Dinamika

2 lentelė. Materialaus taško slenkamojo ir sukamojo judėjimo dinamikos formulių palyginimas

Slenkamasis judesys (tiesiaeigis)		Sukamasis judesys (r – taško atstumas iki ašies)	
Masė	m	Inercijos momentas	$I = mr^2$
Judesio kiekis	$\boldsymbol{p} = m\mathbf{v}$.	Judesio kiekio momentas	$\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}] = I\boldsymbol{\omega}$.
Jėga	$\boldsymbol{F} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$,	Jėgos momentas	$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}] = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$,
kai m = const($\mathbf{v}$)	$\boldsymbol{F} = m\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}$.	kai I = const(t)	$\boldsymbol{M} = I\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = I\boldsymbol{\varepsilon}$.
Tampriosios deformacijos jėga	$F = -k\,x$,		
čia x – tampriosios deformacijos dydis, k – tamprumo koeficientas.			
Jėgos impulsas	$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p_0} = \int_0^t \boldsymbol{F}(t)\mathrm{d}t$.	Jėgos impulso momentas	$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L_0} = \int_0^t \boldsymbol{M}(t)\mathrm{d}t$.
Darbas	$A = \int (\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s})$,	Darbas	$A = \int M\cdot\mathrm{d}\varphi$,
kai jėga pastovi	$A = (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s})$.	kai jėgos momentas pastovus	$A = M\cdot\varphi$.
Galia	$G = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$,	Galia	$G = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$,
kai $\boldsymbol{F}$ = const(t),	$G = (\boldsymbol{F}\cdot\mathbf{v})$.	kai $\boldsymbol{M}$ = const(t),	$G = (\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega})$.
Kinetinė energija	$K = \dfrac{m\mathrm{v}^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$	Kinetinė energija	$K = \dfrac{I\omega^2}{2} = \dfrac{L^2}{2I}$

Gravitacinės traukos jėga

$$F = \gamma\frac{m_1\cdot m_2}{R^2},$$

čia $\gamma = 6{,}67\cdot10^{-11}$ m^3/kg·s^2 - gravitacinė konstanta, m_1, m_2 - materialių kūnų masės, kurių matmenys daug mažesni už nuotolį tarp jų R.

Gravitacinių traukos jėgų potencinė energija

$$U = -\gamma\frac{m_1\cdot m_2}{R}.$$

Trečiasis Keplerio dėsnis

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{b_1^3}{b_2^3},$$

čia T_1, T_2 – planetų apsisukimo apie Saulę periodai, b_1, b_2 – planetų orbitų didžiųjų pusašių ilgiai. Jeigu planetos juda apskritomis orbitomis, tai $b_1 = R_1$, $b_2 = R_2$, čia R_1, R_2 – orbitų spinduliai.

20. Automobilis, kurio svoris 10^4 N, stabdomas sustojo po 5 s, per kurias jis, tolygiai lėtėdamas, nuvažiavo 25 m. Rasti automobilio pradinį greitį ir stabdymo jėgą.

Sprendimas

Automobilis sustoja veikiamas trinties ir oro pasipriešinimo jėgos F_{tr}, todėl

$F_{tr} = ma,$

čia m - automobilio masė, a - stabdymo pagreitis. Iš formulės:

$$s = \frac{at^2}{2},$$

$$a = \frac{2s}{t^2}.$$

Tada automobilio stabdymo jėga:

$$F_{tr} = \frac{P}{g} \cdot \frac{2s}{t^2} = \frac{10^4}{9{,}8} \cdot \frac{2 \cdot 25}{5^2} \cong 2041(\mathrm{N}).$$

Automobilio judėjimo greitis prieš pradedant jį stabdyti buvo v_0, o tolygiai lėtėdamas pagreičiu a, jis sustojo per laiką t. Taigi

$$v = v_0 - at = 0$$

ir

$$v_0 = at = \frac{2s}{t^2} \cdot t = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 25}{5} = 10 \ (\mathrm{m/s}).$$

Ats.: $F_{tr} \cong 2041$ N; $v_0 = 10$ m/s.

21. Kokia jėga reikia stumti stovintį ant bėgių vagoną, kad jis pradėtų judėti tolygiai greitėdamas ir per 30 s nuriedėtų 11 m. Vagono masė – 16 t, o pasipriešinimo jo judėjimui jėga lygi 0,05 vagono svorio.

Sprendimas

Vagonas, kurio masė m, stumiamas jėga F ir veikiamas pasipriešinimo trinties jėgos $F_{tr} = 0{,}05mg$, judės tolygiai greitėdamas pagreičiu a, jeigu

$$ma = F - F_{tr}.$$

Iš čia jėga, kuria reikia stumti vagoną:

$$F = ma + F_{tr}.$$

Kadangi laikas t ir kelias s, kurį vagonas judėjo tolygiai greitėdamas, yra žinomi, tai pagreitis, kuriuo judėjo vagonas:

$$a = \frac{2s}{t^2},$$

Sustačius a ir F_{tr} išraiškas, gauname jėgą, kuria reikia stumti vagoną:

$$F = m \cdot \frac{2s}{t^2} + 0{,}05mg = m\left(\frac{2s}{t^2} + 0{,}05 \cdot g\right) = 1{,}6 \cdot 10^4 \cdot \left(\frac{2 \cdot 11}{30^2} + 0{,}05 \cdot 9{,}8\right) \cong 7{,}84 \cdot 10^3 \,(\mathrm{N}).$$

Ats,: $F \cong 7{,}84 \cdot 10^3$ N.

22. 0,5 kg kūnas juda tiesiai, o jo nueitas kelias priklauso nuo laiko pagal dėsnį $s(t) = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, čia $B = 3$ m/s, $C = 5$ m/s^2, $D = 1$ m/s^3. Rasti kūno judesio kiekį ir jėgą veikiančią kūną pirmos sekundės pabaigoje.

Sprendimas

Kūno judesio kiekis p:

$p = m\mathrm{v}$,

Kūno judėjimo greitis v:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -B + 2Ct - 3Dt^2,$$

taigi pirmos sekundės pabaigoje kūno judesio kiekis bus:

$$p = m\mathrm{v} = m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = m\left(-B + 2Ct - 3Dt^2\right) = 0{,}5 \cdot \left(-3 + 2 \cdot 5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1^2\right) = 2\,(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}).$$

Jėga, kuri veikia kūną (iš II Niutono dėsnio):

$F = ma$.

Reikia surasti kūno judėjimo pagreitį:

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 2C - 6Dt,$$

Taigi jėga, kuria bus veikiamas kūnas pirmos sekundės pabaigoje:

$F = m \cdot (2C - 6Dt) = 0{,}5 \cdot (2 \cdot 5 - 6 \cdot 1 \cdot 1) = 2$ (N).

Ats.: $p = 2$ kg·m·s^{-1}; $F = 2$ N.

23. Kūnas, kurio masė 0,2 kg svyruoja pagal dėsnį $s(t) = A\sin\omega t$, čia $A = 5$ cm, $\omega = \pi$ rad/s. Rasti kūno judesio kiekį ir jėgą F, kuri jį veikia po $t = 1/6$ s nuo judėjimo pradžios.

Sprendimas

Šio uždavinio sprendimas analogiškas anksčiau spręstam tik, šiuo atveju, kūnas svyruoja. Kūno judėjimo greitis:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = -A\omega\cos\omega t.$$

Kūno judesio kiekis:

$$p = m\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -Am\omega\cos\omega t = -0{,}05 \cdot 0{,}2 \cdot \pi \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{1}{6}\right) = -0{,}026\,(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}).$$

Kūno pagreitis:

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2 \sin\omega t,$$

o, sustačius duotus dydžius, apskaičiuojama kūną veikianti jėga:

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -mA\omega^2 \sin\omega t = -0{,}2 \cdot 0{,}05 \cdot \pi^2 \sin\left(\pi \cdot \frac{1}{6}\right) = -0{,}005 \cdot \pi^2 = -0{,}049\ \text{(N)}.$$

Ats.: p = -0,026 kg·m·s^{-1}; F = -0,049 N.

24. Kokio sunkio balastą reikia išmesti iš tolygiai besileidžiančio aerostato, kad jis pradėtų tuo pačiu greičiu tolygiai kilti. Aerostato sunkis su balastu $1{,}6\cdot10^4$ N, o aerostato keliamoji jėga $1{,}2\cdot10^4$ N. Oro pasipriešinimą laikyti pastoviu.

Sprendimas

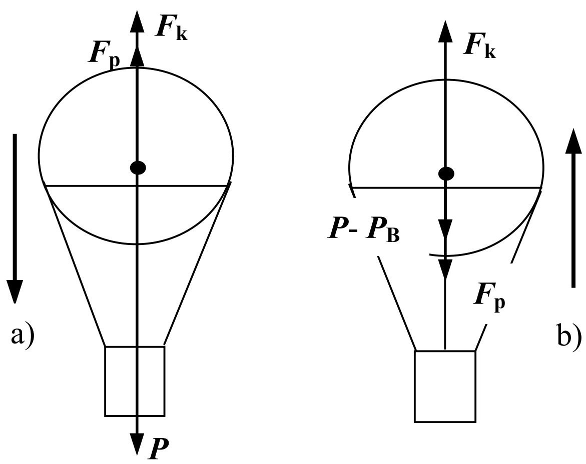
Kadangi aerostatas leidžiasi pastoviu greičiu, tai keliamosios $\boldsymbol{F}_\mathbf{k}$, pasipriešinimo $\boldsymbol{F}_\mathbf{p}$ ir aerostato su balastu $\boldsymbol{P}$ jėgų suma (10a pav.) turi būti lygi nuliui, t.y.

$\boldsymbol{F}_\mathbf{k} + \boldsymbol{F}_\mathbf{p} + \boldsymbol{P} = 0.$

Kadangi aerostatas juda abiem atvejais vertikaliai tai jėgų vektorius galima keisti jų atitinkamomis projekcijomis, t.y.

$F_\mathrm{k} + F_\mathrm{p} - P = 0$

Kad aerostatas pastoviu greičiu kiltų, įskaitant, kad aerostato sunkis bus sumažintas dėl išmesto balasto $\boldsymbol{P}_\mathbf{B}$ (10b pav.)



10 pav.

$\boldsymbol{F}_\mathbf{k} + (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}_\mathbf{B}) + \boldsymbol{F}_\mathbf{p} = 0.$

Pakeitus vektorius jų projekcijomis

$F_\mathrm{k} - (P - P_\mathrm{B}) - F_\mathrm{p} = 0.$

Sudėjus abi skaliarines lygtis

$F_\mathrm{k} + F_\mathrm{p} - P + F_\mathrm{k} - (P - P_\mathrm{B}) - F_\mathrm{p} = 0$

ir gaunam išreiškę P_B gauname

$P_\mathrm{B} = 2(P - F_\mathrm{k}) = 2(1{,}6\cdot10^4 - 1{,}2\cdot10^4) = 8000$ (N).

Ats.: P_B = 8 kN.

25. Ant siūlo pakabintas 10 N svarstis. Rasti siūlo įtempimo jėgą, jeigu svarstis: 1) keliamas 5 m/s^2 pagreičiu; 2) leidžiasi 7 m/s^2.

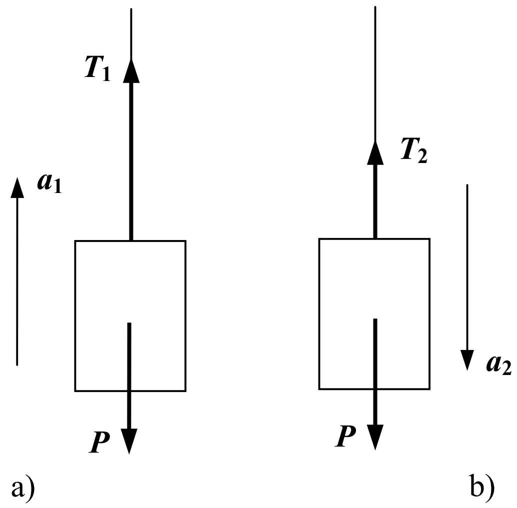
Sprendimas

Pažymėsime kūno sunkį $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$, siūlo įtempimo jėgas $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$ ir kūno judėjimo pagreičius $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$ atitinkamai.
Užrašome kūno judėjimo dinamikos lygtį:

$\boldsymbol{T} + \boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{a}$

Kadangi siūlo tempimo ir svorio jėgų, o taip pat kūno judėjimo kryptys kolinearios, tai vektorius galima pakeisti jų projekcijomis.
Pirmuoju atveju (11a pav.) svarstis, tempiamas siūlo jėga $T_1 > P$, todėl jis kyla vertikaliai pagreičiu $\boldsymbol{a_1}$:

$T_1 - P = m\,a_1$.



11 pav.

Išreiškus T_2 ir įstačius vertes gauname:

$$T_1 = P + m\,a_1 = mg + m\,a_1 = m(g + a_1) = \frac{P}{g}(a_1 + g) = P(1 + \frac{a_1}{g}) = 10 \cdot (1 + \frac{5}{9{,}8}) = 15{,}1\,\text{N}.$$

Antruoju atveju (11b pav.) svarsčio sunkis yra didesnis už tempimo jėgą $P > T_2$, todėl leidžiasi žemyn pagreičiu $\boldsymbol{a_2}$:

$P - T_2 = m\,a_2$.

$$T_2 = P - m\,a_2 = mg - m\,a_2 = m(g - a_2) = \frac{P}{g}(g - a_2) = P(1 - \frac{a_2}{g}) = 10 \cdot (1 - \frac{7}{9{,}8}) = 2{,}86\,\text{N}.$$

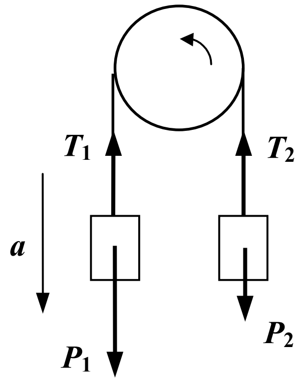
Ats.: a) T_1 = 15,1 N; b) T_2 = 2,86 N.

26. Du svarsčiai $P_1 = 20$ N ir $P_2 = 10$ N sujungti siūlu, kuris permestas per labai lengvą skridinį. Rasti pagreitį, kuriuo juda svarsčiai ir siūlo įtempimo jėgą.

Sprendimas

Kadangi $P_1 > P_2$, tai pirmasis svarstis leisis, o antrasis kils tuo pačiu pagreičiu a (12 pav.). Atsižvelgdami, kad siūlo įtempimo jėga vienoda abiejose skridinio pusėse ir skridinys neįtakoja svarsčių judėjimo (labai lengvas skridinys reiškia, kad jo inercijos momentas lygus nuliui, t.y. skridinys nesukuria jėgų momento), iš II Niutono dėsnio:

$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{T} = m\boldsymbol{a}$.



12 pav.

Atsižvelgus, kad siūlo įtempimo jėgos tiek, pirmam, tiek antram svarsčiui, šiuo atveju, yra vienodos, t.y. $T_1 = T_2 = T$, kiekvienam svarsčiui atskirai užrašome lygtis:

$$P_1 - T = m_1 a, \qquad (1)$$

$$T - P_2 = m_2 a. \qquad (2)$$

Sudėjus šias lygtis, randama svarsčių judėjimo pagreičio išraiška:

$$P_1 - T + T - P_2 = m_1 a + m_2 a,$$

$$P_1 - P_2 = (m_1 + m_2)\, a,$$

$$a = \frac{P_1 - P_2}{m_1 + m_2}.$$

Kadangi $m_1 = P_1/g$ ir $m_2 = P_2/g$, tai įstačius į pagreičio išraišką:

$$a = \frac{(P_1 - P_2)g}{P_1 + P_2} = \frac{(20-10)\cdot 9{,}8}{20+10} = 3{,}27\,(\mathrm{m/s^2}).$$

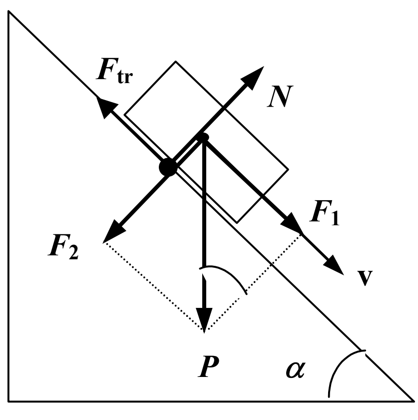
Iš (1) arba (2) lygčių galima rasti siūlo įtempimo jėga. Pasirinkime (1) lygtį:

$$T = P_1 - m_1 a = P_1 - \frac{P_1}{g}\cdot\frac{(P_1 - P_2)g}{P_1 + P_2} = \frac{2P_1P_2}{P_1 + P_2} = 13{,}33\,(\mathrm{N}).$$

Ats.: $a = 3{,}27$ m/s^2; $T = 13{,}33$ N.

27. Kūnas pradeda šliaužti nuožulnia plokštuma, kurios kampas su horizontale $\alpha = 45^0$. Nušliaužęs $s = 36{,}4$ cm nuotolį, jis įgyja v = 2 m/s greitį. Kam lygus trinties faktorius k?

Sprendimas



13 pav.

Sprendžiant šio tipo uždavinius labai svarbu tiksliai nubrėžti brėžinį (13 pav.). Pirmiausiai piešiama nuožulnioji plokštuma, kurios kampas α turi bent apytikriai atitikti užduotą sąlygoje. Ant nuožulnios plokštumos piešiamas stačiakampis tašelis, iš kurio centro *vertikaliai žemyn* brėžiamas kūno sunkio vektorius ***P***. Iš *to paties* taško brėžiami du *tarpusavyje statmeni* vektoriai, iš kurių vienas, sakykim $\boldsymbol{F_1}$, *lygiagretus* nuožulniajai plokštumai, o kitas, sakykim $\boldsymbol{F_2}$, jai *statmenas* . Be to, labai svarbu, kad šių *vektorių ilgiai tiksliai atitiktų* vektoriaus ***P*** projekcijų į lygiagrečią ir statmeną nuožulniai plokštumai kryptis ilgius. Tik tiksliai nubraižius šiuos vektorius galima pamatyti, kuris kampas tarp jų atitinka nuožulniosios plokštumos nuolydžio kampą α, taigi, teisingai apskaičiuoti vektorių $\boldsymbol{F_1}$ ir $\boldsymbol{F_2}$ dydžius. Plokštumos reakcijos jėgos ***N*** *vektoriaus pradžia brėžiama nuo nuožulniosios plokštumos paviršiaus*, statmenai jam, o ***N*** ilgis turi sutapti su vektoriaus $\boldsymbol{F_2}$ ilgiu, bet priešingos

krypties. Trinties jėgos vektoriaus $\boldsymbol{F}_{\mathbf{tr}}$ *pradžia turi sutapti su* $\boldsymbol{N}$ *pradžia*, o jo kryptis *priešinga* tašelio judėjimo krypčiai ir sutampanti su nuožulniąja plokštuma.
Uždavinio sąlygoje pasakyta, kad, nušliaužęs nuotolį s, kūnas įgijo greitį v. Taigi, kūnas nuožulnia plokštuma šliaužė tolygiai greitėdamas. Atsižvelgiant į pastarąją išvadą ir remiantis II Niutono dėsniu, užrašoma kūno judėjimo dinamikos lygtis:

$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{\mathbf{tr}} = m\,\boldsymbol{a}$.

Kadangi vektorių $\boldsymbol{F}_1$ ir $\boldsymbol{F}_{\mathbf{tr}}$ kryptys priešingos, tai užrašant šią lygtį vektorių projekcijomis, gaunama:

$F_1 - F_{\mathrm{tr}} = m\,a$.

Šioje lygtyje nežinomi nei F_1 ir F_{tr}, nei m ir a. Užrašomos šių dydžių išraiškos:

$F_1 = P\sin\alpha = mg\sin\alpha$,

$F_{\mathrm{tr}} = N\,k = |F_2|\,k = |P|\,k\cos\alpha = mgk\cos\alpha$,

$$a = \frac{\mathrm{v}^2}{2s},$$

kurias sustačius į lygtį, gaunama:

$$mg\sin\alpha - mgk\cos\alpha = m\,\frac{\mathrm{v}^2}{2s} \quad \Big|: mg\cos\alpha$$

$$k = \mathrm{tg}\alpha - \frac{\mathrm{v}^2}{2gs\cos\alpha}.$$

Įstačius vertes, apskaičiuojamas *dinaminės* trinties faktorius:

$$k = \mathrm{tg}\,45^0 - \frac{2^2}{2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}364\cdot\cos 45^0} = 0{,}21.$$

Čia reikėtų pastebėti, kad *statinės* (arba rimties) trinties faktorius μ būtų randamas iš sąlygos: $\boldsymbol{F}_{\mathbf{tr}} = \boldsymbol{F}_1$. Šiuo atveju gaunama Amontonso (Amontons) išraiška:

$mg\mu\cos\alpha = mg\sin\alpha$,

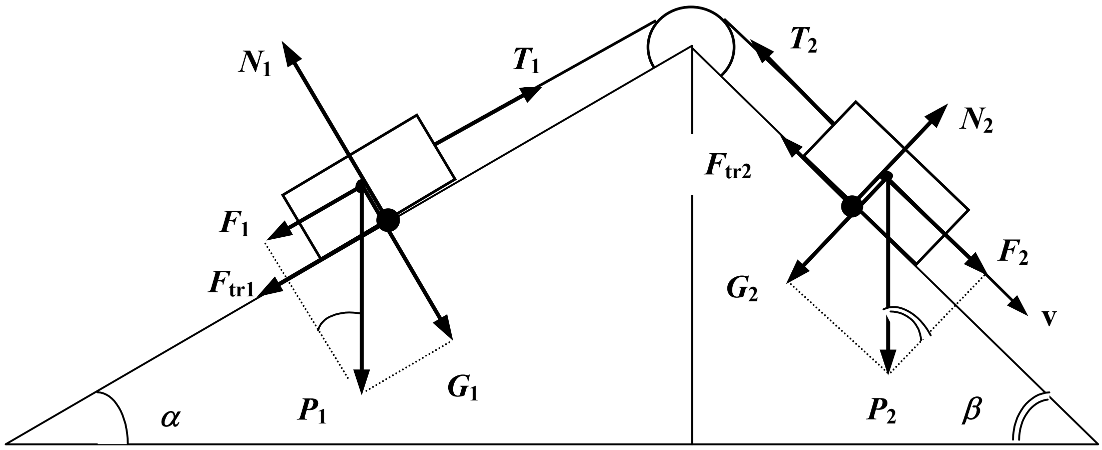
$\mu = \mathrm{tg}\alpha$.

Ats.: $k = 0{,}21$.

28. Labai lengvas skridinys įtvirtintas dviejų nuožulnių plokštumų, kurios su horizontale sudaro kampus $\alpha = 30^0$ ir $\beta = 45^0$, viršūnėje. Vienodo 10 N sunkio svarsčiai sujungti siūlu, kuris permestas per skridinį. Rasti pagreitį, kuriuo juda svarsčiai ir siūlo įtempimo jėgą. Svarsčių trinties į nuožulnią plokštumą faktoriai $k_1 = k_2 = 0{,}1$, skridinio trinties neįskaityti.

Sprendimas

Šis uždavinys apjungia 26 ir 27 uždavinius. Vėl, kaip ir 27 uždavinio sprendimui, būtinas teisingas brėžinys, kuris braižomas naudojant būdą jau aprašytą tame uždavinyje, tik, šiuo atveju, svarsčiai sujungti permestu per skridinį siūlu (14 pav.).
Kaip ir 26 uždavinyje, kiekvienam svarsčiui atskirai užrašomos dinamikos lygtys:



14 pav.

Nors svarsčiai yra vienodo sunkio $\boldsymbol{P_1} = \boldsymbol{P_2} = \boldsymbol{P}$ (arba $m_1 = m_2 = m$), nuožulniųjų plokštumų polinkio kampai yra skirtingi: antrasis svarstis guli ant didesnio polinkio plokštumos, todėl jo sunkio jėgos $\boldsymbol{P_2}$ projekcija $\boldsymbol{F_2}$ į kryptį, lygiagrečią tai nuožulniai plokštumai bus didesnė už atitinkamą pirmojo svorio $\boldsymbol{P_1}$ projekciją $\boldsymbol{F_1}$. Taigi, veikiama antrojo svarsčio, sistema slinks į dešinę (pav.). Kiekvienam svarsčiui parašomos dinamikos lygtys:

$$T_1 - (F_1 + F_{tr1}) = m_1\, a_1,$$

$$F_2 - (T_2 + F_{tr2}) = m_2\, a_2.$$

Į šias lygtis įstatome jėgų išraiškas:

$$F_1 = P_1 \sin\alpha\,,$$

$$F_2 = P_2 \sin\beta\,,$$

ir

$$F_{tr1} = k_1 N_1 = k_1 G_1 = k_1\, P_1 \cos\alpha\,,$$

$$F_{tr2} = k_2 N_2 = k_2 G_2 = k_2\, P_2 \cos\beta\,.$$

Gauname

$$T_1 - (P_1 \sin\alpha + k_1 P_1 \cos\alpha) = m_1\, a_1\,, \qquad (1)$$

$$P_2 \sin\beta - (T_2 + k_2 P_2 \cos\beta) = m_2\, a_2\,. \qquad (2)$$

Kadangi abu svarsčiai sujungti netąsiu siūlu, tai siūlo įtempimo jėgos bus lygios $\boldsymbol{T_1} = \boldsymbol{T_2} = \boldsymbol{T}$ ir svarsčių judėjimo pagreičiai nuožulniųjų plokštumų kryptimis bus taip pat vienodi, t.y. $a_1 = a_2 = a$. Šias lygtis sudėję gauname pagreičio išraišką:

$$T_1 - (P_1 \sin\alpha + k_1 P_1 \cos\alpha) + P_2 \sin\beta - (T_2 + k_2 P_2 \cos\beta) = m_1\, a_1 + m_2\, a_2$$

$$a = \frac{T_1 - T_2 + P_2 \sin\beta \text{ - } P_1 \sin\alpha - k_1 P_1 \cos\alpha - k_2 P_2 \cos\beta}{m_1 + m_2},$$

$$a = \frac{\left[m_2(\sin\beta - k_2\cos\beta) - m_1(\sin\alpha + k_1\cos\alpha)\right]g}{m_1 + m_2},$$

$$a = \frac{(\sin\beta - \sin\alpha) - k(\cos\beta + \cos\alpha)}{2} \cdot g = 0{,}243\,(\mathrm{m/s^2}).$$

Siūlo įtempimo jėgos išraišką galima gauti iš pirmos lygties atėmus antrąją arba įstačius pagreičio sprendinį į pirmąją arba antrąją lygtį. Atimkime iš pirmos lygties antrąją:

$$T_1 - (P_1 \sin\alpha + k_1 P_1 \cos\alpha) - P_2 \sin\beta + (T_2 + k_2 P_2 \cos\beta) = m_1\, a_1 - m_2\, a_2\,,$$

$$2T - P_1(\sin\alpha + k_1\cos\alpha) - P_2(\sin\beta - k_2\cos\beta) = 0\,,$$

$$T = \frac{P_1(\sin\alpha + k_1\cos\alpha) + P_2(\sin\beta - k_2\cos\beta)}{2}$$

$$T = \frac{\sin\alpha + \sin\beta + k(\cos\alpha - \cos\beta)}{2} \cdot m \cdot g = 5{,}99\,(\mathrm{N}).$$

Ats.: $a = 0{,}243$ m/s^2; $T = 5{,}99$ N.

30. Ant bėgių stovi $m_1 = 10$ t vagonas, kuriame įtvirtinta $m_2 = 5$ t patranka. Patranka lygiagrečiai bėgiams iššauna $m_3 = 100$ kg sviedinį, kurio greitis atžvilgiu patrankos $v_0 = 500$ m/s. Rasti vagono judėjimo greitį v_x tuojau pat po šūvio, jeigu: 1) vagonas prieš šūvį nejudėjo $v_1 = 0$; 2) vagonas judėjo $v_1 = 18$ km/h greičiu, o patranka šovė jo judėjimo kryptimi; 3) vagonas judėjo $v_1 = 18$ km/h greičiu, o patranka šovė priešinga jo judėjimui kryptimi.

Sprendimas

1) Remiantis judesio kiekio tvermės dėsniu užrašome sistemos: vagonas-patranka-sviedinys judesio kiekį iki šūvio ir prilyginame sistemos judesio kiekiui po šūvio:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\cdot v_1 = (m_1 + m_2)\cdot v_x + m_3\cdot v_0.$$

Kadangi pirmuoju atveju vagonas iki šūvio nejudėjo, tai:

$$(m_1 + m_2)\cdot v_x + m_3\cdot v_0 = 0,$$

vagono judėjimo greitis po šūvio:

$$v_x = -\frac{m_3}{m_1 + m_2}\cdot v_0 = -3{,}33\,(\mathrm{m/s}) = -12\,(\mathrm{km/h}).$$

Minuso ženklas rodo, kad laikant sviedinio išlėkimo kryptį teigiama, vagonas judėjo kryptimi, kuri yra priešinga sviedinio judėjimo krypčiai.

2) Kadangi buvo iššauta vagono judėjimo kryptimi, tai sviedinio judėjimo greitis atžvilgiu žemės bus $v_2 = v_1 + v_0$. Tada iš sistemos judesio kiekio tvermės dėsnio:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\cdot v_1 = (m_1 + m_2)\cdot v_x + m_3\cdot v_2,$$

$$(m_1 + m_2 + m_3)\cdot v_1 = (m_1 + m_2)\cdot v_x + m_3\cdot(v_0 + v_1).$$

Vagono judėjimo greitis po šūvio:

$$v_x = \frac{\left(m_1 + m_2 + m_3\right) \cdot v_1 - m_3\left(v_0 + v_1\right)}{m_1 + m_2} = 6\,(\text{km}/\text{h}).$$

.Kaip matome vagono greitis $v_x > 0$, taigi, jis juda pradine kryptimi tik mažesniu greičiu.

3) Kadangi buvo iššauta kryptimi, kuri yra priešinga vagono judėjimo krypčiai, tai, laikant patrankos sviedinio judėjimo kryptį teigiama, vagono greitis yra neigiamas, t.y. $v_1 < 0$. Todėl sistemos judėjimo kiekio tvermės dėsnis bus užrašomas taip:

$- (m_1 + m_2 + m_3) \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_x + m_3 \cdot (v_0 - v_1)$.

Vagono judėjimo greitis tuoj po šūvio:

$$v_x = \frac{-\left(m_1 + m_2 + m_3\right) \cdot v_1 - m_3 \cdot \left(v_0 - v_1\right)}{m_1 + m_2} = -30\,(\text{km}/\text{h}).$$

Šiuo atveju vagonas po šūvio taip pat judės ta pačia, kaip iki šūvio, kryptimi, bet didesniu greičiu.

Ats.: 1) v_x = -12 km/h; 2) v_x = 6 km/h; 3) v_x = -30 km/h.

31. 980 N svorio sviedinys lekiantis 500 m/s greičiu lygiagrečiai bėgiams pataiko į 10 t vagoną su smėliu ir įstringa jame. Kokį greitį įgaus vagonas, jeigu: 1) vagonas iki susidūrimo nejudėjo; 2) vagonas 36 km/h greičiu judėjo sviedinio judėjimo kryptimi; 3) vagonas 36 km/h greičiu judėjo priešinga sviedinio judėjimui kryptimi.

Sprendimas

Kadangi uždavinio sąlygoje pasakyta, kad sviedinys įstringa smėlyje, tai tokį susidūrimą galime laikyti absoliučiai netampriu. Pažymėję sviedinio masę m_1, jo greitį v_1, vagono masę m_2, jo greitį v_2, vagono greitį po susidūrimo v, užrašysime judesio kiekio tvermės dėsnį absoliučiai netampriam susidūrimui:

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v$.

1) Kadangi vagonas nejuda, tai $v_2 = 0$. Vagono greitis po susidūrimo:

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 = \frac{0{,}1}{0{,}1 + 10} \cdot 500 = 4{,}95\,(\text{m}/\text{s}) = 17{,}82\,(\text{km}/\text{h}).$$

2) Vagonui judant sviedinio judėjimo kryptimi $v_2 > 0$. Taigi, vagono greitis po susidūrimo:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{100 \cdot 500 + 10^4 \cdot 10}{100 + 10^2} = 14{,}85\,(\text{m}/\text{s}) = 53{,}46\,(\text{km}/\text{h}).$$

3) Jeigu vagonas juda priešinga sviedinio judėjimui kryptimi, tai $v_2 < 0$, o lygtis bus:

$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v$.

Vagono judėjimo greitis:

$$\text{v} = \frac{m_1 \text{v}_1 - m_2 \text{v}_2}{m_1 + m_2} = -4{,}95\,(\text{m/s}) = -17{,}82\,(\text{km/h}).$$

Ats.: 1) v = 17,82 km/h; 2) v = 53,46 km/h; 3) v = –17,82 km/h.

32. 20 g masės plieninis rutuliukas, krisdamas iš h_1 = 1 m aukščio ant plieninės plokštės, po susidūrimo atšoka į h_2 = 81 cm aukštį. Rasti: 1) jėgos impulsą, kurį gavo plieninė plokštė smūgio metu, 2) šilumos kiekį kuris išsiskyrė smūgio metu.

Sprendimas

Jėgos impulsas, kurį gavo plieninė plokštė yra lygus rutuliuko judesio kiekių po p ir iki smūgio p_0 skirtumui Δp:

$p - p_0 = \Delta p = J.$

Taigi, reikia surasti greitį v_1, kurį, prieš pat susidūrimą, įgijo rutuliukas krisdamas iš aukščio h_2, ir greitį v_2, kurį turėjo rutuliukas tuoj po susidūrimo su plokšte, ir kuris išmetė jį į aukštį h_2:

$$\text{v}_1 = \sqrt{2gh_1}\,,$$

$$\text{v}_2 = \sqrt{2gh_2}\,.$$

Įstatę šias išraiškas, gauname:

$$J = \Delta p = m \cdot (\text{v}_1 - (-\text{v}_2)),$$

$$J = m \cdot \sqrt{2g} \cdot \left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right),$$

$$J = 0{,}02 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8} \cdot \left(\sqrt{1} + \sqrt{0{,}81}\right) = 0.168\ (\text{N} \cdot \text{s}).$$

Šilumos kiekį, kuris išsiskyrė smūgio metu, galima rasti arba kaip rutuliuko potencinių energijų iki ir po smūgio skirtumą, arba kaip rutuliuko kinetinių energijų prieš pat smūgį ir tuoj po smūgio skirtumą.
Sprendimas, kai išsiskyrusios šilumos kiekis apskaičiuojamas iš potencinių energijų skirtumo yra paprastesnis:

$Q = U_1 - U_2,$

$Q = mgh_1 - mgh_2 = mg(h_1 - h_2)$

$Q = 0{,}02 \cdot 9{,}8 \cdot (1-0{,}81) = 0{,}0372$ (J).

Ats.: J = 0,168 N·s; Q = 37,2 mJ.

33. Molekulė, kurios masė $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ kg, judanti greičiu v = 600 m/s, kampu $\alpha = 60^0$ atsitrenkia į indo sienelę ir tokiu pat kampu atšoka nuo jos, neprarasdama greičio. Rasti jėgos impulsą, kurį gauna indo sienelė.

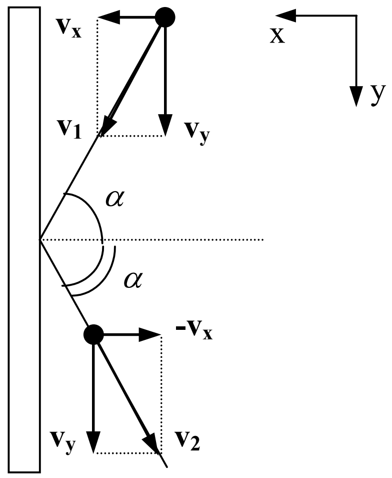
Sprendimas

Jėgos impulsas $\boldsymbol{J}$, kurį gauna sienelė molekulei susiduriant su ja, yra lygus molekulės judesio kiekių prieš ir po susidūrimo skirtumui (judėjimo kiekio pokyčiui $\Delta\boldsymbol{p}$):

$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{F}\cdot\tau = \Delta\boldsymbol{p}$,

čia $\boldsymbol{F}$ – *vidutinė* jėga, kuria molekulė veikia sienutę per visą sąveikos su sienele trukmę τ. Pažymėję molekulės masę m užrašome:

$\Delta\boldsymbol{p} = m\,\mathbf{v_1} - m\,\mathbf{v_2} = m\,\Delta\mathbf{v}$.



15 pav.

Kadangi molekulė kampu α susiduria su sienele ir uždavinio sąlygoje pasakyta, kad dalelės greičio dydis nepakinta (t.y. $|\mathbf{v_1}| = |\mathbf{v_2}|$, tamprus susidūrimas), tai greičio projekcija lygiagreti sienelei v_y nekeis, nei savo krypties, nei dydžio (15 pav.), todėl šia kryptimi dalelės judėjimo greitis (ir judėjimo kiekis) nekis, o molekulės greičio projekcija v_x statmenoji sienelei keis savo kryptį, bet turi nekeisti savo dydžio. Molekulės greičio pokytis x ašies kryptimi dėl susidūrimo su sienele:

$\Delta v_x = v_x - (-v_x) = v_1 \cos\alpha - (-\,v_2 \cos\alpha)$,

$\Delta v_x = 2v_1 \cos\alpha$.

Taigi jėgos impulsas, kuris suteikiamas sienutei:

$J = 2mv_1 \cos\alpha = 2\cdot 4{,}65\cdot 10^{-26}\cdot 600\cdot \cos 60^0 = 2{,}79\cdot 10^{-23}$ (kg·m·s^{-1}).

Ats.: $J = 2{,}79\cdot 10^{-23}$ kg·m·s^{-1}.

34. 0,1 kg rutuliukas, krisdamas vertikaliai, atsitrenkia į nuožulnią plokštumą ir stangriai atšoka neprarasdamas greičio. Plokštuma su horizontale sudaro 30^0 kampą. Jėgos impulsas, kuriuo veikiama plokštuma susidūrimo taške lygus 1,73 N·s. Po kiek laiko nuo smūgio į plokštumą rutuliukas pakils į aukščiausią trajektorijos tašką ir į kokį didžiausią aukštį jis pakils.

Sprendimas

Šį uždavinį, kuria tai prasme, galima laikyti atvirkščiu anksčiau spręstam, kadangi duotas jėgos impulso, kuris suteikiamas nuožulniąjai plokštumai, dydis, bet neduotas rutuliuko pradinis greitis. Pasinaudoję ankstesnio uždavinio sprendimu, iš sąlygoje duotos jėgos impulso vertės, galime surasti rutuliuko greitį iki ir po susidūrimo (16 pav.):

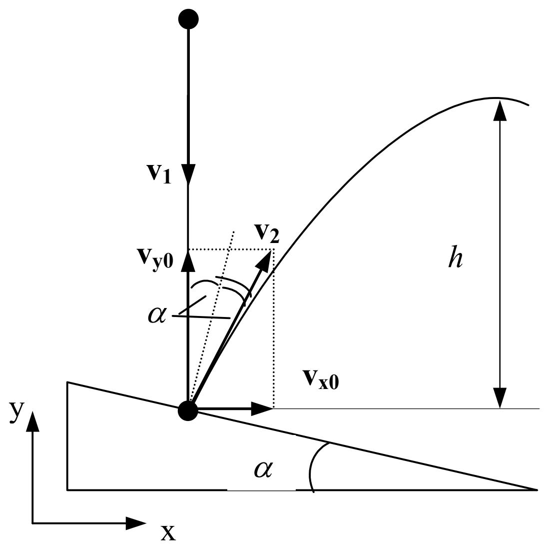
$J = m\,\Delta v = 2mv_1 \cos\alpha$,

$$\mathrm{v}_1 = \frac{J}{2m \cdot \cos\alpha}.$$

Suradus rutuliuko kritimo greitį v_1, kadangi $|\mathrm{v}_1| = |\mathrm{v}_2|$, tuo pačiu surandamas ir rutuliuko atšokimo greitis. Toliau uždavinys sprendžiamas taip pat, kaip kampu į horizontą mesto kūno atveju. Po susidūrimo horizontalia kryptimi rutuliukas judės pastoviu greičiu v_{x0}, o vertikaliai – tolygiai lėtėdamas, kai pradinis greitis buvo v_{y0}. Taigi, rutuliukas kils kol:

$$\mathrm{v}_y = \mathrm{v}_{y0} - gt = 0.$$

Laikas t, per kurį rutuliukas pakils į didžiausią aukštį h:



16 pav.

$$t = \frac{\mathrm{v}_{y0}}{g} = \frac{\mathrm{v}_2 \cos 2\alpha}{g},$$

$$t = \frac{J}{2m \cdot \cos\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{g},$$

$$t = \frac{1{,}73 \cdot \cos 60^0}{2 \cdot 0{,}1 \cdot \cos 30^0 \cdot 9{,}8} = 0{,}51\,(s).$$

Didžiausias aukštis, į kurį pakils rutuliukas, matuojant nuo susidūrimo taško:

$$h = \frac{\mathrm{v}_{y0}^2}{2g} = \frac{J^2 \cdot \cos^2 2\alpha}{(2m \cdot \cos\alpha)^2 \cdot 2 \cdot g} = \frac{(1{,}73)^2 \cdot (\cos 60^0)^2}{(2 \cdot 0{,}1 \cdot \cos 30^0)^2 \cdot 2 \cdot 9{,}8} = 1{,}27\,(m).$$

Ats.: $t = 0{,}51$ s; $h = 1{,}27$ m.

35. Du rutuliukai, kurių masės $m_1 = 10$ g ir $m_2 = 20$ g, judėdami horizontaliai vienas prieš kitą greičiais $\mathrm{v}_1 = 5$ m/s ir $\mathrm{v}_2 = 2$ m/s, susiduria. Laikant, kad susidūrimas centrinis ir absoliučiai tamprus, apskaičiuoti rutuliukų susidūrimo deformacijos energiją ir jų greičius v_1' ir v_2' po susidūrimo.

Sprendimas

Pasirenkame, kad teigima kryptis sutampa su pirmojo rutuliuko judėjimo kryptimi iki susidūrimo. Rutuliukų susidūrimo deformacijos energiją galima rasti laikant, kad susidūrimo momentu tamprios deformacijos dėka rutuliukai labai trumpam momentui sukimba, o jų greičiai, tuo momentu, yra vienodi, kaip ir plastinio susidūrimo metu. Taigi, pirmą rutuliukų susidūrimo fazę, kol pasiekiama maksimali jų deformacija, galima aprašyti judesio kiekio tvermės dėsniu plastiniam smūgiui:

$m_1 v_1 + m_2(-v_2) = (m_1 + m_2)v$.

Abiejų rutuliuku greitis v jų maksimalios deformacijos momentu:

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Deformacijos energijos dydis bus lygus abiejų rutuliukų kinetinių energijų iki susidūrimo sumos ir jų kinetinės energijos maksimalios deformacijos momentu skirtumui:

$$\Delta E = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)(m_1 v_1 - m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)^2},$$

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}02 \cdot (5-2)^2}{2 \cdot (0{,}01 + 0{,}02)} = 0{,}03\,(\mathrm{J}).$$

Norint rasti rutuliukų greičius po susidūrimo, reikia rutuliukų sistemai užrašyti judesio kiekio ir energijos tvermės dėsnius iki ir po susidūrimo:

$m_1 v_1 + m_2(-v_2) = m_1 v_1' + m_2 v_2'$,

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 (v_1')^2}{2} + \frac{m_1 (v_2')^2}{2}.$$

Išsprendę šią lygčių sistemą surandame v_1' ir v_2' išraiškas:

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 - m_2(2v_2 + v_1)}{m_1 + m_2} \cong -4{,}33\,(\mathrm{m/s}),$$

$$v_2' = \frac{m_1(2v_1 + v_2) - m_2 v_2}{m_1 + m_2} \cong 2{,}67\,(\mathrm{m/s}).$$

Po susidūrimo, abu rutuliukai pakeičia judėjimo kryptį į priešingą, tačiau pirmojo greitis sumažėja, o antrojo - padidėja.

Ats.: ΔE = 0,03 J; v_1' = - 4,33 m/s; v_2' = 2,67 m/s.

36. 2 t masės automobilis pastoviu greičiu kyla į kalną, pakildamas 4 m kas kiekvieną 100 m kelio. Trinties faktorius lygus 8 %. Rasti: 1) darbą, kurį atlieka automobilio variklis 3 km kelyje, 2) galią, kurią išvystė variklis, jeigu žinoma, kad tas kelias buvo nuvažiuotas per 4 min.

Sprendimas

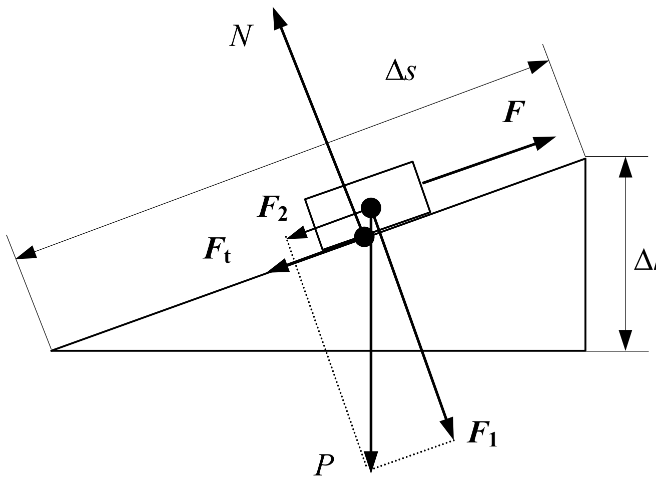
Automobilio variklio atliktas darbas bus lygus:

$\Delta A = F \cdot s$

čia s = 3 km – visas automobilio kelias, o F – variklio traukos jėga. Kadangi uždavinio sąlygoje pasakyta, kad automobilis juda pastoviu greičiu, tai (17 pav.):

$F = F_2 + F_{tr}$.

Iš brėžinio:



17 pav.

$F_{tr} = kN = kF_1$,

$$F_1 = P \cdot \frac{\sqrt{(\Delta s)^2 - (\Delta h)^2}}{\Delta s},$$

$$F_2 = P \cdot \frac{\Delta h}{\Delta s}.$$

čia $\Delta h = 4$ m – automobilio pakilimo aukštis jam nuvažiavus $\Delta s = 100$ m kelią, $k = 0{,}08$ – trinties faktorius.

Darbas kurį atlieka variklis:

$$\Delta A = (F_2 + kF_1) \cdot s = \left(P\frac{\Delta h}{\Delta s} + kP\frac{\sqrt{(\Delta s)^2 - (\Delta h)^2}}{\Delta s} \right) \cdot s = mg \cdot \frac{s}{\Delta s}\left(\Delta h + k\sqrt{(\Delta s)^2 - (\Delta h)^2} \right),$$

$\Delta A = 7{,}05 \cdot 10^6$ J.

Galia, kurią išvysto automobilio variklis:

$$G = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{7{,}05 \cdot 10^6}{4 \cdot 60} \cong 29{,}4\,(\mathrm{kW}).$$

Ats.: $\Delta A = 7{,}05 \cdot 10^6$ J, $G \cong 29{,}4$ kW.

37. Rasti kokia galia reikalinga, kad 1 t masės automobilis, važiuotų pastoviu 36 km/h greičiu: 1) horizontaliu keliu, 2) į kalną, pakildamas po 5 m kas 100 m kelio, 3) į to paties nuolydžio pakalnę. Trinties faktorius lygus 0,07.

Sprendimas

Jeigu automobilis važiuoja pastoviu greičiu, tai galia, kurią turi išvystyti variklis:

$G = F \cdot \mathrm{v}$,

čia F – variklio traukos jėga, v – automobilio judėjimo greitis.

1) Automobiliui judant pastoviu greičiu horizontaliu keliu, vienintelė jėga, kuri priešinasi jo judėjimui yra trinties jėga. Taigi:

   $F = F_{tr}$,

   $F = kmg$.

   Tada variklio galia:

   $G = kmg\mathrm{v}$,

   $G = 0{,}07 \cdot 1000 \cdot 9{,}8 \cdot 10 = 6{,}86$ kW.

2) Automobiliui pastoviu greičiu kylant į kalną, pasinaudoję 35 uždavinio sprendimu, užrašome variklio traukos jėgos išraišką:

$$F = \frac{mg}{\Delta s} \cdot \left(\Delta h + k\sqrt{(\Delta s)^2 - (\Delta h)^2} \right).$$

Tada variklio galia:

$$G = F \cdot \mathrm{v} = \frac{mg\mathrm{v}}{\Delta s} \cdot \left(\Delta h + k\sqrt{(\Delta s)^2 - (\Delta h)^2} \right),$$

$G = 11{,}75$ kW.

3) Automobiliui riedant į pakalnę, trinties jėga padeda varikliui stabdyti, todėl (vėl naudojantis 35 uždavinio sprendimu):

$F_2 = F + F_{tr}$,

$F = F_2 - F_{tr}$.

Atsižvelgiant, kad variklio traukos jėgos kryptis šiuo atveju priešinga automobilio judėjimo krypčiai, variklio galia:

$$G = F \cdot (-\mathrm{v}) = \frac{mg(-\mathrm{v})}{\Delta s} \cdot \left(k\sqrt{(\Delta s)^2 - (\Delta h)^2} - \Delta h \right),$$

$G = 1{,}95$ kW.

Ats.: 1) $G = 6{,}86$ kW, 2) $G = 11{,}75$ kW, 3) $G = 1{,}95$ kW.

38. Kokios trukmės būtų Žemės para, kad kūnai ekvatoriuje būtų besvoriai ?

Sprendimas

Žemės ekvatoriuje kūnas bus besvoris, jeigu Žemės traukos jėga P bus lygi išcentrinei inercijos jėgai F_c atsiradusiai dėl Žemės sukimosi:

$Q = P - F_c = 0.$

$$F_c = m\omega^2 R,$$

čia m – kūno masė, ω - Žemės sukimosi kampinis greitis, R – Žemės spindulys. Taigi

$$mg = m\omega^2 R,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Pažymėję Žemės apisukimo periodą T:

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{6{,}37 \cdot 10^6}{9{,}8}} = 5063{,}1\,(s) \cong 1{,}41\,(h).$$

Ats.: $T \cong 1{,}41$ h.

39. Prie kibiro, kurio masė su vandeniu 2 kg, pririšta 60 cm virvė. Kibiras tolygiai sukamas vertikalioje plokštumoje. Rasti: 1) mažiausią sukimo greitį, kuriuo sukant aukščiausiame trajektorijos taške vanduo neištekės iš kibiro, 2) virvutės įtempimą aukščiausiame ir žemiausiame taškuose esant tam sukimosi greičiui.

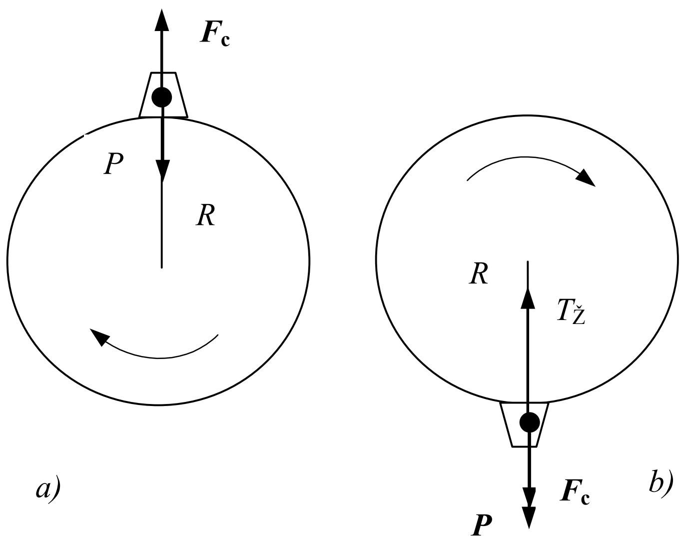
Sprendimas

Neinercinėje atskaitos sistemoje besisukančioje kartu su kibiru:

$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_c = m\boldsymbol{a}$,

čia $\boldsymbol{F}_c = m(-\boldsymbol{a}_c)$ - išcentrinė inercijos jėga, kylanti dėl įcentrinio pagreičio $a_c = \dfrac{m\text{v}^2}{R}$.

Aukščiausiame taške vanduo neištekės iš kibiro, jeigu išcentrinė inercijos jėga ($\boldsymbol{F}_c$) bus didesnė už vandens sunkį $\boldsymbol{P}$ ($\boldsymbol{F}_c \geq \boldsymbol{P}$) (18a pav.). Taigi, kai $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_c = 0$, sukimosi greitis bus mažiausias:



18 pav.

$$m\frac{\text{v}^2}{R} = mg\,,$$

$$\text{v} = \sqrt{gR}\,,$$

$$\text{v} = \sqrt{9{,}8 \cdot 0{,}6} = 2{,}42\,(\text{m/s}).$$

Siūlo įtempimo jėga

$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_c = \boldsymbol{T}$.

Suprantama, kad trajektorijos aukščiausiame taške siūlo įtempimo jėga, šiam sukimosi greičiui, bus lygi nuliui. Taigi:

$P - F_c = T_A = 0$.

Žemiausiame trajektorijos taške siūlo įtempimo jėga (18b pav.):

$F_c + P = T_Ž$.

Kadangi kibiras sukamas pastoviu greičiu, tai inercijos jėga tiek viršutiniame, tiek žemutiniame taškuose yra ta pati, todėl:

$T_{Ž} = 2P = 2mg = 39{,}2$ (N).

Ats.: v = 2,42 m/s; $T_A = 0$; $T_{Ž} = 39{,}2$ N.

40. Išcentrinio reguliatoriaus strypelių ilgis 12,5 cm (19 pav.). Koks turi būti reguliatoriaus kampinio sukimosi dažnis, kad reguliatoriaus svareliai, esantys strypelių galuose atsilenktų nuo vertikalės kampu: 1) 60^0 ? 2) 30^0 ?

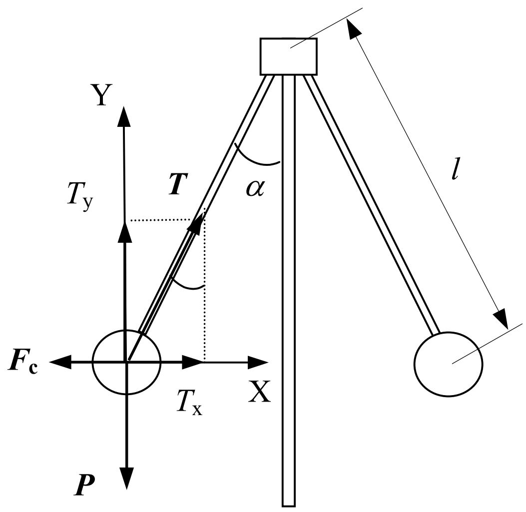
Sprendimas

Neinercinėje atskaitos sistemoje, sutampančioje su besisukančiu reguliatoriumi visų jėgų vektorinė suma:

$\boldsymbol{T} + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_c = m\boldsymbol{a} = 0$,

nes reguliatoriui sukantis pastoviu kampiniu greičiu ω jo svarelių atsilenkimo kampas α nusistovės, kai išcentrine jėga $\boldsymbol{F}_c$, kylanti dėl reguliatoriaus sukimosi susilygins su siūlo tempimo $\boldsymbol{T}$ ir svarelių sunkio $\boldsymbol{P}$ jėgų suma.

Taigi, iš 19 pav. galima užrašyti:



19 pav.

$T_x + P_x - F_{cx} = 0$,

$T_y - P_y + F_{cy} = 0$.

Tada

$$T\sin\alpha + 0 - \frac{P}{g}\omega^2 l\sin\alpha = 0,$$

$T\cos\alpha - P + 0 = 0$.

Iš pastarųjų dviejų lygčių:

$$P\,\mathrm{tg}\alpha = \frac{P}{g}\omega^2 l\sin\alpha \;\Big|: \frac{P}{g}l\sin\alpha,$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\cdot\mathrm{tg}\alpha}{l\cdot\sin\alpha}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cdot\cos\alpha}}.$$

Reguliatoriaus kampinio sukimosi dažnis, kai $\alpha = 60^0$:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}125\cdot\cos 60^0}} \cong 2(\text{aps/s}).$$

Kai $\alpha = 30^0$, reguliatoriaus sukimosi dažnis:

$\nu \cong 1{,}5$ (aps/s).

Ats.: 1) $\nu \cong 2$ (aps/s); 2) $\nu \cong 1{,}5$ (aps/s).

41. Rasti darbą, kurį reikia atlikti 20 cm suspaudžiant spyruoklę, jeigu žinoma, kad jėga tiesiai proporcinga spyruoklės deformacijai ir, kad spaudžiant 29,4 N jėga, spyruoklė suspaudžiama 1 cm.

Sprendimas

Darbas, kuris atliekamas suspaudžiant spyruoklę x ašies kryptimi dydžiu *s*:

$$A = -\int_0^s F\mathrm{dx}\,,$$

čia $F = -kx$, o spyruoklės stangrumo koeficientas $k = \frac{29{,}4}{0{,}01} = 2940\,(\mathrm{N/m})$. Suintegravus:

$$A = \int_0^s kx\mathrm{dx} = \frac{ks^2}{2}\,,$$

$$A = \frac{2940 \cdot 0{,}2^2}{2} = 58{,}8\ (\mathrm{J}).$$

Ats.: $A = 58{,}8$ J.

42. 4,9 N svarstis pririštas prie guminės l_0 ilgio timpos. Sukant svarstį horizontalioje plokštumoje dažniu $\nu = 2$ aps/s, guminė timpa nukrypsta nuo vertikalės kampu $\alpha = 30^\circ$. Rasti neištemptos guminės timpos ilgį l_0, jeigu žinoma, kad veikiant jėga $F_1 = 6{,}0$ N timpa pailgėja $x_1 = 1$ cm.

Sprendimas

Įtempimo jėga $T = \frac{P}{\cos\alpha} = 5{,}7\ \mathrm{N}$.

Ši įtempimo jėga ištempia guminę timpą $T = k\cdot\Delta l$, čia $k = F_1/x_1$. Taigi $\Delta l = T/k = 9{,}5\cdot10^{-3}$ m.

Jėga $F = T\sin\alpha$, o taip pat

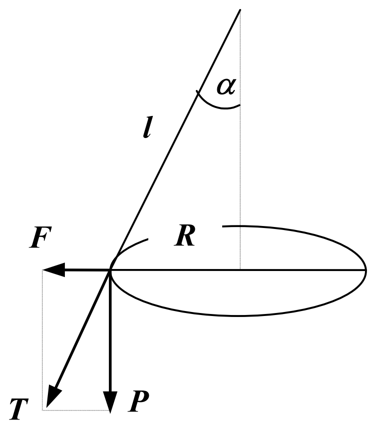
$$F = m\omega^2 R = 4\pi^2\nu^2 ml\sin\alpha.$$

Sulyginus *F* išraiškas ir išreiškus *l* gaunama

$$l = \frac{T}{4\pi^2\nu^2 m} = \frac{P}{4\pi^2\nu^2 m\cos\alpha} = 7{,}25\cdot10^{-2}\ (\mathrm{m})\,.$$

Taigi $l_0 = l - \Delta l = 6{,}3$ (cm).

Ats.: $l_0 = 6{,}3$ cm.



20 pav.

43. Kosminio ryšio palydovas sukasi apie Žemę ekvatoriaus plokštumoje iš vakarų į rytus. Kokiame aukštyje nuo žemės paviršiaus turi suktis palydovas, kad jis nejudėtų atžvilgiu stebėtojo, esančio Žemėje ?

Sprendimas

Palydovas turi suktis apskritimine orbita, todėl Žemės traukos jėga F_G turi kompensuoti palydovo sukimosi apskritimine orbita išcentrinę inercijos jėgą F_i:

$$F_G = F_i .$$

Palydovas nutolęs nuo Žemės centro atstumu $R + h$, o jį veikiančias jėgas galima užrašyti taip:

$$F_G = \gamma \frac{Mm}{(R+h)^2} ,$$

$$F_i = m \frac{v_I^2}{R+h} ,$$

čia γ - gravitacinė konstanta, M – Žemės masė, m – palydovo masė, R – Žemės spindulys, h – palydovo aukštis, $v_I = \omega(R + h)$ – palydovo sukimosi greitis sutampantis su stebėtojo esančio ant Žemės sukimosi greičiu, $\omega = 2\pi/24 \cdot 3600 = 7{,}27 \cdot 10^{-5}$ rad/s – Žemės sukimosi kampinis greitis.

$$\gamma \frac{Mm}{(R+h)^2} = m\omega^2 (R+h),$$

$$(R+h)^3 = \gamma \frac{M}{\omega^2} ,$$

$$h = \sqrt[3]{\gamma \frac{M}{\omega^2}} - R ,$$

$$h = \sqrt[3]{6{,}7 \cdot 10^{-11} \frac{5{,}96 \cdot 10^{24}}{\left(7{,}27 \cdot 10^{-5}\right)^2}} - 6{,}37 \cdot 10^6 = 35{,}9 \cdot 10^6 \text{ (m)} = 35900 \text{ km}.$$

Ats.: h = 35900 km.

44. Rasti dirbtinio Saulės palydovo apsisukimo periodą T_p, jeigu žinoma, kad jo orbitos spindulys R_p yra 24 milijonais kilometrų didesnis už Žemės orbitos spindulį R.

Sprendimas

Iš trečio Keplerio dėsnio:

$$\frac{T_p^2}{T^2} = \frac{R_p^3}{R^3} ,$$

$$T_{\mathrm{p}}^2 = T^2 \frac{R_{\mathrm{p}}^3}{R^3},$$

$$T_{\mathrm{p}} = T\sqrt{\frac{R_{\mathrm{p}}^3}{R^3}}.$$

čia T – Žemės apsisukimo apie Saulę periodas. Kadangi $R_{\mathrm{p}} = R + 24\cdot10^9$ (m), tai

$$T_{\mathrm{p}} = 365\cdot\sqrt{\frac{\left(1{,}5\cdot10^{11} + 0.24\cdot10^{11}\right)^3}{\left(1{,}5\cdot10^{11}\right)^3}} = 456 \ \text{(dienos)}.$$

Ats.: $T_{\mathrm{p}} = 456$ dienos.

Kūnų sukimosi dinamika

Kūno inercijos momentas atžvilgiu sukimosi ašies

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m ,$$

čia r – kūno tūrio dalies, kurios masė dm, nuotolis nuo sukimosi ašies.

Integruojant gaunami skirtingos formos kūnų inercijos momentai atžvilgiu ašies, einančios per jų masės centrą:

1) plonas vienalytis diskas (sukimosi ašis eina per jo centrą ir statmena jo plokštumai)

$$I = \frac{1}{2} mR^2 ,$$

čia R – disko spindulys, m – jo masė;

2) tuščiaviduris cilindras, kurio vidinis spindulys atžvilgiu sukimosi ašies R_1, o išorinis - R_2

$$I = \frac{1}{2} m\left(R_1^2 + R_2^2\right) .$$

Kai $R_1 \cong R_2 = R$ – plonasienis tuščiaviduris cilindras

$$I \cong mR^2 ;$$

3) vienalyčio rutulio, kurio spindulys R, o masė m, inercijos momentas atžvilgiu ašies einančios per jo centrą.

$$I = \frac{2}{5} mR^2 ;$$

4) vienalyčio strypo, kurio ilgis l, o masė m, inercijos momentas atžvilgiu sukimosi ašies statmenos strypo ilgiui ir einančios per jo vidurį

$$I = \frac{1}{12} ml^2 .$$

Žinant kūno inercijos momentą atžvilgiu ašies, einančios per jo masės centrą I_C, galima rasti to kūno inercijos momentą atžvilgiu bet kurios jai lygiagrečios ašies, kuri yra nutolusi atstumu d nuo jo masės centro (Šteinerio teorema)

$$I = I_C + md^2 .$$

Fizinės svyruoklės svyravimo periodas

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}} ,$$

čia I – fizinės svyruoklės inercijos momentas atžvilgiu ašies, einančios per pakabinimo tašką, m – fizinės svyruoklės masė, g – laisvojo kritimo pagreitis, a – fizinės svyruoklės masės centro nuotolis iki pakabinimo taško, $\frac{I}{ma}$ - fizinės svyruoklės redukuotasis ilgis.

Matematinės svyruoklės svyravimo periodas

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} ,$$

čia l – svyruoklės ilgis (nuotolis nuo svyravimo ašies iki materialaus taško).

45. Rasti Žemės sukimosi apie savo ašį inercijos momentą ir judesio kiekio momentą.

Sprendimas

Laikant Žemę rutulio formos kūnu, kurios masė M ir spindulys R, jos inercijos momentas:

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5}\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}\cdot\left(6{,}37\cdot 10^{6}\right)^2 = 9{,}6\cdot 10^{37}\ (\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2).$$

Žemės, kurios kampinis sukimosi greitis $\omega = \frac{2\pi}{T}$, judesio kiekio momentas:

$$L = I\cdot\omega = I\cdot\frac{2\pi}{T} = 9{,}6\cdot 10^{37}\cdot\frac{2\cdot 3{,}14}{24\cdot 3600} = 6{,}98\cdot 10^{33}\left(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}\right),$$

čia $T = 24$ h.

Ats.: $I = 9{,}6\cdot 10^{37}$ kg·m^2; $L = 6{,}98\cdot 10^{33}$ kg·m^2/s.

46. Rasti Žemės sukimosi apie Saulę inercijos momentą ir judesio kiekį.

Sprendimas

Kadangi Žemės vidutinis spindulys ($R = 6{,}37\cdot 10^6$ m) yra daug mažesnis už jos sukimosi apie Saulę orbitos (beveik apskritimo formos) spindulį ($R_S = 1{,}5\cdot 10^{11}$ m), tai Žemę galima laikyti materialiu tašku, kurio sukimosi apie Saulę inercijos momentas:

$I_S = M\cdot(R_S)^2 = 5{,}96\cdot 10^{24}\cdot(1{,}5\cdot 10^{11})^2 = 1{,}34\cdot 10^{47}$ kg·m^2.

Palyginus Žemės sukimosi apie savo ašį inercijos momento vertę I (ankstesnis uždavinys) su jos sukimosi apie Saulę inercijos momento verte I_S matyti, kad I_S yra apytikriai 10^{10} kartų didesnis už I.

Žemės sukimosi apie Saulę judesio kiekio momentas laikant, kad Žemė apskrieja apie Saulę per $T_S = 365$ paras:

$$L_S = I_S\cdot\omega_S = I_S\cdot\frac{2\pi}{T_S} = 1{,}34\cdot 10^{47}\cdot\frac{2\cdot 3{,}14}{365\cdot 24\cdot 3600} = 2{,}67\cdot 10^{40}\ (\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}).$$

Ats.: $I_S = 1{,}34\cdot 10^{47}$ kg·m^2; $L_S = 2{,}67\cdot 10^{40}$ kg·m^2/s.

47. Vienalyčio $R = 0{,}2$ m disko kraštas liestinės kryptimi veikiamas jėga $F = 98{,}1$ N. Diskas veikiamas trinties jėgos momento $M_{tr} = 5$ N·m. Rasti disko sunkį P, jeigu žinoma, kad diskas sukasi pastoviu kampiniu pagreičiu $\varepsilon = 100$ rad/s^2.

Sprendimas

Užrašoma kūno (disko) sukamojo judesio dinamikos lygtis:

$I\cdot\varepsilon = F\cdot R - M_{tr}$.

Disko inercijos momentas $I = \frac{1}{2}mR^2$, kurio išraišką įstačius į lygtį gauname m:

$$\frac{1}{2}mR^2 \cdot \varepsilon = F \cdot R - M_{\text{tr}},$$

$$m = \frac{2 \cdot (F \cdot R - M_{tr})}{\varepsilon \cdot R^2},$$

$$m = \frac{2 \cdot (98{,}1 \cdot 0{,}2 - 5)}{100 \cdot 0{,}2^2} = 7{,}31(\text{kg}),$$

o disko sunkis

$P = mg = 7{,}31 \cdot 9{,}8 = 71{,}6$ (N).

Ats.: $P = 71{,}6$ N.

48. Du $P_1 = 20$ N ir $P_2 = 10$ N svarsčiai pririšti prie virvės galų, kuri permesta $P = 10$ N svorio skridinį. Rasti 1) pagreitį, kuriuo juda svarsčiai; 2) virvės įtempimo jėgas T_1, T_2. Skridinį laikyti vienalyčiu disku. Trinties neįskaityti.

Sprendimas

Šiame uždavinyje reikia parašyti dinamikos lygtis atskirai kiekvienam svarsčiui ir skridiniui. Kadangi $P_1 > P_2$, tai pirmasis svarstis pagreičiu a_1 juda žemyn veikiamas savo sunkio P_1, bet stabdomas tempimo jėgos T_1 (21 pav.), tai:

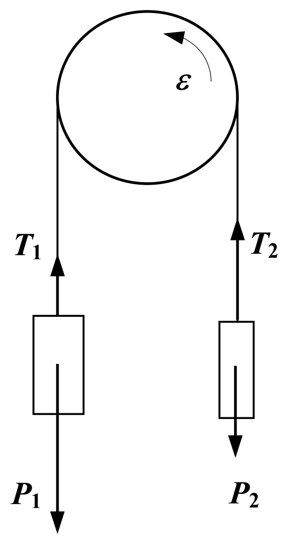
$m_1a_1 = P_1 - T_1$, (1)

o antras svarstis tokiu pat pagreičiu (svarsčių judėjimo pagreičiai yra vienodi $a_1 = a_2 = a$, nes virvė netampri) kyla į viršų veikiamas tempimo jėgos T_2 ir stabdomas savo sunkio:

$m_2a_2 = T_2 - P_2$. (2)

Tempimo jėgų skirtumas sukuria jėgų momentą, kuris priverčia skridinį, kurio inercijos momentas I, suktis kampiniu pagreičiu ε:

$I\varepsilon = (T_1 - T_2)R$. (3)



21 pav.

Iš (1) ir (2) lygčių išreiškiamos tempimo jėgos ir įstatomos į (3), o taip pat panaudojamas tangentinio pagreičio ryšys su kampiniu pagreičiu $a_t = \varepsilon R = a$ (nes virvės tempimo kryptis sutampa su liestinės skridiniui kryptimi):

$$I\frac{a}{R} = (P_1 - m_1a - P_2 - m_2a)R.$$

Išreiškus svarsčių judėjimo pagreitį

$$a = \frac{P_1 - P_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$

ir įstačius skridinio inercijos momento išraišką $I = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} R^2$

$$a = \frac{P_1 - P_2}{\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{g} + \frac{PR^2}{2gR^2}} = \frac{2g(P_1 - P_2)}{2(P_1 + P_2) + P}.$$

Įstačius skaitines vertes

$$a = \frac{2 \cdot 9{,}8 \cdot (20 - 10)}{2 \cdot (20 + 10) + 10} = 2{,}8\,(\text{m/s}^2).$$

Virvės įtempimo jėgos suskaičiuojamos atitinkamai iš (1) ir (2):

$$T_1 = P_1 - m_1 a = P_1 - \frac{P_1}{g} \cdot a = P_1 (1 - \frac{a}{g}) = 20 \cdot (1 - \frac{2{,}8}{9{,}8}) \cong 14{,}3\,(\text{N}),$$

$$T_2 = P_2 + m_2 a = P_2 + \frac{P_2}{g} \cdot a = P_2 (1 + \frac{a}{g}) = 10 \cdot (1 + \frac{2{,}8}{9{,}8}) \cong 12{,}9\,(\text{N}).$$

Ats.: 1) $a = 2{,}8$ m/s^2; 2) $T_1 \cong 14{,}3$ (N), $T_2 \cong 12{,}9$ N.

49. 19,6 N sunkio diskas neslysdamas rieda horizontaliu paviršiumi greičiu v = 4 m/s. Rasti disko kinetinę energiją.

Sprendimas

Riedančio disko pilna kinetinė energija susideda iš jo masės centro slenkamojo judesio kinetinės energijos K_s ir disko sukimosi apie jo masės centrą kinetinės energijos K_ω:

$$K = K_s + K_\omega = \frac{1}{2} m\text{v}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Laikant, kad disko spindulys yra R:

$$K = \frac{1}{2} m\text{v}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} mR^2 \left(\frac{\text{v}}{R} \right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{P}{g} \cdot \text{v}^2,$$

$$K = \frac{3}{4} \cdot \frac{19{,}6}{9{,}8} \cdot 4^2 = 24\,(\text{J}).$$

Ats.: $K = 24$ J.

50. Cilindras sukasi pastoviu 5 aps/s dažniu, ir turi 60 J energiją. Rasti cilindro judesio kiekio momentą.

Sprendimas

Besisukančio kūno (šiuo atveju cilindro) kinetinė energija:

$$K_\omega = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} L\omega,$$

čia $L = I\omega$ - judesio kiekio momentas. Išreiškus L iš kinetinės energijos išraiškos

$$L = \frac{2K_\omega}{\omega} = \frac{K_\omega}{\pi\nu},$$

$$L = \frac{60}{3{,}14 \cdot 5} = 3{,}82\,(\mathrm{kg \cdot m^2/s}).$$

Ats.: $L = 3{,}82$ kg·m^2/s.

51. Rasti žiedo, kuris neslysdamas rieda nuo 30° nuolydžio nuožulnios plokštumos, centro judėjimo pagreitį. Laikyti, kad pradiniu momentu kūnas nejudėjo. Palyginti gautą pagreitį su to paties kūno slydimo be trinties pagreičiu.

Sprendimas

Kūnui riedant nuo nuožulnios plokštumos jo potencinė energija virsta kinetine energija

$$mgh = \frac{1}{2} m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2,$$

čia I – kūno (žiedo) inercijos momentas, $h = l\sin\alpha$ - nuožulniosios plokštumos aukštis, $l = \frac{at^2}{2}$ - nuotolis, kurį rieda žiedas, a - žiedo masės centro slinkimo pagreitis, t – laikas, per kurį žiedas nurieda nuotolį l, $\mathrm{v} = at$ - žiedo masės centro slinkimo momentinis greitis, $\omega = \frac{\mathrm{v}}{R}$ - žiedo sukimosi kampinis greitis, R – žiedo spindulys. Tada

$$mgl\sin\alpha = \frac{\mathrm{v}^2}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right),$$

$$mg\frac{at^2}{2}\sin\alpha = \frac{(at)^2}{2}\left(m + \frac{I}{R^2}\right),$$

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + \frac{I}{R^2}}.$$

Įstačius žiedo inercijos momentą $I = mR^2$

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{2m} = \frac{g}{2}\cdot\sin\alpha,$$

$$a = \frac{9{,}8}{2} \cdot \sin 30^\circ = 2{,}44\,(\text{m/s}^2).$$

Jeigu žiedas be trinties slystų nuo nuožulniosios plokštumo nesisukdamas, tai su jo inercijos momentu galima nesiskaityti ($I = 0$), todėl jo slinkimo pagreitis

$$a_s = g\sin\alpha,$$

$$a_s = 9{,}8 \cdot \sin 30^\circ = 4{,}9\ (\text{m/s}^2).$$

Ats.: $a = 2{,}44$ m/s^2; $a_s = 4{,}9$ m/s^2.

52. Horizontali platforma, kurios masė $m_1 = 100$ kg, sukasi apie vertikalią ašį, einančią per jos centrą, $\nu_1 = 10$ aps/min. dažniu. Žmogus, kurio masė $m_2 = 60$ kg stovi ant platformos krašto. Kokiu dažniu pradės suktis platforma, jeigu žmogus pereis nuo platformos krašto į jos centrą? Kokį darbą atliks žmogus pereidamas iš platformos krašto į jos centrą? Platformos spindulys $R = 1{,}5$ m. Platformą laikyti apvaliu vienalyčiu disku, o žmogaus masę sukoncentruotą taške.

Sprendimas

Iš judesio kiekio momento tvermės dėsnio

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2,$$

čia $I_1 = \frac{m_1R^2}{2} + m_2R^2$ – platformos inercijos momentas ir $\omega_1 = 2\pi\nu_1$ – platformos sukimosi kampinis greitis, kai žmogus stovi ant platformos krašto, $I_2 = \frac{m_1R^2}{2}$ - platformos inercijos momentas ir $\omega_2 = 2\pi\nu_2$ platformos kampinis sukimosi greitis, kai žmogus stovi platformos centre.

$$\left(\frac{m_1R^2}{2} + m_2R^2\right) \cdot 2\pi\nu_1 = \frac{m_1R^2}{2} \cdot 2\pi\nu_2,$$

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{m_1R^2 + 2m_2R^2}{m_1R^2} = \nu_1 \frac{m_1 + 2m_2}{m_1} = 22\,(\text{aps/min}).$$

Darbas, kurį atlieka žmogus pereidamas nuo platformos krašto į jos centrą, yra lygus platformos, besisukančios su žmogumi, kinetinės energijos pokyčiui

$$A = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 - \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1R^2}{2} \cdot (2\pi\nu_2)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{m_1R^2}{2} + m_2R^2\right) \cdot (2\pi\nu_1)^2,$$

$$A = \pi^2R^2\left[m_1\nu_2^2 - (m_1 + 2m_2)\nu_1^2\right],$$

$$A = 3{,}14^2 \cdot 1{,}5^2\left[100 \cdot 0{,}37^2 - (100 + 2 \cdot 60) \cdot 0{,}17^2\right] \cong 163\,(\text{J}).$$

Ats.: $\nu_2 = 22$ aps/min; $A \cong 163$ J.

53. Vienalytis rutuliukas pakabintas ant siūlo, kurio ilgis lygus rutuliuko spinduliui. Kiek kartų rutuliuko mažų svyravimų periodas yra didesnis už matematinės svyruoklės, kurios ilgis nuo pakabinimo taško iki masės centro yra toks pat kaip svyruoklės su rutuliuku, periodą ?

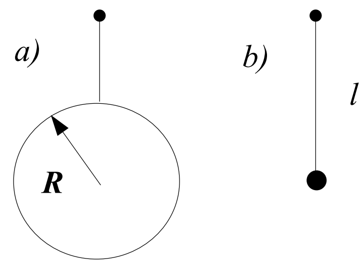
Sprendimas

Tegu rutuliuko spindulys yra R, o masė - m. Svyruoklės su rutuliuku (fizinė svyruoklė – 22a pav.) mažų svyravimo periodas

$$T_{\mathrm{r}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}},$$

čia $I = \frac{2}{5}mR^2 + m(2R)^2$ - rutuliuko inercijos momentas atžvilgiu sukimosi ašies einančios per fizinės svyruoklės pakabinimo tašką, a – nuotolis nuo fizinės svyruoklės pakabinimo taško iki jos masės centro (šiuo atveju $a = 2R$, nes rutuliuko masė daug didesnė už siūlo masę, t.y. fizinės svyruoklės masės centras sutampa su rutuliuko centru).

$$T_{\mathrm{r}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}mR^2 + m(2R)^2}{mg(2R)}} = 2\pi\sqrt{\frac{11}{5}\cdot\frac{R}{g}}.$$



22 pav.

Matematinės svyruoklės (22b pav.) mažų svyravimų periodas

$$T_{\mathrm{m}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

čia l – matematinės svyruoklės ilgis, kuris šiuo atveju $l = 2R$. Įstačius l

$$T_{\mathrm{m}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}.$$

Galutinai

$$\frac{T_{\mathrm{r}}}{T_{\mathrm{m}}} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{11R}{5g}}}{2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}} = \sqrt{\frac{11}{10}} \cong 1{,}05.$$

Ats.: $\frac{T_{\mathrm{r}}}{T_{\mathrm{m}}} = 1{,}05$ karto.

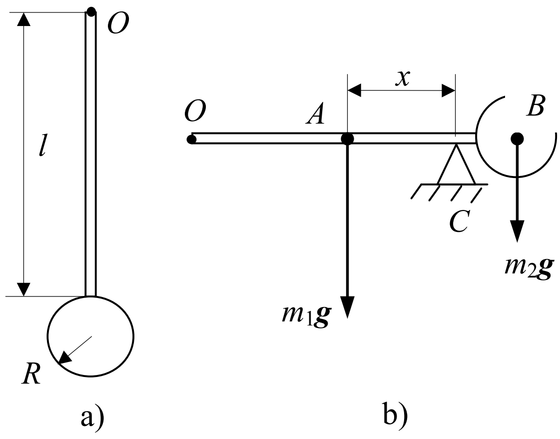
54. Vienalytis 1 m ilgio ir 2 kg masės strypas pakabintas už jo galo. Priešingame strypo gale pritvirtintas 20 cm skersmens ir 1 kg masės rutulys. Rasti tokios svyruoklės svyravimo periodą.

Sprendimas

Fizinės svyruoklės svyravimo periodas $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mga}}$.

Svyruoklės sudaryta iš dviejų skirtingos formos ir masės kūnų, todėl jos inercijos momentas I bus lygus atskirų ją sudarančių kūnų inercijos momentų sumai.

Vienalyčio strypo, kurio ilgis l, o masė m_1, sukimosi apie ašį O, einančią per jo galą, inercijos momentas



23 pav.

$$I_S = \frac{1}{3} m_1 l^2;$$

Rutulio, kurio spindulys R, o masė m_2, inercijos momentas atžvilgiu sukimosi ašies O, nutolusios nuo rutulio masės centro atstumu $l + R$ (23a pav.)

$$I_R = \frac{2}{5} m_2 R^2 + m_2 (l + R)^2 .$$

Tada visas svyruoklės inercijos momentas:

$$I = \frac{1}{3} m_1 l^2 + \frac{2}{5} m_2 R^2 + m_2 (l + R)^2 ,$$

I = 1,884 kg·m^2.

Svyruoklės masės centro nuotolis $OC = a$ nuo pakabinimo taško O randamas iš pusiausvyros sąlygos (23b pav. A – strypo masės centras, B – rutulio masės centras, C - atramos taškas, kuris pusiausvyros atveju sutampa su svyruoklės masės centru):

$$m_1 g x = m_2 g\left(\frac{l}{2} + R - x\right),$$

$$x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left(\frac{l}{2} + R\right),$$

$$a = \frac{l}{2} + x = \frac{l}{2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left(\frac{l}{2} + R\right),$$

a = 0,698 m.

Svyruoklės masė $m = m_1 + m_2 = 3$ (kg).

Įstačius I, a, m vertes į fizinės svyruoklės svyravimo periodo formulę:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}884}{3 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}698}} = 1{,}9 \text{ (s)}.$$

Ats.: T = 1,9 s.

Literatūra

1. В.С.Волькенштейн. Сборник задач по общему курсу физики. Москва, "Наука" 1969, 464 с.

2. Е.В.Фирганг. Руководство к решению задач по курсу общей физики. Москва, "Высшая школа" 1978, 351 с.

3. H.C.Ohanian. Physics, Vol. I, W.W.Norton & Company, New York–London, 1995, 594 p.