

Pirmos pratybos

1 užduotis

Turime teiginius:

- p "Veneroje lyja",
- q "Marytė nešasi lietsargį",
- r "Lietsargis ištirps",
- s "Jonukas myli Onutę",
- v "Onutė myli Antaną".

- 1) Išreikšti sakinius kintamaisiais p, q, r, s, v :
 - a) Jei Veneroje lyja ir Marytė nešasi lietsargį, tai lietsargis ištirps.
 - b) Jei Onutė nemyli Antano ir Veneroje lyja, tai arba Jonukas myli Onutę, arba Marytė nešasi lietsargį.
- 2) Formules pasakyti sakiniiais:
 - a) $\neg p \rightarrow (s \ \& \ (r \rightarrow \neg v))$
 - b) $\neg (\neg s \vee \neg v) \rightarrow p$

Sprendimas

- 1) a) $p \wedge q \rightarrow r$
 b) $\neg v \wedge p \rightarrow (s \oplus q)$
- 2) a) Jei Veneroje nelyja, tai Jonukas myli Onutę ir iš to, kad lietsargis ištirps, išplaukia, kad Onutė nemyli Antano.
 b) Jei netiesa, kad Jonukas nemyli Onutės arba Onutė nemyli Antano, tai Veneroje lyja.

2 užduotis

Nustatyti, ar formulė

$$((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$$

yra tapačiai teisinga.

Sprendimas

Sudarome formulės teisingumo reikšmių lentelę ir patikriname, ar su kiekviena interpretacija formulė įgyja reikšmę t.

p	q	r	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	$q \wedge r$	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$Q(p,q,r)$
t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	k	t	k	k	k	k	t
t	k	t	k	t	k	k	k	t
t	k	k	k	k	k	k	k	t
k	t	t	t	t	t	t	t	t
k	t	k	t	t	t	k	t	t
k	k	t	t	t	t	k	t	t
k	k	k	t	t	t	k	t	t

Atsakymas. Taip.

Namų darbai

- 1) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$
- 2) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- 3) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$

3 užduotis

Nustatyti, ar formulė

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$$

yra įvykdoma.

Sprendimas

Sudarome formulės teisingumo reikšmių lentelę ir patikriname, ar su bent viena interpretacija formulė įgyja reikšmę t.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$Q(p, q)$
t	t	t	t	t
t	k	k	t	t
k	t	t	k	k
k	k	t	t	t

Atsakymas. Taip.

Namų darbai

$(q \rightarrow (p \wedge r)) \wedge \neg((p \vee r) \rightarrow q)$ **Ats.:** taip – pavyzdžiui, su interpretacija $p = t, q = k, r = t$.

4 užduotis

Pašalinti konstantas ir suprastinti formules (konstantos gali likti tik jei formulė yra tapačiai klaidinga arba tapačiai teisinga).

1) $p \& t$

$$p \& k$$

$$p \vee t$$

$$p \vee k$$

$$p \rightarrow t$$

$$p \rightarrow k$$

$$t \rightarrow p$$

$$k \rightarrow p$$

$$p / t$$

$$p / k$$

$$p \leftrightarrow t$$

$$p \leftrightarrow k$$

$$p \oplus t$$

$$p \oplus k$$

2) $(t \rightarrow p) \vee ((q / k) \wedge (k \rightarrow r))$

3) $(p \rightarrow t) \vee (p \rightarrow (k \wedge p))$

Sprendimas

1) Sudarome teisingumo reikšmių lenteles ir bandome atspėti kuo paprastesnes ekvivalenčias formules. Gauname:

p	$p \& t$	$p \& k$	k	$p \vee t$	$p \vee k$	$p \rightarrow t$	$p \rightarrow k$	$\neg p$	$t \rightarrow p$	$k \rightarrow p$
t	t	k	k	t	t	t	k	k	t	t
k	k	k	k	t	k	t	t	t	k	t

p	p / t	p / k	$p \leftrightarrow t$	$p \leftrightarrow k$	$p \oplus t$	$p \oplus k$
t	k	t	t	k	k	t
k	t	t	k	t	t	k

$$\begin{aligned}
p \& t &\sim p \\
p \& k &\sim k \\
p \vee t &\sim t \\
p \vee k &\sim p \\
p \rightarrow t &\sim t \\
p \rightarrow k &\sim \neg p \\
t \rightarrow p &\sim p \\
k \rightarrow p &\sim t \\
p / t &\sim \neg p \\
p / k &\sim t \\
p \leftrightarrow t &\sim p \\
p \leftrightarrow k &\sim \neg p \\
p \oplus t &\sim \neg p \\
p \oplus k &\sim p
\end{aligned}$$

2) Pasinaudosime pirmos uždavinio dalies rezultatais:

$$\begin{aligned}
&(t \rightarrow p) \vee ((q / k) \wedge (k \rightarrow r)) \sim \\
&\sim p \vee (t \wedge t) \sim \\
&\sim p \vee t \sim \\
&\sim t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) &(p \rightarrow t) \vee (p \rightarrow (k \wedge p)) \sim \\
&\sim t \vee (p \rightarrow k) \sim \\
&\sim t \vee \neg p \sim \\
&\sim t
\end{aligned}$$

5 užduotis.

Išspręsti logines lygtis, t.y. rasti, su kuriomis interpretacijomis lygybė galioja.

- 1) $((x \vee \neg y) \wedge \neg y) \rightarrow \neg x = k$,
- 2) $((x \rightarrow (y \wedge z)) \rightarrow (\neg y \rightarrow \neg x)) \rightarrow \neg y = k$,
- 3) $((x \vee y) \vee z) \rightarrow ((x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z)) = k$.

Sprendimas.

1) Lygtis $((x \vee \neg y) \wedge \neg y) \rightarrow \neg x = k$ ekvivalenti (t.y. turi tuos pačius sprendinius) lygčių sistemai iš dviejų lygčių:

$$\begin{aligned}
(x \vee \neg y) \wedge \neg y &= t, \\
\neg x &= k.
\end{aligned}$$

Iš antros gauname:

$$x = t$$

ir įstatome į pirmą:

$$(t \vee \neg y) \wedge \neg y = t,$$

$$\text{t.y. } t \wedge \neg y = t,$$

$$\text{t.y. } \neg y = t,$$

$$\text{t.y. } y = k.$$

Atsakymas: $x = t, y = k$.

2) Lygtis $((x \rightarrow (y \wedge z)) \rightarrow (\neg y \rightarrow \neg x)) \rightarrow \neg y = k$ ekvivalenti dviejų lygčių sistemai:

$$\begin{aligned}
(x \rightarrow (y \wedge z)) \rightarrow (\neg y \rightarrow \neg x) &= t, \\
\neg y &= k.
\end{aligned}$$

Iš antros

$$y = t,$$

statome į pirmą:

$$(x \rightarrow (t \wedge z)) \rightarrow (\neg t \rightarrow \neg x) = t,$$

$$\text{t.y. } (x \rightarrow z) \rightarrow t = t,$$

$$\text{t.y. } t = t.$$

Gavome tapatybę, kuri teisinga, kad ir kokios būtų kintamųjų x ir z reikšmės.

Atsakymas. $y = t$, x ir z gali įgyti bet kokias reikšmes. Taigi, iš viso gauname 4 sprendinius: $x = t, y = t, z = t$; $x = t, y = t, z = k$; $x = k, y = t, z = t$; $x = k, y = t, z = k$.

3) Lygtis $((x \vee y) \vee z) \rightarrow ((x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z)) = k$ ekvivalenti dviejų lygčių sistemai:

$$(x \vee y) \vee z = t,$$

$$(x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee z) = k.$$

Nelabai yra ką suprastinti, tai pabandykim perrinkti atvejus: $x=t$ ir $x=k$.

a) Tarkime, $x = t$. Įstatome tai į abi lygtis. Pirmoji iškart tampa tapatybe, o iš antros gauname:

$$(t \vee \neg y) \wedge (\neg t \vee z) = k,$$

$$\text{t.y. } t \wedge z = k,$$

$$\text{t.y. } z = k.$$

O y gali būti bet koks. Taigi, gauname 2 sprendinius: $x = t, y = t, z = k$; $x = t, y = k, z = k$.

b) Tarkime, $x = k$. Įstatome tai į abi lygtis. Iš pirmos gauname

$$y \vee z = t,$$

o iš antros

$$(k \vee \neg y) \wedge (\neg k \vee z) = k,$$

$$\text{t.y. } \neg y \wedge t = k,$$

$$\text{t.y. } \neg y = k,$$

$$\text{t.y. } y = t.$$

O z gali būti bet koks. Taigi, gauname 2 sprendinius: $x = k, y = t, z = t$; $x = k, y = t, z = k$.

Atsakymas. 4 sprendiniai:

$$x = t, y = t, z = k; x = t, y = k, z = k; x = k, y = t, z = t; x = k, y = t, z = k.$$

Namų darbai

$$\neg((x \vee y) \wedge \neg z \vee v) = t$$

Atsakymas. 5 sprendiniai:

$$x = t, y = t, z = t, v = k; x = t, y = k, z = t, v = k; x = k, y = t, z = t, v = k;$$

$$x = k, y = k, z = t, v = k; x = k, y = k, z = k, v = k.$$

6 užduotis.

Kurios iš formulų

$p \wedge (p \rightarrow q)$, q , $(p \wedge q) \leftrightarrow p$, $p \rightarrow q$, $p \wedge q$
yra tarpusavyje ekvivalenčios?

Sprendimas.

Sudarome teisingumo reikšmių lenteles ir patikriname.

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge q) \leftrightarrow p$
t	t	t	t	t	t
t	k	k	k	k	k
k	t	t	k	k	t
k	k	t	k	k	t

Atsakymas. $p \wedge (p \rightarrow q) \sim p \wedge q$ ir $(p \wedge q) \leftrightarrow p \sim p \rightarrow q$, o visos kitos formulų poros nėra tarpusavyje ekvivalenčios.

Namų darbai

$$p \vee \neg p, p \wedge \neg p, p \vee q, p \rightarrow p, \neg p \wedge \neg q, (p \wedge q) \rightarrow p.$$

Atsakymas. $p \vee \neg p \sim p \rightarrow p \sim (p \wedge q) \rightarrow p$, o visos kitos formulų poros nėra tarpusavyje ekvivalenčios.