Kinematika

Pagrindinės taško slenkamojo ir sukamojo judėjimų formulės ir jų tarpusavio sąryšiai parodyti 1 lentelėje.

1 lentelė. Materialaus taško slenkamojo ir sukamojo judesių formulių palyginimas

<table>
<tr><td colspan="2">Slenkamasis judesys (tiesiaeigis)</td><td colspan="2">Sukamasis judesys (r – taško atstumas iki ašies)</td></tr>
<tr><td>Poslinkis
Greitis
Pagreitis</td><td>$\boldsymbol{s} = \mathbf{v}_0 t + \frac{\boldsymbol{a}t^2}{2}$
$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{a}t$
$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{s}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$</td><td>Kampinis poslinkis
Kampinis greitis
Kampinis pagreitis
Kai $\varepsilon = 0$, t.y. taškas sukasi pastoviu kampiniu greičiu
čia T – taško apsisukimo periodas, ν - taško sukimosi dažnis.</td><td>$\varphi = \boldsymbol{\omega}_0 t + \frac{\boldsymbol{\varepsilon}t^2}{2}$
$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}t$
$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$
$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$,</td></tr>
<tr><td colspan="4">Ryšys tarp momentinių slenkamojo judesio ir sukamojo judesio dydžių</td></tr>
<tr><td colspan="4">$s = \varphi r$
$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\, \boldsymbol{r}]$, jei $\omega \perp r$, tai $\mathrm{v} = \omega r$
Normalinis pagreitis $a_{\mathrm{n}} = \omega^2 r = \frac{\mathrm{v}^2}{r}$
Tangentinis pagreitis $a_{\mathrm{t}} = \varepsilon r$
Visas pagreitis sukamojo judesio atveju $a = \sqrt{(a_{\mathrm{n}})^2 + (a_{\mathrm{t}})^2}$</td></tr>
</table>

1. Duotas vektorius **A**, kurio pradžios koordinatės yra (0;3), o galo (2;4) ir vektorius **B**, kurio pradžios koordinatės yra (2;1) ir (1;- 4) atitinkamai. Apskaičiuoti, užrašyti ir nubrėžti:

a) vektorių **A** ir **B** projekcijas į x ir y ašis, užrašyti ir nubrėžti vektorius;
b) vektorių 2 ·**A**;
c) vektorių sumą **A + B**;
d) skirtumą **A – B**;
e) skaliarinę sandaugą (**A** · **B**);
f) vektorines sandaugas [**A** x **A**] ir [**A** x **B**].

Sprendimas

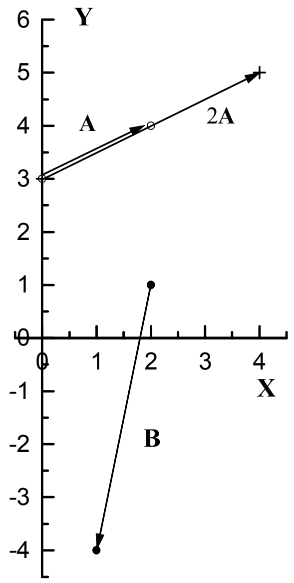
a) Vektoriaus projekcijos į koordinačių ašį dydis yra vektoriaus galo ir pradžios atitinkamų koordinačių skirtumas (1pav.).

$A_x = x_{A2} - x_{A1} = 2 - 0 = 2;$
$A_y = y_{A2} - y_{A1} = 4 - 3 = 1;$

$\mathbf{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j};$

$B_x = x_{B2} - x_{B1} = 1 - 2 = -1;$
$B_y = y_{B2} - y_{B1} = -4 - 1 = -5;$

$\mathbf{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}.$



1 pav.

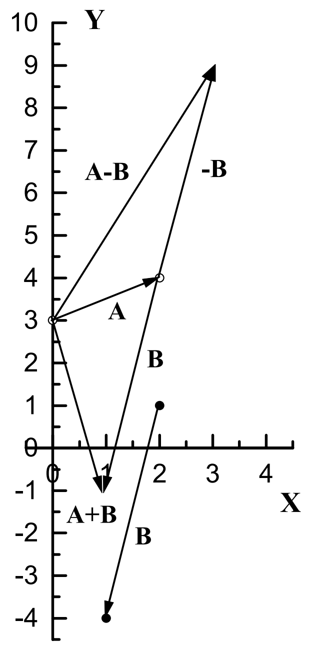
b) Dauginant vektorių iš skaliaro, padauginamos to vektoriaus projekcijos (1 pav.).

$2\cdot\mathbf{A} = 2\cdot A_x\boldsymbol{i} + 2\cdot A_y\boldsymbol{j} = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}.$

c) Sudedant du vektorius, sudedamos jų atitinkamos projekcijos

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x+B_y)\boldsymbol{i} + (A_y+B_y)\boldsymbol{j} =$
$= [2 + (-1)]\boldsymbol{i} + [1+(-5)]\boldsymbol{j} =$
$= \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}.$

Grafiškai atstojamasis vektorius gaunamas vektorių **B** perstumiant taip, kad jo pradžia sutaptų su vektoriaus **A** galu ir brėžiant naują vektorių iš vektoriaus **A** pradžios į vektoriaus **B** galą (2 pav.).



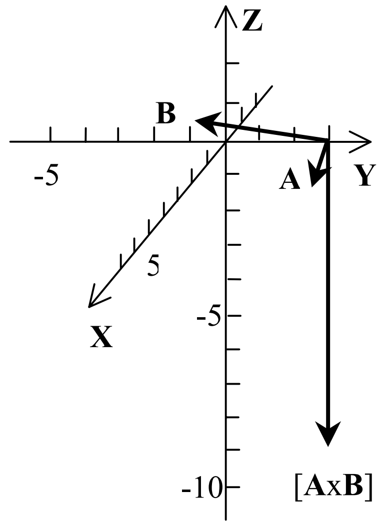
2 pav.

d) Vektorių skirtumas **A–B** apskaičiuojamas taip pat kaip ir juos sumuojant, tačiau brėžiant vektoriaus **B** kryptis keičiama priešinga, naujasis vektorius yra suma **A + (-B)** (2 pav.):

$\mathbf{A - B} = (A_x - B_y)\boldsymbol{i} + (A_y - B_y)\boldsymbol{j} =$

$= [2 - (-1)]\boldsymbol{i} + [1-(-5)]\boldsymbol{j} =$

$= 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}.$



3 pav.

e) Dviejų vektorių skaliarinė sandauga

$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = ((A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j}) \cdot(B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j})) =$

$= A_xB_x(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}) + A_xB_y(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}) + A_yB_x(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}) + A_yB_y(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}) =$

$= A_xB_x + A_yB_y,$

Taigi

$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = 2\cdot(-1) + 1\cdot(-5) = -7.$

f) Dviejų vektorių vektorinė sandauga (3 pav.):

$[\mathbf{A} \times \mathbf{A}] = [(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \times (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})] =$

$= 4[\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}] + 2[\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}] + 2[\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}] + [\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}] =$

$= 4\cdot 0 + 2\boldsymbol{k} + 2\cdot(- \boldsymbol{k}) + 0 = 0.$

$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = [(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \times (- \boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j})] =$

$= - 2[\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}] - 10[\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}] - [\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i}] - 5[\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j}] =$

$= (- 2)\cdot 0 - 10\boldsymbol{k} + (- \boldsymbol{k}) - 5\cdot 0 = - 9\boldsymbol{k}.$

Ats.: $\mathbf{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$; $\mathbf{B} = - \boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}$; $2\cdot\mathbf{A} = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$; $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$; $\mathbf{A} - \mathbf{B} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$; $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = -7$; $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = - 9\boldsymbol{k}$.

2. Taško judėjimo lygtis yra $x = 2t^2 + 3t + 1$ (m). Rasti taško vidutinio ir tikrojo greičių o taip pat vidutinio ir tikrojo pagreičių išraiškas. Apskaičiuoti taško tikruosius greitį v ir pagreitį a laiko momentu t = 2 s ir vidutinius greitį v_{vid} ir pagreitį a_{vid} laiko tarpe tarp trečios ir penktos sekundės nuo judėjimo pradžios. Pavaizduoti grafiškai $v = f(t)$ ir $a = f(t)$ priklausomybes.

Sprendimas

Taško *vidutinis greitis* randamas, kaip *taško viso nueito kelio* Δx *santykis su laiku* Δt*, per kurį jis nuėjo tą kelią,* t.y. aprašant jo judėjimą laiko intervale tarp t ir $t + \Delta t$:

$$v_{vid} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{[2(t+\Delta t)^2 + 3(t+\Delta t) + 1] - [2t^2 + 3t + 1]}{\Delta t} =$$

$$= \frac{2t^2 + 2(\Delta t)^2 + 4t\Delta t + 3t + 3\Delta t + 1 - 2t^2 - 3t - 1}{\Delta t} = \frac{4t\Delta t + 3\Delta t + 2(\Delta t)^2}{\Delta t} =$$

$= 4t + 3 + 2\Delta t$

Taško vidutinis greitis tarp trečios $t = 3$ s ir penktos sekundės $t = t + \Delta t = 3 + 2$:

$v_{vid} = 4 \cdot 3 + 3 + 2 \cdot 2 = 19$ (m/s).

Taško tikrasis greitis (arba greitis) kai $t = 2$ s:

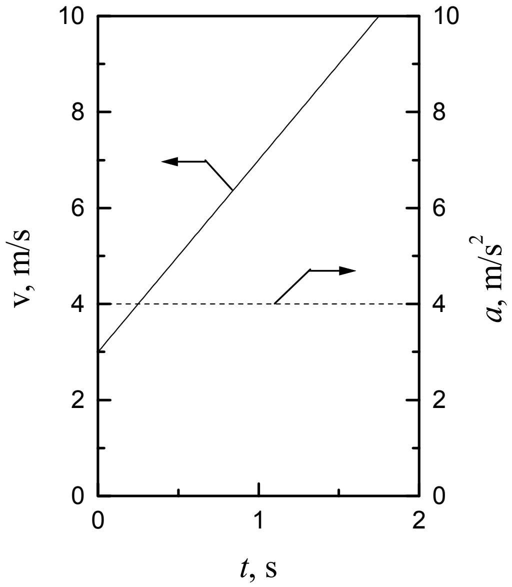
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{vid} = 4t + 3 = 4 \cdot 2 + 3 = 11 \, (\text{m/s}).$$

Taško *vidutinis pagreitis yra greičio pokytis* Δv *per laiko intervalą* Δt:

$$a_{vid} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{[4(t + \Delta t) + 3] - [4t + 3]}{\Delta t} =$$

$$= \frac{4t + 4\Delta t + 3 - 4t - 3}{\Delta t} = 4 \, (\text{m/s}^2).$$



3 pav.

Kadangi šiame uždavinyje vidutinis pagreitis nepriklauso nuo laiko, jis sutampa su tikruoju pagreičiu (arba pagreičiu) ir yra:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{vid} = 4 \, (\text{m/s}^2).$$

Kaip matyti 3 pav., taško judėjimo greitis priklauso nuo laiko tiesiškai, o pagreitis nepriklauso nuo laiko.

Ats.: $v_{vid} = 19$ (m/s); $v = 11$ m/s; $a_{vid} = 4$ m/s^2; $a = 4$ m/s^2.

3. Taško judėjimą aprašo lygtys:
$x = t + 1$,
$y = - t^2 + 4$.
Parašyti taško judėjimo trajektorijos lygtį, nubrėžti jos grafiką. Apskaičiuoti, užrašyti ir pavaizduoti grafiškai taško judėjimo greičio ir pagreičio vektorius, kai $t = 2$ s. Apskaičiuoti tangentinį ir normalinį pagreičius.

Sprendimas

Taško judėjimo trajektorijos lygtis gaunama panaikinus jį iš duotų lygčių, t.y. išreiškiant iš pirmosios lygties laiką ir įstatant į antrąją lygtį:

$t = x - 1$,

$y = - (x - 1)^2 + 4 = - x^2 + 2x - 1 + 4 = - x^2 + 2x + 3$.

Šios lygties grafikas parodytas 4 pav.
Taško greičio projekcijos į X ir Y ašis yra, atitinkamai, lygčių *x(t)* ir *y(t)* išvestinės pagal laiką:

$v_x = (t + 1)' = 1$,

$v_y = (- t^2 + 4)' = - 2t$.

Dabar galima užrašyti greičio vektorių:

$\mathbf{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} - 2t\boldsymbol{j}$,

kuris, kai $t = 2$ s (4 pav.):

$\mathbf{v}(2) = \boldsymbol{i} - 2\cdot 2\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$.

Greičio vektoriaus pradžios koordinatės randamos iš judėjimo lygčių, kai $t = 2$ s:

$x(2) = t + 1 = 2 + 1 = 3$ (m),

$y(2) = -t^2 + 4 = -2^2 + 4 = 0$ (m).

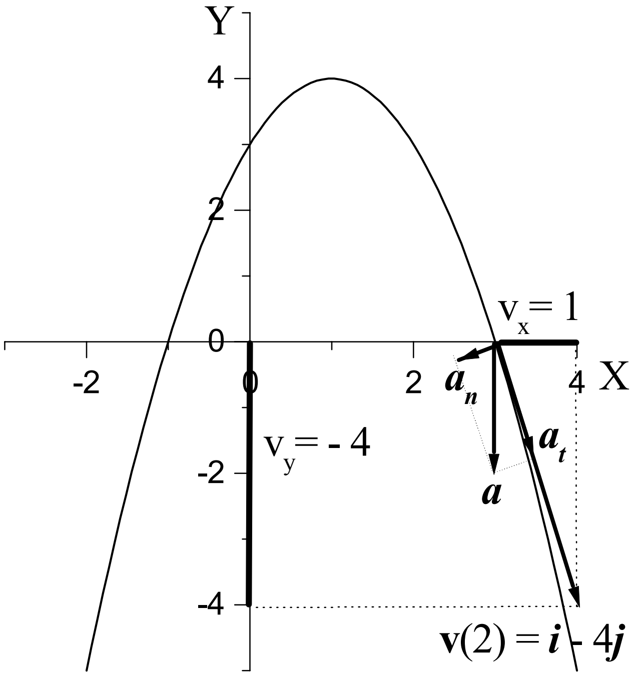
Taško pagreičio vektoriaus projekcijos randamos kaip atitinkamų greičio projekcijų išvestinės:

$a_x = (v_x)' = 0$,

$a_y = (v_y)' = (-2t)' = -2$ (m/s^2).

Pagreičio vektorius:

$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} = -2\boldsymbol{j}$.



4 pav.

Taigi, taškas juda pastoviu $v_x = 1$ m/s greičiu ($a_x = 0$ m/s^2) X ašies kryptimi tuo pat metu tolygiai greitėdamas ($v_y = -2t$, $a_y = -2$ m/s^2) kryptimi priešinga Y ašiai.
Tangentinį ir normalinius pagreičius galima rasti iš proporcingumų (4 pav.):

$$\frac{a_n}{a} = \frac{|v_x|}{v},\ a_n = a\cdot\frac{|v_x|}{v} = \sqrt{0^2 + (-2)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} \cong 0{,}485\ \ (\text{m/s}^2)$$

ir

$$\frac{a_t}{a} = \frac{|v_y|}{v},\ a_t = a\cdot\frac{|v_y|}{v} = 2\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} \cong 1{,}94\ (\text{m/s}^2).$$

Ats.: $y = -x^2 + 2x + 3$; $\mathbf{v}(2) = \boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$; $\boldsymbol{a} = -2\boldsymbol{j}$; $a_n \cong 0{,}485$ m/s^2; $a_t \cong 1{,}94$ m/s^2

4. Iš bokšto pradiniu greičiu $v_0 = 10$ m/s, horizontaliai metamas kamuoliukas. Rasti kamuoliuko greitį, normalinį, tangentinį ir visą pagreičius, o taip pat kamuoliuko trajektorijos kreivumo spindulį po 1 s nuo judėjimo pradžios. Oro pasipriešinimo neįskaityti.

Sprendimas

Parenkame atskaitos sistemą taip, kad Y ašis būtų nukreipta horizontaliai, o X – vertikaliai žemyn. Kadangi oro pasipriešinimas neįskaitomas, tai horizontalia kryptimi kamuoliukas juda pastoviu greičiu $v_0 = v_y = 10$ m/s, o vertikaliai žemyn veikia gravitacijos jėga (jos pagreitis $g = 9{,}8$ m/s^2), todėl jis judės tolygiai greitėjančiai ($v_x = gt$, nes pradinis greitis v_{x0} vertikalia kryptimi lygus nuliui). Taigi, greičio vektorius:

$\mathbf{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_0\boldsymbol{j} = gt\boldsymbol{i} + v_0\boldsymbol{j}$,

o jo modulis

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_0^2} = \sqrt{(gt)^2 + v_0^2} = 14\,(\text{m/s}).$$

Iš trikampių panašumo (jų lygūs kampai pažymėti lankais)

$$\frac{v_0}{v} = \frac{a_n}{g}.$$

Apskaičiuojamas normalinis pagreitis

$$a_n = g\frac{v_0}{v} = 9{,}8\cdot\frac{10}{14} = 7\ (\text{m/s}^2).$$

Žinant a_n galima apskaičiuoti trajektorijos kreivumo spindulį, kai $t = 1$ s

$$R = \frac{v^2}{a_n} = 28\,(\text{m}).$$

Iš trikampių panašumo

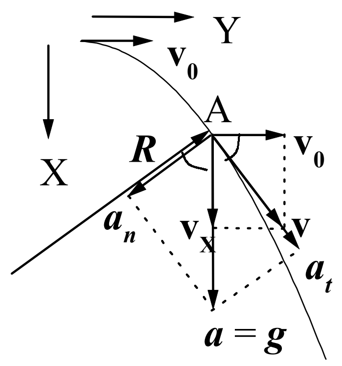
$$\frac{a_t}{g} = \frac{v_x}{v}$$

$$a_t = g\frac{v_x}{v} = 9{,}8\cdot\frac{9{,}8}{14} = 6{,}86\ \ (\text{m/s}^2).$$

Pagreičio vektorius

$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} = 9{,}8\boldsymbol{i}$.

Ats.: $\mathbf{v} = 9{,}8\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j}$,
$|\mathbf{v}| = 14$ m/s;
$a_n = 7$ m/s^2; $a_t = 6{,}86$ m/s^2;
$R = 28$ m;
$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} = 9{,}8\boldsymbol{i}$.

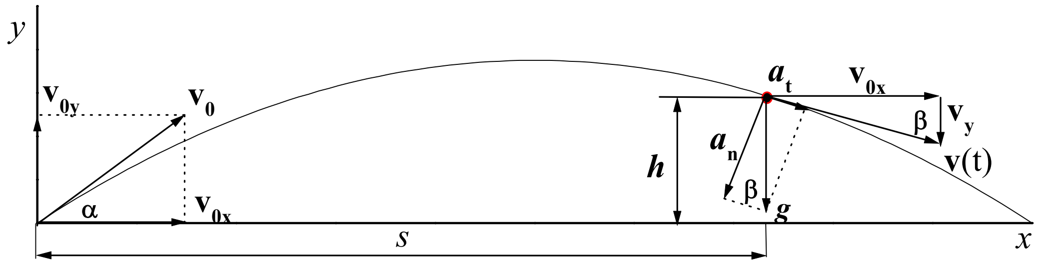


5 pav.

Uždaviniui spręsti brėžinys braižomas tokia tvarka (5 pav.). Brėžiama pusės parabolės kreivė, kuri atitinka horizontaliai mesto kūno trajektoriją. Ant trajektorijos laisvai pasirenkama vieta (taškas A), kur galėtų būti kamuoliukas kuriuo tai laiko momentu ir nubrėžiama trajektorijos liestinė tame taške. Kadangi kamuoliuko judėjimo greitis horizontalia kryptimi nekinta, tai vektorių $\mathbf{v_0}$, lygiagrečiai perstumdami, perkeliame į pasirinktą trajektorijos tašką. Iš vektoriaus $\mathbf{v_0}$ galo iki susikirtimo su liestine brėžiamas statmuo. Jo susikirtimo su liestine taškas atitinka kamuoliuko greičio vektoriaus $\mathbf{v}$ galą. Kamuoliuko judėjimą vertikalia kryptimi (sutapatiname su X ašimi) lemia tik gravitacinė jėga. Taigi jo kritimo kryptis bus statmena $\mathbf{v_0}$. Iš vektoriaus $\mathbf{v_0}$ pradžios vertikaliai žemyn brėžiamas statmuo, kurio susikirtimas su horizontale, išvesta iš $\mathbf{v}$ galo atitinka vertikalaus judėjimo vektoriaus $\mathbf{v_x}$ galą. Brėžiame laisvai pasirinkto ilgio laisvo kritimo pagreičio vektorių $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{a}$, kurio kryptis sutampa su $\mathbf{v_x}$ kryptimi. Iš vektoriaus $\boldsymbol{g}$ galo brėžiamas statmuo į liestinę. Jų susikirtimo taškas atitinka tangentinio pagreičio vektoriaus $\boldsymbol{a_t}$ galą. Iš taško A išvedamas statmuo liestinei (trajektorijos kreivumo spindulys $\boldsymbol{R}$ pasirinktame taške yra kolinearus tam statmeniui), kurio susikirtimas su statmeniu nubrėžtu iš $\boldsymbol{g}$ galo atitinka normalinio pagreičio vektoriaus $\boldsymbol{a_n}$ galą.

5. Kūnas mestas kampu $\alpha = 30^0$ horizonto atžvilgiu, pradiniu greičiu $v_0 = 20$ m/s. Kokį nuotolį s horizontalia kryptimi nulėks kūnas ir kokiame aukštyje h bus kūnas po $t = 1{,}5$ s nuo metimo momento. Rasti kūno greitį, jo normalinį ir tangentinį pagreičius tuo momentu.

Sprendimas



6 pav.

Pasirenkame, kad horizonto linija sutampa su x ašimi, o jam statmena vertikalė – su y ašimis (6 pav.). Tada kūno judėjimo horizontalia kryptimi pradinis greitis bus $v_{0x} = v_0\cos\alpha$ ir pagreitis $a_x = 0$ (oro pasipriešinimo neįskaitome), o vertikalia pradinis greitis $v_{0y} = v_0\sin\alpha$ ir pagreitis $a_y = -g$, nes kūno greitis vertikalia kryptimi kinta dėl žemės traukos.

Surasime, kurioje trajektorijos dalyje (kylančioje ar krentančioje) bus kūnas po $t = 1{,}5$ s. Laikas t_1, per kurį kūnas pakils į didžiausią aukštį randamas iš sąlygos $v_y(t_1) = v_{0y} - gt_1 = 0$. Iš čia $t_1 = v_0\sin\alpha/g = 1{,}02$ s. Taigi, kadangi $t_1 < t$, tai tuo laiko momentu kūnas bus krentančioje trajektorijos dalyje. Greičių ir pagreičių radimui brėžinys braižomas taip, kaip parodyta ir aprašyta 4-to uždavinio 5 pav.

Nuotolis, kurį nulėks kūnas per laiką t bus $s(t) = v_{0x}t = v_0 t\cos\alpha = 25{,}98$ m, o aukštis – $h(t) = v_{0y}t - gt^2/2 = 3{,}75$ m.

Kūno greitis bus $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Kadangi kūno greitis horizontalia kryptimi yra pastovus, tai $v_x = v_{0x} = v_0\cos\alpha$. Taigi $v_y(t) = v_{0y} - gt = v_0\sin\alpha - gt$. Galutinai

$$v(t) = \sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2} = \sqrt{300 + 22{,}09} = 17.95 \text{ (m/s)}.$$

Iš 6 pav. matyti, kad normalinis pagreitis $a_n = g\sin\beta$, o tangentinis – $a_t = g\cos\beta$. Kadangi $\sin\beta = v_x(t)/v(t)$, o $\cos\beta = v_y(t)/v(t)$, tai

$$a_n = \frac{gv_0\cos\alpha}{\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}} = 9{,}46 \text{ (m/s}^2\text{)},$$

$$a_t = \frac{g\left|v_0\sin\alpha - gt\right|}{\sqrt{(v_0\cos\alpha)^2 + (v_0\sin\alpha - gt)^2}} = 2{,}57 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Ats.: $s(1{,}5) = 25{,}98$ m;
$h(1{,}5) = 3{,}75$ m;
$v(1{,}5) = 17.95$ m/s;
$a_n = 9{,}46$ m/s^2;
$a_t = 2{,}57$ m/s^2.

6. Dalelė juda greičiu $\mathbf{v} = At(2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k})$, čia $A = 1{,}0$ m/s^2. Rasti dalelės poslinkio vektorių $\boldsymbol{r}$ ir dalelės poslinkio dydį Δs per trečiąją judėjimo sekundę.

Sprendimas

Taško judėjimo greitis

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

taigi

$d\boldsymbol{r} = \mathbf{v}dt$,

ir

$$\boldsymbol{r}(t) = \int \mathbf{v}\, dt = \int A \cdot t \cdot (2 \cdot \boldsymbol{i} + 3 \cdot \boldsymbol{j} + 4 \cdot \boldsymbol{k}) \cdot dt = A \cdot \frac{t^2}{2} \cdot (2 \cdot \boldsymbol{i} + 3 \cdot \boldsymbol{j} + 4 \cdot \boldsymbol{k}) + C.$$

Kadangi uždavinio sąlygoje nieko nepasakyta apie taško pradinę padėtį, tai galima laikyti, kad laiko momentu $t = 0$ $\boldsymbol{r}(0) = 0$. Tada konstanta $C = 0$. Taigi taško vektorius

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{t^2}{2}(2 \cdot \boldsymbol{i} + 3 \cdot \boldsymbol{j} + 4 \cdot \boldsymbol{k}).$$

Taško poslinkio vektorius per trečiąją sekundę

$$\Delta\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}(3) - \boldsymbol{r}(2) = (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k})\left(\frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) = \frac{5}{2}\ (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}).$$

Taško poslinkio dydis

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta s_x)^2 + (\Delta s_y)^2 + (\Delta s_z)^2} = \sqrt{\frac{(5 \cdot 2)^2}{2^2} + \frac{(5 \cdot 3)^2}{2^2} + \frac{(5 \cdot 4)^2}{2^2}} = 13{,}46\,(\mathrm{m}).$$

Judėjimas reliatyvistiniais greičiais

7. Kokiu greičiu turi judėti kūnas, kad judėjimo kryptimi jo ilgis sutrumpėtų dešimtadaliu ?

Sprendimas

Kūno, judančio greičiu artimu šviesos greičiui, ilgis

$$l' = l_0\sqrt{1 - \left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2}\ .$$

Tada

$$\left(\frac{l'}{l_0}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\mathrm{v}}{c}\right)^2.$$

Kadangi $l' = 0{,}9l_0$, tai išreiškus greitį gauname

$$\mathrm{v} = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{l'}{l_0}\right)^2} = c \cdot \sqrt{1 - (0{,}9)^2} \cong 0{,}44c\,.$$

Ats.: $\mathrm{v} \cong 0{,}44c$.

8. Sistemų S ir S' tarpusavio judėjimo greitis nežinomas. Strypo judančio sistemoje S' išilgai x' ašies greičiu $\mathrm{v'_x} = 0{,}1c$ ($c \cong 3 \cdot 10^8$ m/s) ilgis šioje sistemoje $l' = 1{,}1$ m. Sistemoje S to paties strypo ilgis yra $l = 1{,}0$ m. Rasti strypo greitį $\mathrm{v_x}$ sistemoje S ir sistemų tarpusavio judėjimo greitį $\mathrm{v_0}$.

Sprendimas

Kadangi uždavinio sąlygoje nepasakyta, kad kuri nors iš sistemų nejuda, tai bendriausiu atveju turime laikyti, kad jos abi juda ta pačia kryptimi, bet skirtingais greičiais. Tada sistemose S ir S' to paties strypo ilgiai bus

$$l' = l_0 \sqrt{1 - (\mathrm{v'_x}/c)^2}\,,$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - (\mathrm{v_x}/c)^2}$$

atitinkamai.
Iš l'/l santykio gauname

$$\mathrm{v_x} = \frac{\sqrt{c^2 \left(l'^2 - l^2\right) + l^2 \mathrm{v'^2_x}}}{l'} \cong 0{,}43c.$$

Iš reliatyvistinių greičių sudėties formulės

$$\mathrm{v_x} = \frac{\mathrm{v'_x} + \mathrm{v_0}}{1 + \dfrac{\mathrm{v'_x}\,\mathrm{v_0}}{c^2}}$$

išreiškus sistemų tarpusavio judėjimo greitį gauname

$$\mathrm{v_0} = \frac{\mathrm{v_x} - \mathrm{v'_x}}{c^2 - \mathrm{v_x v'_x}} \cdot c^2 = \frac{0{,}43 \cdot c - 0{,}1 \cdot c}{c^2 - 0{,}43 \cdot 0{,}1 \cdot c^2} \cdot c^2 \cong 0{,}34c.$$

Ats.: $\mathrm{v_x} \cong 0{,}43c$;
$\mathrm{v_0} \cong 0{,}34c$.

9. Atskaitos sistema S' juda atžvilgiu sistemos S greičiu $\mathrm{v_0} = 0{,}5c$ išilgai x ašies. Dalelės greitis sistemoje S' lygus: $\mathbf{v}' = 0{,}2c(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$. Rasti: 1) greičio $\mathbf{v}'$ modulį v' ir kampą α', kurį sudaro $\mathbf{v}'$ su x' ašimi; 2) greitį $\mathbf{v}$ atskaitos sistemoje S, jo modulį v ir kampą α, kurį $\mathbf{v}$ sudaro su x ašimi.

Sprendimas

Dalelės greičio projekcijų vertės sistemoje S' yra: $\mathrm{v'_x} = \mathrm{v'_y} = \mathrm{v'_z} = 0{,}2c$. Tada greičio vektoriaus $\mathbf{v}'$ modulis

$$\mathrm{v}' = \sqrt{\mathrm{v}'^2_x + \mathrm{v}'^2_y + \mathrm{v}'^2_z} = 0{,}346c.$$

Kampo α' tarp vektoriaus **v**' ir x' ašies kosinusas

$$\cos\alpha' = \frac{\mathrm{v}'_x}{\mathrm{v}'} = \frac{0{,}2c}{0{,}346c} = 0{,}578,$$

$\alpha' = 54^0$.

Iš reliatyvistinių greičių sudėties formulių dalelės greičio projekcijos sistemoje S:

$$\mathrm{v}_x = \frac{\mathrm{v}'_x + \mathrm{v}_0}{1 + \dfrac{\mathrm{v}'_x \mathrm{v}_0}{c^2}} = 0{,}636c,$$

$$\mathrm{v}_y = \frac{\mathrm{v}'_y \sqrt{1 - (\mathrm{v}_0 / c)^2}}{1 + \dfrac{\mathrm{v}'_x \mathrm{v}_0}{c^2}} = 0{,}137c,$$

$$\mathrm{v}_z = \frac{\mathrm{v}'_z \sqrt{1 - (\mathrm{v}_0 / c)^2}}{1 + \dfrac{\mathrm{v}'_x \mathrm{v}_0}{c^2}} = 0{,}137c.$$

Tada dalelės judėjimo sistemoje S greičio vektorius

$\mathbf{v} = 0{,}636c\boldsymbol{i} + 0{,}137c(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$,

o jo modulis

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2} = 0{,}674c.$$

Kampo α tarp vektoriaus **v** ir x ašies kosinusas

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{v}_x}{\mathrm{v}} = \frac{0{,}636c}{0{,}674c} = 0{,}943,$$

$\alpha = 19^0$.

Ats.: v' = $0{,}346c$; $\alpha' = 54^0$;
$\mathbf{v} = 0{,}636c\boldsymbol{i} + 0{,}137c(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$,
v = $0{,}674c$; $\alpha = 19^0$.