Gintautas Bareikis

Aukštoji matematika. (I d.)
Algebros pagrindai

Paskaitų ciklas skirtas vakarinių studijų, ekonomikos bei verslo vadybos specialybių studentams.

Turinys

I. ĮVADAS

1.1 Logikos bei aibių teorijos sąvokos

Aibe vadinsime, bet kokį objektų rinkinį. Objektai sudarantys minėtąjį rinkinį vadinami aibės *elementais*. Ateityje aibes žymėsime didžiosiomis lotyniškosios abėcėlės raidėmis, o jos elementus mažosiomis. Taisyklę, kuria vienos aibės elementui priskiriamas vienas kitos (arba tos pačios) aibės elementas, vadinsime *funkcija*.

Matematikos tyrimo objektas - *teiginiai*, t.y. sakiniai, kurie yra teisingi arba klaidingi. Priminsime, kad pradiniai, apriori (iš anksto) teisingi teiginiai, vadinami *aksiomomis* arba elementariaisiais teiginiais. Teiginių aibėje apibrėžkime operacijas, kurių atžvilgiu ši aibė būtų uždara. Kitaip tariant, atlikdami teiginių veiksmus gausime teiginį, kurį vadinsime *sudėtiniu teiginiu* arba *logine forma*.

Teiginių veiksmai

1.*Neigimo operacija. Tarkime duotas teiginys p. Tuomet sakinį ne p (žymėsime* $\overline{p}$*), vadinsime duotojo teiginio p neiginiu. Jo teisingumo reikšmė priešinga teiginio p teisingumo reikšmei.* Pavyzdžiui paneigę teiginį 'yra natūralusis skaičius mažesnis už 0' gausime, 'nėra natūraliojo skaičiaus mažesnio už 0'.

2.*Teiginių disjunkcija. Sakinį ' p arba q ' vadinsime teiginių p, q disjunkcija, (žymėsime* $p \vee q$*). Šis sakinys laikomas klaidingu tuo atveju, kai abu teiginiai* p, q *yra klaidingi.* Taigi, likusiais atvejais teiginys bus teisingas. Teiginys 'yra žalios spalvos automobilių' arba ' nėra žalios spalvos automobilų' yra teisingas. Šis veiksmas kartais vadinamas logine sudėtimi.

3.*Teiginių konjunkcija. Sakinį 'p ir q ' vadinsime šių teiginių konjunkcija (žymėsime* $p \wedge q$ *). Šis sakinys laikomas teisingu tuo atveju, kai abu teiginiai* p, q *teisingi.* Vadinasi teiginys 'duotojo trikampio kampų suma ne didesnė už 180 laipsnių' ir 'duotojo trikampio kampų suma didesnė už 180 laipsnių'- neteisingas. Ši loginė operacija kartais dar vadinama logine daugyba.

4. *Teiginių implikacija. Sakinį 'jei p tai q ' vadinsime šių teiginių implikacija (žymėsime* $p \Rightarrow q$ *). Šis sakinys laikomas klaidingu tik tuo atveju, kai p teisingas, o q klaidingas.* Vadinasi teiginys, jei 'lygiakraščio trikampio kraštinės nelygios,' tai 'lygiakraščio trikampio kampai nelygūs' yra teisingas, nes abu teiginiai klaidingi. Teiginys 'p' yra vadinamas prielaida, o 'q' išvada.

5. *Teiginių ekvivalencija. Sakinį 'p tada ir tik tada kai q ' vadinsime šių teiginių ekvivalencija. Šis sakinys laikomas teisingu tuo atveju, kai abiejų teiginių teisingumo reikšmės sutampa.* Šią operaciją žymėsime $p \Leftrightarrow q$. Kartais šis teiginys dar vadinamas logine lygybe. Pateiksime pavyzdį. Sakykime, kad teiginys q nusakytas sakiniu 'trikampis yra statusis', o teiginys p nusakomas sakiniu 'trikampio įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai'. Tuomet teiginys '$p \Leftrightarrow q-$ ' skaitytojui gerai žinoma Pitagoro teorema.

Naudojant šias logines operacijas, galime sukonstruoti sudėtinius teiginius. Aukščiau apibrėžtos operacijos vadinamos paprasčiausiomis loginėmis formomis. Reiškinius, sudarytus baigtinį skaičių kartų atlikus logines operacijas tarp teiginių, nurodydami jų atlikimo tvarką skliaustų pagalba, gausime sudėtinius teiginius, kuriuos vadinsime loginėmis formomis. Teiginys

$$\overline{((p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r))}$$

- loginė forma priklausanti nuo teiginių p, q, r. 'Jei $\underline{studentai\, geria\, daug\, alaus}$ ir $\underline{nesimoko}$, tai $\underline{jie\, prastai\, mokosi}$ arba $\underline{nebaigia\, universiteto}$'- tai neformalizuota loginė forma. Pabrauktus teiginius pažymėję p, q, r, s atitinkamai galime formalizuoti šį teiginį tokiu būdu: $'(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)'$.

Dvi logines formas $\alpha(p_1, \dots p_n)$ ir $\beta(p_1, \dots p_n)$, kurių teisingumo reikšmės sutampa, esant bet kokiam teiginių $p_1, \dots, p_n$ teisingumo reikšmių rinkiniui, vadinsime logiškai ekvivalenčiomis ir žymėsime

$$\alpha(p_1, \ldots, p_n) \equiv \beta(p_1, \ldots, p_n).$$

Loginę formą, kurios teisingumo reikšmė visuomet lygi 1 vadinsime tautologija. Paprastai tautologija žymima raide I. Jeigu loginės formos reikšmė visuomet lygi nuliui, tai ši forma vadinama loginiu nuliu. Ją žymime raide O.

Tautologija yra vadinama logikos dėsniu. Pateiksime keletą logikos dėsnių.

1. Dvigubo neigimo dėsnis: $(\overline{\overline{p}} \equiv p) \equiv I$.

2. Negalimo trečiojo dėsnis: $(p \vee \overline{p}) \equiv I$.

3. Prieštaravimo dėsnis: $(p \wedge \overline{p} \equiv O) \equiv I$.

4. Kontrapozicijos dėsnis: $((p \Rightarrow q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}))$.

5. Silogizmo dėsnis: $(((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)) \equiv I$.

6. de Morgano dėsniai:

$$\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}, \ \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}.$$

Be to

$$7. \quad \overline{p \Rightarrow q} \equiv p \wedge \overline{q}.$$

$$8. \quad \overline{p \Leftrightarrow q} \equiv \overline{p} \Leftrightarrow q.$$

9. Teisingos išvados dėsnis: jei žinoma, kad teiginys $p \Rightarrow q$ ir sąlyga p yra teisingi teiginiai, tai tuomet išvada irgi teisinga.

10. Klaidingos išvados dėsnis: jeigu teiginys $p \Rightarrow q$ yra teisingas, o jos išvada q yra klaidingas teiginys, tai sąlyga p yra klaidingas teiginys.

Ateityje susidursime su dvejopo pobūdžio teiginiais. Vienus teiginius mes laikysime apriori teisingais, juos vadinsime aksiomomis, o teiginius, kurių teisingumą nustatysime samprotaudami, naudodami logikos dėsnius bei aksiomas, vadinsime teoremomis. Aksiomos, tai pirminiai teiginiai, kurių pagrindu kuriama matematinė teorija. Dar kartą pabrėžiame, kad dėl aksiomų teisingumo yra susitariama, skirtingose teorijose ta pati aksioma gali turėti skirtingas teisingumo reikšmes. Teorema vadinsime teiginį $p \Rightarrow q$. Pradinę teoremą paprastai vadiname tiesiogine. Tuomet teoremą $q \Rightarrow p$ vadinsime atvirkštine pradinei. Teoremą $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}-$ priešinga pradinei teoremai, o teoremą $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ priešinga atvirkštinei teoremai. Pasirodo, kad kai kurios iš šių teoremų yra ekvivalenčios. Pavyzdžiui teisinga tokia

1 **Teorema** *Tiesioginė ir priešinga atvirkštinei teoremos yra ekvivalenčios, t.y.*

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

Atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad tai yra kontrapozicijos dėsnis!

2 **Teorema** *Atvirkštinė ir priešingoji teoremos yra ekvivalenčios.*

Šių teoremų įrodymą paliekame skaitytojui. Įrodymui naudokite teisingumo lenteles.

Tarkime, kad teiginys p skamba taip: *'trikampis yra status'* , o teiginys q : *'trikampio įžambinės kvadratas lygus statinių kvadratų sumai'.* Tada teiginys $(p \Leftrightarrow q)$ - skaitytojui gerai žinoma, Pitagoro teorema.

Teiginį $p \Leftrightarrow q$ vadinsime teorema su būtinomis ir pakankamomis sąlygomis.

1.2 Aibių algebros sąvokos

Kaip jau esame minėję, aibe vadiname bet kokį objektų rinkinį, o objektus sudarančius aibę vadiname jos elementais. Paprastai aibės elementus nurodysime tarp riestinių skliaustų, pavyzdžiui $A = \{a, b, c\}$. Sakinį, *a yra aibės A elementas* trumpinsime tokiu būdu: $a \in A$. Jeigu elemento b nėra aibėje B tai pastarąjį sakinį trumpai rašysime $b \notin B$. Simboliniu užrašu $\forall x \in A \ldots$ žymėsime sakinį, kad visi aibės A elementai turi savybę nurodytą daugtaškio vietoje, o simbolinis užrašas $\exists x \in A \ldots$ reiškia sakinį, kad yra aibėje A bent vienas elementas turintis savybę, nurodytą daugtaškio vietoje.

Tarkime, kad daugtaškio vietoje nurodyta kokia nors sąlyga (sakinys su kintamuoju) $P(x)$. Pažymėkime S_1 teiginį '$\forall x \in A, P(x)$ '. Tada $\overline{S_1}$ reiškia tokį teiginį $\exists x \in A, \overline{P(x)}$

ir atvirkščiai, jeigu S_2 yra teiginys $\exists x \in A, P(x)$, tai $\overline{S_2}$ reiškia teiginį $\forall x \in A, \overline{P(x)}$. Pateiksime pavyzdį.

Tarkime, kad aibę A sudaro nelygybės $(x-2)\sin x > 0$ sprendiniai. Tarkime, kad $P(x)$ yra reikalavimas, kad $x < 0$. Tada sakinys $\exists x \in A,\ x < 0$ reiškia, kad egzistuoja neigiamas nelygybės sprendinys.

Naudodamiesi aukščiau pateiktais žymėjimais aibę galime užrašyti tokiu būdu: $A = \{x; x \in A\}$. Aibę turinčią vieną elementą žymime $A = \{a\}$. Aibę $\{x, x \neq x\}$ vadinsime tuščia. Ją žymėsime simboliu $\emptyset$. Sakysime, kad aibė A yra aibės B *poaibis* (žymėsime $A \subset B$), jeigu $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$. Sakysime, kad aibės A, B yra *lygios* ($A = B$), jeigu $A \subset B$ ir $B \subset A$. Aibių A ir B sankirta (žymėsime $A \cap B$) vadinsime aibę $\{x, x \in A \wedge x \in B\}$. Aibę $D = \{x, x \in A \vee x \in B\}$ vadinsime aibių *sąjunga*, kurią žymėsime $A \cup B$. Sakysime, kad aibės nesikerta, jeigu jų sankirta sutampa su tuščia aibe. Aibių A ir B skirtumu, kurią žymėsime $A \setminus B$, vadinsime aibę $A \setminus B = \{x, x \in A \wedge x \notin B\}$. Tarkime, kad visos nagrinėjamos aibės yra kokios nors aibės poaibiai. Šią aibę vadinsime *universalia*, ir žymėsime I. Aibės A papildiniu, kurią žymėsime $\overline{A}$, vadinsime aibę $\overline{A} = \{x \in I, x \notin A\}$. Tarkime, kad A, B bet kokios aibės. Tada šios aibės poaibių visumą $\mathcal{A}$ vadinsime *klase*.

Kai kurios svarbesnės aibių veiksmų savybės:

1. $B \setminus (B \setminus A) = A \cap B$.
2. $\overline{\overline{A}} = A$.
3. $A \cap B = B \cap A$ ir $A \cup B = B \cup A$.
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Beje, paskutiniosios dvi formulės vadinamos de Morgano formulėmis, analogiškai kaip ir logikos algebroje. Pastarąsias lygybes siūlome skaitytojui įrodyti pačiam.

Uždaviniai

1. Kokios teiginių $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow r, ((p \Rightarrow q) \wedge r) \vee q$ teisingumo reikšmės, jeigu p; $2 \times 2 = 6$, q; $2 \times 4 = 8$, r; $3 - 1 = 2$.

2. Paneikite duotą teiginį: ”jei šiandien lis lietus ir nebus paskaitų, tai eisime į parodą ir žiūrėsime paveikslus arba dirbsime skaitykloje.”

3. Patikrinkite, ar pateiktos loginės formos yra dėsniai (tautologios):

$$1) \quad \big((p \Rightarrow (q \wedge r)) \Leftrightarrow \big((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)\big)\big)$$

$$2) \quad \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow r\big) \Rightarrow \big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big)$$

4. Paneikite duotuosius teiginius: ”Visi aibės elementai neigiami”, ”yra sąžiningų teisininkų”, (”Trikampio kraštinės lygios” arba ”trikampio kampai lygūs”), Jei ”$a < b$” tai ”$a^2 < b^2$” arba $a \geq b$ ir $b = c$.

5. Sudarykite loginės formos teisingumo lentelę:

$$\overline{(}(p \Rightarrow r) \Rightarrow (q \wedge r)) \vee (q \Leftrightarrow r).$$

6. Duota teorema: *jei* $a < b$ *tai* $a + c < b + c$. Užrašykite šiai teoremai atvirkštinę, priešingą, priešingą atvirkštinei.

7. Įrodykite, kad tiesioginė bei priešinga atvirkštinei teoremos yra ekvivalentūs teiginiai.

8. Tarkime, kad universali aibė $I = [-30, 30]-$ yra realiųjų skaičių intervalas. Sakykime, kad $A = \{-5, 2, 6, 15\}$, $B = (-5, 15)-$ realiųjų skaičių intervalas, $C = \{2, 3, 6\} \vee (7, 11]$.

a) Raskite šių aibių papildinius.

b) Raskite aibes: $(A \cap B)^c, (C^c \cup B) \setminus A, A \cap C$.

9. Raskite aibės $\{a, b, 1, 2\}$ visus poaibius. Tarkime, kad aibėje yra n elementų. Kiek skirtingų poaibių galima sudaryti iš minėtos aibės elementų?

10. Užrašykite nelygybių

$$x^2 - 9 \leq 0, |x| - 2 > 0, x^2 - 3|x| + 2 > 0$$

sprendinių aibių sankirtą ir sąjungą. Koks trečiosios nelygybės sprendinių aibės papildinys?

11. Ar teisingi teiginiai: Jei $A \setminus B = \emptyset$ tai $A \subset B$. Jei $A \setminus B = A$, tai $B = \emptyset$.

II. MATRICOS.
KVADRATINIŲ MATRICŲ DETERMINANTAI

2.1 Matricos. Matricų veiksmai

Apibrėžimas *Realiųjų skaičių lentelę*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & .. & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

vadinsime $m \times n$ eilės matrica. Trumpai šią lentelę žymėsime taip:

$$A = \Big(a_{ij}\Big); (i = 1, \dots, m),\ (j = 1, \dots, n).$$

Eilutė $\big(a_1, \dots, a_n\big)$ yra $1 \times n$, o stulpelis

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} -$$

$m \times 1$ eilės, matricos.

$m \times n$ eilės matricą, kurios visi elementai lygūs nuliui, vadinsime nuline matrica ir žymėsime raide O.

Aibę $m \times n$ eilės matricų, kurių elementai realūs skaičiai, žymėsime simboliu

$$\mathcal{R}_{m\times n} = \{\big(a_{ij}\big); (i = 1, \dots, m),\ (j = 1, \dots, n)\}.$$

Dvi tos pačios eilės matricas vadinsime lygiomis, jeigu jų atitinkami elementai yra lygūs ir atvirkščiai, t.y. $(a_{ij}) = (b_{ij})$ tada ir tik tada, kai $a_{ij} = b_{ij}$.

Dviejų matricų $A = \big(a_{ij}\big),\ \ B = \big(b_{ij}\big) \in \mathcal{R}_{m\times n}$ suma vadinsime matricą $C = \big(c_{ij}\big) \in \mathcal{R}_{m\times n}$, kurios elementai apibrėžiami tokiu būdu:

$$\big(c_{ij}\big) = \big(a_{ik} + b_{ik}\big);\ (i = 1, \ldots, m),\ (j = 1, \ldots, n).$$

Tarkime duotos 2×3 eilės matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tada šių matricų suma $A + B$ vadinsime tokią matricą

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matricos $A = \big(a_{ij}\big)$ ir realaus skaičiaus l sandauga vadinsime matricą

$$lA = \big(la_{ij}\big);\ (i = 1, \ldots, m),\ (j = 1, \ldots, n).$$

Tarkime, kad matricos A ir B apibrėžtos aukščiau. Raskime matricą $2A + 3B$. Taigi

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -3 \\ 5 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Matome, kad atlikdami matricų iš $\mathcal{R}_m \times n$ veiksmus, gauname matricas, kurios priklauso tai pačiai aibei. Taigi, aibė $\mathcal{R}_{m\times n}$ yra uždara šios aibės elementų sudėties ir daugybos iš skaičiaus atžvilgiu. Nurodysime kai kurias matricų veiksmų savybes. Šių savybių įrodymą paliekame skaitytojui.

1) Matricų sudėtis yra komutatyvi sudėties atžvilgiu:

$$A + B = B + A.$$

2) Matricų sudėtis asociatyvi:

$$\big(A + B\big) + C = A + \big(B + C\big).$$

3) Matricinė lygtis

$$A + X = B$$

turi vienintelį sprendinį

$$X = \big(b_{ij} - a_{ij}\big); \ (i = 1, \ldots, m), \ (j = 1, \ldots, n).$$

Nesunku matyti, kad $A + O = A, \ A + (-1)A = O$. Kitaip tariant, matricų aibėje galioja analogiška "kėlimo į kitą pusę keičiant ženklą priešingu" taisyklė, kaip ir skaičių aibėje. Beje, susitarkime ateityje matricą $(-1)A$ žymėti simboliu $-A$.

4) Matricos ir realaus skaičiaus sandauga komutatyvi: $lA = Al$.

5) Tarkime, kad $l, t \in \mathcal{R}$ ir A, B kokios tai tos pačios eilės matricos. Tuomet teisingi sąryšiai:

a) $l\big(A + B\big) = lA + lB$,

b) $(l + t)A = lA + lB$,

c) $(lt)A = l\big(tA\big)$.

Tarkime, kad $A = \big(a_{ij}\big)$ yra $m \times s$ eilės, o $B = \big(b_{ij}\big)$ yra $s \times n$ eilės, matricos. Tada matricų A ir B sandauga, žymėsime AB, vadinsime matricą $C = AB = \big(c_{ij}\big)$; $(i = 1, \ldots, m)$, $(j = 1, \ldots, n)$, čia elementas c_{ij} skaičiuojamas tokiu būdu:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}; \ (i = 1, \ldots, m), (j = 1, \ldots, n).$$

Taigi, norint apskaičiuoti matricos C elementą c_{ij} mums teks matricos A, $i-$ osios eilutės elementus, padauginti iš atitinkamų matricos B, $j-$osios eilutės elementų, o po to visas sandaugas sudėti.

Iš paskutiniojo apibrėžimo aišku, kad daugybos operaciją galima atlikti tik tarp matricų, kurios turi savybę: pirmojo daugiklio stulpelių skaičius yra lygus antrojo daugiklio eilučių skaičiui. Iš pastarųjų samprotavimų aišku, kad kvadratinių matricų aibė uždara ir daugybos atžvilgiu.

Suskaičiuokime dviejų matricų sandaugą. Tegu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Kadangi pirmasis daugiklis yra 2×3 eilės, o antroji matrica yra 3×3 eilės, tai matrica $C = A \times B$ yra 2×3 eilės. Rasime šios matricos visus elementus. Elementą c_{11} gausime matricos A pirmosios eilutės elementus daugindami iš atitinkamų antrosios matricos atitinkamų elementų ir visas sandaugas sudėję. T.y.

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 7.$$

Taigi, matricos C elementą c_{ij}, $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ gauname, pirmosios matricos $i-$ osios eilutės elementus daugindami iš atitinkamų antrosios matricos $j-$ ojo stulpelio elementų ir visas šias sandaugas sudėdami. Taigi

$$c_{12} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5,$$

$$c_{13} = 1 \cdot 5 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 17,$$

$$c_{21} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = -4,$$

$$c_{22} = -2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 3,$$

$$c_{23} = -2 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 = -18.$$

Tada

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 17 \\ -4 & 3 & -18 \end{pmatrix}.$$

Daugyba priešingai negu sudėtis, bendrai paėmus, nėra komutatyvi t.y., $AB \neq BA$. Įsitikinkime tuo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ir } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tada

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{bet} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Taigi $AB \neq BA$.

Matricą

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & .. & \dots. \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vadinsime, matricos A, (apibrėžtos (1) lygybe) transponuotąja matrica. Nesunku pastebėti, kad transponavimo operacija keičia pradinės matricos eilutes ir stulpelius vietomis. Taigi, jei pradinės matricos eilė $m \times n$, tai transponuotosios matricos eilė yra $n \times m$.

Matricą, kurios eilučių ir stulpelių skaičius vienodas, vadinsime kvadratine. Kvadratinės matricos eile vadinsime eilučių arba stulpelių skaičių.

Kvadratinės matricos elementai $a_{11}, a_{22} \dots, a_{nn}$ vadinami pagrindinės įstrižainės elementais, o elementai $a_{1n}, a_{2n-1} \dots, a_{n1}-$ šalutinės įstrižainės elementais.

Pavyzdžiui, matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

yra antros eilės kvadratinė matrica. Šios matricos pagrindinės įstrižainės elementai yra $1, 3$, o šalutinės įstrižainės elementai yra $2, -5$.

Kvadratinė matrica turinti savybę:

$$a_{ik} = a_{ki}, \ i = 1, \dots, n$$

vadinama simetrine, o matrica, kurios elementams galioja sąryšiai

$$a_{ik} = -a_{ki}, \ i = 1, \dots, n, \ i \neq k$$

vadinama asimetrine.

Matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

transformuotoji matrica yra tokia matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica S yra simetrinė

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

o matrica B yra asimetrinė

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Kvadratinę matricą, kurios visi pagrindinės įstrižainės elementai lygūs 1, o kiti elementai lygūs 0, vadinsime vienetine. Ją žymėsime simboliu E_n, indeksas apačioje reiškia matricos eilę, taigi

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & .. & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ik}),$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = 1 \end{cases}.$$

1 **Teorema** *Bet kokiai $n-$os eilės matricai teisinga lygybė:*

$$AE_n = E_nA = A.$$

Be to, vienetinė matrica yra vienintelė.

$\ominus$

2 **Teorema** *Matricų daugyba yra asociatyvi, bei distributyvi, t.y.*

$$\big(AB\big)C = A\big(BC\big) \text{ ir } A\big(B + C\big) = AB + BC.$$

$\ominus$

3 **Teorema** *Bet kokios eilės matricų aibėje teisinga lygybė*

$$\left(AB\right)^T = B^T A^T.$$

$\ominus$

2.2 Kvadratinių matricų determinantai

Pirmos eilės matricos $A = \left(a_{11}\right)$ determinantu, kurį žymėsime $|A|$, vadinsime skaičių a_{11}.

Antros eilės kvadratinės matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

determinantu, kurį žymėsime tokiu būdu:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

vadinsime skaičių

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Pavyzdžiui, matricos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

determinantas yra lygus

$$|A| = 3 \cdot 4 - (-2) \cdot 5 = 22.$$

Trečios eilės kvadratinės matricos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

determinantu, kurį žymėsime

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

vadinsime skaičių

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$\big(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}\big).$$

Apskaičiuokime matricos

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

determinantą. Naudodamiesi apibrėžimu gauname, kad

$$|A| = 4 \cdot 0 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) \cdot 2 - (3 \cdot 0 \cdot 6 + 5 \cdot (-2) \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \cdot 2)$$

$$= 0 + 30 - 12 - (0 + 10 + 8) = 0.$$

Tarkime, kad duota $n-$ os eilės kvadratinė matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tada šios matricos determinantą žymėsime simboliu

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Prieš nurodydami $n-$ os eilės determinanto skaičiavimo taisykles, pateiksime keletą sąvokų.

Apibrėžimas *$n-$ os eilės matricos determinanto $|A|$ elemento a_{ij} minoru (žymėsime M_{ij}) vadinsime determinantą, kuris lieka iš šios matricos determinanto išbraukus į– ąją eilutę bei $j-$ąjį stulpelį.*

Apskaičiuokime (2) matricos keletą minorų. Pavyzdžiui

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -22;$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11;$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 10;$$

Apibrėžimas *Kvadratinės matricos elemento a_{ij} adjunktu vadinsime skaičių*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad adjunktas ir minoras sutampa, jei elemento indeksų suma lyginė, ir skiriasi ženklu, jei elemento indeksų suma nelyginė. Nagrinėdami (2) pavyzdį gauname, kad

$$A_{11} = -2,\ A_{21} = 11,\ A_{32} = -10,\ A_{23} = 22.$$

Apibrėžimas *Tarkime, kad duota $n-$ os eilės matrica. Tada šios matricos determinantu vadinsime skaičių*

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

$(j = 1, \ldots, n)$ jeigu jis egzistuoja. Beje, pastarosios lygybės vadinamos determinanto skleidimu $j-$uoju stulpeliu arba $i-$ ąja eilute, atitinkamai.

Šiuo "neefektyviu " apibrėžimu mes šiek tiek rizikuojame, kadangi neatsakome į klausimą ar šis apibrėžimas nėra tuščias ir antra, ar skaičiuojant visuomet reikia skaičiuoti sumas visiems $(j = 1, \ldots, n)$. Iš karto nuraminsime skaitytoją, patvirtindami, kad taip iš tiesų šis apibrėžimas yra turiningas ir kas svarbiausia, kad minimas skaičius iš ties yra vienintelis visiems $(j = 1, \ldots, n)$. Apie tai plačiau, jei skaitytojas susidomėtų, galima rasti A. Matuliauskas "Algebra" arba P. Survilos ir K. Bulotos knygoje "Algebra ir skaičių teorija".

Suskaičiuokime pateiktą determinantą remdamiesi apibrėžimu.

$$|Q| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Kadangi determinanto reikšmė nepriklauso nuo to kokia eilute arba kokiu stulpelio skleisime, pasirinkime eilutę (stulpelį), kurioje (kuriame) daugiausia nulių, tarkime antrą stulpelį ir skleiskime determinantą. Taigi

$$|Q| = 0A_{12} + 2A_{22} + 0A_{32} + 0A_{42} = 2A_{22}.$$

Arba

$$|Q| = 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2Q_1.$$

Šiuo atveju jau galėtume suskaičiuoti trečios eilės determinantą Q_1, bet pastebėkime, kad šio determinanto antroje eilutėje daug nulių. Tad skleisdami determinantą Q_1 antrąja eilute gauname

$$|Q_1| = 1A_{21} + 0A_{22} + 0A_{23} = 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = 0.$$

Taigi $|Q| = 0$. *Determinanto savybės.*

1. Iš pastarojo apibrėžimo išplaukia, kad $|A| = |A^T|$.

2. Aišku, kad jei bent vienos determinanto eilutės arba stulpelio visi elementai lygūs nuliui, tai šis determinantas lygus nuliui.

3. Sukeitus determinanto eilutes vietomis, determinanto ženklas pasikeičia į priešingą, tačiau absoliuti jo reikšmė nesikeičia. Tai išplaukia iš tokių samprotavimų. Žinome, kad

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}.$$

Sukeitę determinanto eilutes vietomis, tarkime pirmąją su antrąja, ir skaičiuodami determinanto reikšmę pagal antrąją eilutę turime, kad

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$-a_{11}M_{11} + a_{12}M_{12} - \ldots + (-1)^{n}a_{1n}M_{1n}.$$

Tai ir įrodo nagrinėjamo teiginio teisingumą.

4. Jei determinantas turi bent dvi vienodas eilutes arba stulpelius, tai jo reikšmė lygi nuliui. Pastarasis tvirtinimas yra tiesioginė 3. savybės išvada, kadangi sukeitę dvi vienodas eilutes vietomis gausime determinantą, kuris turi skirtis nuo pradinio ženklu, tačiau akivaizdu, kad tuo pat metu jo reikšmė turi būti tokia pat kaip ir pradinio (juk sukeitėme vienodas eilutes) determinanto. Vadinasi įmanomas tik vienintelis atvejis- determinanto reikšmė lygi nuliui.

5. Iš determinanto eilutės (stulpelio) galime iškelti bendrą daugiklį. Tai išplaukia iš determinanto apibrėžimo.

6. Apibendrindami dvi paskutiniąsias savybes galime tvirtinti, kad jei determinantas turi dvi proporcingas eilutes (stulpelius), tai jo reikšmė lygi nuliui.

7. Jei vienos determinanto eilutės elementus padauginsime iš kitos eilutės adjunktų ir sudėsime, tai ši suma bus lygi nuliui, pavyzdžiui

$$a_{k1}A_{j1} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

8. Jeigu determinanto kurią nors eilutę (stulpelį) padauginsime iš skaičiaus nelygaus nuliui ir sudėsime su kita eilute (stulpeliu) tai naujai gautas determinantas lygus pra-

diniam. Pastarasis tvirtinimas yra tiesioginė 6. savybės išvada. Siūloma ją patikrinti skaitytojui pačiam.

9. Paskutiniąją išvadą galime papildyti tokiu teiginiu: Jei determinanto kokia nors eilutė yra kitų eilučių tiesinis darinys, tai šis determinantas lygus nuliui.

10. Matricų sandaugos determinantas yra lygus dauginamų matricų determinantų sandaugai, trumpai $|AB| = |A||B|$.

Determinanto skaičiavimas remiantis jo savybėmis.

Determinanto eilučių (stulpelių) *elemetariaisiais pertvarkiais* vadinsime tokius veiks mus: a) eilučių (stulpelių) keitimą vietomis, b) eilučių (stulpelių) dauginimą iš skaičiaus nelygaus nuliui ir c) eilučių (stulpelių) sudėtį. Remdamiesi auksčiau išvardintomis savybėmis galime tvirtinti, kad elementarieji pertvarkiai matricą keičia kita ir tokia, kad pradinės ir pakeistosios matricos determinantai sutampa.

Skaitytojui paliekame įsitikinti, kad matricos A determinantą visuomet galime perrašyti žemiau nurodytu būdu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Apskaičiuokime determinantą:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 4 & (l_1) \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 & (l_2) \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & (l_3) \\ 5 & 2 & 2 & 3 & 1 & (l_4) \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & (l_5) \end{vmatrix}.$$

Generaliniu elementu pasirinkime elementą $a_{23} = 1$. Atlikę eilučių veiksmus $l_2 - l_3$, $2l_2 - l_4$, $l_2 - l_5$ gausime determinantą

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 4 & (l_1) \\ 5 & 2 & 1 & 1 & 1 & (l_2) \\ 5 & 0 & 0 & -3 & -2 & (l_3) \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 1 & (l_4) \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & (l_5) \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 & (l_1) \\ 5 & 0 & 0 & -2 & (l_2) \\ 5 & 2 & -1 & 1 & (l_3) \\ 4 & 0 & -1 & 0 & (l_4) \end{vmatrix}.$$

Pasirinkę generaliniu elementu $a_{12} = 1$ ir atlikę eilučių veiksmą $2l_1 - l_3$ gauname

$$|A| = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 & (l_1) \\ 5 & 0 & -3 & -2 & (l_2) \\ -1 & 0 & 3 & 7 & (l_3) \\ 4 & 0 & -1 & 0 & (l_4) \end{vmatrix} = -(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Tai trečios eilės matricos determinantas, kurį suskaičiuoti siūlome skaitytojui.

2.3 Atvirkštinė matrica.

Apibrėžimas *Sakysime, kad kvadratinė matrica yra reguliari, jeigu jos rangas lygus matricos eilei. Priešingu atveju sakoma, kad matrica singuliari.*

Apibrėžimas *Matricą A^{-1} vadinsime matricai A atvirkštine matrica, jeigu*

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Taigi, norint rasti matricos atvirkštinę tenka spręsti tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} AX = E_n \\ YA = E_n, \end{cases} \tag{3}$$

čia X ir Y nežinomos matricos. Vadinasi, jei paskutiniosios lygčių sistemos sprendiniai sutampa, tai atvirkštinė egzistuoja. Pasirodo, kad teisinga tokia

4 **Teorema** *Jeigu egzistuoja* (3)*sistemos bent vienos iš lygčių sprendinys, tai egzistuoja ir kitos lygties sprendinys. Dar daugiau, šie sprendiniai sutampa.*

$\ominus$

Remiantis paskutiniąja teorema galime teigti, kad norint rasti matricos atvirkštinę reikia spręsti lygtį $AX = E$. Matrica X ir bus atvirkšinė matricai A, t.y. $X = A^{-1}$.

Raskime matricos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

atvirkštinę, naudodamiesi teoremoje pasiūlytu būdu. Taigi $X = A^{-1}$ yra lygties

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sprendinys. Atlikę daugybos operaciją kairėje lygybės pusėje gauname:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 & 2x_2 + x_4 \\ 3x_1 + 4x_3 & 3x_2 + 4x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Naudodamiesi matricų lygybės apibrėžimu gauname tokią sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_2 + 4x_4 = 1 \end{cases}.$$

Iš tiesų, tai yra dvi t.l. sistemos su dviem nežinomaisiais. Išsprendę šias sistemas gauname, kad $x_1 = 4/5,\ x_2 = -1/5,\ x_3 = -3/5,\ x_4 = 2/5.$

Taigi, ieškomoji matrica

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kyla klausimas, ar kiekviena matrica turi atvirkštinę?

5 **Teorema** *Tam, kad matrica turėtų atvirkštinę būtina ir pakankama, kad ji būtų reguliari.*

$\ominus$

6 **Teorema** *Jeigu matricos A, ir B turi atvirkštines, tai ir jų sandauga turi atvirkštinę, kuri skaičiuojama tokiu būdu:*

$$\big(AB\big)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

$\ominus$

Patikrinkime, ar iš tiesų $B^{-1}A^{-1}$ yra matricos AB atvirkštinė. Tad pakanka suskaičiuoti

$$\big(AB\big)\big(B^{-1}A^{-1}\big) = A\big(BB^{-1}\big)A^{-1} = AA^{-1} = E_n.$$

$\oplus$

Pastaba Tarkime, kad matricos A determinantas $|A| \neq 0$. Tada $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

7 **Teorema** *Jeigu matrica A turi atvirkštinę, tai ir jos transponuotoji turi atvirkštinę. Be to, transponuotosios atvirkštinė yra lygi atvirkštinės transponuotąjai, trumpai*

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

$\ominus$

Aišku, kad

$$\left(AA^{-1}\right)^T = E_n^T.$$

Todėl $\left(A^{-1}\right)^T A^T = E_n^T = E_n$. Tuo ir baigiame teoremos įrodymą.

$\oplus$

Pasirodo, matricos reguliarumas priklauso nuo to ar matricos determinantas nulis ar ne.

8 **Teorema** *Matrica A yra reguliari tada ir tik tada, kai* $|A| \neq 0$.

$\ominus$

Išvada Jei matrica singuliari, tai jos determinantas lygus nuliui.

Remdamiesi paskutiniąja teorema, 5 teoremą perrašome taip:

10 **Teorema** *Matrica A turi atvirkštinę tada ir tik tada, kai* $|A| \neq 0$. *Dar daugiau, atvirkštinė gali būti skaičiuojama tokia formule:*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\ominus$

Pirmoji teoremos dalis tiesioginė 10 teoremos išvada. Parodykime, kad pateiktoji matrica iš tiesų yra matricai A atvirkštinė. Tam pakanka parodyti, kad matricos A ir nurodytos matricos sandauga yra vienetinė matrica. Skaičiuokime:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\left(\frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} \right) = (\delta_{ik}); \ (i, k = 1, \dots, n).$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad nurodyta matrica yra atvirkštinė.

$\oplus$

Skaitytojui siūlome įsitikinti, kad antros eilės matricos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

atvirkštinė, jei ji egzistuoja, skaičiuojama tokia formule

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Raskime matricos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

atvirkštinę, naudodamiesi 8 Teoremoje pateikta formule.

Visų pirma įsitikiname, kad matrica turi atvirkštinę, t.y. $|A| \neq 0$.

$|A| = 4 + 6 - (2 + 12) = -4$. Taigi, atvirkštinė egzistuoja. Raskime šią matricą.

Randame devynis matricos A adjunktus.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \ A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Surašę šiuos adjunktus į matricą gauname

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Norint įsitikinti, kad nepadarėme klaidos, sudauginkime matricas AA^{-1}. Rezultatas turėtų būti lygus vienetinei matricai.

$$-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = E.$$

Uždaviniai

Matricos ir determinantai

1. Apskaičiuokite $AB - BA$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 5 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Jei įmanoma apskaičiuokite sandaugas AB, kai

$$a) \ A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$b) \ A = \begin{pmatrix} 15 & -12 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$a) \ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Apskaičiuokite $A + BX + CX^3$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Raskite visas antros eilės matricas, kurių kvadratas yra lygus nulinei matricai. Raskite visas antros eilės matricas, kurių kvadratas lygus vienetinei matricai.

5. Raskite pateiktų matricų atvirkštines, jeigu jos egzistuoja:

$$a)\ \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ b)\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix};c)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Išspręskite matricines lygtis 1) $AX = B$, 2) $A^2XB + E = B^{-1}A^{-1}$, kai

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Apskaičiuokite 5-oje užduotyje pateiktų matricų determinantus.

8. Apskaičiuokite determinantus:

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix};\ b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix};\ c)\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}.$$

9. Apskaičiuokite determinantus:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix};\ b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Apskaičiuokite matricos atvirkštinę, naudodamiesi atvirkštinės matricos skaičiavimo formule (naudojant adjunktus):

$$a)\ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ b)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

III. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

1.1 Tiesinių lygčių sistemos. Elementarieji pertvarkiai

Visų pirma skaitytoją supažindinsime su simboliu kurį, šiame skyrelyje, naudosime gana dažnai.

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \begin{cases} a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m, \text{kai } m > n, \\ a_n, \text{kai } m = n, \\ 0, \text{kai } m < n. \end{cases}$$

Remiantis šiuo apibrėžimu rašysime:

$$a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k, \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

čia n natūralusis skaičius. Arba

$$2 + 2^2 + 2^3 + \ldots 2^{100} = \sum_{j=1}^{100} 2^j.$$

Ateityje raidėmis $\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ žymėsime natūraliųjų, sveikųjų, racionaliųjų, bei realiųjų skaičių aibes.

Apibrėžimas *Tiesine lygtimi (toliau trumpinsime t.l.)su n nežinomųjų vadinsime tokią lygybę:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b, \quad (L) \tag{1}$$

čia $a_j, b \in \mathcal{Q}$, a_j, $(j = 1, \ldots, n)$ vadinami lygties koeficientais, $b-$ lygties laisvuoju nariu, x_j $(j = 1, \ldots, n)-$ lygties nežinomaisiais.

Lygtis $4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 7$ yra t.l. su keturiais nežinomaisiais.

Apibrėžimas *Tiesinę lygtį, kurios laisvasis narys lygus nuliui, vadinsime homogenine.*

Lygtis $3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0$ yra homogeninė.

Apibrėžimas *Racionaliųjų skaičių rinkinį $(l_1, \ldots, l_n)$ vadinsime t. l. sprendiniu, jeigu*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j l_j \equiv b.$$

Kitaip tariant, minėtasis rinkinys vadinamas sprendiniu, jeigu (1) *lygtyje nežinomų-jų vietoje įrašę šį rinkinį gauname tapatybę (abiejose lygybės pusėse gauname tokį patį skaičių).*

Pavyzdžiui skaičių rinkinys $(1, 0, 2)$ yra lygties $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 12$ sprendinys, kadangi $2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 12$.

Nesunku suprasti, kad tiesinė lygtis, kurios kairiosios pusės visi koeficientai lygūs nuliui, o dešinėje pusėje esantis laisvasis narys nelygus nuliui, sprendinių neturi. Pavyzd žiui, lygties $0x_1 + 0x_2 = 3$ sprendinių aibė yra tuščia. Tuo tarpu lygtis $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$ visada suderinta.

Sakysime, kad du t.l. sprendiniai $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ ir $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ yra lygūs, jeigu $l_j = t_j\,(j = 1, \ldots, n)$. Nesunku matyti, kad (1.1) lygtis sprendinių neturi tada ir tik tada, kai $a_j = 0$, $b \neq 0\,(j = 1, \ldots, n)$.

Pastebėsime, kad homogeninė lygtis visuomet turi sprendinį (bent jau nulinį tikrai).

Apibrėžimas *Tiesinių lygčių aibę:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2}$$

vadinsime m tiesinių lygčių, su n nežinomaisiais sistema. Ateityje trumpinsime (t.l.s.) arba ($m \times n$ eilės t.l.s.). Simbolius $a_{ij} \in \mathcal{Q}$ vadinsime t.l.s-mos koeficientais, $b_i \in \mathcal{Q}-$ t.l.s-mos laisvaisiais nariais, $x_{ij}-$ t.l.s-mos nežinomaisiais, $(i = 1, \ldots, m)$, $(j = 1, \ldots, n)$. (2)*tiesnių lygčių sistemą trumpai, galime užrašyti tokiu būdu:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ (i = 1, \ldots, m).$$

Pavyzdžiui

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 6, \\ 6x_1 - x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

yra 4×3 eilės t.l.s. .

Sakysime, kad t.l.s. yra homogeninė, jeigu $b_i = 0,\ (i = 1, \ldots, m)$.

Apibrėžimas *Skaičių rinkinį $(l_1, \ldots, l_n)$ vadinsime (2) t.l.s-mos sprendiniu, jeigu teisingos tapatybės:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_j \equiv b_i (i = 1, \ldots, m).$$

Kitaip tariant, jei rinkinys netenkina nors vienos sistemos lygties, šis rinkinys nėra sistemos sprendinys.

Pavyzdžiui, rinkinys $(1, 2, 0)$ yra sistemos

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 5, \end{cases}$$

sprendinys, kadangi

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 0 = 12, \\ 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 5, \\ 3 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 0 = 5. \end{cases}$$

Ateityje mes spręsime nurodytas t.l. sistemas ir nustatysime ar jos turi sprendinius ar ne ir jei turi, tai kiek.

Apibrėžimas *Jeigu t.l.s- os sprendinių aibė netuščia, tai šią sistemą vadinsime suderinta. Kitu atveju, t.y. jei t.l.s. sprendinių neturi, tai ją vadinsime nesuderinta.*

Apibrėžimas *Suderintą t.l.s-mą vadinsime apibrėžta, jei sprendinių aibėje yra vienintelis elementas. Kitu atveju suderinta t.l.s. bus vadinama neapibrėžta.*

Sakykime, kad duotos dvi tiesinės lygtys, su tuo pačiu nežinomųjų skaičiumi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b_1 \quad (L_1), \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = b_2 \quad (L_2).$$

Tada šių lygčių suma, kurią žymėsime $L_1 + L_2$, vadinsime tokią lygtį (L)

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j + c_j)x_j = b_1 + b_2.$$

Trumpai rašysime $L = L_1 + L_2$.

Pavyzdžiui, sudėkime dvi lygtis $L_3 + L_4$, jei

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 12, \quad (L_3) \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5. \quad (L_4)$$

Tada šios sumos rezultatas yra tokia lygtis: $3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 17$.

Lygties, tarkime L_1 ir skaičiaus $k \in \mathcal{R}$ sandauga vadinsime tokią lygtį:

$$\sum_{j=1}^{n} ka_jx_j = b_1 \quad (kL_1).$$

Pavyzdžiui, padauginę lygtį $3x_1+6x_2+3x_3 = 18$ iš $1/3$ gauname lygtį $x_1+2x_2+x_3 = 6$.

Apibrėžimas *Sakysime, kad dvi t.l.s-mos yra ekvivalenčios, jeigu jų sprendinių aibės sutampa.*

Nurodysime operacijas, kurias naudodami t.l.s-ą galėsime pertvarkyti taip, kad pradinės ir pertvarkytosios sistemų sprendinių aibės sutaptų. Žemiau išvardintos operacijos, tarp t.l. sistemos lygčių, yra vadinamos elementariaisiais pertvarkiais.

Taigi, t.l. sistemos lygčių elementariaisias pertvarkiais vadinsime tokius sistemos lygčių veiksmus:

1) sistemos lygčių keitimas vietomis;

2) bet kurios sistemos lygties dauginimas iš skaičiaus nelygaus nuliui;

3) sistemos, bet kurių dviejų ar daugiau, lygčių sudėtis.

Pastebėsime, kad jei sistemoje lygtį L_1 pridedame prie lygties L_2, tai sistemoje (lygčių aibėje) lygtis L_1 taip ir pasilieka, o lygties L_2 vietoje rašome lygtį $L_1 + L_2$. Kitaip tariant, sumą rašysime antrojo dėmens vietoje.

Tarkime, kad duota sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 1, \ (L_1) \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \ (L_2) \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \ (L_3) \\ 8x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \ \ (L_4). \end{cases}$$

Tada simboliu $-2L_2 + L_1 = L_1^1$ žymėsime tokį elementarųjį pertvarkį: "antrąją lygtį padauginame iš -2 ir pridedame prie pirmosios lygties, o gautą lygtį L_1^1 (rezultatą) rašome lygties, prie kurios pridedame, (šiuo atveju pirmosios), vietoje." Taigi, atlikę šį lygčių sistemos elementarųjį veiksmą gauname sistemą

$$\begin{cases} x_2 - 9x_3 = -9, \quad (L_1^1) \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5, \ (L_2) \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \ (L_3) \\ 8x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \ (L_4) \end{cases}$$

Pasirodo teisinga tokia

1 **Teorema** *Tiesinių lygčių sistemą, elementariaisiais pertvarkiais, keičiame į sistemą, kuri ekvivalenti pradinei.*

$\ominus$

Aptarsime t.l.s-temų sprendimo metodą, kurio esmė tokia- pradinę t.l.s. elementariaisiais pertvarkiais keičiame į tokią, kurią galime nesunkiai išspręsti.

3.2 Gauso algoritmas. Tiesinių lygčių sistemų suderinamumas

Tiesinę lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad\quad a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \\ \quad\quad\quad 0x_n = b_{r+1}, \\ \quad\quad\quad 0x_n = b_{r+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad 0x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.4}$$

kai $a_{ii} \neq 0, \ i = 1\ldots, r$, vadinsime daugiakampe t.l.sistema.

Apibrėžimas *Daugiakampę tiesinę lygčių sistemą vadinsime trapecine jei šios sistemos forma yra tokia:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \end{cases} \tag{3}$$

čia $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, \ldots r)$. Jei $r = n$ (lygčių tiek kiek nežinomųjų), tai ši sistema bus vadinama trikampe.

Teisinga tokia teorema.

1.2 **Teorema** *Bet kuri trapecinė t.l.s. yra suderinta. Jeigu $r = n$ (trikampė t.l.s.), tai sistema apibrėžta, jeigu $r < n$, tai sistema neapibrėžta. Daugiakampė t.l.s. yra suderinta, jeigu lygties koeficientai turi savybę: $b_i = 0$, visiems $i = r + 1, \ldots, m$.*

$\ominus$

Parodykime, kad trapecinė t.l.s. yra suderinta (turi sprendinį).

1. Tarkime iš pradžių, kad $r = n$. Trumpai šią sistemą galime užrašyti taip:

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1, \ldots, n.$$

Kadangi $a_{nn} \neq 0$, tai gauname

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} = l_n.$$

Priešpaskutinėje lygtyje išreiškę kintamąjį x_{n-1}, gauname tokią lygybę:

$$x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1n-1}}\big(b_{n-1} - a_{n-1n}l_n\big) = l_{n-1}.$$

Atlikdami analogiškus skaičiavimus gauname, kad bet kokiam $i = 1, \ldots n$ teisingos lygybės:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\big(b_i - a_{ii+1}l_{i+1} - \ldots - a_{in}l_n\big) = l_i,\ i = 1, \ldots, n-1,\ x_n = l_n.$$

Paskutinioji lygybių sistema yra trikampės lygčių sistemos sprendinys. Ar jis vienintelis? Tarkime priešingai. T.y. egzistuoja kitas sprendinys $(t_1, \ldots, t_n)$ toks, kad

$$\sum_{j=i}^{n} a_{ij}t_j \equiv b_i, i = 1, \ldots, n.$$

Pakartoję ankstesnius samprotavimus gauname, kad

$$t_n = \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

Bet tuomet $t_n = l_n$. Iš prieš paskutinės lygties gauname, kad $t_{n-1} = l_{n-1}$ ir t.t. Samprotaudami analogiškai gauname, kad $t_i = l_i$, $i = n-3, \ldots, 1$. Matome, kad iš tiesų $t_i = l_i$, $i = 1, \ldots, n$. Vadinasi sprendinys yra vienintelis.

2. Panagrinėkime atvejį, kai $r < n$. (3) sistemos visose lygtyse narius su kintamaisiais $x_{r+1}, \ldots, x_n$ perkelkime į dešinę pusę. Tuomet pažymėję

$$b_i' = b_i - a_{ir+1}x_{r+1} - \cdots - a_{in}x_n,\ i = 1, \cdots, r$$

iš (3) sistemos gausime tokią t.l. sistemą

$$\sum_{j=i}^{r} a_{ij}x_j = b_i',\ i = 1, \ldots, r.$$

Gavome trikampę t.l. sistemą, kurio r lygčių ir r nežinomųjų. Pakartoję 1. dalies samprotavimus gauname, kad $x_1 = l_1', \ldots, x_r = l_r'$. Be to aišku, kad $l_i' = l_i'(x_{r+1}, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$. Suteikę kintamiesiems $x_i \in \mathcal{R}$, $i = r+1, \ldots, n$ skaitines reikšmes, gausime skaitines dydžių $l_1', \ldots, l_r'$ reikšmes. Vadinasi sistemos ($r < n$) sprendinys turi tokį pavidalą:

$$(l_1', \ldots, l_r', x_{r+1}, \ldots, x_n),\ t_i \in \mathcal{R}, i = r+1, \ldots, n. \qquad (4)$$

Parinkę nežinomųjų $x_{r+1},\ x_n$ vietoje parinkę skaičius t_i, $i = r+1, \ldots, n$, gauname sistemos sprendinį. Taigi, šiuo atveju t. l. sistema turi begalo daug sprendinių. (4) sprendinys paprastai vadinamas t.l. sistemos bendruoju sprendiniu. Tuo atveju, kai bendrąjame sprendinyje parenkame konkrečias laisvųjų kintamųjų reikšmes, gauname sprendinį, kurį vadinsime atskiruoju t.l. sistemos sprendiniu. Sistemos nežinomuosius $x_1, \ldots, x_r$ vadinsime baziniais nežinomaisiais, o nežinomuosius $x_{r+1}, \ldots, x_n$ vadinsime laisvaisias nežinomaisiais. Atkreipsime skaitytojo dėmesį į tai, kad jei trapecinėje sistemoje yra n nežinomųjų ir r lygčių, tai laisvųjų nežinomųjų skaičius bus lygus $n - r$.

Trapecinės sistemos atskirąjį sprendinį, kai laisvųjų nežinomųjų vietoje parenkame nulines reikšmes, vadinsime baziniu sprendiniu.

Akivaizdu, kad daugiakampė t.l.s. yra nesuderinta, jei sistemoje egzistuoja lygtis, tarkime $i-$ oji, kurios laisvasis narys $b_i \neq 0$. Pavyzdžiui lygtis $0x_3 = 5$ sprendinių neturi. O jei lygtyse $0x_i = b_i$, visi $b_i = 0, i = r+1, \ldots, m$ tai daugiakampė sistema tampa trapecine, kadangi šiuo atveju visas šias lygtis galima praleisti, nes jas tenkina bet kokie realiųjų skaičių rinkiniai. Kitaip tariant, sprendinių aibės šios lygtys neriboja.

$\oplus$

Parodysime, konkrečiais pavyzdžiais, kaip sprendžiama trapecinė t.l.s. .

Išspręskime trikampę t.l.s sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \quad 3x_2 - x_3 = 3, \\ \qquad 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Pastebėkime, kad iš paskutiniosios lygties išplaukia, kad $x_3 = 3$. Įrašę šią x_3 reikšmę į antrąją lygtį gauname, kad $3x_2 - 3 = 3$ arba $x_2 = 2$. Turimas x_2 ir x_3 reikšmes įrašę į pirmąją lygtį gauname, kad $2x_1 + 2 + 3 = 1$ arba $x_1 = -2$. Gavome, kad duotoji trikampė sistema turi vienintelį sprendinį $(-2, 2, 3)$. Patikrinkite ar šis rinkinys yra sprendinys!

Išspręskime trapecinę tiesinę lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = 2, & (L_1) \\ \quad 3x_2 - 6x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 3, & (L_2) \\ \qquad x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 3. & (L_3) \end{cases}$$

Pastebėsime, kad spręsdami trapecines t.l.s-mas mes elgsimės analogiškai kaip ir spręsdami trikampes sistemas, tik prieš tai trapecinėje sistemoje, pradėdami nuo paskutinės lygties, paliekame vieną nežinomąjį kairėje pusėje, likusius nežinomuosius keliame į dešinę pusę ir visas sistemos lygtis pertvarkome taip, kad iš apačios į viršų kairėje pusėje būtų po vieną nežinomąjį daugiau, o dešinėje pusėje būtų skaičiai ir paprastai tie patys nežinomieji visose lygtyse, kurie bus vadinami laisvaisiais nežinomaisias.

Taigi, nežinomąjį x_3 išreiškiame per x_4 ir x_5, x_4, x_5 yra laisvieji nežinomieji. Pertvarkydami lygtis iš apačios į viršų, visose lygtyse laisvaisiais nežinomaisiais laikydami tuos pačius kintamuosius gauname sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 5x_4 - x_5, \ (L_1) \\ 3x_2 - 6x_3 = 3 + 6x_4 - 3x_5, \ (L_2) \\ x_3 = 3 - 3x_4 + 3x_5. \ (L_3) \end{cases}$$

Tiesa, kai kuriose lygtyse kai kurie laisvieji nežinomieji gali būti su nuliniais koeficientais. Pastebėsime, kad lygtyje L_2, nežinomąjį x_2 galime išreikšti tokiu būdu:

$$3x_2 = 3 + 6x_3 + 6x_4 - 3x_5.$$

Padauginę abi šios lygybės puses iš $1/3$ gauname, kad $x_2 = 1 + 2x_3 + 2x_4 - x_5$.

Įrašę į paskutinę lygtį aukščiau gautą x_3 reikšmę gauname: $x_2 = 1 + 2(3 - 3x_4 - 3x_5) + 2x_4 - x_5 = 7 - 4x_4 - 7x_5$.

Iš pirmosios lygties, išreiškę x_1 likusias nežinomaisias ir įrašę gautąsias nežinomųjų x_3, x_2 reikšmes turime lygtį

$2x_1 = 2 - 7 + 4x_4 + 7x_5 - 3 + 3x_4 - 3x_5 + 5x_4 - x_5$. Sutraukę panašius narius, o po to padauginę abi lygybės puses iš $1/2$ gausime lygtį $x_1 = -4 + 6x_4 + (3/2)x_5$.

Taigi, šios sistemos bendrasis sprendinys yra toks:

$$(-4 + 6x_4 + \frac{3}{2}x_5, 7 - 4x_4 - 7x_5, 3 - 3x_4 - 3x_5, x_4, x_5), \ x_4, x_5 \in \mathcal{R}.$$

Matome, kad šiuo atveju trapecinė t.l.s. turi begalo daug sprendinių, kurie priklauso nuo $x_4, x_5 \in \mathcal{R}$ parinkimo. Pavyzdžiui, parinkę $x_4 = 1, x_5 = 0$ gauname atskirąjį sprendinį $(2, 3, 0, 1, 0)$.

Nagrinėjamu atveju, baziniai nežinomieji yra x_1, x_2, x_3, o laisvieji nežinomieji- x_4, x_5. Parinkę $x_4 = x_5 = 0$ gauname bazinį sprendinį

$$(-4, 7, 3, 0, 0).$$

Išspręskime daugiakampę t.l.s.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \; (L_1) \\ \quad 6x_4 = 3, \; (L_2) \\ \qquad 3x_4 = 3. \; (L_3) \end{cases}$$

Padauginę trečią lygtį iš -2 ir pridėję šią lygtį prie antrosios gauname sistemą:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 2, \; (L_1) \\ \quad 0x_4 = -3, \qquad (L_2) \\ \qquad 3x_4 = 3. \qquad (L_3) \end{cases}$$

Matome, kad šios sistemos antrosios lygties netenkina joks skaičių rinkinys taigi, ši sistema sprendinių neturi.

Dabar parodysime, kad bet kokią tiesinių lygčių sistemą, naudodami elementariuosius pertvarkius, galime transformuoti į daugiakampę. Kitaip tariant bet kokiai t.l. sistemai galime nurodyti ekvivalenčią daugiakampę t.l. sistemą.

Dar kartą priminsime skaitytojui, kad nehomogeninė t.l.s. yra nesuderinta, jeigu kurios nors lygties, tarkime $i-$ osios, visi koeficientai lygūs nuliui, o laisvasis narys $b_i \neq 0$. Todėl, jeigu sistemoje yra tokia lygtis, tai ši sistema nesuderinta. Jeigu sistemoje yra lygtis (tarkime $i-$oji), kurios visi koeficientai $a_{ij} = 0$, $(i = 1, \dots, m), (j = 1, \dots, n)$ ir $b_i = 0$ tai tokią lygtį galime praleisti, nes šios lygties sprendiniais gali būti bet kas.

Gauso metodas. Nagrinėsime (2) t.l. sistemą. Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $a_{11} \neq 0$. Aišku, kad jeigu $a_{11} = 0$, tai sukeitę pirmąją lygtį su sistemos $i-$ąja lygtimi, kai pastarosios pirmasis koeficientas, sakykime $a_{i1} \neq 0$, ir peržymėję koeficientus gausime, kad pirmosios lygties pirmasis koeficientas nelygus nuliui. Lygtį, kurią pasirenkame, paprastai vadinsime generaline lygtimi, o generalinės lygties koeficientą prie nežinomojo, kurį dauginsime iš nenulinių skaičių ir sudėsime su kitų lygčių koeficientais, vadinsime generaliniu koeficientu (elementu). Visi $a_{i1} = 0$, $(i = 1, \dots, m)$ negali būti, nes tuomet nagrinėjamoji t.l.s. turėtų mažiau kintamųjų negu (2.2) sistema. Paprastai generaliniu elementu yra pasirenkamas koeficientas, kuri lygus 1 arba -1 nes, kaip pastebėsite, taip pasirinkus žymiai supaprastėja lygčių aritmetika.

Taigi, laikome, kad $a_{11} \neq 0$, tad šiuo atveju pasirenkame generaline lygtimi pirmąją lygtį, o generaliniu elementu šios lygties koeficientą a_{11}. Tuomet padauginę pirmąją (2) t.l.s-mos lygtį iš skaičių $-(a_{i1}/a_{11})$, $i = 2, \ldots, m$ ir sudėję su antrąja, trečiąja , ..., $m-$ąja sistemos lygtimis, gausime pradinei t.l.s- mai ekvivalenčią lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases} \tag{5}$$

čia

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j},\ b_j^1 = b_j - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1,$$

$i = 2, \ldots m, j = 2, \ldots n.$

Pastebėsime, kad (5) sistemos $m-1$ lygtys neturi x_1 nežinomojo. Eliminavimo procesą tęsiame toliau. Analogiškai kaip ir pirmąjame žingsnyje nemažindami bendrumo galime laikyti, kad koeficientas $a_{22} \neq 0$. Tuomet, padauginę (5) sistemos antrąją lygtį iš daugiklio $-a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ ir gautą rezultatą pridėję prie lygčių $i = 3, 4, \ldots, m$ gauname sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m3}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)}, \end{cases}$$

čia

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{2j}^{(1)},\ b_j^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}b_2^{(1)},\ i = 3, \ldots m, j = 3, \ldots n.$$

Samprotaudami visiškai analogiškai, po $m-1$, jeigu $m = n$ žingnio gausime tokią t.l.s-mą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \ldots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \end{cases}, \ a_{ii}^{i-1} \neq 0, \ i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

o jeigu $m < n$, tai tada gauname sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1^{(1)}, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mm}^{(m-1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(m-1)}x_n = b_m^{(m-1)}, \end{cases}, \ a_{ii}^{i-1} \neq 0, \ i = 1, \ldots, m \tag{7}$$

ir visais atvejais

$$a_{ij}^{(l)} = a_{ij}^{(l-1)} - \frac{a_{il}^{(l-1)}}{a_{ll}^{(l-1)}} a_{lj}^{(l-1)}, \ b_i^{(l)} = b_i^{(l-1)} - \frac{a_{il}^{(l-1)}}{a_{ll}^{(l-1)}} b_l^{(l-1)},$$

$i = l+1, \ldots m, j = l+1, \ldots, n$. Pastebėsime, kad indeksas viršuje virš koeficientų parodo kelis kartus buvo "paveiktas" koeficientas.

Tuo atveju, kai $m > n$, t.y. sistemoje lygčių daugiau negu nežinomųjų, tai atlikę n žingnių gauname sistemą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}, \\ 0 = b_{n+1}^{(n-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = b_m^{(n-1)} \end{cases} \quad a_{ii}^{i-1} \neq 0, \ i = 1, \ldots, n \tag{8}$$

Be to, atliekant t.l.s-mos elementariuosius pertvarkius gali atsitikti taip, kad kažkuriame $r < m$ žingsnyje gauname tokią sistemą:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{rr}^{(r-1)}x_r + \ldots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = b_m^{(r-1)}, \end{cases} \quad a_{ii}^{i-1} \neq 0, \ i = 1, \ldots, r \tag{9}$$

Apibendrinkime gautus rezultatus. Jeigu pertvarkydami (2) t.l.s- mą gavome (6) arba (7) sistemą, tai pradinė t.l. sistema turi sprendinį, t.y. ji suderinta. Jeigu gavome (8) arba (9) sistemas, tai pradinė sistema suderinta tik tuo aveju, kai $b_k^{(n-1)} = 0$ ir $b_j^{(r-1)} = 0$, $j = r+1, \ldots, m, \quad k = n+1, \ldots, m.$

Pateiksime kelis, šio metodo taikymo, pavyzdžius.

1. Pavyzdys

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, & (L_1) \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, & (L_2) \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6. & (L_3) \end{cases}$$

Sukeitę (L_1) lygtį su (L_2) lygtimi (tai elementarusis pertvarkis) gauname tokią sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, & (L_2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, & (L_1) \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6. & (L_3) \end{cases}$$

Pastebėsime, kad spręsdami t.l. sistemas mes galime lygčių sistemoje vietomis nekeisti, tik šiuo atveju reikia atkreipti dėmesį, kad galutinė t.l.sistemos (trapecinė ar daugiakampė) forma nebus tokia, kokia buvo nurodyta 1 Teoremoje, bet atsakymas nuo to nepriklausys.

Dabar atlikime tokius elementariuosius pertvarkius: $-2L_2 + L_1 = L_2^1$ ir $-3L_1 + L_3 = L_3^1$. Gauname pradinei t.l.s-mai ekvivalenčią sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, & (L_2) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -4, & (L_2^1) \\ \quad -7x_2 + 7x_3 = -3. & (L_3^1) \end{cases}$$

Atlikę elementarųjį pertvarkį $7L_2^1 - 5L_3^1 = L_3^2$ gauname, sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, & (L_2) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -4, & (L_2^1) \\ \quad\quad -14x_3 = -13. & (L_3^2) \end{cases}$$

Matome, kad paskutinioji t.l.s. yra trikampė. Taigi, ši sistema turi vienintelį sprendinį. Nesunkiai randame, kad $(-743/14, 19, 13/14)$.

2. Pavyzdys Išspręskime tokią sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \ (L_1) \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 1. \ (L_3) \end{cases}$$

Atlikę elementariuosius pertvarkius $-2L_1 + L_2 = L_2^1$ ir $-3L_1 + L_3 = L_3^1$, gauname pradinei t.l.s-ai ekvivalenčią t.l.s-ą:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -4, \ (L_2^1) \\ \qquad 0 = 1. \ (L_3^1) \end{cases}$$

Paskutinioji sistema yra išsigimusi trapecinė t.l.s., taigi, ši lygčių sistema sprendinių neturi.

3. Pavyzdys Išspręskime dar vieną t.l.s-ą. Turime

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \ (L_1) \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 9. \ (L_3) \end{cases}$$

Atlikę elementariuosius pertvarkius: $-2L_1 + L_2 = L_2^1$ ir $-3L_1 + L_3 = L_3^1$ gauname tokią t.l.s-ą

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \ (L_2) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -4, \ (L_2^1) \\ \qquad 0 = 0. \ (L_3^1) \end{cases}$$

Paskutiniąją lygtį praleidžiame, kadangi ji visada suderinta. Matome, kad paskutinioji sistema yra trapecinė. Išsprendę šią sistemą gauname, kad šios sistemos bendrasis sprendinys yra

$$\Big(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}x_2, x_2, \frac{-4}{3} + \frac{5}{3}x_2\Big), \quad x_2 \in \mathcal{R}.$$

Reikėtų atkreipti skaitytojo dėmesį į tai, kad sąvoką "trapecinę" (trikampė ar daugiakampė) nereikia suprasti paraidžiui kaip parašyta. T.y. pertvarkant lygtis nebūtinai reikia laikytis kintamųjų eliminavimo tvarkos kuri buvo atliekama teoriškai samprotaujant ir atliekama pateikiant pavyzdžius. Reikia skaitytojui atkreipti dėmesį į tai, kad esminis momentas, sprendžiant t.l.sistemas, yra tai, kad kiekvienoje žemiau esančiose lygtyje turi likti griežtai mažiau nežinomųjų negu aukščiau esančiose.

4. Pavyzdys Panagrinėkime t.l.sistemą

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3, \ (L_1) \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4, \ (L_2) \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \ (L_3) \end{cases}$$

Pastebėsime, kad generaline eilute galime pasirinkti trečią lygtį, o generaliniu elementu koeficientą prie x_3. Paeiliui atlikę veiksmus $3L_3 + L_2 = L_2^1$ ir $-2L_3 + L_1 = L_3^1$ bei trečiąją lygtį perrašę pirmosios vietoje gauname sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \ (L_3) \\ 8x_1 + 7x_2 \quad = -4, \ (L_2^1) \\ -x_1 - 3x_2 \quad = 3. \ (L_3^1) \end{cases}$$

Generaline eilute pasirinkime L_3^1 lygtį, o generaliniu koeficientu -1 esantį prie x_1. Atlikę operaciją $8L_3^1 + L_3^1 = L_2^2$ gauname sistemą

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \ (L_3) \\ \quad -17x_2 \quad = 20, \ (L_2^2) \\ -x_1 - 3x_2 \quad = 3. \ (L_3^1) \end{cases}$$

Bet paskutinioji sistema yra trikampė. Taigi, ji turi vienintelį sprendinį, kurį rasti siūlome skaitytojui.

Tikimės, kad skaitytojas spręsdamas t.l.sistemas atkreipė dėmesį į tai, kad ieškant sistemų sprendinių, tenka atlikti lygčių veiksmus, o iš tiesų, pakanka atlikti veiksmus, tarp lygčių koeficientų. Aptarkime tą patį t.l.sistemų sprendimo metodą, kai sistemas pertvarkome į daugiakampes, naudodami tik eilučių koeficientų atitinkamus veiksmus.

Tarkime, kad duota (2) sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Pažymėkime

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & |b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & |b_n \end{pmatrix}$$

Skaičių lentelę B vadinsime išplėstine lygčių sistemos matrica.

Atlikdami t.l.s. išplėstinės matricos eilučių veiksmus, analogiškus kaip ir atliekame su t.l.s. eilutėmis gausime matricą

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & |b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{rr}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} & |b_r^{(r-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & |b_{r+1}^{(r-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & |b_m^{(r-1)} \end{pmatrix}.$$

Jeigu perrašytume gautąją matricą į lygčių sistemą, gautume daugiakampę t.l.s., t.y.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{rr}^{(r-1)}x_r + \dots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)} \\ \dots 0 = b_{r+1}^{(r-1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 = b_m^{(r-1)}. \end{cases}$$

Šią sistemą jau mokame spręsti. T.l.s. sprendimas, naudojant išplėstinę sistemos matricą, vadinamas modifikuotu Gauso metodu.

Išspręskime t.l. sistemą naudodami šį būdą.

5. Pavyzdys

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \ (L_1) \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \ (L_2) \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \ (L_3) \end{cases}.$$

Užrašykime šios sistemos išplėstinę matricą:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & |1 \\ 3 & -2 & 3 & |4 \\ 2 & 3 & -3 & |2 \end{pmatrix}.$$

Generaliniu elementu pasirinkę pirmosios lygties antrąjį koeficientą $a_{12} = 1$. Padauginę pirmąją eilutę iš 2 ir sudėję su antrąja, o po to padauginę pirmąją eilutę iš -3 ir sudėję su trečiąja eilute atitinkamai gausime tokią matricą:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & |1 \\ 7 & 0 & -1 & |6 \\ -4 & 0 & 3 & |-1 \end{pmatrix}.$$

Pasirinkime generaliniu elementu antrosios eilutės trečiąjį koeficientą -1. Padauginę antrąją eilutę iš 3 ir sudėję su trečiąja gauname matricą

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & |1 \\ 7 & 0 & -1 & |6 \\ 17 & 0 & 0 & |17 \end{pmatrix}.$$

Paskutiniąją išplėstinę matricą perrašę tiesine lygčių sistema gauname:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \ (L_1) \\ 7x_1 \qquad - x_3 = 6, \ (L_2) \\ 17x_1 \qquad = 17. \ (L_3) \end{cases}$$

Bet tai trikampė t.l.s. Nesunkiai gauname jos sprendinį $(1, 1, 1,)$.

Gauso-Žordano metodas. Šio metodo esmė- nuoseklus nežinomųjų eliminavimas lygtyse tol, kol paskutinėje, ekvivalenčioje pradinei sistemoje, kairėje pusėje liks tik po vieną ir skirtingą nežinomąjį, o dešinėje pusėje arba laisvieji nariai, arba laisvieji nariai ir laisvieji nežinomieji.

Panagrinėkime keletą lygčių sistemų ir išspręskime jas naudodami minėtą metodą.

6. Pavyzdys

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \ (L_1) \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 10, \ (L_2) \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \ (L_3) \end{cases}.$$

Atlikę tokius lygčių veiksmus $-4L_1 + L_2 = L_2^1, \ -2L_1 + L_3 = L_3^1$ gauname tokią sistemą

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \ (L_1) \\ \quad x_2 + 11x_3 = -10, \ (L_2^1) \\ \ -x_2 + 6x_3 = -7 \ (L_3^1) \end{cases}.$$

Dabar atlikime tokius lygčių veiksmus: $-L_2^1 + L_1 = L_1^1, \quad L_2^1 + L_3^1 = L_3^2$. Gauname t.l.s.

$$\begin{cases} x_1 \quad - 13x_3 = 15, \ (L_1^1) \\ \quad x_2 + 11x_3 = -10, \ (L_2^1) \\ \qquad 17x_3 = -17, \ (L_3^2) \end{cases}$$

ekvivalenčią pradinei. Kad sistema būtų pertvarkyta aukščiau nurodytu būdu mums lygtys L_1^1 ir L_2^1 reikia eliminuoti nežinomąjį x_3. Atlikime tokius veiksmus.

$\frac{1}{17}L_3^2 = L_3^3$. Gauname sistemą

$$\begin{cases} x_1 \quad - 13x_3 = 15, \ (L_1^1) \\ \quad x_2 + 11x_3 = -10, \ (L_2^1) \\ \qquad x_3 = -1 \ (L_3^3) \end{cases}$$

Ir $13L_3^3 + L_1^1 = L_1^2, \quad -11L_3^3 + L_2^1 = L_2^2$. Gauname

$$\begin{cases} x_1 \qquad = 2, \ (L_1^2) \\ \quad x_2 \quad = 1, \ (L_2^2) \\ \qquad x_3 = -1 \ (L_3^3) \end{cases}.$$

Matome, kad šios t.l.s. sprendinys $(2, 1, 1)$.

Tikimės, kad skaitytojas supranta, kad ir šiuo atveju būtu patogu naudoti apibendrintą Gauso metodą, t.y. t.l.sistemą spręsti būtų patogu naudoti matricinę t.l.s. formą.

Išspręskime sistemą Gauso-Žordano metodu naudodami matricinę formą:

7. Pavyzdys

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \ (L_1) \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \ (L_2) \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \ (L_3) \end{cases}.$$

Perrašome šią sistemą matricine forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |1 \\ 2 & 3 & 1 & |10 \\ 1 & -3 & 1 & |-3 \end{pmatrix}.$$

Ateityje skirtingas pirmąsias, antrąsias bei trečiąsias eilutes žymėsime vienodais simboliais L_1, L_2, L_3, atitinkamai.

Atlikę matricos eilučių veiksmus $-2L_1 + L_2$ ir $-L_1 + L_3$ gauname tokią t.l.sistemos matricą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & |1 \\ 0 & 1 & 3 & |8 \\ 0 & -4 & 2 & |-4 \end{pmatrix}.$$

Analogiškai, $-L_2 + L_1$ ir $4L_2 + L_3$ gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & |-7 \\ 0 & 1 & 3 & |8 \\ 0 & 0 & 14 & |28 \end{pmatrix}.$$

Padauginę trečią lygtį iš $\frac{1}{14}$ gauname sistemą

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & |-7 \\ 0 & 1 & 3 & |8 \\ 0 & 0 & 1 & |2 \end{pmatrix}.$$

Nesunku suprasti, kad sistemos sprendinį gausime atlikę veiksmus: $4L_3 + L_1,\ -3L_3 + L_2$. Taigi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & |1 \\ 0 & 1 & 0 & |2 \\ 0 & 0 & 1 & |2 \end{pmatrix}.$$

Perrašę šią matricą į sistemą gauname tokį sprendinį: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2.$

Išspręskime minėtu būdu dar vieną t.l.s. Tarkime duota sistema iš karto užrašyta matricine forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & |2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & |3 \end{pmatrix}.$$

Atlikę eilučių veiksmą $L_3 - L_2$ gauname tokią lygčių sistemos matricą:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & |3 \end{pmatrix}.$$

Atlikę veiksmą $L_1 - L_2$ gauname sistemą

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |0 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & |3 \end{pmatrix}.$$

Bet antroji eilutė- nulinė, taigi ją galima praleisti, kadangi šią eilutę atitinkanti lygtis visada turi sprendinį. Taigi, praleidę minėtą eilutę ir atlikę eilučių veiksmą $L_1 - L_3$ gauname tokią sistemos matricą:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & |1 \\ -3 & -2 & 0 & -1 & |-2 \end{pmatrix}.$$

Kadangi gautoji sistema yra neapibrėžta (lygčių mažiau negu nežinomųjų), tai kairėje pusėje paliekame tiek nežinomųjų, kiek yra lygčių, o likusius nežinomuosius keliame į dešinę pusę, beje turime įsidėmėti prie kokių nežinomųjų koeficientus paliekame kairėje pusėje, o kokis keliame į dešinę. Paprastai kairėje pusėje paliekami paprastesni koeficientai. Mūsų nagrinėjamu atveju patogu būtų palikti koeficientus prie x_2, x_3. Gauname sistemą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & |1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & |-2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Laikinai, į dešinės pusės narius žiūrėsime kaip laisvąjį narį. Tada, atlikę veiksmą $2L_1 + L_2$ gauname sistemą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & |1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & |0 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Padauginę sistemos antrąją lygtį iš $\frac{1}{2}$ gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & |1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & |0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Paskutinis veiksmas bus toks: $-L_2 + L_1$. Gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & |1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & |0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Rašant sistemos bendrąjį sprendinį būtina žinoti, kokioje vietoje yra sistemos nežinomųjų koeficientai. Taigi, turėdami tai omenyje, gauname

$$x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_1, \quad x_3 = -\frac{5}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_1.$$

Tada, sistemos bendrasis sprendinys yra toks:

$$(x_1, 1 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_1, -\frac{5}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_1, x_4).$$

3.3 Tiesinės nelygybės ir jų sistemos

Apibrėžimas *Tiesine nelygybe su n nežinomaisiais, vadinsime nelygybę:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b, \quad (< b, \ \geq b, \ > b)$$

čia $a_j, b \in \mathcal{Q}$, a_j, $(j = 1, \ldots, n)$ vadinami nelygybės koeficientais, $b-$ lygties laisvuoju nariu, x_j $(j = 1, \ldots, n)-$ lygties nežinomaisiais.

Reiškinys $4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 \leq 7$ yra tiesinė nelygybė su keturiais nežinomaisiais.

Apibrėžimas *Racionaliųjų skaičių rinkinį $(l_1, \ldots, l_n)$ vadinsime t. nelygybės sprendiniu, jeigu šis rinkinys tenkina nelygybę:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j l_j \leq b \ \ (< b, \ \geq b, \ > b).$$

Kitaip tariant, minėtasis rinkinys vadinamas sprendiniu, jeigu nelygybėje nežinomųjų vietoje įrašę šį rinkinį gauname teisingą skaitinę nelygybę.

Pavyzdžiui skaičių rinkinys $(1, 0, 2)$ yra nelygybės $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 \leq 12$ sprendinys, kadangi įrašę šį rinkinį į nelygybę gauname- $12 \leq 12$.

Apibrėžimas *Tiesinių nelygybių aibę:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \quad (< b, \ \geq b, \ > b), \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \quad (< b, \ \geq b, \ > b), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \quad (< b, \ \geq b, \ > b) \end{cases}, \tag{1.2}$$

vadinsime m tiesinių nelygybių, su n nežinomaisiais, sistema.

Pastebėsime, kad sistemoje gali būti bet kokia skliaustuose nurodyta nelygybė.

Keliais žodžiais aptarkime situaciją, kai tenka nagrinėti tiesines nelygybes su dviem nežinomaisiais.

Apibrėžimas *Reiškinį*

$$ax + by + c \leq 0 \ \ (< b, \ \geq b, \ > b),$$

vadinsime tiesine nelygybe su dviem nežinomaisiais. Visus plokštumos taškus (x, y) tenkinančius šią nelygybę, vadinsime nelygybės sprendiniais.

Pastebėsime, kad tiesė $ax + by + c = 0$ plokštumą dalina į tris dalis tokiu būdu. Pirmąjai daliai priklauso visi plokštumos taškai priklausantys tiesinės funkcijos grafikui; antrąjai daliai priklauso plokštumos taškai esantys "virš" tiesės grafiko, (šie taškai tenkina nelygybę $ax+by+c > 0$) trečiajai plokštumos sričiai priklauso plokštumos taškai esantys "po" tiesės grafiku, (šie taškai tenkina nelygybę $ax + by + c < 0.$)

Tad norint grafiškai pavaizduoti nelygybės sprendinius reikia

1) nubrėžti tiesės lygtį;

2) pasirinkus plokštumos bet kokį tašką iš "viršutinės" arba "apatinės" plokštumos srities ir įstačius šį tašką į nelygybę nustatome ar tenkina šis taškas nelygybę ar ne. Jei tenkina, tai ši plokštumos sritis yra nelygybės sprendinių aibę, jei ne, tai nelygybės sprendinių aibę sudaro priešinga plokštumos sritis.

Apibrėžimas *Tiesine nelygybių sistema vadiname bet kokią tiesinių nelygybių aibę. Šios sistemos sprendiniais vadinsime porų (x, y) aibę, kuri tenkina visas šios sistemos nelygybes.*

Pavyzdžiui

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 1 \\ -x + y > 0 \\ x \geq 0 \\ 3x + 2 \leq 5 \end{cases}$$

Uždaviniai

Naudodami Gauso metodą išspręskite pateiktąsias lygčių sistemas:

1.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 114. \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$$

7. Kokios turi būti parametrų m, n reikšmės, kad sistema

$$\begin{cases} x_1 - mx_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = n, \\ 4x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 1, \end{cases}$$

turėtų a) vieninteli, b) neturėtų sprendinių, c) turėtų be galo daug sprendinių?

7. Gamykla gamina trijų rūšių produkciją, tarkime A, B, C. Pardavus vienetą šių produktų gaunamas pelnas yra $1, 2, 3$ Lt atitinkamai. Fiksuoti gamybos kaštai yra 17000Lt per metus, o minėtų produktų vieneto gamybos kaštai sudaro $4, 5, 7$ Lt atitinkamai. Kitais metais numatoma pagaminti 11000 vienetų, visų trijų rūšių, produktų. Yra žinoma, kad jie bus realizuoti, ir bendras pelnas turėtų sudaryti 25000 Lt. Kiek kiekvienos rūšies produktų reiktų pagaminti, jeigu bendrosios išlaidos sudarys 80000 Lt?

8. Gamykla gamina dviejų rūšių produktus A ir B. Pardavus vieną vienetą A rūšies produkto gaunamas 8 Lt pelnas, o $B-$ 11 Lt pelnas. Buvo pastebėta, kad A rūšies produktų yra parduodama 25% daugiau negu B. Kitais metais gamykla planuoja 42000 Lt pelną. Kiek vienetų kiekvieno produkto reikėtų pagaminti, kad ketinimai būtų realizuoti?

9. Penkioms pramonės šakoms p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 yra skiriama parama iš penkių fondų. Žinoma, kad Lietuva iš pirmojo fondo gali gauti 55 mln., antrojo- 70 mln., trečiojo- 48 mln., ketvirtojo- 60 mln., penktojo- 44 mln. litų. Pramonės šakų įvairus įmonių skaičius pretenduoja į šių fondų lėšas. Rinkinys $(7, 2, 3, 2, 1)$ reiškia, kad p_1 šakos 7 įmonės siekia gauti pirmojo fondo lėšas, 2 įmonės- antrojo fondo lėšas ir t.t.. Analogiškai, pramonės šakos p_2 įmonių skaičius siekiančių gauti atitinkamų fondų paramą yra $(4, 4, 3, 4, 1)$, toliau p_3- $(3, 3, 1, 5, 3)$, p_4, $(5, 1, 5, 3, 5)$, ir p_5 $(4, 7, 2, 3, 2)$. Kaip būtų galima paskirstyti fondų pinigus pramonės šakoms?

10. Išspręskite duotąsias nelygybių sistemas grafiniu būdu:

$$1)\ \begin{cases} x_1 - x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 0, \\ x_2 \ge 3, \end{cases} ; \quad 2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le -1, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_2 - 2x_1 \ge -3, \end{cases} ;$$

$$3)\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \ge -3, \\ 3x_2 - 4x_1 \ge 2, \end{cases} ; \quad 4)\ \begin{cases} x_1 \le 5, \\ x_2 \le 5, \\ x_2 \ge -3, \end{cases} .$$

IV. VEKTORINĖ ERDVĖ $\mathcal{R}^n$

4.1 Vektoriai. Vektorių veiksmai

Apibrėžimas *Sutvarkytą realių skaičių rinkinį* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *vadinsime* $n-$ *mačiu vektoriumi. Skaičiai* $a_j \in \mathcal{R}$, $(j = 1, \ldots, n)$ *vadinami vektoriaus koordinatėmis.* Sakinys "sutvarkytas skaičių rinkinys " reiškia, kad koordinačių padėtis vektoriuje yra svarbi. Vektorius žymėsime mažosiomis graikiškosios abėcėlės raidėmis. Jeigu vektorius turi n koordinačių, tai sakysime, kad jis aibės $\mathcal{R}^n$ elementas.

$n-$ matį vektorių vadinsime nuliniu, jeigu visos n koordinatės lygios nuliui. T.y. $O = (0, 0, \ldots 0)$. Ateityje nulinį vektorių žymėsime simboliu O.

Pavyzdžiui, rinkinys $(2, -1, 1.5, 7)$ yra keturmatis vektorius. $(0, 0, 0)$ yra trimatis nulinis vektorius.

Apibrėžimas *Sakysime, kad aibės* $\mathcal{R}^n$ *elementai* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *ir* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *yra lygūs, jeigu jų atitinkamos koordinatės lygios, t.y.* $a_j = b_j$, $(j = 1, \ldots, n)$. Tarkime, kad yra žinoma, kad du dvimačiai vektoriai $(3, -5)$ ir (x, y) yra lygūs. Tada naudodamiesi vektorių lygybės apibrėžimu gauname, kad $x = 3$ ir $y = -5$.

Apibrėžimas *Vektorių* α *ir* β *suma (žymėsime* $\alpha + \beta$ *) vadinsime vektorių* γ, *kurio koordinatės nusakomos lygybėmis* $c_j = a_j + b_j$, $(j = 1, \ldots, n)$. *Taigi,*

$$\alpha + \beta = \gamma = (a_1 + b_1, \ldots a_n + b_n).$$

Pavyzdžiui $\alpha = (1, -1, 0)$ ir $\beta = (2, 1, 5)$. Tada $\alpha + \beta = (3, 0, 5)$.

Pastaba. Lyginti ir sudėti galima tik vektorius, turinčius tą patį koordinačių skaičių.

Apibrėžimas *Vektoriaus* $\alpha \in \mathcal{R}^n$ *ir skaičiaus* $k \in \mathcal{R}$ *sandauga vadinsime vektorių*

$$k\alpha = (ka_1, \ldots, ka_n).$$

Matome, kad pateiktų veiksmų atžvilgiu vektorių aibė $\mathcal{R}^n$ yra uždara. T.y. atlikdami erdvės $\mathcal{R}^n$ vektorių veiksmus, gauname vektorius priklausančius tai pačiai erdvei $\mathcal{R}^n$.

Ateityje žymėsime $(-1)\alpha = -\alpha$.

Tarkime, kad α ir β aukščiau duoti vektoriai. Išspręskime vektorinę lygtį:

$$2\gamma + 3\alpha = -2\beta,$$

$\alpha = (1, 2, -2)$ ir $\beta = (2, 2, 0)$ ir $\gamma = (x, y, z)$ yra nežinomas vektorius.

Visų pirma sudedame kairėje pusėje esančius du vektorius ir sumą lyginame su vektoriumi -2β. Gauname tokią lygybę:

$(2x + 3, 2y + 6, -2z - 6) = (-4, -4, 0)$. Iš paskutiniosios vektorinės lygybės gauname: $2x + 3 = -4,\ 2y + 6 = -4,\ -2z - 6 = 0$. Iš paskutiniosios lygybės gauname nežinomojo vektoriaus koordinates: $x = -0.5,\ y = -5,\ z = -3$.

Nurodysime, kokios yra vektorių veiksmų savybės.

Veiksmų savybės.

Vektorių sudėtis yra komutatyvi (dėmenis galima keisti vietomis):

1) $$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Pastarasis tvirtinimas išplaukia iš realiųjų skaičių komutatyvumo (dėmenų keitimo vietomis) dėsnio ir sąryšių:

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) = (b_1 + a_1, \ldots b_n + a_n) = \beta + \alpha.$$

Samprotaudami analogiškai galime parodyti, kad sudėtis tenkina asociatyvumo dėsnį

2) $$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$

Nesunku suprasti, kad bet kokiam vektoriui α teisinga lygybė:

3) $$\alpha + O = O + \alpha = a.$$

4) Bet kokiam vektoriui $\alpha \in \mathcal{R}^n$ galime nurodyti vektorių $\overline{\alpha}$ tokį, kad

$\alpha + \overline{\alpha} = O$. Vektorius $\overline{\alpha}$ vadinamas atvirkštiniu vektoriui α. Pasirodo, $\overline{\alpha} = -\alpha$. Parodysime, kiek vėliau, kad atvirkštinis vektorius yra vienintelis.

Akivaizdu, kad vektorius $(-1)\alpha + \alpha = O$. Taigi, jis yra atvirkštinis. Parodykime, kad jis vienintelis. Turime

$$\alpha + \overline{\alpha} = O.$$

Pridėję prie abiejų lygybės pusių vektorių $-\alpha$ gauname, kad

$$-\alpha + (\alpha + \overline{\alpha}) = -\alpha + O.$$

Antra vertus, iš paskutiniųjų lygybių išplaukia tokia lygybė:

$$O + \overline{\alpha} = -\alpha + O.$$

Dėka 3) savybės turime, kad $\overline{\alpha} = -\alpha$. Taigi, bet koks vektoriaus α atvirkštinis sutampa su vektoriumi $-\alpha$.

Žemiau pateiksime dar penkias veiksmų savybes, kurių įrodymus paliekame skaitytojui.

5) Visiems $\alpha \in \mathcal{R}$, $1 \cdot \alpha = \alpha$.

6) Vektoriaus ir realaus skaičiaus daugyba yra komutatyvi. T.y. $\forall k \in \mathcal{R}, \alpha \in \mathcal{R}^n,\ k \cdot \alpha = \alpha \cdot k$.

7) $\forall l, k \in \mathcal{R}, \alpha \in \mathcal{R}^n$

$$\big(l + k\big) \cdot \alpha = l \cdot \alpha + k \cdot \alpha \text{ ir } (lk) \cdot \alpha = l \cdot (k \cdot \alpha).$$

8) $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{R}^n,\ l \in \mathcal{R}$ teisinga lygybė:

$$l \cdot (\alpha + \beta) = l \cdot \alpha + l \cdot \beta.$$

Ateityje, aibę $\mathcal{R}^n$, su aukščiau apibrėžtomis vektorių lygybės, sudėties ir daugybos iš skaičiaus operacijomis vadinsime $n-$ mačių vektorių erdve trumpai erdve $\mathcal{R}^n$.

4.2 Vektorių tiesinė priklausomybė

Apibrėžimas *Sakykime, kad* $l_i \in \mathcal{R}$, $\alpha \in \mathcal{R}^n$, $(i = 1, \dots, m)$. *Tuomet vektorių*

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} l_j \alpha_j$$

vadinsime vektorių $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ *tiesiniu dariniu.*

Atkreipsime dėmesį, kad jei $l_i = 0$, $(i = 1, \dots, m)$, tai $\alpha = O$. Pasirodo, kad atvirkščias teiginys, bendru atveju, nėra teisingas. T.y. tiesinis darinys gali būti nulinis vektorius, nors sumoje yra ir nenulinių dėmenų. Apie tai šiek tiek plačiau.

Apibrėžimas *Vektorių rinkinį* $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ *vadinsime tiesiškai nepriklausomu, jeigu tiesinis darinys*

$$\sum_{j=1}^{m} l_j \alpha_j = O$$

tada ir tik tada, kai $l_i = 0$, $(i = 1, \dots, m)$. Priešingai, sakysime kad vektorių rinkinys yra tiesiškai priklausomas, jei šių vektorių tieisinis darinys yra nulinis vektorius, kai skaičių rinkinys l_i, $(i = 1, \dots, m)$ yra nenulinis. T.y. tarp skaičių $l_1, \dots, l_m$ yra bent vienas nelygus nuliui.

Kaip praktiškai patikrinti ar duotasis vektorių rinkinys tiesiškai priklausomas ar ne? Tarkime duotas vektorių rinkinys $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Tuomet, kad patikrinti ar jis tiesiškai priklausomas ar ne mums reikia išspręsti lygtį:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \alpha_j = O.$$

Tiksliau kalbant reikia išspręsti tiesinių lygčių sistemą. Jeigu ši sistema turi tik nulinį sprendinį, tai vektorių rinkinys tiesiškai nepriklausomas. Priešingu atveju rinkinys tiesiškai priklausomas.

Panagrinėkime, keletą pavyzdžių. Tarkime, kad duotas vektorių rinkinys

$$\alpha = (2,1,3),\ \beta = (0,1,0),\ \gamma = (2,2,3).$$

Patikrinkime, ar šis rinkinys tiesiškai prikklausomas ar ne. Remiantis apibrėžimu, mums reikia patikrinti, su kokiomis x_1, x_2, x_3 reikšmėmis galima lygybė

$$x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma = \mathrm{O}.$$

Akivaizdu, kad jei $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ tai lygybė teisinga. Telieka atviras klausimas- ar ši lygybė yra teisinga ir su šiuo vieninteliu nuliniu rinkiniu ar nebūtinai?

Pasirodo, priklausomumo (nepriklausomumo) problema sprendžiama naudojant t.l. sistemas.

Užrašykime pateiktą sistemą išskleistine forma, t.y.

$$x_1(2,1,3) + x_2(0,1,0) + x_3(2,2,3) = (0,0,0).$$

Atlikę vektorių veiksmus kairėje pusėje gauname tokią vektorinę lygybę:

$$(2x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 3x_1 + 3x_3) = (0,0,0).$$

Žinome, kad du vektoriai lygūs, jei lygios šių vektorių atitinkamos koordinatės. Taigi,

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Gauname homogeninę t.l.sistemą.

Siūlome skaitytojui išspręsti šią sistemą ir įsitikinti, kad ši sistema turi begalo daug sprendinių, taigi tarp jų tikrai yra ir nenulinių. Vadinasi, duotasis vektorių rinkinys priklausomas.

Vektorių rinkinys bus tiesiškai nepriklausomas, jeigu nagrinėjama t.l.sistema bus trikampė. Tada ji turės vienintelį sprendinį, kuris bus nulinis.

Aptarsime sąlygas, kurios lemia ar nagrinėjamas vektorių rinkinys priklausomas ar ne.

1 **Teorema** *Jei vektorių rinkinyje* (*tarkime* $\{\alpha_1, \dots \alpha_m\}$) *yra nulinis vektorius, tai šis rinkinys tiesiškai priklausomas.*

$\ominus$

2 **Teorema** Jei vektorių rinkinys $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai nepriklausomas, tai ir bet kuri šio rinkinio dalis $\{\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_j}\}$ taip pat yra nepriklausoma.

$\ominus$

3 **Teorema** *Vektorių rinkinys* $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ *yra tiesiškai priklausomas tada ir tik tada, kai bent vienas rinkinio vektorius yra likusių tiesinis darinys.*

$\ominus$

4 **Teorema** *Jeigu prie vektorių rinkinio* $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ *prijungsime vektorių*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i,$$

tai vektorių rinkinys $\{\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m\}$, *bus tiesiškai priklausomas.*

$\ominus$

Tarkime, kad duoti trys vektoriai $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = (0, 1, 1)$, $\gamma = \alpha + \beta = (1, 3, 4)$. Tada rinkinys α, β, γ yra tiesiškai priklausomas, kadangi

$$1 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta + (-1) \cdot \gamma = \mathrm{O}.$$

Patikrinkite tai !

5 **Teorema** *Jeigu bet kuris rinkinio* $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ *vektorius yra rinkinio* $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$ *vektorių tiesinis darinys, beje* $k < m$, *tuomet rinkinys* $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ *yra tiesiškai priklausomas.* $\ominus$

Kitais žodžiais kalbant, jei didesnį rinkinį išreiškiame mažesniu, tai didesnysis rinkinys yra priklausomas.

4.3 Erdvės $\mathcal{R}^n$ bazė.

Sakykime, kad $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \in \mathcal{R}^n$. Be to tegu l_i, $(i = 1, \ldots, m)$ bet kokia realiųjų skaičių aibė. Tuomet laisvai parinktiems l_i, $(i = 1, \ldots, m)$ mes gauname vektorių

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i. \tag{1}$$

Kyla klausimas, ar egzistuoja erdvėje $\mathcal{R}^n$ vektorių rinkinys $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, kad tinkamai parinkę skaičius l_i, $(i = 1, \ldots, m)$ naudodami tiesinį darinį (1), galėtume išreikšti bet kokį erdvės vektorių?

Visų pirma parodysime, kad apskritai egzistuoja vektorių rinkinys, erdvėje $\mathcal{R}^n$, toks, kad tinkamai parinkę tiesinio darinio koeficientus, darinio vektoriais galime išreikšti bet kokį erdvės vektorių. Tarkime duotas $n-$ mačių vektorių rinkinys :

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\, e_2 = (0, 1, 0, \ldots 0),\, \ldots e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1). \tag{2}$$

Nesunku matyti, kad šis rinkinys tiesiškai nepriklausomas. Įrodykite!

Tarkime, kad $e_1, e_2 \in \mathcal{R}^2$, t.y. $e_1 = (1, 0)$ ir $e_2 = (0, 1)$. Imkime šios erdvės vektorių $\alpha = (2, -11)$. Nesunku suprasti, kad

$$(2, -11) = 2(1, 0) + -11(0, 1).$$

Rašant trumpai, $\alpha = 2e_1 - 11e_2$.

Imkime bet kokį $n-$matį vektorių $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Aišku, kad

$$\alpha = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n.$$

Matome, kad koks bebūtų vektorius $\alpha \in \mathcal{R}^n$ visuomet galime šį vektorių užrašyti (2) vektorių tiesiniu dariniu. Tad kokiomis savybėmis turi pasižymėti erdvės vektorių rinkinys, kad šio rinkinio vektorių tiesiniais dariniais galėtume užrašyti visus erdvės vektorius?

Apibrėžimas *Nepriklausomų vektorių rinkinį* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, *vadinsime erdvės* $\mathcal{R}^n$ *baze, jeigu bet kokiam erdvės vektoriui* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ *teisinga lygybė*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} l_i \alpha_i.$$

6 **Teorema** *Kiekvieną erdvės* $\mathcal{R}^n$ *bazę sudaro lygiai* n *vektorių.*

$\ominus$

Teisinga tokia

7 **Teorema** *Bet koks* n *tiesiškai nepriklausomų vektorių rinkinys yra erdvės* $\mathcal{R}^n$ *bazė.*

$\ominus$

Sakykime, kad $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ yra erdvės $\mathcal{R}^n$ bazė. Tuomet, bet kokiam erdvės elementui α egzistuoja realių skaičių rinkinys $l_j, \quad (j = 1, \ldots, n)$, toks, kad

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} l_j \alpha_j.$$

Skaičius l_j, $(j = 1, \ldots, n)$ vadinsime vektoriaus α koordinatėmis bazėje $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

Skirtingose bazėse vektorius turi skirtingas koordinates, tačiau fiksuotoje bazėje vektoriaus koordinatės nusakomos vieninteliu būdu. Įrodysime tai.

8 **Teorema** *Vektoriaus koordinatės duotoje bazėje nusakomos vieninteliu būdu.*

$\ominus$

Įsitikinę, kad vektorių rinkinys

$$\alpha = (1, 2, 3), \quad \beta = (1, 1, 0), \quad \gamma = (0, 1, 2)$$

yra bazė, raskime vektoriaus $\delta = (1, 4, 8)$ koordinates šioje bazėje.

Naudojant apibendrintą Gauso metodą, galime iš karto spręsti du uždavinius 1) nustatyti ar vektorių rinkinys yra nepriklausomas; 2) rasti vektoriaus koordinates šioje bazėje.

Mums reikia išspręsti tokią lygtį

$$\gamma = x_1\alpha + x_2\beta + x_3\gamma.$$

Perrašę šią sistemą matriciniu būdu gauname

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 2 & 1 & 1 & |4 \\ 3 & 0 & 2 & |8 \end{pmatrix}.$$

Pastebėsime, kad vektorių koordinates į matricą perrašome stulpeliais.

Ši sistema turės vienintelį sprendinį (tuo pačiu rinkinys bus bazė), jeigu gausime trikampę t.l.s. Išspręskime sistemą.

Atlikę matricos eilučių veiksmus $-2L_1 + L_2$ ir $-3L_1 + L_3$ gauname tokią t.l.sistemos matricą:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & -1 & 1 & |2 \\ 0 & -3 & 2 & |5 \end{pmatrix}.$$

Sudėję $-3L_2 + L_3$ turėsime

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |1 \\ 0 & -1 & 1 & |2 \\ 0 & 0 & -1 & |-1 \end{pmatrix}.$$

Paskutiniosios trikampės sistemos sprendinys yra toks:

$x_1 = 2, \ x_2 = -1, \ x_3 = 1.$

Kadangi sprendinys vienintelis, tai vektorių δ nurodytais vektoriais išreiškiame vieninteliu būdu. Dar daugiau, vektorių rinkinys α, β, γ yra bazė (patikrinkite).

Apibrėžimas *Vektorinės erdvės dimensija vadinsime šios erdvės bazės vektorių skaičių.*

Apibrėžimas *Tarkime, kad $V \subset \mathcal{R}^n$. Aibę V vadinsime erdvės $\mathcal{R}^n$ poerdviu, jeigu*

1. $O \in V$;

2. jei $k \in \mathcal{R}$ ir $\alpha \in V$, tai vektorius $k\alpha \in V$;

3. $\alpha, \beta \in V$, tai ir $\alpha + \beta \in \mathcal{V}$.

Poerdvio dimensija vadinsime didžiausią, nepriklausomų vektorių skaičių, šiame poerdvyje. Beje, šis vektorių rinkinys bus vadinamas poerdvio baze.

Sudarykime kokį nors trimatės erdvės poerdvį ir nustatykime jo dimesiją ir bazę. Tarkime duotas vektorių rinkinys

$$\alpha_1 = (2, 1, 3),\ \beta = (0, 1, 0),\ \gamma = (2, 2, 3).$$

Tada aibė

$$V = \big\{\theta; \theta = l_1\alpha + l_2\beta + l_3\gamma,\ l_1, l_2, l_3 \in \mathcal{R}\big\},$$

kurią sudaro vektoriai, gaunami sudarant visus galimus tiesinius vektorių α, β, γ darinius, yra erdvės $\mathcal{R}^3$ poerdvis. Įsitikinkite patys!

4.4 Vektorių rinkinio rangas

4.3 skyrelio 3 Teoremoje tvirtinama, kad vektorių rinkinys yra tiesiškai priklausomas tada ir tik tada, kai bent vienas rinkinio vektorius yra kitų vektorių tiesinis darinys. Nurodysime charakteristiką, kuria bus nurodomas nepriklausomų vektorių skaičių rinkinyje.

Apibrėžimas *Skaičius r vadinamas vektorių rinkinio $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ rangu, jeigu šiame rinkinyje galime nurodyti r tiesiškai nepriklausomų vektorių $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_r}\} \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ tokių, kad bet kuris vektorių rinkinys iš $r+1$ vektoriaus $\{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{r+1}}\} \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ yra tiesiškai priklausomas.*

Kitaip tariant, rinkinio rangas yra maksimalus, tiesiškai nepriklausomų vektorių skaičius, duotame rinkinyje. Beje, vektorių rinkinio $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ rangas $r \leq \min\{m, n\}$.

Apibrėžimas *Du tos pat erdvės vektorių rinkiniai* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ *ir* $\{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ *vadinami ekvivalenčiais, jeigu bet kurį pirmojo rinkinio vektorių galima išreikšti antrojo rinkinio vektorių tiesiniu dariniu ir atvirkščiai.*

9 **Teorema** *Jeigu vektorių rinkinio* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ *rangas* r, *tai šiame rinkinyje yra lygiai* r *tiesiškai nepriklausomų vektorių, kurių tiesiniais dariniais galime išreikšti bet kurį rinkinio* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ *vektorių.*

$\ominus$

10 **Teorema** *Ekvivalenčių vektorių rinkinių rangai yra lygūs.*

$\ominus$

Natūraliai kyla klausimas- kaip nustatyti duoto vektorių rinkinio rangą? Dar daugiau, kurie rinkinio vektoriai sudaro nepriklausomų vektorių poaibį? Į šiuos klausimus atsakysime kitame skyrelyje.

4.5 Vektorių rinkinio elementarieji pertvarkiai

Vektorių rinkinio elementariaisiais pertvarkiais vadiname:

1) vektorių keitimą vietomis rinkinyje;

2) vektoriaus dauginimą iš nelygaus nuliui skaičiaus;

3) dviejų rinkinio vektorių sudėtį.

11 **Teorema** *Elementariaisiais pertvarkiais vektorių rinkinį pertvarkome į jam ekvivalentų rinkinį.*

$\ominus$

Šio teiginio įrodymą paliekame skaitytojui.

Išvada. Vektorių elementarieji pertvarkiai nekeičia rinkinio rango.

Pastarasis tvirtinimas išplaukia iš paskutiniųjų dviejų teoremų.

Iš paskutiniosios išvados išplaukia, kad ekvivalenčiuose rinkiniuose yra vienodas tiesiškai nepriklausomų vektorių skaičius.

Iki šiol mes kalbėjome apie erdvės $\mathcal{R}^n$ elementus, kuriuos vadinome vektoriais. Beje, kadangi realieji skaičiai sudarantys šiuos rinkinius surašyti eilute, tai dažnai jie vadinami vektoriais eilutėmis.

Apibrėžimas *Sutvarkytą realiųjų skaičių rinkinį*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_k \end{pmatrix}$$

vadinsime $k-$ mačiu vektoriumi stulpeliu. Skaičiai a_i, $(i = 1, \dots, k)$ yra vadinami vektoriaus stulpelio koordinatėmis.

Norėdami atskirti vektorius stulpelius nuo vektorių eilučių, stulpelius žymėsime tokiu būdu: α^*. Vektorių stulpelių veiksmai yra analogiški vektorių eilučių veiksmams. Sakysime, kad du vektoriai stulpeliai lygūs, jeigu jų atitinkamos koordinatės sutampa. Tegu

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_k \end{pmatrix}, \quad \beta^* = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}.$$

Tada šių vektorių suma vadinsime vektorių

$$\gamma^* = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_k + b_k \end{pmatrix}.$$

Vektoriaus α^* ir skaičiaus $l \in \mathcal{R}$ sandauga vadinsime vektorių

$$l\alpha^* = \begin{pmatrix} la_1 \\ la_2 \\ \dots \\ la_k \end{pmatrix}.$$

Apibrėžimas *Operaciją, kuri $k-$ matį vektorių stulpelį keičia $k-$ mačiu vektoriu eilute arba atvirkščiai, vadinsime vektorių trasponavimu, būtent*

$$\alpha^{*T} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} = \alpha$$

ir atvirkščiai,

$$\alpha^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \alpha^*.$$

Transponavimo operacija turi tokias savybes:

1)
$$\big(\alpha + \beta\big)^T = \alpha^T + \beta^T;$$

2)
$$\big(l\alpha\big)^T = l\alpha^T.$$

Šių savybių teisingumas išplauka iš tokių sąryšių:

$$\big(\alpha + \beta\big)^T = \big(a_1 + b_1, \dots, a_m + b_m\big)^T = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_m + b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix},$$

ir

$$\big(\alpha\big)^T = \big(la_1, \dots, la_m\big)^T = \begin{pmatrix} la_1 \\ \dots \\ la_m \end{pmatrix} = l \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} = l\alpha^T.$$

Jeigu transponuotume visus erdvės $\mathcal{R}^m$ elementus, tai gautume transponuotų vektorių aibę, kurios elementai turi analogiškas savybes kaip ir erdvės $\mathcal{R}^m$ vektoriai. Tad natūralu transponuotų vektorių aibę vadinti trasponuotų vektorių erdve ir žymėti $\mathcal{R}^{mT}$. Beje, pastebėsime, kad visi teiginiai, kurie buvo įrodyti vektoriams eilutėms, teisingi ir transponuotų vektorių erdvėje.

4.6 Vektorių ir tiesinių lygčių sistemų ryšys

Pažymėkime

$$\beta_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ (j = 1, \dots, n), \ \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Sudarykime vektorinę lygtį

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j = \beta.$$

Iš pastarosios vektorinės lygties (prisiminkite vektorių lygybės savybę) gauname tiesinių lygčių sistemą

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ (i = 1, \ldots, m). \tag{3}$$

Vektorius β yra vadinamas laisvųjų narių stulpeliu, o vektoriai $\beta_j, \ (j = 1, \ldots, n)$, vadinami lygčių sistemos vektoriais stulpeliais.

Matome, kad tiesinių lygčių sistemą galime užrašyti naudodamiesi vektorine lygtimi. Kyla klausimas- kaip yra susiję vektorių savybės ir tiesinių lygčių sistemų suderinamumo problema?

Pasirodo teisinga

12 **Teorema** (3) *tiesinių l.s. yra suderinta tada ir tik tada kai vektorius β yra tiesinis, vektorių $\beta_j, \ (j = 1, \ldots, n)$, darinys.*

$\ominus$

Pademonstruosime šią teoremą konkrečiu pavyzdžiu. Tarkime, kad duota t.l.sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ -3x_2 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Šią sistemą perrašykime vektorine forma

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pastebėsime, kad rinkinys $(1, 0, 2)$ yra t.l. sistemos sprendinys. Be tuo pat metu teisinga vektorinė lygybė (patikrinkite)

$$1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

13 **Teorema** *Tiesinių, homogeninių lygčių sistema turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai jos koeficientų vektoriai stulpeliai yra tiesiškai priklausomi.*

$\ominus$

14 **Teorema** *$n-$ mačių vektorių eilučių*

$\alpha_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),\ \ \alpha_2 = (0, a_{22}, \ldots, a_{2n})\ \ldots,$

$\alpha_r = (0, \ldots, 0, a_{rr}, \ldots, a_{rn}),$ $a_{ii} \neq 0,$ *rangas yra lygus r.*

Analogiškai, vektorių stulpelių

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \ldots \beta_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ a_{rr} \\ \ldots \\ a_{mr} \end{pmatrix}$$

$a_{ii} \neq 0, (i = 1, \ldots, r)$ rangas yra lygus r.

$\ominus$

Norint įrodyti teoremą mums pakanka parodyti, kad nagrinėjami vektoriai eilutės, arba stulpeliai, yra tiesiškai nepriklausomi. O tai reikš, kad r vektorių rinkinyje maksimalus tiesiškai nepriklausomų vektorių skaičius yra r.

Tarkime, kad tiesinis vektorių darinys yra nulinis vektorius, t.y.

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \alpha_i = O.$$

Šią lygybę galime perrašyti ir taip:

$$\big(x_1a_{11}, x_1a_{12} + x_2a_{22}, x_1a_{13} + x_2a_{23} + x_3a_{33}, \ldots, x_1a_{1n} + \ldots + x_ra_{rn}\big) = \overbrace{(0, \ldots, 0)}^{r}.$$

Naudodamiesi vektorių lygybe gauname

$$\begin{cases} x_1a_{11} = 0, \\ x_1a_{12} + x_2a_{22} = 0, \\ x_1a_{13} + x_2a_{23} + x_3a_{33} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1a_{1n} + \ldots + x_ra_{rn} = 0. \end{cases}$$

Iš paskutiniosios lygčių sistemos išplaukia, kad $x_1 = \ldots = x_r = 0$. Taigi, nagrinėjamas vektorių rinkinys tiesiškai nepriklausomas ir jo rangas lygus vektorių skaičiui, arba tiesiog lygus r.

$\oplus$

Dar kartą priminsime jau girdėtą sąvoką. Tarkime, kad duota tiesinių lygčių sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ (i = 1, \ldots, m).$$

Surašę šios sistemos koeficientus tokiu būdu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & .. & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

gausime stačiakampę skaičių lentelę, kurią vadinsime tiesinių lygčių sistemos koeficientų matrica. Beje, atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad šios matricos eilutes arba stulpelius galime interpretuoti kaip vektorius eilutes arba stulpelius, atitinkamai.

Apibrėžimas *Matricos eilučių (stulpelių) rangu vadinsime šios matricos eilučių (stulpelių) pagalba sudarytų vektorių eilučių (stulpelių) rangą.*

Remdamiesi 14 Teorema gauname, kad matricos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{rr} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix}, a_{ii} \neq 0,\ i = 1, \ldots, r$$

rangas lygus r.

Apibrėžimas *matricos elementariaisias pertvarkiais vadinsime jos eilučių arba stulpelių elementariuosius pertvarkius.*

15 **Teorema** *Bet kokią, nenulinę matricą, elementariaisiais pertvarkiais galime pertvarkyti į matricą:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

kurios pirmose r eilutėse ir r stulpeliuose yra lygiai r vienetų (kiekvienoje po vieną), $r \leq \min(m, n)$.

$\ominus$

Tarkime, kad duota matrica

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Laikykime, kad $a_{11} \neq 0$. Priešingu atveju sukeitę eilutes vietomis galime pasiekti, kad pirmoje eilutėje, pirmasis koeficientas bus nelygus nuliui. Na, o jeigu visi $a_{i1} = 0$, $(i = 1, \dots, m)$ tai keisdami eilutes ir stulpelius vietomis galime pasiekti kad pradinė prielaida būtų išpildyta. Prisiminkime, kad elementarieji pertvarkiai nekeičia vektorių rinkinių rangų! Elgsimės panašiai kaip ir spręsdami tiesines lygčių sistemas Gauso metodu.

Pridėkime prie $i-$osios eilutės pirmąją eilutę padaugintą iš skaičiaus $-a_{i1}/a_{11}$, $i = 2, \dots, m$. Gausime matricą

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)}. \end{pmatrix}$$

Tegu $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (priešingu atveju elgsimės kaip ir pirmąjame žingsnyje). Prie paskutiniosios matricos $i-$osios eilutės $i = 3, \dots, m$ pridedame antrąją eilutę padaugintą iš daugiklio $-a_{i1}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ ir gauname,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \dots & a_{mn}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Elgdamiesi analogiškai, atlikę $r-1$ žingsnį gauname tokią matricą:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \dots & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{rr}^{(r-1)} & \dots & a_{rn}^{(r-1)} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Tuo atveju, kai $r = m$, nulinių eilučių matricoje nebus. Toliau, visiškai analogiškai pertvarkydami paskutiniosio matricos stulpelius gausime

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & b_{rr} & 0\dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Teoremos įrodymą gausime, jeigu $i-$ąją eilutę (stulpelį) padauginsime iš $1/b_{ii},\ i = 1, \dots, r$.

$\oplus$

Šis algoritmas sudaro prielaidas ne tik nustatyti rinkinio rangą, bet ir nustatyti, kurie vektoriai yra nepriklausomi.

Tarkime, kad duotas toks vektorių rinkinys:

$$\alpha_1 = (2, 1, 1, 0),\ \ \alpha_2 = (-1, 1, 1, -1),\ \ \alpha_3 = (1, 2, 2, -1),\ \ \alpha_4 = (0, 3, 3, -2).$$

Raskime šio vektorių rinkinio rangą, bei nustatykime, kurie vektoriai yra nepriklausomi.

Surašykime šiuos vektorius eilutėmis į matricą. Gauname

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & (v_1) \\ -1 & 1 & 1 & -1 & (v_2) \\ 1 & 2 & 2 & -1 & (v_3) \\ 0 & 3 & 3 & -2 & (v_4) \end{pmatrix}.$$

Pasirinkę trečią eilutę generaline, ir atlikę veiksmus $v_3 + v_2$, $-2v_3 + v_1$ bei sukeitę trečią eilutę su pirmąja gauname matricą

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & (v_3) \\ 0 & 3 & 3 & -2 & (v_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (v_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (v_4) \end{pmatrix}.$$

Gavome matricą, kuri turi trapecinę formą, kurioje dvi nenulinės eilutės. Taigi vektorių rinkinio rangas (maksimalus nepriklausomų vektorių skaičius rinkinyje) yra lygus 2. Dar daugiau, nepriklausomų vektorių porą sudaro v_1 ir v_3 vektoriai. Atkreipsime skaitytojo dėmesį, kad nepriklausomų vektorių pora galėjo būti ir kita, jei būtume kita seka atlikę veiksmus.

Iš paskutiniosios teoremos išplaukia, kad matricos stulpelių bei eilučių rangai sutampa. Todėl natūralu matricos eilučių arba stulpelių rango neskirti, ir šiuos abu rangus vadinti tiesiog matricos rangu.

4.7 **Tiesinių lygčių sistemų suderinamumo sąlygos. Kramerio formulė.**

Tarkime, kad duota tiesinių lygčių sistema

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ (i = 1, \ldots, m).$$

Pažymėkime

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & |b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & |b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & |b_n \end{pmatrix}.$$

Matrica A vadinama duotosios lygčių sistemos matrica, o matrica B vadinama išplėstine lygčių sistemos matrica.

16 **Teorema**(Kronekerio - Kapelio) *Tiesinių lygčių sistema yra suderinta tada ir tik tada, kai* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B$.

17 **Teorema** *Tiesinių lygčių sistema apibrėžta, kai rang$A$ =rang$B$ =n ir neapibrėžta, kai rang$A$ =rang$B$ $< n$.*

$\ominus$

Aišku, kad rang$A$ =rang$B$ =n gali būti tik tuo atveju, kai $m \geq n$. Bet tuomet t.l.s. stulpeliai tiesiškai nepriklausomi. Šiuo atveju tarkime priešingai, t.y. egzistuoja bent du sprendiniai tokie, kad

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\beta_j = \beta \text{ ir } \sum_{j=1}^{n} d_j\beta_j = \beta.$$

Tuomet

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j - d_j)\beta_j = O.$$

Kadangi vektorių rinkinys nepriklausomas, tai pastaroji lygybė galima tik su nuliniais koeficientais. Taigi $c_j = d_j$, $(j = 1, \ldots, n)$. Vadinasi sprendinys vienintelis.

Įrodysime antrąją teoremos dalį. Tarkime, kad rang B=rang$A$ $< n$. Taigi, vektorių $\beta_1, \ldots, \beta_n$ rinkinys yra tiesiškai priklausomas (kodėl?). Tuomet egzistuoja nenulinis realių skaičių rinkinys $t_1, \ldots, t_n$ toks, kad

$$\sum_{j=1}^{n} t_j\beta_j = O.$$

Kadangi lygčių sistemos matricos ir išplėstinės t.l.s. matricos rangai sutampa, tai sistema turi sprendinį, sakykime $l_1, \ldots, l_n$. Tuomet teisinga lygybė

$$\sum_{j=1}^{n} l_j\beta_j = \beta.$$

Remdamiesi dviem paskutinėmis lygybėmis gauname, kad

$$\sum_{j=1}^{n}(l_j+t_j)\beta_j=\beta.$$

Matome, kad rinkinys $(t_1+l_1,\dots,t_n+l_n)$ yra kitas sistemos sprendinys. Taigi šiuo atveju rinkinys turi ne vienintelį sprendinį. Tuo baigiame teoremos įrodymą.

$\oplus$

18 **Teorema** *Tiesinių homogeninių lygčių sistema turi ne nulinį sprendinį tada ir tik tada, kai matricos rangas* $< k$, *čia* $k=\min(m,n)$, n *stulpelių, o* m *eilučių skaičius.*

$\ominus$

Įrodymą paliekame skaitytojui.

$\oplus$

Tiesinės homogeninės lygčių sistemos, kurioje m lygčių ir n nežinomųjų yra erdvės $\mathcal{R}^n$ tiesinis poerdvis.

Tarkime, kad duota $m-$ lygčių su n nežinomaisiais homogeninė t.l.sistema. Tada, šios lygties sprendiniai, sudaro erdvės $\mathcal{R}^n$, poerdvį, kurio dimensija $n-r$, čia r yra homogeninės t.l.sistemos matricos A rangas. Aptarsime, kaip rasti šio poerdvio bazę. Sakykime, kad duota homogeninė t.l.sistema.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ ,\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

Pertvarkę šią sistemą į trapecinę gauname

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \quad a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r+\ldots+a_{rn}x_n=b_r, \end{cases}$$

čia $a_{ii}\neq 0$ $(i=1,\dots r)$ ir $r\leq n$.

Spręsdami šią sistemą gauname šios sistemos bendrąjį sprendinį

$$(l'_1,\dots,l'_r,x_{r+1},\dots,x_n),\ x_i\in\mathcal{R}, i=r+1,\dots,n.$$

Parinkę nežinomųjų $x_{r+1},\ \ldots, x_n$ vietoje skaičius t_i, $i = r+1, \ldots, n$, gauname sistemos atskirąjį sprendinį. Taigi, šiuo atveju t. l. sistema turi begalo daug sprendinių.

Homogeninės sistemos atskirąjį sprendinį galime traktuoti, kaip erdvės $\mathcal{R}^n$ elementą. Sudarykime $n-r$ atskirų šios sistemos sprendinių, laisvuosius nežinomuosius pasirinkdami tokiu būdu:

$x^1_{r+1} = 1,\ x^1_{r+2} = 0 \ldots x^1_n = 0,$

$x^2_{r+1} = 0,\ x^2_{r+2} = 1 \ldots x^2_n = 0,$

$x^3_{r+1} = 0,\ x^3_{r+2} = 0,\ x^3_{r+3} = 1, \ldots x^3_n = 0,$

....

$x^n_{r+1} = 0,\ x^n_{r+2} = 0,\ x^n_{r+3} = 1, \ldots x^3_n = 1.$

Gausime tokius atskiruosius sprendinius:

$$\big(x^1_1(1,0,\ldots,0), x^1_2(1,0,\ldots,0), x^1_3(1,0,\ldots,0), \ldots, x^1_r(1,0,\ldots,0), 1,0,\ldots,0\big)$$

$$\big(x^2_1(0,1,\ldots,0), x^2_2(0,1,\ldots,0), x^2_3(0,1,\ldots,0), \ldots, x^2_r(0,1,\ldots,0), 0,1,\ldots,0\big)$$

....

$$\big(x^{n-r}_1(1,0,\ldots,0), x^{n-r}_2(0,0,\ldots,1), x^{n-r}_3(0,0,\ldots,1), \ldots, x^{n-r}_r(0,0,\ldots,1), 0,0,\ldots,1\big).$$

Pasirodo, kad šie vektoriai sudaro homogeninės t.l. sistemos sprendinių generuoto poerdvio V bazę. Taigi, kiekvieną šios sistemos sprendinį galima išreikšti šių sprendinių tiesiniu dariniu.

Tarkime, kad turime tiesinių lygčių sistemą

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = b_j;\ (j = 1, \ldots, n),$$

kurios matricos determinantas nelygus nuliui. Pastebėsime, kad pastarąją lygčių sistemą galime užrašyti matricine forma taip:

$$AX = \beta,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Kadangi matricos determinantas nelygus nuliui, tai egzistuoja šios matricos atvirkštinė A^{-1}. (4) lygybės abi puses padauginę iš kairės iš atvirkštinės matricos gauname,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Beje, jei žinome matricos A atvirkštinęm tai randame ir t.l.s. sprendinį.

Paskutinioji t.l.s. sprendinio užrašymo forma vadinama- *tiesinės lygčių sistemos sprendimu atvirkštinės matricos metodu.*

Antra vertus,

$$A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{j1} b_j \\ \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} A_{jn} b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Iš paskutiniosios lygybės išplaukia, kad

$$x_k = \frac{1}{|A|} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} b_j =: \frac{|A_k|}{|A|},\ k = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Apibendrindami pastebėsime, kad $k-$ asis nežinomasis yra lygus t.l.sistemos matricos, kurios $k-$asis koeficientų stulpelis pakeistas laisvųjų narių stulpeliu, determinanto (kurį pažymėjome simboliu A_k) ir tiesinių lygčių sistemos matricos determinanto, santykiui, $k = 1, \dots, n$. (5) formulės yra vadinamos *Kramerio formulėmis* lygčių sistemai spręsti.

Ir pabaigai pastebėsime, kad homogeninė t.l.s. turi nenulinį sprendinį tada ir tik tada, kai jos matricos determinantas yra lygus nuliui. Šios pastabos įrodymą paliekame skaitytojui.

Išspręskime lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \end{cases}$$

naudodami Kramerio formules.

Šios t.l.sistemos matricos determinantas

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 18 + 24 - (9 + 8 - 12) = 3.$$

Toliau

$$A_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Tad gauname, kad $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1.$

4.8 Matricinės algebros taikymai. Leontjevo modelis

Laikysime, kad gamybinę sistemą sudaro n ūkio subjektų, kuriuos pažymėkime simboliais $U_1, \ldots, U_n$. Kiekvienas iš šių subjektų gamina kokią nors vieną produkcijos rūšį, P_j; $(j = 1, \ldots, n)$. Gaminamos produkcijos kiekius pažymėkime $x_1, \ldots, x_n$ atitinkamai. Tada vektorių

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{vadinsime gamybos plano vektoriumi.}$$

Papildomai tarkime, kad gamybos technologija yra tokia, kad dalis gaminamos produkcijos yra sunaudojama vietinėms reikmėms. Tarkime, kad šie sunaudojami kiekiai yra $y_1, y_2, \ldots, y_n$ atitinkamai. Tada

$$\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{vadinsime produkcijos sanaudų vektoriumi.}$$

Skirtumą $\alpha - \beta = \gamma$ vadinsime grynosios produkcijos vektoriumi, t.y.

$$\gamma = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \dots \\ x_n - y_n \end{pmatrix}.$$

Tarkime, kad minėtosios produkcijos poreikiai yra tokie $c_1, \dots, c_n$. Tada

$$\delta = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}, \text{vadinsime paklausos vektoriumi.}$$

Atsakykime, į tokį klausimą: kada ekonominė sistema yra subalansuota, t.y. kada grynosios produkcijos kiekiai sutampa su paklausa? Kitaip tariant, kada $\gamma = \delta$?

Tarkime, kad produkcijos P_i vienetui pagaminti, kuris naudojamas ekonominės sistemos vidaus poreikiams, yra sunaudojama visos produkcijos P_j dalis a_{ij} čia $i, j = 1, \dots, n$. Skaičiai a_{ij} yra vadinami technologiniais koeficientais, o matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

vadinama technologine matrica. Taigi, norint kad gamyba fukcionuotų, vietinėms reikmėms reikia pagaminti tokius produkcijos kiekius:

$$\beta = A\alpha.$$

Tada grynosios produkcijos vektorių galime išreikšti taip:

$$\gamma = \alpha - \beta = \alpha - A\alpha.$$

Prisiminkime, kad $\alpha = E_n\alpha$. Tada $\alpha - A\alpha = E_n\alpha - A\alpha = \big(E_n - A\big)\alpha$. Taigi, balanso lygtį $\gamma = \delta$ galime perrašyti taip

$$\big(E_n - A\big)\alpha = \delta.$$

Bet paskutinioji lygybė reiškia tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = c_1, \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1-a_{nn})x_n = c_n. \end{cases}$$

Galime padaryti tokią išvadą: norint sudaryti subalansuotą ekonominės sistemos gamybinės veiklos planą $\overline{\alpha}$, reikia išspręsti paskutiniąją lygčių sistemą. Pastarosios sistemos sprendinys ir galėtų būti laikomas planu $\overline{\alpha} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$, jeigu visos sprendinio komponentės $\overline{x_j}$, $(j = 1, \ldots, n)$ yra neneigiamos. Neigiamos komponentės turėdamos matematinę prasmę, šia savybe nepasižymi ekonomikoje. Tad planas $\overline{\alpha}$ turi būti ne tik lygties $\big(E_n - A\big)\alpha = \delta$ sprendiniu, bet ir visos sprendinio komponentės turi būti neneigiamos. Apibendrinkime tai. Sakysime, kad ekonominė sistema, su technologine matrica A yra produktyvi, jeigu balanso lygtis $\big(E_n - A\big)\alpha = \delta$ turi sprendinį $\overline{\alpha}$, kurio visos komponentės neneigiamos, koks bebūtų produkcijos paklausos vektorius δ. Mes žinome, kad būtina ir pakankama balanso lygties sprendinio egzistavimo sąlyga yra tokia: balanso lygties matrica yra reguliari. Yra žinoma, kad

19 **Teorema** ekonominė sistema, kurios technologinė matrica A, yra produktyvi tada ir tik tada, kai atvirkštinė matrica $\big(E_n - A\big)^{-1}$ egzistuoja ir visi šios matricos elementai yra teigiami.

Ekonominės sistemos produktyvumo paieškos uždavinys yra vadinamas *Leontjevo modeliu.*

Uždaviniai

1. Raskite vektorių $3\alpha - 5\beta$, kai

a) $$\alpha = (1, 2, 0, 4, 5),\ \beta = (2, 1, -1, 4, 1);$$

b) $$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2. Raskite vektorių γ, jeigu $2\alpha - 5\gamma = 3\beta$ ir

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

3. Nustatykite ar duotieji vektorių rinkiniai tiesiškai priklausomi:

a)
$$\alpha_1 = (2,2,1),\ \alpha_2 = (4,3,2),\ \alpha_3 = (3,1,2);$$

b)
$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \beta_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c)
$$\alpha_1 = (3,4,2),\ \alpha_2 = (2,1,1),\ \alpha_3 = (4,1,1),\ \alpha_4 = (2,0,1).$$

4. Nustatykite ar vektorių rinkiniai:

a)
$$\alpha_1 = (3,1,0),\ \alpha_2 = (4,5,2),\ \alpha_3 = (1,4,2);$$

b)
$$\alpha_1 = (3,2,1,4),\ \alpha_2 = (2,-1,-2,0),\ \alpha_3 = (1,0,0,0),\ \alpha_4 = (-2,3,0,0);$$

c)
$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

yra bazės atitinkamose erdvėse. Jei nurodyti rinkiniai yra bazės, tai raskite vektorių

$$a)\ \alpha = (2,3,4), \ \ b)\ \alpha = (1,2,3,4), c)\ \alpha^T$$

koordinates atitinkamose bazėse.

5. Raskite pateiktųjų vektorių rinkinių rangus:

a)
$$\alpha_1 = (1,1),\ \alpha_2 = (6,7),\ \alpha_3 = (-3,-2),\ \alpha_4 = (0,1);$$

b) $$\alpha_1 = (4,1,2),\ \alpha_2 = (2,3,4),\ \alpha_3 = (1,1,1),\ \alpha_4 = (2,0,0);$$

c) $$\beta_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\ \beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\ \beta_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -8 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

6. Raskite duotųjų matricų rangus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Ar priklauso matricos rangas nuo parametro a reikšmės?

$$\begin{pmatrix} 1-a & a-1 & 0 & 1 \\ 1 & a-1 & a+2 & 3 \\ -9 & 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Naudodami modifikuotą Gauso (matricinį) metodą išspręskite tiesinių lygčių sistemas, pateiktas matriciniu būdu:

a) $$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 3 & |4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & |1 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & |2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & |1 \end{pmatrix};$$

b) $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & |2 \\ 4 & 0 & 1 & |2 \\ 1 & 2 & 1 & |1 \\ 1 & 0 & 2 & |1 \end{pmatrix}.$$

9. Naudodamiesi Kramerio metodą, o po to atvirkštinės matricos metodą, apskaičiuokite:

$$a)\ \begin{cases} 4x + 2y - z = 5, \\ x - 3y + 8z = 0, \\ -5x - 13y + 26z = 2; \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 4x + y - 3z = 2, \\ -3y + 5z = 6, \\ 7x + 4y - 9z = -1; \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 4x + 2y - z + t = 7, \\ 2x - y + 8z - 1 = 0, \\ -5x + 13y + 2z - 4t = 4, \\ x + y + 3z + t = 1. \end{cases}$$

10. Kokios turi būti parametrų m, n reikšmės, kad sistema

$$\begin{cases} x - my - 2z = 5, \\ 3x + y + z = n, \\ 4x + 7y - 5z = 1, \end{cases}$$

turėtų a) vienintelį sprendinį, b) neturėtų sprendinių, c) turėtų begalo daug sprendinių?

11. Tarkime, kad ekonominę sistemą sudaro du gamintojai. Jų produkcijos paklausos vektorius ir technologinė matrica, atitinkamai, yra tokie

$$a)\ \ \gamma = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.75 & 1 \end{pmatrix};$$

$$b)\ \ \gamma = \begin{pmatrix} 125 \\ 200 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.25 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Ar egzistuoja gamybos optimalus planas?

12. Tarkime, kad ekonominės sistemos gamintojų technologinės matricos yra tokios:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}, \ b)\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.25 & 0.4 \\ 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nustatykite, ar šios ekonominės sistemos yra produktyvios.