cov_{eks}(X,Y)}{\sigma_{eks}(Y)\sigma(X)} \cdot \frac{\sigma_{eks}(Y)}{\sigma_{eks}(X)} = \tilde{\rho}(X,Y) \cdot \frac{\sigma_{eks}(Y)}{\sigma_{eks}(X)}. \tag{6.56}$$

Kaip jau žinome, $\tilde{\rho}$ $(X,Y) = \pm 1$ atitinka tiesinę priklausomybę, o $\tilde{\rho}$ $(X,Y)=0$, kai tarp kintamųjų ryšio nėra. Tačiau tai – tik teorinis teiginys, nes dėl matavimo paklaidų visada $\tilde{\rho} \neq 0$. Todėl reikia patikrinti, ar $\tilde{\rho}$ ra didesnis už gaunamą vertę dėl atsitiktinių matavimo klaidų, kai iš tikrųjų koreliacijos nėra.

Bendruoju atveju, kai x_i dažniai u_i skirtingi, visos lygtys išlaiko nagrinėtam konkrečiam atvejui būdingas išraiškų formas, tačiau pasikeičia lygčių parametrai:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^k x_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^k u_i x_i^2, \\ &\sum_{i=1}^k x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^k u_i x_i, \\ &\sum_{i=1}^k \tilde{y}_i x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^k \left[x_i(\sum_{j=1}^n m_{ij} y_j)\right], \\ &\sum_{i=1}^k \tilde{y}_i \Rightarrow \sum_{j=1}^n v_j y_j, \\ &\sum_{i=1}^k \tilde{y}_i^2 \Rightarrow \sum_{j=1}^n v_j y_j^2 \end{aligned} \tag{6.57}$$

ir, be to, formulėse daugiklis k, reiškęs grupių skaičių, dabar virs daugikliu N.

Imties tiesinės koreliacijos koeficientą $\tilde{\rho}(X,Y)$ galima priskirti visai generalinei aibei tik prieš tai įsitikinus, ar imties pagrindu nustatytasis koeficientas $\tilde{\rho}(X,Y)$ būdingas visai generalinei aibei. Tuo tikslu naudojamas **atsitiktinis dydis**

$$T_{eks} = \frac{\tilde{\rho}(X,Y)\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-\tilde{\rho}^2(X,Y)}}, \tag{6.58}$$

kuris yra t parametro Stjūdento skirstinyje analogas. Kadangi Stjūdento skirstinys aprašo t verčių, gautų tarpusavyje nepriklausomų imties verčių pagrindu, skirstinį, galima tikėtis, kad T_{eks} skirstinio dispersija bus didesnė negu t skirstinio, nes esant koreliacijai tarp X ir Y, $\tilde{\rho}(X,Y)$ turėtų labiau priklausyti nuo eksperimento duomenų (imties verčių) negu t vertė.

Todėl Stjūdento skirstinio lentelėje esančią kritinę vertę $t_\alpha(N\text{-}2)$ lyginame su T_{eks} parinkę mažą reikšmingumo lygmenį (pvz., $\alpha=0{,}01$).

Jei $|T_{eks}| < t_\alpha(N\text{-}2)$, koreliacijos nėra, kai $|T_{eks}| > t_\alpha(N\text{-}2)$ – koreliacija reikšminga. Pvz., $t_{0{,}01}(528)=2{,}58$. Jei $T_{eks}=50{,}12>2{,}58$, tai $\rho(X,Y)$ yra reikšmingas apibendrinimas visai generalinei aibei.

Kaip žinome, tiesinės koreliacijos koeficientas $\rho(X,Y)$ yra Y tiesinio priklausomumo nuo X matas. Paprastai priklausomumo skalė sudaroma taip:

1) kai $0 \le |\rho(X,Y)| < 0{,}2$ – tiesinio priklausomumo tarp X ir Y nėra;
2) kai $0{,}2 \le |\rho(X,Y)| < 0{,}4$ – tarp X ir Y tiesinis priklausomumas silpnas;
3) kai $0{,}4 \le |\rho(X,Y)| < 0{,}7$ – tarp X ir Y yra esminis tiesinis priklausomumas;
4) kai $|\rho(X,Y)| \ge 0{,}7$ – tarp X ir Y – stiprus tiesinis priklausomumas.

6.4. Kelių atsitiktinių dydžių vektorinis užrašas. Kovariacinė matrica

Visuma atsitiktinių dydžių $X_1, X_2, ..., X_n$ pagal savo savybes (6.40–6.44) panašūs į vektoriaus n-matėje erdvėje dedamąsias. Todėl (6.31) galima užrašyti per n-matį vektorių $\boldsymbol{X}$

$$F=F(\boldsymbol{X}). \tag{6.59}$$

Tada tikimybės tankio (6.32) užrašas bus

$$f(\boldsymbol{X}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} F(\boldsymbol{X}), \tag{6.60}$$

o funkcijos H (6.39) matematinis vidurkis (6.40) užrašomas trumpiau

$$E(H(\boldsymbol{X})) = \int H(\boldsymbol{X}) f(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{X}. \tag{6.61}$$

Dispersijas (6.43) ir kovariacijas (6.44) galima interpretuoti kaip vektoriaus-stulpelio $(\boldsymbol{X} - \hat{\boldsymbol{x}})$ sandaugas iš transponuoto vektoriaus eilutės $(\boldsymbol{X} - \hat{\boldsymbol{x}})'$ *ij-ojo* elemento (žr. priede A) matematinius vidurkius. Tada šių elementų visuma sudarys simetrinę matricą, nes $c_{ij}=c_{ji}$, kuri vadinama kovariacine matrica:

$$C_x = \begin{pmatrix} c_{11} c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} \dots c_{2n} \\ \vdots \\ c_{n1} c_{n2} \dots c_{nn} \end{pmatrix}. \tag{6.62}$$

Šios matricos diagonaliniai elementai yra dispersijos $c_{ii} = \sigma^2(X_i)$. Taigi kovariacinė matrica, dažnai vadinama paklaidų matrica [3], yra:

$$C_x = E\big((\boldsymbol{X} - \hat{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{X} - \hat{\boldsymbol{x}})'\big). \tag{6.63}$$

6.5. Kelių atsitiktinių dydžių transformacija

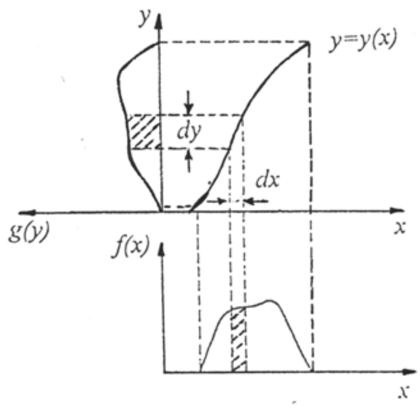
Tarkime, kad atsitiktinius dydžius $X_1, X_2,...,X_n$ pakeičiame dydžiais $Y_1, Y_2,...,Y_n$, išreikštais per X_i, t. y. $Y_i=Y_i(X_1, X_2,...,X_n)$. Kyla klausimas, kaip šiuo atveju bendras tikimybės tankis $f(x_1, x_2,...,x_n)$ (6.32) transformuosis į kitą tikimybės tankį, išreikštą Y_i dydžiais $g(y_1, y_2,...,y_n)$. Atsitiktinių dydžių analizinės funkcijos skirtumai nuo fiksuotų dydžių analizinės funkcijos išryškėja jau paprasčiausiu atveju transformuojant tikimybės tankio funkciją $f(x)$ į $g(y)$, kai atsitiktinis dydis Y yra atsitiktinio dydžio X funkcija. Kadangi atsitiktinio dydžio funkcija irgi yra atsitiktinis dydis, tai

$$Y=Y(X) \tag{6.64}$$

bus atsitiktinis dydis.

Pavaizdavus kartu $f(x)$, $g(y)$ ir tikimybių skirstinio funkciją $y=y(x)$ [2] (29 pav.) matyti, kad x tikimybei, išreiškiamai $f(x)dx$, atitinka y tikimybė, išreiškiama $g(y)dy$ (29 pav. jos užbrūkšniuotos). Taigi

$$dy = \left|\frac{dy}{dx}\right|dx \qquad \text{arba} \qquad dx = \left|\frac{dx}{dy}\right|dy\,. \tag{6.65}$$



31 pav. Atsitiktinio dydžio x transformacija į y.

Absoliutinis dydis imamas todėl, kad vietoje teigiamų intervalų dx, dy, taikomų matematinėje analizėje, šiuo atveju jie neturi krypties, o tik modulį ir todėl, tik imant išvestinių modulius, tikimybės $f(x)dx$ ir $g(y)dy$ visada bus teigiamos. Iš funkcijos $g(y)$ prasmės išplaukia, kad ji, kaip ir $f(x)$, turi būti vienareikšmė, teigiama ir turi tenkinti normavimo sąlygą:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1\,. \tag{6.66}$$

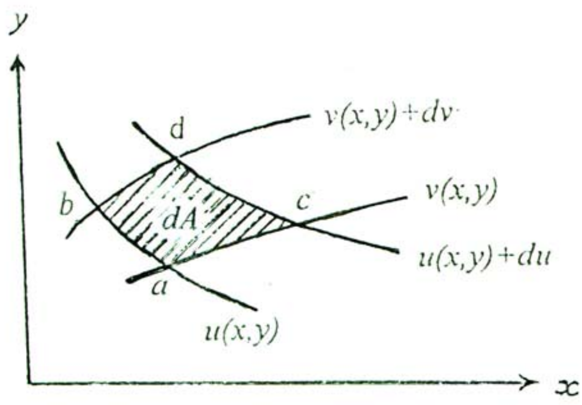
Bendra kelių atsitiktinių dydžių transformacijos taisyklė gaunama apibendrinus dviejų nepriklausomų dydžių transformaciją [2, 3]. Todėl pastarąjį atvejį aptarsime nuosekliau ir atsižvelgę, kad nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai yra tik du, juos pažymėsime X ir Y (bet tai nebūtinai taško koordinatės), o naujus atsitiktinius dydžius – U ir V, kai

$$U = U(X,Y), \qquad V = V(X,Y)\,. \tag{6.67}$$

Mūsų tikslas surasti funkciją J, kuria galėtume transformuoti tikimybės tankio funkciją $f(x,y)$ į kitą $g(u,v)$:

$$g(u,v)=J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)f(x,y)\,. \tag{6.68}$$

Šį sąryšį nustatysime pagal (32 pav.), kuriame *x,y* plokštumoje nubrėžtos kreivės *u(x, y)=const*. ir *u(x, y)+du=const'*. bei *v(x, y)=const*. ir *v(x, y)+dv=const'* [2].



32 pav. Atsitiktinių dydžių *x* ir *y* transformacija į *u* ir *v*

Šiame brėžinyje pavaizduota elementą *dS=dxdy,* paimtą *x, y* dydžių bazėje atitinkantis elementas *dA*, išreikštas *u* ir *v* erdvėje pagal (6.67), nubrėžiant dvi poras kreivių *u=const.* ir *v=const.* Dėl to, kad jis nykstamai mažas, galima laikyti lygiagretainiu su viršūnių koordinatėmis:

$$\begin{aligned} x_a &= x(u,v), & y_a &= y(u,v),\\ x_b &= x(u,v+dv), & y_b &= y(u,v+dv),\\ x_c &= x(u+du,v), & y_c &= y(u+du,v). \end{aligned}$$

Šias funkcijas skleisdami Teiloro eilute ir palikdami tik du pirmus narius, gauname:

$$\begin{aligned} x_b &= x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial v}dv, & y_b &= y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial v}dv,\\ x_c &= x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial u}du, & y_c &= y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial u}du. \end{aligned}$$

Analizinėje geometrijoje įrodoma, kad bet kaip orientuoto lygiagretainio plotas išreiškiamas determinantu [9]

$$dA=\begin{vmatrix} 1 & x_a y_a \\ 1 & x_b y_b \\ 1 & x_c y_c \end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}du\frac{\partial y}{\partial v}dv-\frac{\partial y}{\partial u}du\frac{\partial x}{\partial v}dv=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}dudv. \tag{6.69}$$

Taigi elementą *dS=dxdy* dydžių *x,y* bazėje atitinka elementas *dA* bazėje *u,v*. Sulyginę tikimybes *dP,* užrašytas abiejose bazėse *f(x,y)dxdy=g(u,v)dudv,* pakeitę *dxdy* į *dA* gauname:

$$g(u,v)=f(x,y)\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{6.70}$$

Palyginę su (6.68) gauname, kad

$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}. \tag{6.71}$$

Determinantas $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$ vadinamas transformacijos jakobianu.

Kai n atsitiktinių dydžių $X=(X_1, X_2,\ldots,X_n)$ transformuojama į $Y=(Y_1, Y_2,\ldots, Y_n)$,

$$J\left(\frac{X}{Y}\right)=J\left(\frac{x_1,x_2,\ldots,x_n}{y_1,y_2,\ldots y_n}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1}\\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial y_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}. \tag{6.72}$$

6.6. Kelių tiesiškai priklausomų dydžių matavimų vertinimas

Kiekvieną tiesiogiai matuojamą dydį dėl matavimo paklaidų galima laikyti atsitiktiniu. Kyla klausimas, kaip vertinti atsitiktinius dydžius $Y_1, Y_2,\ldots,Y_r$, kai jie analiziškai, t. y. realiais daugikliais tiesiškai išreiškiami per tiesiogiai matuojamus dydžius (parametrus) $X_1, X_2,\ldots,X_n$, kurie bendruoju atveju tarpusavyje priklausomi ir jų matavimo paklaidos yra mažos:

$$\begin{cases}Y_1=a_1+t_{11}X_1+\ldots+t_{1n}X_n\\ Y_2=a_2+t_{21}X_1+\ldots+t_{2n}X_n\\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\ Y_r=a_r+t_{r1}X_1+\ldots+t_{rn}X_n\end{cases} \tag{6.73}$$

Tai yra vieno netiesiogiai matuojamo dydžio vertinimo apibendrinimas, kai vertinamų dydžių yra r. Nagrinėsime atvejį, kai $r<n$, atsitiktinius dydžius Y_i interpretuodami vektoriaus-stulpelio $\boldsymbol{Y}$, dedamosiomis, X_i – vektoriaus-stulpelio $\boldsymbol{X}$ dedamosiomis, o a_i – vektoriaus $\boldsymbol{a}$ dedamosiomis. Tada lygčių sistema (6.73) vektoriškai užrašoma:

$$\boldsymbol{Y}=T\boldsymbol{X}+\boldsymbol{a}. \tag{6.74}$$

Atsitiktinio dydžio Y matematinis vidurkis bus

$$\hat{\boldsymbol{y}}=T\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{a}\ . \tag{6.75}$$

Paklaidos Δy_i vertinamos pagal dydžio $\boldsymbol{Y}$ kovariacinę matricą (6.63)

$$\begin{aligned}C_y&=E\big((\boldsymbol{Y}-\hat{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{Y}-\hat{\boldsymbol{y}})'\big)=E\big((T\boldsymbol{X}+\boldsymbol{a}-T\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{a})(T\boldsymbol{X}+\boldsymbol{a}-T\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{a})'\big)=\\&=E\big((T(\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{x}})'T'\big)=TE\big((\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{X}-\hat{\boldsymbol{x}})'\big)T'=TC_xT'.\end{aligned} \tag{6.76}$$

Taigi $C_y=TC_xT'$ yra dydžio Y, transformuoto matrica T, kovariacinė matrica.

Kai dydžių X matavimų paklaidos mažos, atskiro X_i dydžio tikimybės tankio funkcija $f(X_i)$ pastebimai nuo nulio skirsis tik mažoje $\hat{x}_i$ aplinkoje, standartinės paklaidos $\sigma(X_i)$ ribose. Todėl skleidžiant Y_i Teiloro eilute galima apsiriboti tiesiniais nariais:

$$Y_i=Y_i(\hat{\boldsymbol{x}})+\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_1}\right)_{X=\hat{\boldsymbol{x}}}(X_1-\hat{x}_1)+\cdots+\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_n}\right)_{X=\hat{\boldsymbol{x}}}(X_n-\hat{x}_n) \tag{6.77}$$

ir užrašyti vektoriškai

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}(\hat{\boldsymbol{x}}) + T(\boldsymbol{X} - \hat{\boldsymbol{x}}) . \tag{6.78}$$

Čia matrica T yra:

$$T = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_r}{\partial x_1} & \frac{\partial y_r}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_r}{\partial x_n} \end{vmatrix} . \tag{6.79}$$

Ją įrašę į (6.76) gausime paklaidų plitimo dėsnį. Dydžio Y paklaidos šiuo atveju vertinamos diagonaliniais C_y elementais ir iš (6.76) išplaukia, kad jos priklauso ne tik nuo X_i paklaidų $\sigma(X_i)$, bet ir nuo kovariacijų tarp skirtingų X_i. Kai X_i **vienas nuo kito nepriklauso**, kovariacijos C_x matricoje tampa lygios nuliui, o diagonalūs elementai lygūs $\sigma^2(X_i)$, ir matrica C_y tampa diagonali. Jos diagonaliniai elementai užrašomi:

$$\sigma^2(Y_i) = (TC_xT')_{ii} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^2_{X=\hat{x}} \cdot \sigma^2(X_j) . \tag{6.80}$$

Vertindami paklaidą kvadratine šaknimi iš dispersijos ir gauname sąryšį taip pat dažnai vadinamą paklaidų plitimo (perkėlimo) dėsniu:

$$\Delta y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)^2_0 (\Delta x_j)^2} . \tag{6.81}$$

Svarbus yra atvejis, kai $n=r$, t. y. kai n tiesiškai nepriklausomų funkcijų y_i, priklauso nuo n kintamųjų X_i. Tada visus narius a_i lygčių sistemoje (6.73) panaikinę – juos atėmę iš atitinkamų Y_i verčių ir skirtumus Y_i-a_i vėl pažymėję Y_i, gauname:

$$\boldsymbol{Y}=R\boldsymbol{X}. \tag{6.82}$$

čia R – kvadratinė matrica. Reikalavimas, kad n-mačio vektoriaus Y modulis transformacijos (6.82) metu liktų nekintamas (invariantas), t. y.

$$Y^2 = X^2 , \text{ arba } \qquad \sum_{i}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 , \tag{6.83}$$

lemia (žr. A priedą), kad $RR'=I$, taigi $R'=R^{-1}$. Čia I – vienetinė matrica, turinti tik diagonalinius elementus, t. y.

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ik} r_{il} = \delta_{kl} \begin{cases} 0, & kai \quad i \neq k \\ 1, & kai \quad i = k. \end{cases} \tag{6.84}$$

Šiuo atveju transformacija (6.82) vadinama ortogonaliąja, o R matricos determinantas $D=\pm 1$ yra kartu ir (6.82) transformacijos Jakobianas

$$J\left(\frac{x}{y} \right) = \pm 1 . \tag{6.85}$$

Transformaciją, priešingą (6.82), gautume padauginę (6.82) iš kairės iš $R^{-1}=R'$:

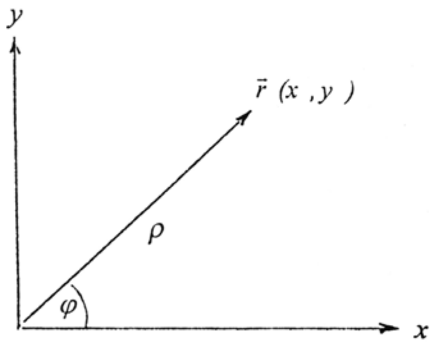
$$R'Y = R'RX, \qquad \text{taigi} \qquad X = R'Y. \tag{6.86}$$

Paklaidų plitimo dėsnio ypatybės atsiskleidžia jau nagrinėjant du dydžius – vektoriaus $\vec{r}$ koordinates. Dekarto koordinačių sistemoje jos yra nepriklausomos x, y koordinatės. Polinėje sistemoje koordinatės (33 pav.) bus ρ ir φ:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = arctg\frac{y}{x}, \quad \rho = r. \tag{6.87}$$

Koordinatės x, y per polines koordinates ρ ir φ išreiškiamos:

$$x=\rho\, cos\varphi, \quad y=\rho\, sin\varphi. \tag{6.88}$$



33 pav. Vektoriaus $\vec{r}$ dekartinės ir polinės koordinatės

Taigi polinėje sistemoje koordinatės x,y yra tarpusavyje priklausomos, nes, pvz., pakitus ρ arba φ vertei iš (6.87) išplaukia pokytis x ir y. Transformacijos matricą T (6.79) šiuo atveju gauname užrašę dalines išvestines ρ ir φ:

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\frac{x}{\rho}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial y} = -\frac{y}{\rho}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{\rho^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{x}{\rho}.$$

Taigi perėjimo prie polinių koordinačių transformacijos matrica yra:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix}. \tag{6.89}$$

Tada koordinačių transformacijos (6.88) matrica bus atvirkštinė T matricai ir gaunama ieškant dalinių išvestinių x ir y (6.88) pagal ρ ir φ:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} cos\alpha & -\rho sin\alpha \\ sin\alpha & \rho cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -y \\ \frac{y}{r} & x \end{pmatrix} = T'. \tag{6.90}$$

Tarkim, kad koordinografe, registruojant koordinates x ir y paklaida matuojant y yra tris kartus didesnė, t. y. $\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 3$ [2]. Tada tikslumu iki daugiklio kavariacinė matrica šioje sistemoje yra:

$$C_{xy} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}. \tag{6.91}$$

Užrašę transformacijos matricą T, pvz., taškui $(x,y)=(1,1)$ gauname:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ir } T' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.92}$$

Tada pagal (6.76) koreliacinė matrica polinėje sistemoje

$$C_{r\varphi} = TC_{xy}T' = \begin{pmatrix} 5 & \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}, \tag{6.93}$$

o ją vėl transformavę į dekartinę, gauname

$$C_{xy} = T' C_{r\varphi} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \tag{6.94}$$

t. y. matricą, kaip ir (6.91).

Atkreipkime dėmesį į tai, kad kovariacinė matrica polinėje koordinačių sistemoje (6.93) turi ne tik diagonalinius elementus, bet ir kovariacijas. Jei paklaidas šioje sistemoje tapatintume tik su diagonaliniais elementais, taigi kovariacijas atmestume, atlikę transformaciją į ašis xy gautume:

$$C'_{xy} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \tag{6.95}$$

Ji labai skiriasi nuo (6.94). Taigi kovariacinių narių $C_{r\varphi}$ matricoje (6.93) atmesti negalima. Iš čia išplaukia išvada, kad vertinant paklaidas, kai T kvadratinė matrica ir kovariacinė matrica (šiame pvz. $C_{r\varphi}$) turi **nemažus** nediagonalinius elementus (kovariacijas), matricą T būtina paversti diagonaliąja. Diagonalizacija atliekama matematine operacija $T'C_{r\varphi}T$ (6.94). Tai reiškia perėjimą prie dydžių $\widetilde{Y}_i$ (koordinačių x,y), išreiškiamų tiesiškai per pradinius dydžius Y_i (koordinates ρ,φ). Todėl gauta nauja kovariacinė matrica C_{xy} turi tik diagonalinius elementus. Tai reiškia, kad taip gauname nepriklausomas koordinates x,y, o bendruoju atveju – nepriklausomus dydžius $\widetilde{Y}_i$. Tada iš (6.94) išplaukia, kad ir matricą $T'C_{r\varphi}T$ galima interpretuoti kaip kovariacinę matricą dydžio (vektoriaus), transformuoto T' matrica. Taigi jos diagonaliniai elementai ir yra atlikus T' transformaciją gautų dydžių (šiuo atveju koordinačių x ir y) dispersijos.

Bendruoju atveju, kai kovariacinė matrica C (6.62) yra kvadratinė, matematine operacija TCT' ją visada galima diagonalizuoti, t. y. surasti nepriklausomus dydžius $\widetilde{Y}_i$, kurių dispersijos ir bus šios matricos diagonaliniai elementai.

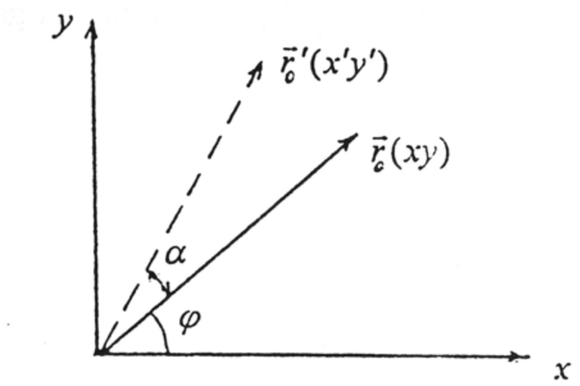
Kai dydžio Y verčių skaičius (r) skiriasi nuo parametrų X skaičiaus (n), t. y. lygtyse (6.73), $z \neq n$, tai iki galo diagonalizuoti negalima, nes atliekant diagonalizacijos procedūrą būtina, kad būtų determinantas $D \neq 0$. Bet tai galima tik esant kvadratinei matricai.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad matricas T ir T' aptartame pavyzdyje lengvai surandome todėl, kad panaudojome vektoriaus $\vec{r}$ koordinačių dekartinėje ir polinėje sistemoje žinomus sąryšius (6.87) ir (6.88), bet ne betarpiška matematine kovariacinės matricos tipo TCT' (6.76) diagonalizavimo procedūra. Dažniausiai analizuojant eksperimento duomenis sąryšiai leidžiantys nustatyti matricas T ir T' nežinomi. Diagonalizacija kovariacinės matricos TCT', t. y. procedūra suradimo transformacijos matricų T ir T' diagonalizuojančių matricą C, yra sudėtinga ir, kaip minėta, galima tik kvadratinei matricai, kai $D\neq 0$.

Stačiakampės matricos atveju $r<n$ determinantas $D=0$ ir diagonalizacija negalima. Todėl, kai X matavimų paklaidos mažos, apytikriai Y paklaidas vertinome diagonaliniais elementais. Kai X paklaidos didelės, dydžio Y įvertinti negalima. Tokiu atveju reikia daugiau lygčių (6.73) sistemoje. Šį atvejį toliau aptarsime nuosekliau.

Dabar atkreipsime dėmesį į dar vieną ortogonaliųjų transformaciją, t. y. transformacijų, kai $\sum_i x_i^2 = \sum_i x'^2$ ypatybę, kad jas galima interpretuoti kaip *n-mačio* vektoriaus posūkio transformacijas.

Tai būdinga (6.86) ir (6.88) transformacijoms, nes jos nepakeičia vektoriaus ilgio (modulio), o transformuojant du vektorius – kampo tarp jų, taigi yra ortogonaliosios. Šiuo požiūriu vektoriaus $r(xy)$ koordinačių transformacijos matricą T' gauname pradžioje užrašę, kaip įprasta, transformacijas vienetinio vektoriaus $\vec{r}_0(x_0, y_0)$ koordinačių jį pasukus kampu α į padėtį $\vec{r}'(x', y')$ (34pav.):



34 pav. Vienetinio vektoriaus koordinačių transformacija

$$\begin{aligned} x_0' &= \rho_0 cos(\varphi+\alpha) = \rho_0(cos\varphi cos\alpha - sin\varphi sin\alpha) = \\ &= x_0 cos\alpha - y_0 sin\alpha, \\ y_0' &= \rho_0 sin(\varphi+\alpha) = \rho_0(sin\varphi cos\alpha - cos\varphi sin\alpha) = \\ &= x_0 sin\alpha - y_0 cos\alpha \end{aligned} \qquad (6.96)$$

Šių lygčių vektoriniame užraše, ryšį tarp vektorių $\vec{r}_0'$ ir $\vec{r}_0$ koordinačių išreiškia matricinis užrašas:

$$\begin{Vmatrix} x_0' \\ y_0' \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Vmatrix}. \qquad (6.97)$$

Taigi transformacijos matrica, išreiškianti koordinačių pakeitimą (6.88) yra:

$$T_0' = \begin{pmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{r_0} & -\frac{y_0}{r_0} \\ \frac{y_0}{r_0} & \frac{x_0}{r_0} \end{pmatrix}. \qquad (6.98)$$

Akivaizdu, kad vektorius $\vec{r}$ transformuosis taip pat ir tuo atveju, kai koordinatės pasukamos kampu $(-\alpha)$.

Padauginus vieną matricos (6.98) stulpelį iš ρ iš jos galima gauti vektoriaus $\vec{r}\,'=\rho\vec{r}_0'$ koordinačių $x'y'$ transformacijas:

$$T'=\begin{pmatrix} cos\alpha & -\rho sin\alpha \\ sin\alpha & \rho cos\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{x}{r} & -y \\ \frac{y}{r} & x \end{pmatrix}. \tag{6.99}$$

Taigi jos determinantas $D=r$ (matricos T_0' determinantas $D_0=1$) ir posūkio transformacijos matrica (6.99) sutampa su (6.90). tada transformaciją (6.87) išreikš matrica T atvirkštinė matricai T'. Kadangi matricos T' determinantas $D=\rho$, palyginti nesunkiai gauname (žr. priede A):

$$(T')^{-1}=T=\begin{pmatrix} cos\alpha & sin\alpha \\ -\rho sin\alpha & \rho cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{6.100}$$

Matome, kad ji sutampa su tranponuota (6.99) matrica, o tai yra ortogonaliųjų transformacijų ypatybė.

6.7. Koreliacijų reikšmė įvertinant paklaidas

Praeitame paragrafe aptartą kelių tiesiškai priklausomų dydžių paklaidų vertinimo t. y. C_y matricos (6.76) diagonalinių elementų ypatybės išryškėja paprastame pavyzdyje, kai vienas matuojamas dydis Z priklauso nuo dviejų parametrų X ir Y.

Tarkime, kad mus domina netiesiogiai matuojamo dydžio $z=f(x,y)$ matavimo paklaida, kai x ir y yra statistiškai įvertinti tiesiogiai matuojami dydžiai iš vienodos apimties imčių. Tada kiekvienai porai verčių x_i ir y_i, kurios bus atsitiktiniai dydžiai, besiskiriantys nuo $\bar{x},\bar{y}$, skleisdami z_{ik} Teiloro eilute taško $f(\bar{x},\bar{y})$ atžvilgiu gauname:

$$z_{ik}=f(\bar{x},\bar{y})+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x_i-\bar{x})+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y_i-\bar{y})+\ldots \quad \begin{matrix}\textit{(aukštesnės}\\ \textit{eilės nariai)}\end{matrix} \tag{6.101}$$

Pažymėję

$$z_{ik}-f(\bar{x},\bar{y})=\delta z_{ik}\,,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0=a \quad \text{ir} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0=b \tag{6.102}$$

ir atmetę tolesnius Teiloro eilutės narius turime

$$\delta z_{ik}=a(x_i-\bar{x})+b(y_i-\bar{y})\,. \tag{6.103}$$

Tada

$$\begin{aligned}\sigma^{*2}(z)=\overline{(\delta z_{ik})^2}&=a^2\sigma^{*2}(x)+b^2\sigma^{*2}(y)+2ab\,cov^*(xy)=\\ &=a^2\sigma^{*2}(x)+b^2\sigma^{*2}(y)+2ab\sigma^*(x)\sigma^*(y)\rho^*(xy),\end{aligned} \tag{6.104}$$

čia σ^{*2} – dispersijos, rastos iš baigtinių imčių, toliau jas žymėsime $S(x)$ ir $S(y)$; $\rho^*(x,y)$ – koreliacijos koeficientas, nustatytas remiantis X ir Y imtimis.

Tad apibrėžiant dydį Q, kai yra ne du jį nusakantys tiesiogiai matuojami dydžiai, o jų skaičius n,

$$S=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2S_i^2+2\sum_{i<j}^{n}a_ia_j\rho_{ij}^*S_iS_j}\,. \tag{6.105}$$

Vertindami paklaidas patikimumu α gauname:

$$\Delta Q = k_{\alpha} \cdot S \,. \tag{6.106}$$

Iš čia, kai koreliacijos tarp tiesiogiai matuojamų dydžių nėra ($\rho_{ij} = 0$),

$$\Delta Q = k_{\alpha} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 S_i^2} \,. \tag{6.107}$$

Taigi paklaidos vertinimas sutampa su (6.81) ir yra anksčiau aptartas netiesioginių matavimų atvejis.

Tam tikru atveju, kai sumuojame vieno pobūdžio paklaidas, atskirai įvertintas pagal kilmę, nepaisant, ar tai sistemingosios paklaidos atsitiktinės dalys ar atsitiktinės paklaidos, ir kai koreliacijos tarp jų nėra:

$$\Delta Q = k_{\alpha} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} S_i^2} \,. \tag{6.108}$$

6.8. Kelių netiesiogiai matuojamų dydžių vertinimas mažiausių kvadratų metodu

Dažnai eksperimentu matuojamas dydis Y yra tiesiškai išreiškiamas per kelis atsitiktinius dydžius X_i, kurių verčių nustatymas ir yra galutinis eksperimento tikslas. Tegu pvz., po serijos matavimų gauta n skirtingų Y verčių

$$Y_1,\ Y_2,\ldots,Y_n. \tag{6.109}$$

Be to žinoma tiesinė priklausomybė tarp šių Y_i verčių ir $r \le n$ atsitiktinių **nepriklausomų dydžių** (parametrų) verčių

$$x_1,\ x_2,\ldots,x_r. \tag{6.110}$$

Ekvivalentiškas šiam bus atvejis, kai išmatavus n skirtingų dydžių $Y_1,\ Y_2,\ldots,Y_n$, tiesiškai išreiškiamų parametrais $x_1, x_2,\ldots,x_r$ ($r \le n$) norime įvertinti parametrus x_i ir jų paklaidas.

Abiem atvejais, įskaitę Y_i matavimų paklaidas ε_i, gauname:

$$\begin{cases} Y_1 = a_{10} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r + \varepsilon_1 \\ Y_2 = a_{20} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r + \varepsilon_2 \\ \ldots \\ Y_n = a_{n0} + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nr}x_r + \varepsilon_n \end{cases} \tag{6.111}$$

Taikant vektoriaus stulpelio užrašą

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \tag{6.112}$$

ir matricą

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nr} \end{pmatrix}, \tag{6.113}$$

lygtį (6.12) užrašome

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{a}_0+A\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\varepsilon}\,. \tag{6.114}$$

Nepriklausomiems Y_i matavimams jų paklaidos ε_i irgi nepriklausomos ir tegu kiekviena ε_i priklauso Gauso skirstiniui su nuliniu matematiniu vidurkiu $E(\varepsilon_j)=0$ ir jai būdinga dispersija, susijusia su atitinkamos Y_i vertės svoriu ρ_i

$$E(\varepsilon_i^2)=\sigma_i^2=\frac{\sigma^2}{\rho_i} \tag{6.115}$$

Skirtumus Y_i-a_{i0} vėl pažymėję y_i (6.114) užrašome

$$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\varepsilon}\,. \tag{6.116}$$

Dažniausiai parametrai X turi svarbią fizikinę prasmę. Todėl žinoma matrica A eilės r vadinama struktūrine arba konstrukcine matrica.

Tada nepriklausomiems y_i matavimams kovariacinė matrica y_i arba ε_i bus diagonali

$$C_y=C_\varepsilon=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \sigma_2^2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \tag{6.117}$$

o jai atvirkštinė vadinama svorių matrica

$$G_y=C_y^{-1}=\begin{pmatrix} g_1 & & 0 \\ & g_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & g_n \end{pmatrix}, \tag{6.118}$$

Kai matuotų Y_i verčių skaičius lygus parametrų X_i skaičiui $(n=r)$, iš Y matavimo duomenų suradę y_i vertes, lygčių sistemą (6.116) išspręstume pilnai, t. y. rastume vienintelį x_i verčių rinkinį tenkinantį šią sistemą. Tačiau šiuo atveju y_i matavimo paklaidos bus prilygintos nuliui. Todėl stengiamasi turėti daugiau matuotų y_i verčių, negu parametrų x_i skaičius $(n>r)$. Tokia sistema yra perpildyta ir įskaičius ε_i nežinomas vertes, turi be galo daug sprendinių. Mūsų tikslas gauti geriausią šios lygčių sistemos sprendinį ir jis gaunamas mažiausių kvadratų metodu. Tam daroma prielaida, kad kiekvieno y_i matavimo paklaidos ε_i sudaro skirstinį su matematiniu vidurkiu lygiu nuliui. Tada

$$E(y)\equiv\hat{\boldsymbol{y}}=A\hat{\boldsymbol{X}}\,, \tag{6.119}$$

ir bendruoju atveju kovariacinė matrica C_y, kovariacijas išreiškus per koreliacijos koeficientus

$$cov(y_i y_j)=E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=\sigma_i\sigma_j\rho_{ij}\,, \tag{6.120}$$

yra

$$C_y = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \cdots & \sigma_1\sigma_n\rho_{1n} \\ \sigma_1\sigma_2\rho_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2\sigma_n\rho_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_1\sigma_n\rho_{1n} & \sigma_2\sigma_n\rho_{1n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \qquad (6.121)$$

Gauso mažiausių kvadratų metodas leidžia nustatyti optimalias $\hat{x}$ vertes ir grindžiamas minimizacija liekamosios kvadratų sumos (5.23):

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 . \qquad (6.122)$$

Iš (6.116) išplaukia, kad (6.122) galima užrašyti

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{ir}x_r)^2 . \qquad (6.123)$$

Taigi ekstremumą S randame išvestines pagal visus x_i vienu metu prilyginę nuliui, panašiai kaip darėme sudarant tiesinės regresijos lygtį (95 psl.):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial x_1} = -2\sum\limits_i x_i(y_i - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1r}x_r) = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{\partial S}{\partial x_r} = -2\sum\limits_i x_r(y_i - a_{r1}x_1 - a_{r2}x_2 - \ldots - a_{rr}x_r) = 0 \end{cases} \qquad (6.124)$$

Šią lygčių sistemą spręsime matricine forma [3]. Tam (6.122) užrašome matricomis

$$S=\varepsilon'\varepsilon , \qquad (6.125)$$

ir įrašę matricos ε išraišką iš (6.116) gauname

$$S = (y - AX)'(y - AX) = y'y - 2X'A'y + X'A'AX . \qquad (6.126)$$

Diferencijuojant (6.126) pagal kiekvieną x_i gausime sistemą lygčių (6.124) matriciniame užraše

$$-2A'y+2A'AX=0 . \qquad (6.127)$$

Ją perrašę

$$A'AX=A'y . \qquad (6.128)$$

gauname (6.127) ir (6.124) lygčių sprendinius

$$\hat{\boldsymbol{X}} = (A'A)^{-1}A'(\boldsymbol{y}) \qquad (6.129)$$

išreiškiamus tiesiškai per Y vertes.

Tai yra sprendinys visiems atvejams, kai matricos A eilutės tiesiškai nepriklausomos.

Mažiausių kvadratų metodu gautas sprendinys (įvertis) atitinka dispersijos minimumą bet kurios tiesinės kombinacijos dydžių x_i ir nėra apribojimo kaip turi būti pasiskirstę y_i paklaidos ε_i. Jo taikymui būtina tik antrųjų ε_i momentų σ_i^2 baigtinumas kovariacinėje matricoje (6.121). Beje tik, kai ε_i pasiskirstę pagal Gausą, mažiausių kvadratų metodu gaunamas tas pats įvertis $\hat{X}$, kaip ir taikant geriausio atitikimo principą [3]. Tik todėl sudarant lygtis (6.116) kėlėme sąlygą, kad ε_i būtų pasiskirstę pagal Gausą.

6.9. Mažiausių kvadratų metodu gauto sprendinio savybės ir paklaidos

Mažiausių kvadratų metodu gautas įvertis $\hat{x}$ turi tris svarbias ypatybes, nepriklausančias nuo ε_i skirstinio.

1. $\hat{X}$ yra nepaslinktasis įvertis. Iš tikrųjų iš (6.129) ir (6.119) gauname

$$E(\hat{X}) = (A'A)^{-1} A' E(y) = (A'A)^{-1}(A'A)\hat{X} = \hat{X}\,. \tag{6.130}$$

Taigi matematinis vidurkis sutampa su įverčiu $\hat{X}$, o tai ir reiškia, kad $\hat{X}$ vertinime poslinkio nėra.

2. Taikant suderinamumo kriterijus mažiausių kvadratų metodu galima pasiekti, kad sprendinys $\hat{X}$ turėtų mažiausią dispersiją iš visų nepaslinktųjų įverčių X^*, sudarytų iš dydžių $\{y_i\}$ tiesinių sąryšių, kiekvienam dydžiui X_j, t. y. $D(\hat{X}_j) \le D(X_j^*)$ bet kuriam j (Gauso-Markovo teorema). Taigi $\hat{X}$ yra tiksliausias X įvertinimas iš visų tiesinių vertinimų.

Įrodymas grindžiamas prielaida, kad matavimo duomenys y_i nepriklausomi ir turi **vienodas**, bet nenustatytas dispersijas: $D(y_i)=\sigma^2$ ir $cov(y_i,y_j)=0$, kai $i\neq j$.

Taigi dydžio Y kovariacinė matrica

$$C_y = \begin{vmatrix} D(y_1) & cov(y_1,y_2) & \dots & cov(y_1,y_n) \\ cov(y_1,y_2) & D(y_2) & \dots & cov(y_2,y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ cov(y_1,y_n) & cov(y_2,y_n) & \dots & D(y_n) \end{vmatrix}_{(n\times n)} \tag{6.131}$$

aptariamu atveju bus diagonali.

$$C_y = D(y) = \sigma^2 I_{(n\times n)} \tag{6.132}$$

Čia $I_{(n\times n)}$ – vienetinė matrica turinti n eilučių ir n stulpelių. Toliau kovariacinę matricą žymėsime raide D, kaip ženklą, kad ji rodo dydžio dispersiją.

Kadangi sprendinys $\hat{X}$ (6.129) per dydžius $\{y_i\}$ tiesiškai išreiškiamas matrica $W=(A'A)^{-1}A'$, tai galima taikyti paklaidų perkėlimo taisyklę (6.80): $D(Wy)=WD(y)W'$. Tada matricai W' taikant transponuotos matricų sandaugos taisyklę (P.16) gauname

$$D(\hat{X}) = (A'A)^{-1} A' D(y) A (A'A)^{-1} = \sigma^2 (A'A)^{-1} A' I A (A'A)^{-1}\,. \tag{6.133}$$

Įskaičius, kad I – vienetinė matrica n eilės, o A – (rn) eilės, tai $IA=A$ ir (6.133) galima užrašyti

$$D(\hat{X}) = \sigma^2 (A'A)^{-1} [(A'A)(A'A)^{-1}]\,. \tag{6.134}$$

Kadangi matricų sandauga laužtiniuose skliaustuose lygi vienetinei, tai

$$D(\hat{X}) = \sigma^2 (A'A)^{-1}\,. \tag{6.135}$$

Mūsų pateiktas šiuolaikiškas teoremos įrodymas pateiktas [3]. Taigi iš teoremos išplaukia, kad kiekvienas diagonalinės matricos $D(\hat{X})$ elementas ne didesnis už matricos $D(X^*)$ atitinkamą diagonalinį elementą.

3. Mažiausių kvadratų metodu gautas $\hat{X}$ įvertis turi ir trečią ypatybę, apibūdinančią liekamosios paklaidos kvadratų sumą R, gaunamą įverčius $\hat{X}$ įrašant į (6.126):

$$R = S_{min} = (y - A\hat{X})'(y - A\hat{X}) . \tag{6.136}$$

Matricinės algebros veiksmais įrodoma [3]:

$$R = y'y - y'A\hat{X} \tag{6.137}$$

ir

$$E(R) = \sigma^2(n - r) \tag{6.138}$$

Įrašius gautas $\hat{X}$ vertes į (6.119) gausime „patikslintus" matavimo duomenis $\hat{y} \equiv \eta$. Jų kovariacinė matrica yra [2]:

$$D(\eta) = G_\eta^{-1} = AG_{\hat{X}}^{-1}A' . \tag{6.139}$$

Iš (6.138) išplaukia, kad vertinant σ^2 galima panaudoti liekamosios paklaidos kvadratų sumą, t. y.

$$\sigma^2 = \frac{R}{n - r} . \tag{6.140}$$

Iš čia nustatę σ^2 po to iš (6.135) randame ir $\hat{X}$ dispersiją. Kai y_i matavimų dispersijos $D(y_i)=\sigma^2$ skirtingos, diagonalios matricos (6.121) elementus užrašome $D(y_i) = \frac{\sigma^2}{g_i}$. Čia g_i – y_i-ojo matavimo svoris. Tada vėl galime grįžti prie (6.116) lygčių dydžiams $\varepsilon_i^* = \varepsilon_i\sqrt{g_i}$:

$$\varepsilon_i^* = \varepsilon_i\sqrt{g_i} = (y_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{ir}x_r)\sqrt{g_i} . \tag{6.141}$$

Dydžių ε_i^* dispersija

$$D(\varepsilon_i^*) = g_i D(\varepsilon_i) = \sigma^2 \tag{6.142}$$

ir vietoje (6.122) tenka tirti mažiausių kvadratų metodu dydį

$$S^* = \sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^*)^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i\varepsilon_i^2 . \tag{6.143}$$

Gautas sprendinys vėl bus kaip (6.129), jei tik ε_i priklauso skirstiniams, kurių $E(\varepsilon_i) = 0$, o $\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{g_i}$.

Išnagrinėsime pavyzdį [2], kaip mažiausių kvadratų metodu nustatoma „geriausia" tiesė, pagal matavimo duomenis keliuose „taškuose".

Tarkime, kad tiesiogiai matuojamas dydis y tiesiškai išreiškiamas mus dominančiu dydžiu X, turinčiu dvi vertes x_1 ir x_2 taip, kad (6.116) užrašome $y_j - \varepsilon_j = x_1 + x_2 t_j$. Iš čia, pžymėję $y_j - \varepsilon_j = \eta_j$, gautume:

$$\boldsymbol{\eta} - x_1 - x_2\boldsymbol{t} = 0 . \tag{6.144}$$

Matuojant gauti y_j įverčiai ir jų matavimo standartinės paklaidos σ_j, bei žinomos konstantos t_j (dydžiai išmatuoti be paklaidų) pateikti lentelėje.

j	1	2	3	4
t_j	0,0	1,0	2,0	3,0

y_j	1,4	1,5	3,7	4,1
σ_j	0,5	0,5	0,5	0,5

Taigi y matavimo paklaida 0,5 visiems y_j. Tada

$$C_y = \begin{pmatrix} 0{,}25 & & & 0 \\ & 0{,}25 & & \\ & & 0{,}25 & \\ 0 & & & 0{,}25 \end{pmatrix} = 0{,}25I, \quad G_y = C_y^{-1} = 4I .$$

Lygtis (6.144) matriciniame užraše yra

$$\boldsymbol{\eta} - A\boldsymbol{X} = 0 \quad ir \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Kadangi teorinių y verčių η_j nežinome, jas pakeitę y_j įverčiais $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1{,}4 \\ 1{,}5 \\ 3{,}7 \\ 4{,}1 \end{pmatrix}$, sprendinį $\hat{X}$ (6.129) užrašome

$$\hat{X} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}4 \\ 1{,}5 \\ 3{,}7 \\ 4{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10{,}7 \\ 21{,}2 \end{pmatrix}.$$

Įvertinę atvirkštinę matricą pagal priedo A (P.25) gauname

$$\hat{X} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10{,}7 \\ 21{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}13 \\ 1{,}03 \end{pmatrix}.$$

Taigi $\hat{x}_1 = 1{,}13$, o $\hat{x}_2 = 1{,}03$. Dabar iš (6.135) gauname

$$D(\hat{X}) = 0{,}25 \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}175 & -0{,}075 \\ -0{,}075 & 0{,}050 \end{pmatrix}.$$

Pagal $\hat{x}_1$, ir $\hat{x}_2$ vertes iš (6.141) galima gauti patikslintas y_j matavimo vertes $\tilde{\eta}_j$:

$$\tilde{\eta} = A\hat{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}13 \\ 1{,}03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}13 \\ 2{,}16 \\ 3{,}19 \\ 4{,}22 \end{pmatrix}.$$

Taškai $1{,}13,\ 2{,}16,\ 3{,}19$ ir $4{,}22$ yra ant tiesės aprašomos lygtimi $\tilde{\eta} = A\hat{x}$. Liekamąsias paklaidas dydžiui $\tilde{\eta}$ gauname iš (6.139):

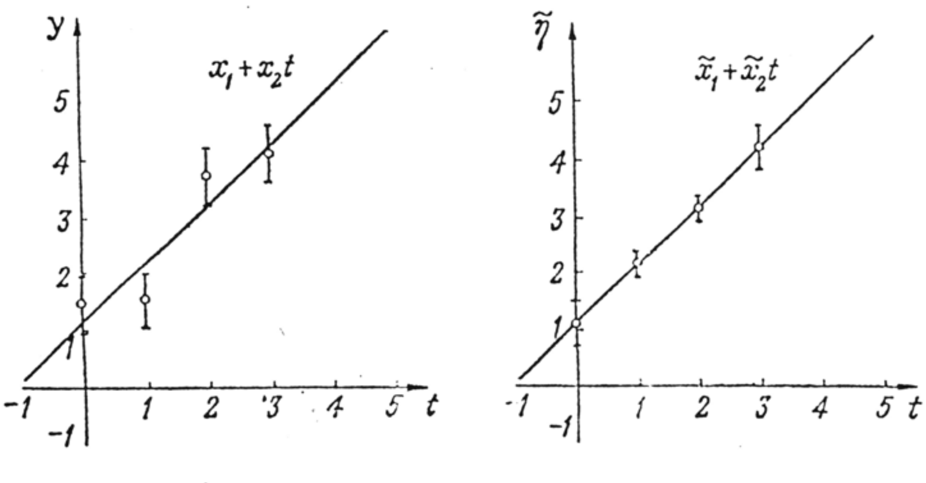
$$D(\tilde{\eta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}175 & -0{,}075 \\ -0{,}075 & 0{,}050 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}175 & -0{,}075 \\ 0{,}1 & -0{,}025 \\ 0{,}025 & -0{,}025 \\ -0{,}5 & -0{,}175 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}175 & 0{,}1 & 0{,}025 & -0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}075 & 0{,}05 & 0{,}025 \\ 0{,}025 & 0{,}05 & 0{,}075 & 0{,}1 \\ -0{,}05 & 0{,}025 & 0{,}01 & 0{,}175 \end{pmatrix}.$$

Paklaidos $\tilde{\eta}_j$ yra kvadratinės šaknys iš diagonalinių elementų:

$$\Delta\tilde{\eta}_1 = 0{,}42, \quad \Delta\tilde{\eta}_2 = 0{,}27, \quad \Delta\tilde{\eta}_3 = 0{,}27, \quad \Delta\tilde{\eta}_4 = 0{,}42\,.$$

Taigi mažiausių kvadratų metodu, kai matavimo duomenų y_i daugiau negu nežinomųjų dydžių x_i, pasiekiame žymiai mažesnes atskirų duomenų paklaidas, kurios buvo *0,5* visiems taškams (32 pav. a ir b).



a) b)

32 pav. Tiesės parinkimas nagrinėto pavyzdžio duomenų analizei:
a) matavimo duomenys ir standartinės paklaidos;
b) patikslinti duomenys ir liekamosios paklaidos

6.10. Regresinės lygties nustatymas dviems susietiems atsitiktiniams dydžiams

Aptarsime mažiausių kvadratų taikymą, kai du atsitiktiniai dydžiai X ir Y susieti taip, kad vidutinė Y vertė yra ne konstanta, bet x-so funkcija:

$$E(Y) = \eta(X, v)\,. \tag{6.145}$$

Čia v – žymi nežinomų parametrų rinkinį, pilnai nustatančių funkciją $\eta(X,v)$. Nustatymui funkcijos $\eta(x_i,v)$ taikoma imtis atsitiktinio dydžio $y(x_i)$. Dažnai funkciją $\eta(x)$ pakanka įvertinti apytikriai ir tam taikoma jos Teiloro arba Furje skleidimas eilute.

Tipiškas regresijos funkcijos $\eta(x)$ vertinimas pagrįstas tiesinės jos išraiškos atžvilgiu modelio parametrų taikymu [3].

$$\eta(x) = v_0 f_0(x) + v_1 f_1(x) + \ldots + v_r f_r(x)\,. \tag{6.146}$$

Čia $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_r(x)$ – žinomos funkcijos.

Kai skleidžiama Furje eilute $f_0(x) = \frac{1}{2}$, $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x, \ldots, f_{2r-1}(x) = \sin rx$, $f_{2r}(x) = \cos rx$,

o kai Teiloro – $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2, \ldots, f_r(x) = x^r$. Pastaruoju atveju $\eta(x)$ išreiškiama polinomu:

$$\eta(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots + v_r x^r\,. \tag{6.147}$$

Dabar šį atvejį aptarsime nuosekliau. Atsitiktinę funkciją y_i užrašome:

$$y_i = \eta(x_i) + \varepsilon_i\,. \tag{6.148}$$

Čia ε_i – atsitiktinės y_i matavimo paklaidos, turinčios vienodą dispersiją σ visiems y_i. Jos apibūdina sklaidą $\{y_i\}$ jų matematinio vidurkio $E\{(y_i)\}$ atžvilgiu.

Iš (6.148) ir (6.147) gauname:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = y_1 - v_0 - v_1 x_1 - \ldots - v_r x_1^r \\ \varepsilon_2 = y_2 - v_0 - v_1 x_2 - \ldots - v_r x_2^r \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \varepsilon_n = y_n - v_0 - v_1 x_n - \ldots - v_r x_n^r \end{cases}. \tag{6.149}$$

Atkreipsime dėmesį, kad §5.2 nagrinėtas atvejis, kai $r=1$.

Mažiausių kvadratų metodu įverčio ieškojimas yra dydžio

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - v_0 - v_1 x_i - \ldots - v_r x_i^r)^2 \tag{6.150}$$

minimumui atitinkančių $v_0, v_1, \ldots, v_r$ nustatymas. Tam imamos išvestinės pagal visus parametrus v_i ir prilyginamos nuliui. Taip gaunama linijinių lygčių sistema x^j atžvilgiu:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial v_0} = -2\sum (y_i - v_0 - v_1 x_i - \ldots - v_r x_i^r) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial v_i} = -2\sum x_i (y_i - v_0 - v_1 x_i - \ldots - v_r x_i^r) = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \dfrac{\partial S}{\partial v_r} = -2\sum x_i^r (y_i - v_0 - v_1 x_i - \ldots - v_r x_i^r) = 0 \end{cases}. \tag{6.151}$$

Ją galima užrašyti vadinamomis normaliomis lygtimis:

$$\begin{cases} n v_0 + v_1 \sum x_i + \ldots + v_r \sum x_i^r = \sum y_i \\ v_0 \sum x_i + v_1 \sum x_i^r + \ldots + v_r \sum x_i^{r+1} = \sum x_i y_i \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ v_0 \sum x_i^r + v_1 \sum x_i^{r+1} + \ldots + v_r \sum x_i^{2r} = \sum x_i^r y_i \end{cases}. \tag{6.152}$$

Matriciniame užraše (6.149), šiuo atveju konstrukcinė matrica yra

$$A=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^r \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^r \end{vmatrix}, \tag{6.153}$$

o transponuota v matrica

$$v'=(v_0, v_1, v_2, \dots, v_r).$$

Tada (6.149) ir (6.150) užrašome:

$$\varepsilon = y - Av, \quad S=(y-Av)'(y-Av), \tag{6.154}$$

ir palyginę su (6.126) iš (6.123) gauname

$$\hat{v}=(A'A)^{-1}A'y, \tag{6.155}$$

jei tik $A'A$ yra kvadratinė matrica. Jei matricos A' eilutės tiesiškai priklausomos $A'A=0$. Parametrų $\hat{v}$ paklaidos vertinamos pagal (6.135) ir (6.140). Atkreipsime dėmesį, kad toks paklaidų vertinimas buvo gautas bendruoju atveju, t. y. nepriklausomai kaip pasiskirstę ε_i. Kai ε_i priklauso nepriklausomiems vienodiems Gauso skirstiniams su $\hat{\varepsilon}_i = 0$ ir nežinomu σ^2, ji vertinama tarsi būtų $v=n-r-1$ laisvės laipsnių [3]

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{R_r}{n-r-1}. \tag{6.156}$$

Skaičiavimai ir rezultatų interpretacija supaprastėja, kai $\eta(x)$ skleidžiama ortogonaliomis funkcijomis. Tačiau visada lieka klausimas: kiek narių palikti eilutėje? Praktiškai visuomet yra kritinis skaičius $r=k$, atitinkantis pirmiems $k+1$ nariams $\eta(x)$ skleidinyje. Jis duoda optimalią aproksimaciją. Didinant narių skaičių gauname vis geresnį sutapimą $\hat{y}_r$ su matavimo rezultatais ir blogesnį atitikimą su tikra kreive $\eta(x)$, kurią ir bandome nustatyti. Taip yra todėl, kad eksperimentiniai duomenys turi ribotą informaciją galimą panaudoti $\eta(x)$ nustatymui.

Tai reiškia, kad galima didinti narių skaičių, pvz., Teiloro eilutėje $v_r x^r$ didinant r tik tol, kol $\hat{v}_r$ ženkliai skiriasi nuo nulio. Beje tam naudojamas ir statistinis kriterijus F nusakantis narių skaičių eilutėje, kol v_r dar turi mūsų parinktą pastebimą reikšmę nusakomą maža α reikšme (dažniausiai $\alpha=0,05$) χ^2 skirstinyje [3].

Baigiant mažiausių kvadratų metodo ypatybių aptarimą, tenka pažymėti, kad šio metodo taikymas matavimo duomenų interpretacijai pagal teoriškai motyvuotą net ir tiesinę regresijos lygtį, kai matavimo duomenų daug, matematiškai sudėtingas ir praktiškai galimas tik taikant skaičiavimo techniką.

Todėl pvz., atomų ir molekulių spektrų tyrimuose, kur energetinių lygmenų energija teoriškai išreiškiama per radijinius integralus, jų įverčiai ir „patikslinti“ energetiniai lygmenys mažiausių kvadratų metodu buvo gauti tik įdiegus skaičiavimo mašinas Lietuvos MA. Beje, tai buvo pirmieji tokio pobūdžio skaičiavimai visoje buvusioje Sovietų Sąjungoje.

Kompleksinių matavimų duomenys vertinami panašiai kaip ir jungtinių (gretutinių) matavimų, t. y. mažiausių kvadratų metodu (MKM), tik jį taikant yra savitumų, susijusių su lygčių, gautų iš (1.4) paprastumu lyginant pvz. Su (6.73). Iš tiesų iš (1.4) gautos lygtys turi tik $C_{ij}=1$, kai matuojama kelių dydžių suma Y_i, $C_{ij}=-1$, kai kelių dydžių suma lyginama su Q_j (Y_i gali būti mažas) ir $C_{ij}=0$, kai j-ame matavime dydžio Q_j nėra. Taip sudaroma sistema lygčių $m>k$. Sprendžiant ją mažiausių kvadratų metodu, atžvilgiu Q_i, dažnai taikomos papildomos tikslios sąlygos matuojamiems dydžiams. Pvz. Jei Q_i yra trikampio kampai, tai papildoma sąlyga $\sum Q = 180^\circ$. Taigi skirtumai nuo jungtinių (gretutinių) matavimų vertinimo atsiranda tik MKM lygčių sprendimo procese [1, 2, 10].

7. Eksperimento duomenų matematinės analizės ypatybės

Eksperimento duomenų analizė iš esmės yra matematinis uždavinys, kurio tikslas iš eksperimento duomenų nustatyti kiekybinius sąryšius tarp šių duomenų ir mus dominančio reiškinio ypatybių. Siekiant šio tikslo taikomi matematiniai eksperimento duomenų analizės modeliai ir išankstiniai apytikriai sąryšiai tarp matuojamųjų ir eksperimentu siekiamų nustatyti dydžių. Šių sąryšių optimali išraiška nustatoma taikant kokybės kriterijus, atspindinčius regresinės analizės metodais gautų sąryšių ir eksperimento atitikimą. Visa tai apibūdinama kaip matematinis modeliavimas.

Jei iš nustatytų matematinių sąryšių (modelio) gaunami rezultatai pakankamai gerai aprašo eksperimentą, juos galima taikyti tų sričių eksperimento rezultatams prognozuoti, kuriose nustatant matematinį modelį fizikiniai dydžiai nebuvo tiesiogiai matuojami, t. y. interpoliuo-jant ir ekstrapoliuojant. Visi šie duomenų analizės būdai yra statistiniai arba sukurti jų pagrindu. Suprantama, kad jiems būdingi ir pagrindiniai statistiniams metodams taikyti keliami reikalavimai – eksperimento duomenų statistinis pastovumas. Beje, į jo būtinumą atkreipėme dėmesį jau pačiu paprasčiausiu matematinės analizės taikymo atveju, kai nustatomas tiesioginio matavimo rezultatas ir jo paklaida.

Kadangi statistinio pastovumo duomenų patikrinimas iš imties nėra išsamus, paprastai visada lieka ne visai nustatytas skirtumas tarp reiškinio ir matematinio modelio. Todėl be statistinių, taikomi ir kiti, nestatistiniai, duomenų analizės būdai. Vienas iš jų yra vystomas vadinamojoje pastovumo teorijoje, kurios esmė – atitinkamų lygčių, esant fiksuotiems duomenims, sprendimas, paskui nustatant sprendinių variacijas, intervalus, kai pradinių duomenų kitimas neviršija nustatytų ribų. Šis būdas daugiausia taikomas diferencialinių lygčių teorijoje.

Kitas jam artimas yra intervalinės analizės metodas, kai nustačius pradinių duomenų ribas, apytikriai įvertinamas rezultatas. Šis būdas pagrįstas skaičiaus pakeitimo intervalu idėja. Skaičiaus pakeitimas intervalu, kuriame yra tikroji matuojamojo dydžio vertė, yra vaizdus ir labai plačiai taikomas matavimų praktikoje. Tuo tikslu yra nustatytos intervalų tarpusavio tvarkymo taisyklės, atitinkančios aritmetines operacijas „+”, „–”, „×“ ir „:”, t. y. sukurta visai nauja intervalinė aritmetika. Intervalų pagrindu sudaromos ir intervalinio argumento funkcijos ir t. t. Pagal intervalinius argumentus galima nustatyti intervalą, kuriame yra ieškomasis rezultatas esant nustatytoms išeities prielaidoms.

Dar vienas iš nestatistinių yra neryškiųjų duomenų sankaupų metodas. Įprastais būdais galimos matuojamojo dydžio x vertės nustatomos tiksliai ta prasme, kad dydis gali turėti tokią vertę ar ne, šiuo atveju – tik nurodoma tikimybė, kad duomuo yra kažkuriame intervale. Toliau matematinės operacijos atliekamos kaip su įprastais intervalais. Vis tik kol kas matavimo duomenims analizuoti tai retai taikomas būdas.

Analizuojant statistiniais metodais, ypač mažiausiųjų kvadratų,– iškyla rimta problema, kai tarp eksperimento duomenų yra duomenų su didelėmis paklaidomis ir stambių apsirikimų. Kadangi taikant šį būdą „derinimas” vyksta pagal visus matavimo duomenis, tai kelių duomenų nekorektiškumas veda prie nekokybiško galutinio rezultato. Dėl to taikomi įvairūs įvade minėti stabilūs analizės metodai. Paprastu atveju – tai eksperimento duomenų analizė mažiausiųjų kvadratų metodu, iš pradžių atmetant ženkliau nuo kitų besiskiriančius duomenis. Paskui iš pradžių atmestų duomenų sumažintos vertės įvairiais būdais įskaitomos į galutinį rezultatą.

Ši knyga – tai duomenų matematinės analizės pagrindai tradicine metrologijos samprata, kai tokių tyrimų tikslas yra matuojamojo dydžio vidurkio, dispersijos ir koreliacijų nustatymas. Tačiau čia pat lieka plati atsitiktinių procesų sritis, ypač svarbi ryšių teorijoje.

A Priedas

Empirinės duomenų skirstinio funkcijos parinkimas

Eksperimento duomenų pagrindu (empiriškai) dažniausiai parenkama tikimybės tankio funkcija ir pagal ją surandama tikimybių skirstinio funkcija. Parinkus matematinę funkciją (dažniausiai pagal jos grafinį vaizdą) tikimybės tankio funkcijai sudaryti beveik visuomet naudojama tik jos grafiko dalis, pagal kitimo pobūdį artima duomenų verčių pasiskirstymui. Taigi Gauso ir Stjūdento skirstiniai, taikomi nepriklausomų duomenų aprašymui, šia prasme yra išimtis, kai naudojama ištisinė funkcija.

Empirinės skirstinio funkcijos taikomos dviem tikslais:

1. tiesiogiai matuojamų dydžių verčių pasiskirstymo aprašymui;
2. funkcinės priklausomybės tarp tiesiogiai matuojamų dydžiui nustatymui.

Abiem atvejais pasirinkus matematinę funkciją $y(x)$ labiausiai atitinkančią eksperimento verčių pasiskirstymo ypatybėms, jai keliama normavimo sąlyga (2.9):

$$A\int_c^d y(x)\,dx = 1\,. \tag{P1}$$

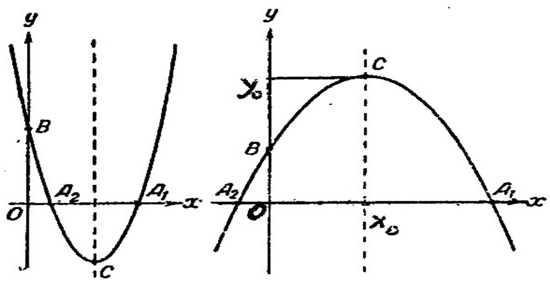
Dydis $A = 1\Big/\int_c^d y(x)dx$ vadinamas normavimo daugikliu, o funkcija $Y(x) = A\cdot y(x)$–pasiskirstymo tikimybės tankio funkcija. Ji yra normuota, t. y.

$$\int_c^d Y(x)\,dx = 1\,. \tag{P2}$$

Tada atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinio funkcija (12):

$$F(x) = \int_c^x Y(x)\,dx\,. \tag{P2}$$

1. Tarkime, kad imant fiksuotą laiko intervalą Δt eilę metų, kai susidaro ekvivalentiškos gamtos sąlygos, buvo registruojami tam tikri įvykiai. Tai bus tiesioginių matavimų atvejis. Atidėję registruotų įvykių skaičių n_i didėjimo tvarka x ašyje $(x_i = n_i)$, po to ašį suskirstome į vienodo pločio Δx intervalus ir įvertiname verčių patekusių į kiekvieną intervalą skaičių. Nubrėžiame histogramą. Jei duomenų daug, galima įvertinti imties empirinius momentus. Pagal juos parenkame matematinę funkciją $y(x)$. Tarkime, kad duomenų n_i pasiskirstyme yra ekstremumas pvz., maksimumas taške x_0. Kitos duomenų pasiskirstymo ypatybės yra artimos funkcijos $y(x) = ax^2 + bx + c$ grafikui intervale [0, A_1] (1P pav. b).



a b

1P pav.

Tada pirmiausia darome šios funkcijos matematinę analizę – tiriame jos ypatybes ir kritinius taškus. Nustatome, kad tai parabolė, turinti vertikalią simetrijos ašį $x = -b/2a$. Kai $a > 0$ funkcija pradžioje mažėja, pasiekia minimumą ir po to didėja (1P pav. a). Kai $a < 0$ – pradžioje didėja, pasiekia maksimumą ir pradeda mažėti (1P pav. b). Kirtimosi su ašimi Ox taškai A_1 ir A_2 turi koordinates: $\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\Big/2a; 0$ ir su Oy ašimi kirtimosi taškas B (0, c).

Ekstremumas taške $C\left[-b/2a; \left(4ac - b^2\right)/4a\right]$. Šie charakteringieji taškai naudojami funkcijos $y(x)$ parametrams parinkti. Kreivės vertikalią ašį pastumiame, kad ji eitų per tašką x_0:

$$x_0 = -b/2a\,. \tag{P4}$$

Įvertiname į centrinį (su ekstremumu) intervalą patekusių duomenų skaičių. (Visus duomenų skaičius atskiruose intervaluose galima proporcingai pakeisti dauginant iš pastovaus daugiklio). Gautą skaičių prilyginame kreivės ekstremaliai vertei:

$$y_0 = \Delta n_{max} = \frac{4ac - b^2}{4a}\,. \tag{P5}$$

Trečią sąryšį funkcijos y parametrams gauname panaudoję tašką B (0, c) arba taškus A_1 ir A_2

$$x_{1,2} = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)\Big/2a\,, \tag{P6}$$

t. y. santykinai įvertinę duomenų skaičių pirmame intervale arba didžiausią eksperimentu gautą x vertę.

Pavyzdžiui, kai $x_0 = 9, y_0 = 16$ ir $c = 7$ (šios vertės apytikriai atitinka proporcijų 1P pav., b grafikui) iš P4÷P6 lygčių gauname: a=-0,111; b=1,98; c=7. Taškų A_1 ir A_2 koordinatės x_1=21,0 ir x_2=3,03. Taigi funkcija aprašanti eksperimento verčių pasiskirstymą yra

$$y = -0{,}111x^2 + 1{,}98x + 7\,.$$

Jos normavimo daugiklį randame pagal (P1):

$$A\int_0^{21,0} y\,dx = 241 \cdot A = 1\,,$$

taigi $A = 1/241$. Tada eksperimento duomenų pasiskirstymą aprašanti tikimybės tankio funkcija bus

$$Y = \frac{1}{241}\left(-0{,}111x^2 + 1{,}98x + 7\right).$$

Pagal šią funkciją galima gauti vidutinį statistinį registruotų įvykių skaičių (2.11)

$$\hat{x} = \int_0^{21,0} x \cdot Y(x)dx = 9{,}37\,,$$

duomenų sklaidos dispersiją (2.23)

$$\mu_2 = \sigma^2(X) = \int_0^{21,0} (x - \hat{x})^2 \cdot Y(x)dx$$

ir skirstinio vidutinę kvadratinę paklaidą:

$$\Delta x_{vid.kv.} = \sigma .$$

Tikimybė, kad Δt laikotarpiu vieną kartą įvertintas įvykių skaičius n_i bus intervale $[n_1, n_2]$ yra (2.10):

$$P(x_1 \le x \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} Y(x)dx$$

2. Dabar aptarkime atvejį, kai empiriškai parenkama matematinė lygtis taikoma išreikšti funkcinei priklausomybei tarp dviejų dydžių X ir Y. Tarkime, kad daugkartiniuose matavimuose fiksuotoms X vertėms – $x_1, x_{2,...}$ (pvz., laiko momentais: $\Delta t_1, \Delta t_2,...$) gauta vidutinė Y vertė – $\overline{y}_1, \overline{y}_2,...$ (vidutiniškai registruota įvykių: $\overline{n}_1, \overline{n}_2,...$) ir mus domina jų kitimą išreiškianti funkcija – regresijos lytis. Kaip ir tiesioginių matavimų atveju pasirenkama geriausiai verčių pasiskirstymą aprašančios funkcijos grafiko dalis. Jei parinkta funkcija nėra tiesė, pakeitus kintamuosius „ištiesinama“ (linearizuojama). Šis veiksmas leidžia tiksliai įvertinti funkcijos parametrus. Tarkime, kad X vertėms $x = 0, 4, 8, 10, 12, 16, 20$, gauta $\overline{y} = 7, 14, 16, 15, 13, 8, 0$. Grafiškai pavaizduota ši priklausomybė apytikriai aprašoma mūsų jau aptarta funkcija $y = ax^2 + bx + c$. Taigi funkcijos parametrus galima nustatyti, kaip jau darėme, pagal charakteringuosius taškus A_1, A_2, B, C ir funkcinė priklausomybė bus rasta. Tiksliau parametrus nustatysime, funkciją $y(x)$ linearizuodami. Parinkę atraminiu (tiksliu) pvz. tašką (x_i, y_i) ir įrašę šias vertes į funkciją $y(x)$ gauname $c = y_1 - ax_1^2 - bx_1$. Tada funkcija $y(x)$ tampa:

$$y - y_i = b(x - x_i) + a(x^2 - x_i^2),$$

arba

$$Y = \frac{y - y_i}{x - x_i} = b + a(x + x_i).$$

Taigi funkcija $Y(x)$ yra tiesinė.

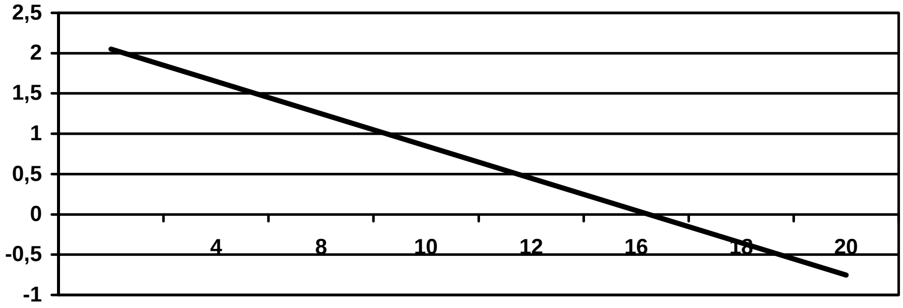
Paėmę atraminį pvz. tašką` $B(0,7)$ gauname

$$Y = \frac{\overline{y} - 7}{x}, \text{ arba } Y = b + ax .$$

Tada matuotoms x ir $\overline{y}$ vertėms, randame Y vertes:

x	4	8	10	12	16	20
Y	1,75	1,13	0,80	0,50	0,06	-0,35

Ir išbrėžiame grafiką.



Iš šio grafiko gauname $b = 2{,}2$, $a = -0{,}13$.
Taigi funkcinę priklausomybę tarp dydžių Y ir X išreiškia lygtis:

$$y = -0{,}13x^2 + 2{,}2x + 7$$

Dar tiksliau, optimalias parametro vertes gauname funkcijos $Y = b + ax$ koeficientus vertindami mažiausių kvadratų metodu pagal (5.29) ir (5.30) lygtis. Tada galima įvertinti ir liekamąją atrankos dispersiją (5.33) ir apskaičiuoti statistines paklaidas $\Delta\tilde{a}$ ir $\Delta\tilde{b}$, paėmus Stjūdento koeficientus $t_\alpha(N-2)$ prie fiksuotos α vertės, pvz. $\alpha = 0{,}95$. Be to taikydami χ^2 (Pirsono) skirstinį galime įvertinti parinktos funkcijos atitikimą duomenų pasiskirstymui (žr. 40 psl.).

Dažnai pasitaiko atvejų, kai priklausomybė tarp dviejų matuotų dydžių X ir Y teoriškai nežinoma. Be to ir grafiškai pavaizdavus matuojant gautas x_i ir joms atitinkančias y_i vertes (žr. pav.) aiškios priklausomybės, kad pvz. didėjant x_i vertėms didėja arba mažėja y_i vertės, nėra. Tada pirmiausia įvertiname x_i ir y_i duomenų dispersijas $\sigma^2_{eks}(X)$ ir $\sigma^2_{eks}(Y)$. Kai prie kiekvienos fiksuotos x_i vertės atlikta pastovus skaičius Y matavimų taikoma formulės (6.54 a) ir (6.54 b). Po to įvertinamas koreliacijos koeficientas ir jei jis pakankamas (žr. 70 psl.) ieškoma dažniausiai tiesinės priklausomybės $\tilde{y} = \tilde{a} + \tilde{b}x$ parametrų $\tilde{a}$ ir $\tilde{b}$ verčių pagal (6.51) ir (6.52).

Kontroliniai klausimai

1. Registruotų įvykių skaičius n tolygiai pasiskirstęs laiko intervale $\tau = t_2 - t_1$ ir $n/\tau = const$. Užrašykite šio pasiskirstymo tikimybės tankio funkciją. Raskite vidutinį įvykių skaičių per dieną ir sklaidos dispersiją. Įvertinkite vidutinę kvadratinę paklaidą, kai $\tau = 10$ dienų, o $const = 2$.
2. Registruoti įvykiai X laiko intervale τ pasiskirstę tiesiškai $n = n_0 + bt\,(y = a + bx)$. Užrašyti jų tikimybės tankio funkciją, kad $\tau = 10$ dienų, $n_0 = 5$, ir $b = 2$. Rasti vidutinį per dieną registruotų įvykių skaičių ir vidutinę kvadratinę paklaidą. Apskaičiuoti tikimybę įregistruoti įvykį per dvi – 5-tą ir 6-tą dienas. Koks per tas dienas vidutinis įregistruotų įvykių skaičius.
3. Stebėtas dydis X įgauna teigiamas vertes, kurių pasiskirstymą gerai aprašo funkcija $y = ax^2 + bx + c$ intervale [OA$_1$] (1P pav. b). Rasti tikimybės tankio funkciją, medianą, vidutinę x vertę ir dispersiją, kai taško B koordinatės: 1) B (0, 5) ir 2) B (0, 0), o ekstremumas yra taške C (8, 11). Apskaičiuokite tikimybę atskirai vertei patekti į intervalą $[\hat{x} - \sigma, \hat{x} + \sigma]$ ir $[\hat{x} - 2\sigma, \hat{x} + 2\sigma]$. Palyginkite gautas vertes su Gsuso skirstinio vertėmis.
4. Tirta funkcinė priklausomybė tarp dydžių X ir Y, pvz. temperatūros ir registruotų gaisrų įvykių per fiksuotą laiką. Be to kiekvienai X vertei x_i gauta po tris Y vertes (žr. lentelę):

x_i	10	12	14	16	18	20
y_i	14, 15, 17	19, 19, 21	23, 24, 25	28, 30, 31	33,34, 36	37, 38, 42

Nustatyti koreliacijos koeficientą ir regresijos lygties $y = a + bx$ koeficientų a ir b vertes $\tilde{a}$ ir $\tilde{b}$ mažiausių kvadratų metodu. Taikant χ^2 (Pirsono) skirstinį įvertinkite parinktos regresijos lygties atitikimą eksperimentui.

5. Skysčiui tekant vamzdeliu jo centre tėkmės greitis yra didžiausias, o prie sienelių lygus nuliui. Ši priklausomybė išreiškiama lygtimi:

$$V = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(r^2 - x^2\right).$$

Čia Δp slėgių skirtumas vamzdelio galuose;

l – vamzdelio ilgis;

r – vamzdelio radiusas;

η – skysčio klampumo koeficientas.

Per laiką t prabėgusio skysčio tūris bus

$$V = \int_0^r v \cdot 2\pi x \cdot dx = \frac{\pi r^4 t}{8\eta l}\Delta p .$$

Sudarius slėgių skirtumą $\Delta p = \rho g h = 76\ mmHg$ per laiką $t = 10s$ nepriklausomuose matavimuose ištekėjo $V_1 = 1000{,}1\ dm^3$, $V_2 = 1000{,}3\ dm^3$, $V_3 = 1000{,}5\ dm^3$ skysčio.

Apskaičiuokite skysčio klampumo koeficientą, Stjūdento metodu įvertinkite paklaidą ($r = 0{,}1\ cm;\ g = 9{,}81\ m/s^2\ ;\ \rho = 13{,}6 \cdot 10^3\ kg/m^3\ ;\ \alpha = 0{,}95$).

B priedas

Statistinės lentelės

1 lentelė. **Santykis *c* tarp imties pločio ir vidutinės kvadratinės paklaidos, kai normalinio skirstinio imtis turi *n* duomenų [15, 16]**

n	5	10	20	30	100
c	2,3	3,1	3,7	4,1	5,0

2 lentelė. **Normalinis (Gauso) skirstinys**

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c^{-u^2/2}, \quad p = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_u^{\infty} c^{-u^2/2} du.$$

u	*F (u)*	*p*	*u*	*F (u)*	*p*
0,0	0,39894	1,00000	2,1	0,04398	0,03572
0,1	0,39695	0,92034	2,2	0,03547	0,02780
0,2	0,39104	0,84148	2,3	0,02833	0,02144
0,3	0,38139	0,76418	2,4	0,02239	0,01640
0,4	0,36827	0,68916	2,5	0,01753	0,01242
0,5	0,35207	0,61708	2,6	0,01358	0,00932
0,6	0,33322	0,54850	2,7	0,01042	0,00694
0,7	0,31225	0,48392	2,8	0,00792	0,00512
0,8	0,28969	0,42372	2,9	0,00595	0,00374
0,9	0,26609	0,36812	3,0	0,00443	0,00270
1,0	0,24197	0,31732	3,1	0,00327	0,00194
1,1	0,21785	0,27134	3,2	0,00238	0,00138
1,2	0,19419	0,23014	3,3	0,00172	0,00096
1,3	0,17137	0,19360	3,4	0,00123	0,00068
1,4	0,14973	0,16152	3,5	0,00087	0,00046
1,5	0,12952	0,13362	3,6	0,00061	0,00032
1,6	0,11092	0,10960	3,7	0,00042	0,00022
1,7	0,09405	0,08914	3,8	0,00029	0,00014
1,8	0,07895	0,07186	3,9	0,00020	0,00010
1,9	0,06562	0,05744	4,0	0,00013	0,00006
2,0	0,05399	0,04550			

3 lentelė. **Normalinis skirstinys (*U* vertės, parinkus *p* vertes)**

p	1,00	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60
u	0,00	0,0627	0,1257	0,1891	0,2533	0,3186	0,38553	0,4538	0,5244

p	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15
u	0,5978	0,6745	0,7554	0,8416	0,9346	1,0364	1,1503	1,2816	1,4395

p	0,10	0,05	0,01	0,001	0,0001
u	1,6449	1,9600	2,5758	3,2905	3,8906

4 lentelė. χ^2 **(Pirsono) skirstinys**

χ_p^2 **vertės ir tikimybės** p**, kad būtų** $\chi^2 \geq \chi_p^2$**, kai laisvės laipsnių skaičius –** v

v	*p=0,99*	*0,98*	*0,95*	*0,90*	*,80*	*0,70*
1	2	3	4	5	6	7
1	0,000157	0,000628	0,00393	0,0158	0,00642	0,148
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352
20	8,260	9,237	10,851	12,444	14,578	16,266
21	8,897	9,915	11,571	13,240	15,445	17,182
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101
23	10,196	11,203	13,091	14,848	17,187	19,021
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792
27	12,879	14,125	16,151	18,114	2,703	22,710
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,45	24,577
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508

lentelės tęsinys

v	*p=0,50*	*0,30*	*0,20*	*0,10*	*0,05*	*0,02*	*0,01*
1	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	6,346	8383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209

lentelės tęsinys

11	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	14,3390	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	25,336	29,249	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,119	48,278
29	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

5 lentelė. **Stjūdento, arba t, skirstinys**
Vertės t_p ir tikimybės, kad t nutols nuo vidurkio, lygaus nuliui, į bet kurią pusę daugiau kaip t_p, kai laisvės laipsnių skaičius – v

v	*p=0,9*	*0,8*	*0,7*	*0,6*	*0,5*	*0,4*
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896
8	0,130	0,262	0,399	0,549	0,706	0,889
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873
13	0,128	0,259	0,394	0,38	0,694	0,870
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,856
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859

22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854
∞	0,12566	0,25335	0,38532	0,52440	0,67449	0,84162

lentelės tęsinys

v	*0,3*	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3250
10	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,008	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20						
21	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,707
25	1,58	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634	2,57582

6 lentelė. **Binominių skirstinių, kai np=3, palyginimas su Puasono skirstiniu, kai λ=3**

k	Binominis pasiskirstymas						Puasono pasiskirstymas
0	0,0156	0,0352	0,0424	0,0461	0,0483	0,0490	0,0498
1	0,0937	0,1319	,01413	0,1455	0,1478	0,1486	0,1494
2	0,2344	0,2309	0,2276	0,2259	0,2248	0,2244	0,2240
3	0,3125	0,2501	0,2361	0,2298	0,2263	0,2252	0,2240
4	0,2344	0,1876	0,1771	0,1724	0,1697	0,1689	0,1680
5	0,0937	0,1032	0,1023	0,1016	0,1011	0,1010	0,1008
6	0,0156	0,0430	0,0474	0,0490	0,0499	0,0501	0,0504
7	0,0000	0,0138	0,0180	0,0199	0,0209	0,0213	0,0216
8	0,0000	0,0035	,0058	0,0069	0,0076	0,0079	0,0081
9	0,0000	0,0007	0,0016	0,0021	0,0025	0,0026	0,0027
10	0,0000	0,0001	0,0004	0,0006	0,0007	0,0008	0,0008
11	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002
12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

7 lentelė. **Binominis skirstinys**

Lentelėje pateiktos tikimybės $\sum_{k=r}^{n} C_k^r p^k (1-p)^{n-k}$ sulaukti „palankių" atvejų daugiau arba jų skaičiaus, lygaus *r*, kai nepriklausomų bandymų – *n*, o „palankaus" atvejo tikimybė vieno bandymo metu – *p*.

p	*n=2, r=2*	*n=2, r=1*	*n=3, r=3*	*n=3, r=2*	*n=3, r=1*	*n=4, r=4*	*p*
0,01	0,0001000	0,0199000	0,0000010	0,0002980	0,029010	0,0000000	0,01
0,02	0,0004000	0,0396000	0,0000080	0,0011840	0,0588080	0,0000002	0,02
0,03	0,0009000	0,0591000	0,0000270	0,0026460	0,0873270	0,0000008	0,03
0,04	0,0016000	0,0784000	0,0000640	0,0046720	0,1152640	0,0000026	0,04
0,05	0,0025000	0,0975000	0,0001250	0,0072500	0,1426250	0,0000062	0,05
0,06	0,0036000	0,1164000	0,0002160	0,0103680	0,1694160	0,0000130	0,06
0,07	0,0049000	0,1351000	0,0003430	0,0140140	0,1956430	0,0000240	0,07
0,08	0,0064000	0,1536000	0,0005120	0,0181760	0,2213120	0,0000410	0,08
0,09	0,0081000	0,1719000	0,0007290	0,0228420	0,2464290	0,0000656	0,09
0,10	0,0100000	0,1900000	0,0010000	0,0280000	0,2710000	0,0001000	0,10
0,11	0,0121000	0,2079000	0,0013310	0,0336380	0,2950310	0,0001464	0,11
0,12	0,0144000	0,2256000	0,0017280	0,0397440	0,3185280	0,0002074	0,12
0,13	0,0169000	0,2431000	0,0021970	0,0463060	0,3414970	0,0002856	0,13
0,14	0,0196000	0,2604000	0,0027440	0,0533120	0,3639440	0,0003842	0,14
0,15	0,0225000	0,2775000	0,0033750	0,0607500	0,3858750	0,0005062	0,15

p	*n=2, r=2*	*n=2, r=1*	*n=3, r=3*	*n=3, r=2*	*n=3, r=1*	*n=4, r=4*	*p*
0,41	0,1681000	0,6519000	0,0689210	0,3664580	0,7946210	0,0282576	0,41
0,42	0,1764000	0,6636000	0,0740880	0,3810240	0,8048880	0,0311170	0,42
0,43	0,1849000	0,6751000	0,0795070	0,3956860	0,8148070	0,0341880	0,43
0,44	0,1936000	0,6864000	0,0851840	0,4104320	0,8243840	0,0374810	0,44
0,45	0,2025000	0,6975000	0,0911250	0,4252500	0,8336250	0,0410062	0,45
0,46	0,2116000	0,7084000	0,0973360	0,4401280	0,8425360	0,0447746	0,46
0,47	0,2090000	0,7191000	0,1038230	0,4550540	0,8511230	0,0487968	0,47

0,48	0,2304000	0,7296000	0,1105920	0,4700160	0,8593920	0,0530842	0,48
0,49	0,2401000	0,7399000	0,1176490	0,4850020	0,8673490	0,0576480	0,49
0,50	0,2500000	0,7500000	0,1250000	0,5000000	0,8750000	0,0625000	0,50

p	*n=4, r=3*	*n=4, r=2*	*n=4, r=1*	*n=5, r=5*	*n=5, r=4*	*n=5, r=3*	*p*
0,01	0,0000040	0,0005920	0,0394040	0,0000000	0,0000000	0,0000099	0,01
0,02	0,0000315	0,0023365	0,0776318	0,0000000	0,0000008	0,0000776	0,02
0,03	0,0001056	0,0051864	0,1147072	0,0000000	0,0000040	0,0002580	0,03
0,04	0,0002483	0,0090957	0,1506534	0,0000001	0,0000124	0,0006022	0,04
0,05	0,0004812	0,0140188	0,1854938	0,0000008	0,0000300	0,0011581	0,05
0,06	0,0008215	0,0199109	0,2192510	0,0000017	0,0000617	0,0019703	0,06
0,07	0,0013000	0,0267280	0,2519480	0,0000033	0,0001133	0,0030799	0,07
0,08	0,0019251	0,0344269	0,2836070	0,0000059	0,0001917	0,0045253	0,08
0,09	0,0027192	0,0429648	0,3142504	0,0000100	0,0003044	0,0063413	0,09
0,10	0,0037000	0,0523000	0,3439000	0,0000161	0,0004600	0,0085600	0,10
0,11	0,0048848	0,0623912	0,3725776	0,0000249	0,0006676	0,0112105–	0,11
0,12	0,0062899	0,0731981	0,4003046	0,0000371	0,0009373	0,0143189	0,12
0,13	0,0079312	0,0846808	0,4271024	0,0000538	0,0012795	0,0179086	0,13
0,14	0,0098235	0,0968005–	004529918	0,0000759	0,0017057	0,0220003	0,14
0,15	0,0119812	0,1095188	0,4779938	0,0001049	0,0022275	0,0266119	0,15

p	*n=4, r=3*	*n=4, r=2*	*n=4, r=1*	*n=5, r=5*	*n=5, r=4*	*n=5, r=3*	*p*
0,33	0,1081704	0,4014816	0,7984888	0,0039135	0,0436419	0,2049631	0,33
0,34	0,1171259	0,4192581	0,8102526	0,0045435	0,0486426	0,2198509	0,34
0,35	02,1264812	0,4370188	0,8214938	0,0052522	0,0540225	0,2351694	0,35
0,36	0,1362355	0,4547405–	0,8322278	0,0060466	0,0597943	0,2508973	0,36
0,37	0,1463872	0,4724008	0,8424704	0,0069344	0,0659705–	0,2670122	0,37
0,38	0,1569339	0,4899781	0,8522366	0,0079235	0,0725627	0,2834907	0,38
0,39	0,1678728	0,5074512	0,8615416	0,0090224	0,0795824	0,3003084	0,39
0,40	0,1792000	0,5248000	0,8704000	0,0102400	0,0870400	0,3174400	0,40
0,41	0,1909112	0,5420048	0,8788264	0,0115856	0,0949456	0,3348596	0,41
0,42	0,2030011	0,5590469	0,8868350	0,0130691	0,1033083	0,3525403	0,42
0,43	0,2154640	0,5759080	0,8944400	0,0147008	0,1121367	0,3704549	0,43
0,44	0,2282931	0,5925709	0,9016550	0,0164916	0,1214383	0,3885753	0,44
0,45	0,2414812	0,6090188	0,9084937	0,0184528	0,1312200	0,4068731	0,45
0,46	0,2550203	0,6252357	0,9149694	0,0205963	0,1414876	0,4253194	0,46
0,47	0,2689016	0,6412064	0,9210952	0,0229345	0,1522460	0,4438849	0,47
0,48	0,2831155	0,6569165–	0,9268838	0,0254804	0,1634992	0,4625400	0,48
0,49	0,2976520	0,6723520	0,9323480	0,0282475	0,1752500–	0,4812550–	0,49
0,50	0,3125000	0,6875000	0,9375000	0,0312500	0,1875000	0,5000000	0,50

p	*n=5, r=2*	*n=5, r=1*	*n=6, r=6*	*n=6; r=5*	*n=6, r=4*	*n=6, r=3*	*p*
0,01	0,0009801	0,0490100	0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000196	0,01
0,02	0,0038424	0,0960792	0,0000000	0,0000000	0,0000023	0,0001529	0,02
0,03	0,0084721	0,1412660	0,0000000	0,0000001	0,0000116	0,0005044	0,03
0,04	0,0147580	0,1846273	0,0000000	0,0000006	0,0000360	0,0011684	0,04
0,05	0,0225925	0,2262191	0,0000000	0,0000018	0,0000864	0,0022298	0,05
0,06	0,0318713	0,2660960	0,0000000	0,0000044	0,0001762	0,0037643	0,06
0,07	0,0424934	0,3043116	0,0000001	0,0000095-	0,0003210	0,0058389	0,07

0,08	0,0543616	0,3409185-	0,0000003	0,0000184	0,0005384	0,00851210	0,08
0,09	0,0673805	0,3759679	0,0000005	0,0000328	0,0008477	0,0118348	0,09
0,10	0,0814600	0,4095100	0,0000010	0,0000550	0,0012700	0,0158500	0,10
0,11	0,0965117	0,4415941	0,0000018	0,0000878	0,0018273	0,0205936	0,11
0,12	0,1124509	0,4722681	0,0000030	0,0001344	0,00025431	0,0260947	0,12
0,13	0,1291956	0,5015791	0,0000048	0,0001986	0,0034413	0,0323759	0,13
0,14	0,1466673	0,5295730	0,0000075	0,0002850	0,0045469	0,0394537	0,14
0,15	0,1647900	0,5562947	0,0000114	0,0003987	0,0058852	0,0473386	0,15

p	*n=6, r=2*	*n=6, r=1*	*n=7, r=7*	*n=7; r=6*	*n=7, r=5*	*n=7, r=4*	*p*
0,01	0,0014604	0,0585199	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000003	0,01
0,02	0,0056871		0,0000000	0,0000000	0,0000001	0,0000053	0,02
0,03	0,0124559		0,0000000	0,0000000	0,0000005-	0,0000264	0,03
0,04	0,0215528		0,0000000	0,0000000	0,0000020	0,0000813	0,04
0,05	0,0327738		0,0000000	0,0000001	0,0000060	0,0001936	0,05
0,06	0,0459248		0,0000000	0,0000003	0,0000147	0,0003915-	0,06
0,07	0,0608207		0,0000000	0,0000008	0,0000313	0,0007072	0,07
0,08	0,0772859		0,0000000	0,0000017	0,0000600	0,0011763	0,08
0,09	0,0951534		0,0000000	0,0000034	0,0001061	0,0018366	0,09
0,10	0,1142650		0,0000001	0,0000064	0,0001765	0,0027280	0,10
0,11	0,1344708		0,0000002	0,0000112	0,0002791	0,0038916	0,11
0,12	0,1556289		0,0000004	0,0000188	0,0004234	0,0053693	0,12
0,13	0,1776055-		0,0000006	0,0000300	0,0006202	0,0072028	0,13
0,14	0,2002741		0,0000011	0,0000464	0,0008817	0,0094339	0,14
0,15	0,2235157		0,0000017	0,0000695	0,0012216	0,0121032	0,15
0,16	0,2472185		0,0000027	0,0001013	0,0016551	0,0152503	0,16
0,17	0,2712775-		0,0000041	0,0001443	0,0021984	0,0189131	0,17
0,18	0,2955943		0,0000061	0,0002014	0,0028695-	0,0231276	0,18

Literatūra

1. Гранавский В. А., Сирая Т. Н. Методы обработки экспери-ментальных данных при измерениях. Ленинград: Энергоавтомиздат 1990. 287 с.
2. Brandt Siegmund. Statistical and Computational Methods in Data Analysis, INC.-New York, 1970;
3. Брандт З. Статистические методы анализа наблюдений. Москва: Мир, 1975. 310 с.
4. Statistics Lectures on Elementary Statistics and Probability by Derek J. Hudson, Geneva, 1964;
5. Худсон Д. Статистика для физиков. Москва: Мир, 1967, 1970. 296 с.
6. Reif Frederick. Statistical Physics, Berkeley Physics Course, McGraw-Hill Book Co., 1968;
7. Рейф Ф. Статистическая физика. Москва: Наука, 1972, 1977, 1986. 335 с.
8. Kruopis J. Matematinė statistika. Vilnius: Mokslas, 1977. 362 p.
9. Kubilius J. Tikimybių teorija ir matematinė statistika. Vilnius: Mokslas, 1980, 1993. 407 p.
10. Liutikas V., Šeštokas V., Zujus J. Mokslinių tyrimų pagrindai. Vilnius: Mintis, 1987. 223 p.
11. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работ-ников и инженеров. Москва: Наука, 1977. 831 с.
12. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. Москва: Наука, 1965. 608 с.
13. Физический практикум под редакцией Г. С. Кембровского. Минск: Из-во “Университетское”, 1986. 350 с.
14. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. Москва: Мир, 1968. 462 с.
15. Рабинович С. Г. Погрешности измерений. Ленинград: Энергия, 1978. 262 с.
16. Vekteris V., Kasparaitis A., Kaušinis S., Kanapėnas R. Matavimų teorija ir praktika. Vilnius: Žiburio leid., 2000. 380 p.
17. Seilius A. Elektroninių matavimų metrologijos pagrindai. Vilnius: Technika, 2001. 269 p.