

III dalis **Matematinės logikos pradmenys (2)**

1 Esminiai ir fiktyvūs kintamieji

Apibrėžimas.

Sakysime, kad loginis kintamasis p_i loginėje formulėje $Q(p_1, p_2, \dots, p_n)$ yra esminis, jei galime rasti tokias reikšmes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \in \{t, k\}$, kad $Q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, t, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \neq Q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, k, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$. Priešingu atveju kintamasis vadinamas fiktyviu formulėje Q .

Komentaras

Taigi, jei, esant kažkokioms fiksuotoms kitų kintamųjų reikšmėms, kintamojo p_i reikšmės pakeitimas iš t į k pakeičia formulės reikšmę, tai kintamasis p_i yra esminis. Jei kintamojo p_i reikšmės pakeitimas iš t į k nepakeičia formulės reikšmės, kad ir kokios būtų fiksuotos kitų kintamųjų reikšmės, tai kintamasis p_i vadinamas fiktyviu. Kaip matysime, tokiu atveju jis į formulę įeina fiktyviai, t.y. egzistuoja ekvivalenti formulė, į kurią kintamasis p_i neįeina.

Pavyzdys

Nustatysime, kurie loginiai kintamieji yra fiktyvūs, o kurie esminiai formulėje $Q(p, q, r) = (\neg p \& \neg q \& r) \vee (\neg p \& q \& r)$.

Sprendimas būtų toks. Reikia įsistatyti visus galimus kintamųjų reikšmių rinkinius ir pažiūrėti, ar formulės reikšmė priklauso nuo kintamojo reikšmės pakeitimo. Kad būtų paprasčiau, pirmiausia sudarysim formulės teisingumo reikšmių lentelę (žr. dešinėje).

Iš pirmos ir penktos eilučių matome, kad

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \& \neg q \& r$	$\neg p \& q \& r$	$Q(p, q, r)$
t	t	t	k	k	k	k	k
t	t	k	k	k	k	k	k
t	k	t	k	t	k	k	k
t	k	k	k	t	k	k	k
k	t	t	t	k	k	t	t
k	t	k	t	k	k	k	k
k	k	t	t	t	t	k	t
k	k	k	t	t	k	k	k

kintamasis p yra esminis. Iš tikro, pirmoje ir penktoje eilutėse kitų kintamųjų (q ir r) reikšmės nesikeičia (ir yra lygios atitinkamai t ir t), keičiasi tik kintamojo p reikšmė (t pirmoje eilutėje, k penktoje). Ir formulės reikšmė taip pat keičiasi ! Taigi, formulė $Q(p, q, r)$ nuo kintamojo p priklauso iš esmės, jis yra esminis.

Kintamasis q yra fiktyvus. Iš tikro, imkim pirmą ir trečią lentelės eilutes. Jose skiriasi tik kintamojo q reikšmės (t pirmoje eilutėje, k trečioje), o kitų kintamųjų reikšmės lieka tos pačios (t). O formulės reikšmė nesikeičia – išlieka k . Bet to dar neužtenka, kad galėtume tvirtinti, kad q yra fiktyvus, nes mes patikrinome tik vieną porą interpretacijų. Galbūt kokioje kitoje poroje, kurioje keisis vien tik kintamojo q reikšmė, formulės reikšmė irgi keisis. Taigi, turime patikrinti visas galimas poras. Taip ir padarome: antroje ir ketvirtoje eilutėse keičiasi vien tik kintamojo q reikšmė, o formulės reikšmė nesikeičia; tas pats ir penktoje – septintoje, ir šeštoje – aštuntoje eilutėse. Patikrinom visas galimas interpretacijų poras, ir niekur formulės reikšmė nesikeičia, keičiantis vien tik kintamojo q reikšmei. Taigi, kintamasis q iš tikro yra fiktyvus.

Belieka patikrinti kintamąjį r . Pirmą – antrą eilutę: keičiasi vien tik kintamojo r reikšmė, o formulės reikšmė nesikeičia; trečia – ketvirta: nesikeičia; penkta – šešta: keičiasi ! Taigi, kintamasis r yra esminis. □

Jeigu kintamasis yra fiktyvus duotoje formulėje, tai mes galime rasti ekvivalenčią formulę, į kurią tas kintamasis neįeina.

Pavyzdys

Imkime tą pačią formulę $Q(p, q, r) \sim (\neg p \& \neg q \& r) \vee (\neg p \& q \& r)$. Pasinaudodami loginiais dėsniais, galime ją supaprastinti: $Q(p, q, r) \sim [(\neg p \& r) \& \neg q] \vee [(\neg p \& r) \& q] \sim (\neg p \& r) \& (\neg q \vee q) \sim (\neg p \& r) \& t \sim \neg p \& r \sim P(p, r)$. Gavome formulę $P(p, r)$, ekvivalenčią formulei $Q(p, q, r)$, į kurią neįeina kintamasis q . \square

Naudojantis logikos dėsniais gali būti sudėtinga pašalinti fiktyvius kintamuosius iš formulės. Parodysime, kaip galima tai padaryti naudojantis teisingumo reikšmių lentelę.

Pavyzdys

Vėlgi imkime tą patį pavyzdį. Nustatėme, kad kintamasis q yra fiktyvus. Kaip jį pašalinti iš formulės? Bandykime perdirbti teisingumo reikšmių lentelę taip, kad jinai nebepriklausytų nuo kintamojo q . Kadangi kintamasis q yra fiktyvus, tai iš teisingumo reikšmių lentelės galime išmesti stulpelį su q reikšmėmis. Palikime tik stulpelius su esminiais kintamaisiais p ir r bei stulpelį su formulės $Q(p, q, r)$ reikšmėmis. Gauname lentelę, pavaizduotą dešinėje pusėje. Kadangi liko tik du kintamieji, lentelėje turėtų būti tik 4 eilutės. Iš tikro, lengva pastebėti, kad visos lentelės eilutės kartojasi (taip yra dėl to, kad q yra fiktyvus – pakeitus vien tik jo reikšmę, formulės reikšmė išlieka ta pati, todėl ta eilučių pora skiriasi vien tik kintamojo q reikšme, o išmetus stulpelį su kintamojo q reikšmėmis ir iš viso nebesiskiria). Išmetame besikartojančias eilutes ir gauname lentelę iš keturių eilučių (žr. dešinėje). Ši lentelė vaizduoja funkciją $P(p, r)$, priklausančią tik nuo kintamųjų p ir r , ir jos reikšmės duotoms kintamųjų p , q ir r reikšmėms sutampa su formulės $Q(p, q, r)$ reikšmėmis, tai yra $Q(p, q, r) \sim P(p, r)$. Taigi, belieka tik užrašyti formulę $P(p, r)$, kurios teisingumo reikšmių lentelę radome, ir turėsime formulę, ekvivalenčią duotai formulei, kurioje nebėra fiktyvių kintamųjų. O kaip užrašyti formulę iš duotos teisingumo reikšmių lentelės, mes išmoksime netrukus, kai nagrinėsime normaliąsias formas. \square

p	r	$Q(p, q, r)$
t	t	k
t	k	k
t	t	k
t	k	k
k	t	t
k	k	k
k	t	t
k	k	k


p	r	$P(p, r)$
t	t	k
t	k	k
k	t	t
k	k	k



Pastabos

1. Jei formulė yra tapačiai teisinga arba tapačiai klaidinga, tai visi į ją įeinantys kintamieji yra fiktyvūs.
2. Lengva patikrinti, kad jei formulės $Q(p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_n)$ ir $P(p_1, p_2, \dots, p_k)$ yra ekvivalenčios, tai kintamieji p_{k+1}, \dots, p_n yra fiktyvūs formulėje Q .

2 Kontaktinės schemos

Vienas akivaizdžiausių matematinės logikos pritaikymų yra elektros grandinėse.

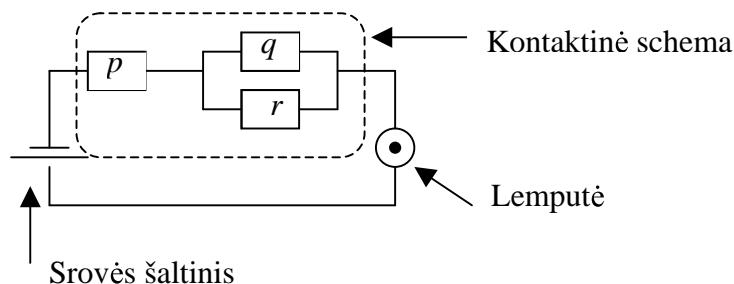
Kontaktinis elementas (pavyzdžiui, jungiklis arba relė), žymimas , gali būti dvejose būsenose:

- 1) jis *praleidžia* elektros srovę, kontaktai sujungti, sakome, kad jis *įjungtas*. Žymėjimas: 
- 2) kai kontaktai nesujungti, elementas *išjungtas*, jungiklis elektros srovės *nepraleidžia*. Žymėjimas: 

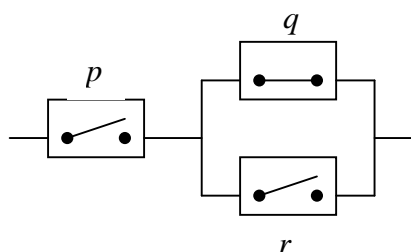
Kontaktinė schema – tai sujungtų kontaktinių elementų rinkinys su dviem išėjimais į išorę.

Pavyzdys

Čia jūs matote elektros grandinę, kurią sudaro šaltinis, lemputė ir kontaktinė schema:



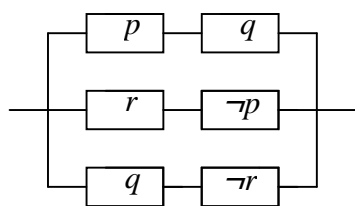
Kiekvieną kontaktinį elementą žymime raide. Jei, pavyzdžiui, elementai p ir r yra išjungti, o q – įjungtas, tai kontaktinė schema bus tokia:



Jinai srovės nepraleis, nes elementas p yra išjungtas.

Galima kelis elementus pažymėti ta pačia raide. Tai reiškia, kad jie išjungti ar įjungti vienu metu. Taip pat galima kontaktinius elementus žymėti ir raide su neiginiu (pavyzdžiui, $\neg p$). Tai reiškia, kad toks elementas bus išjungtas tada ir tik tada, kai elementas p bus įjungtas.

Pavyzdys



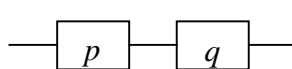
Ši schema praleis srovę, jei kontaktiniai elementai p ir q įjungti, arba jei r įjungtas, o p išjungtas, arba jei q įjungtas, o r išjungtas.

Kaip matome, elektros srovės praleidimo sąlygą galima užrašyti kaip formulę.

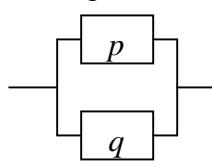
Pavyzdys

Paskutinio pavyzdžio schema praleis srovę tada ir tik tada, kai bus teisingas sudėtinis teiginys $(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)$, kur p yra teiginys “jungiklis p įjungtas”, o q ir r yra analogiški teiginiai.

Nuoseklų kontaktinių elementų jungimą atitinka konjunkcija, o lygiagretų – disjunkcija. Iš tikro: kontaktinė schema

 praleis srovę tada ir tik tada, kai abu kontaktiniai elementai p ir q bus įjungti, tai yra, kai teiginys “ p įjungtas ir q įjungtas” yra teisingas, tai yra, kai teiginys $p \wedge q$ yra teisingas.

Analogiškai kontaktinė schema

 praleis srovę tada ir tik tada, kai bent vienas kontaktinis elementas p arba q bus įjungtas, tai yra, kai teiginys “ p įjungtas arba q įjungtas” yra teisingas, tai yra, kai teiginys $p \vee q$ yra teisingas.

Taigi, kiekvienai kontaktinei schemai galima parašyti ją atitinkančią formulę.

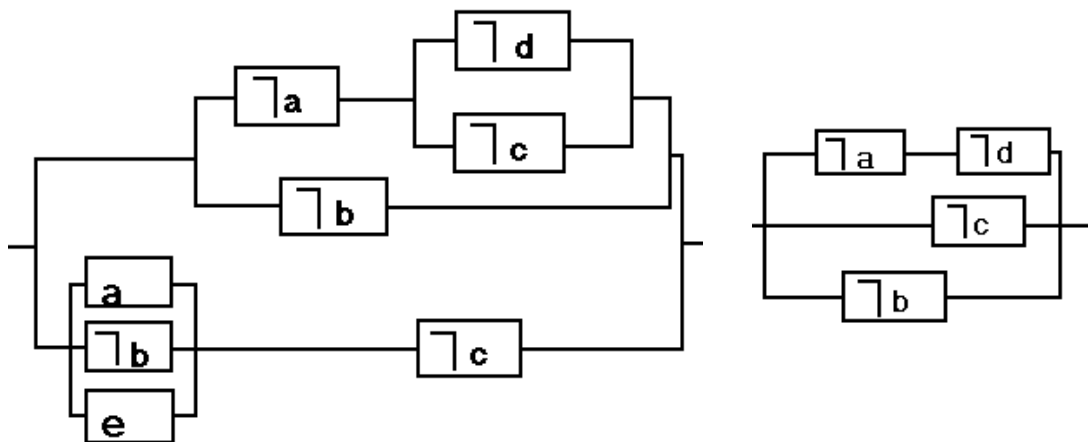
Teisingas ir atvirkščias tvirtinimas: jeigu turime formulę, kurioje yra tik loginės operacijos \neg , \wedge , \vee , ir \neg yra tik prieš loginius kintamuosius, tai galima nubrėžti ją atitinkančią schemą.

Kai mokysimės apie normaliąsias formas, matysime, kad bet kuri formulė gali būti išreikšta tokiu pavidalu, taigi, bet kuriai formulei egzistuoja kontaktinė schema, kuri praleidžia srovę tada ir tik tada, kai ta formulė teisinga.

Kontaktinės schemas vadinamos *ekvivalenčiomis*, jei viena praleidžia srovę tada ir tik tada, kai kita taip pat praleidžia srovę. Žinome, kad schema praleidžia srovę tada ir tik tada, kai ją atitinkanti formulė yra teisinga. Jei kontaktinės schemas ekvivalenčios, tai kiekvienam kontaktinių elementų reikšmių rinkiniui jos abi kartu praleidžia srovę arba ne, todėl jas atitinkančios formulės yra kartu teisingos arba ne, tai yra formulės yra ekvivalenčios. Ir atvirkščiai, jei dvi formulės yra ekvivalenčios, tai jas atitinkančios kontaktinės schemas yra ekvivalenčios.

Pavyzdys

Tarkime, turime dvi schemas:



Jos yra ekvivalenčios, nes jas atitinkančios formulės yra ekvivalenčios. Iš tikro:

$$\begin{aligned}
 & ((\neg a \wedge (\neg d \vee \neg c)) \vee \neg b) \vee ((a \vee \neg b \vee e) \wedge \neg c) \sim \\
 & \sim (\neg a \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge \neg c) \vee \neg b \vee (a \wedge \neg c) \vee (\neg b \wedge \neg c) \vee (e \wedge \neg c) \sim \\
 & \sim (\neg a \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge (\neg a \vee a \vee \neg b \vee e)) \vee \neg b \sim \\
 & \sim (\neg a \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge (t \vee \neg b \vee e)) \vee \neg b \sim \\
 & \sim (\neg a \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge t) \vee \neg b \sim \\
 & \sim (\neg a \wedge \neg d) \vee \neg c \vee \neg b.
 \end{aligned}$$

Tokiu būdu gavome metodą kontaktinių schemų ekvivalentumui patikrinti: imame jas atitinkančias logines formules ir nustatome, ar jos ekvivalenčios.

Į matematinę logiką suvedama keletas praktinių, įprastų inžinieriams, uždavinių. Pavyzdžiui, duotai schemai rasti jai ekvivalenčią ir paprastesnę. Kas ta paprastesnė schema, patikslinama konkrečiam uždaviniui, įvedus sudėtingumo sąvoką. Schemas sudėtingumu gali būti bendras elementų skaičius, skirtingomis raidėmis pažymėtų elementų skaičius, elementų, pažymėtų tam tikromis raidėmis

skaičius ir t.t. Taip pat, žinant elementų kainas (skirtingų elementų jos gali būti nevienodos), apskaičiuojama schemos kaina ir stengiamasi rasti ekvivalenčią schemą, kurios kaina būtų mažiausia (schemos minimizacijos pagal kainą uždavinys).

3 Normaliosios formos

1) Normalioji disjunkcinė forma

Apibrėžimas

Elementaria konjunkcija (EK) vadiname loginę formulę, į kurią įeina tik loginiai kintamieji ir jų neiginiai, sujungti konjunkcijomis.

Pavyzdys

Formulės $a \wedge \neg b \wedge c$, $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s$, $\neg p_2$, p_3 yra elementarios konjunkcijos.

Kiekviena elementari konjunkcija yra arba tapčiai klaidinga, arba teisinga tik su viena interpretacija. Iš tikrųjų, jei į elementarią konjunkciją įeina kuris nors kintamasis ir jo neiginys, tai jina yra tapčiai klaidinga.

Pavyzdys

Elementari konjunkcija $\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg q$ yra tapčiai klaidinga, nes

$$\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg q \sim \neg p \wedge r \wedge (q \wedge \neg q) \sim (\neg p \wedge r) \wedge k \sim k. \quad \square$$

Priešingu atveju, jina teisinga su vienintele interpretacija.

Pavyzdys

Elementari konjunkcija $\neg p \wedge q \wedge r$ yra teisinga, kai $\neg p$, q ir r yra teisingi, tai yra, kai $p=k$, $q=t$ ir $r=t$, o visais kitais atvejais klaidinga, nes bent vienas iš $\neg p$, q ar r bus klaidingas.

Apibrėžimas

Normaliaja disjunkcine forma (NDF) vadiname formulę, kurios pavidalas yra $\bigvee_{i=1}^m K_i$, kur K_i – elementarios konjunkcijos, $m \geq 1$. Formulės Q normaliaja disjunkcine forma vadiname jai ekvivalenčią NDF.

Pavyzdys

Formulė $(a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee \neg b$ yra NDF. Formulė $p \wedge \neg q$ irgi yra NDF, sudaryta iš vienintelės EK.

Teorema

Kiekvienai loginei formulei egzistuoja NDF.

Pirmas įrodymas. Užrašome formulės teisingumo reikšmių lentelę ir iš jos gauname formulės NDF tokiu būdu: imame tik tas lentelės eilutes, kur formulės reikšmė yra t , ir iš kiekvienos tokios eilutės suformuojame vieną elementarią konjunkciją, konstantas t keisdami į atitinkamus loginius kintamuosius, o konstantas k – į jų neiginius.

Parodysime pavyzdžiu. Tarkime, formulės $Q(p,q,r)$ teisingumo reikšmių lentelė yra parodyta dešinėje. Turime tris eilutes, kuriose formulės reikšmė yra t . Kiekvienai eilutei keičiame t į atitinkamą kintamąjį, k į jo neiginį. Iš pirmos eilutės gauname elementarią konjunkciją $p \wedge q \wedge r$, iš penktos $\neg p \wedge q \wedge r$, iš šeštos $\neg p \wedge q \wedge \neg r$, ir imame jų disjunkciją: $P(p,q,r) = (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$. Tai ir bus formulės $Q(p,q,r)$ NDF. Iš tikro, pirmą elementari konjunkciją teisinga tik

p	q	r	$Q(p,q,r)$
t	t	t	t
t	t	k	k
t	k	t	k
t	k	k	k
k	t	t	t
k	t	k	t
k	k	t	k
k	k	k	k

su interpretacija $p=t, q=t, r=t$, antra su $p=k, q=t, r=t$, trečia su $p=k, q=t, r=k$, todėl jų disjunkcija teisinga tik su šiomis trimis interpretacijomis, o su kitomis – klaidinga. Taigi, formulės $P(p,q,r)$ teisingumo reikšmių lentelė sutampa su formulės $Q(p,q,r)$ teisingumo reikšmių lentele, todėl jos ekvivalenčios. Ir formulė $P(p,q,r)$ yra elementarių konjunkcijų disjunkcija, todėl $P(p,q,r)$ yra formulės $Q(p,q,r)$ NDF.

O ką darome, kai formulės reikšmė niekada nebūna t , tai yra, kai formulė yra tapaciai klaidinga? Tokiu atveju jos NDF yra bet kuri tapaciai klaidinga NDF, pavyzdžiui, $p \wedge \neg p$. \square

Pastaba

Įrodymas parodė, kaip, turint formulę, užduotą teisingumo lentelę, užrašyti ją atitinkančią loginę formulę. Mes norėjome to išmokti, kai nagrinėjome esminius ir fiktyvius kintamuosius.

Antras įrodymas. Suvedame formulę į NDF, naudodami logikos dėsnius.

1 žingsnis. Pašaliname visas operacijas, išskyrus \neg, \vee, \wedge . Tam naudojames šiais logikos dėsniais:

$$\begin{aligned} p \oplus q &\sim \neg(p \leftrightarrow q), \\ p \leftrightarrow q &\sim (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p), \\ p \rightarrow q &\sim \neg p \vee q, \\ p | q &\sim \neg(p \wedge q). \end{aligned}$$

2 žingsnis. Įkeliamė neiginius į skliaustus (neiginiai turi likti tik prie loginių kintamųjų). Naudojames De Morgano dėsniais

$$\begin{aligned} \neg(p \vee q) &\sim \neg p \wedge \neg q, \\ \neg(p \wedge q) &\sim \neg p \vee \neg q, \end{aligned}$$

ir dėsnium

$$\neg\neg p \sim p.$$

3 žingsnis. Taikome distributyvumo dėsnį

$$p \wedge (q \vee r) \sim (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

tol, kol gausime NDF.

Kiekvieno žingsnio eigoje ir po kiekvieno žingsnio galime prastinti, naudodami šiuos ir kitus dėsnius:

$$\begin{aligned} p \vee p &\sim p, \\ p \wedge p &\sim p, \\ p \wedge \neg p &\sim k, \\ p \vee \neg p &\sim t, \\ (p \vee q) \wedge p &\sim p, \\ (p \wedge q) \vee p &\sim p. \end{aligned}$$

Po šių trijų žingsnių ir gausime duotos formulės NDF. \square

Pavyzdys

Norime rasti formulės $\neg(p \rightarrow (q \wedge r))$ NDF.

1 žingsnis: pašaliname implikaciją:

$$\neg(p \rightarrow (q \wedge r)) \sim \neg(\neg p \vee (q \wedge r)).$$

2 žingsnis: įkeliamė neiginius į skliaustus:

$$\neg(\neg p \vee (q \wedge r)) \sim p \wedge \neg(q \wedge r) \sim p \wedge (\neg q \vee \neg r).$$

3 žingsnis: taikome distributyvumo dėsnį:

$$p \wedge (\neg q \vee \neg r) \sim (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg r).$$

Suprastinti nėra ką. Gavome NDF. \square

Pastaba

Formulei gali egzistuoti kelios NDF.

Pavyzdys

Formulė

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg r)$$

taip pat yra formulės iš praeito pavyzdžio NDF. Lengva tuo įsitikinti, patikrinus, kad tai iš tikro yra NDF ir kad šios formulės yra ekvivalenčios.

Išvada

Kiekvienai formulei egzistuoja jai ekvivalenti formulė, į kurią įeina tik neiginys, konjunkcija ir disjunkcija, ir neiginys yra tik prie kintamųjų.

Grįžtant prie kontaktinių schemų, dabar įsitikiname, kad tikrai bet kuriai formulei egzistuoja kontaktinė schema, kuri praleidžia srovę tada ir tik tada, kai ta formulė yra teisinga.

2) Normalioji konjunkcinė forma**Apibrėžimas**

Elementaria disjunkcija (ED) vadiname loginę formulę, į kurią įeina tik loginiai kintamieji ir jų neiginiai, sujungti disjunkcijomis.

Pavyzdys

Formulės $p_1 \vee \neg p_2$, $\neg p \vee \neg q \vee r$, q , $\neg p_3$ yra elementarios disjunkcijos.

Kiekviena elementari disjunkcija yra arba tapachiai teisinga, arba klaidinga tik su viena interpretacija. Iš tikrųjų, jei į elementarią disjunkciją įeina kuris nors kintamasis ir jo neiginys, tai jinais yra tapachiai teisinga.

Pavyzdys

Formulė $\neg p \vee q \vee r \vee \neg q$ yra tapachiai teisinga, nes

$$\neg p \vee q \vee r \vee \neg q \sim \neg p \vee r \vee (q \vee \neg q) \sim (\neg p \vee r) \vee t \sim t. \quad \square$$

Priešingu atveju, jinais klaidinga su vienintele interpretacija.

Pavyzdys

Formulė $\neg p \vee q \vee r$ yra klaidinga, kai $\neg p$, q ir r yra klaidingi, tai yra, kai $p = t$, $q = k$ ir $r = k$, o visais kitais atvejais bus teisinga, nes bent vienas iš $\neg p$, q ir r bus teisingas.

Apibrėžimas.

Normaliaja konjunkcine forma (NKF) vadiname formulę, kurios pavidalas yra $\bigvee_{i=1}^m D_i$, kur D_i – elementarios disjunkcijos, $m \geq 1$. Formulės Q normaliaja konjunkcine forma vadiname jai ekvivalenčią NKF.

Pavyzdys

Formulės $(p_1 \vee \neg p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge p_3$ ir $\neg p \vee \neg q \vee r$ yra NKF.

Teorema

Kiekvienai loginei formulei egzistuoja NKF.

Pirmas įrodymas. Sudarome formulės teisingumo lentelę ir iš jos gauname formulės NKF tokiu būdu: imama tik tas lentelės eilutės, kur formulės reikšmė yra k , ir iš kiekvienos tokios eilutės suformuojame vieną elementarią disjunkciją, konstantą k keisdami į atitinkamą loginį kintamąjį, o konstantą t – į jo neiginį.

Parodysime pavyzdžiu. Tarkime, formulės $Q(p,q,r)$ teisingumo reikšmių lentelė yra parodyta dešinėje. Turime tris eilutes, kuriose formulės reikšmė yra k . Kiekvienai eilutei keičiame k į atitinkamą kintamąjį, t – į jo neiginį. Iš pirmos eilutės gauname elementarią disjunkciją $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$, iš antros $\neg p \vee \neg q \vee r$, iš šeštos $p \vee \neg q \vee r$, ir imame jų konjunkciją: $P(p,q,r) = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$. Tai ir bus formulės $Q(p,q,r)$ NKF. Iš tikro, pirma elementari disjunkcija klaidinga tik su interpretacija $p=t, q=t, r=t$, antra su $p=t, q=t, r=k$, trečia su $p=k, q=t, r=k$, todėl jų konjunkcija klaidinga tik su šiomis trimis interpretacijomis, o su kitomis – teisinga. Taigi, formulės $P(p,q,r)$ teisingumo reikšmių lentelė sutampa su formulės $Q(p,q,r)$ teisingumo reikšmių lentele, todėl jos ekvivalenčios. Ir formulė $P(p,q,r)$ yra elementarių disjunkcijų konjunkcija, todėl $P(p,q,r)$ yra formulės $Q(p,q,r)$ NKF.

p	q	r	$Q(p,q,r)$
t	t	t	k
t	t	k	k
t	k	t	t
t	k	k	t
k	t	t	t
k	t	k	k
k	k	t	t
k	k	k	t

O ką darome, kai formulės reikšmė niekada nebūna k , tai yra, kai formulė yra tapaciai teisinga? Tokiu atveju jos NKF yra bet kuri tapaciai teisinga NKF, pavyzdžiui, $p \vee \neg p$. □

Antras įrodymas. Analogiškas įrodymui apie NDF, tik trečiajame žingsnyje naudojame kitą distributyvumo dėsnį:

$$p \vee (q \& r) \sim (p \vee q) \& (p \vee r). \quad \square$$

Pavyzdys

Norime rasti formulės $\neg(p \rightarrow q) \vee r$ NKF.

1 žingsnis: pašaliname implikaciją:

$$\neg(p \rightarrow q) \vee r \sim \neg(\neg p \vee q) \vee r.$$

2 žingsnis: įkeliame neiginius į skliaustus:

$$\neg(\neg p \vee q) \vee r \sim (p \& \neg q) \vee r.$$

3 žingsnis: taikome distributyvumo dėsnį:

$$(p \& \neg q) \vee r \sim (p \vee r) \& (\neg q \vee r).$$

Suprastinti nėra ką. Gavome NKF. □

Pastaba

Formulei gali egzistuoti kelios NKF.

3) Tobulos normaliosios formos

Apibrėžimas

Elementarioji konjunkcija vadinama tobula, jei į ją po vieną kartą įeina kiekvienas kintamasis arba jo neiginys.

Tobulas elementarias konjunkcijas sutrumpintai žymėsime TEK.

Pavyzdys

Formulės $(p \& \neg q) \vee (\neg p \& q \& \neg r) \vee (\neg p \& \neg q \& \neg p \& r)$ antroji elementari konjunkcija yra tobula, o pirmoji ir trečioji – ne, nes į pirmą neįeina nei kintamasis r , nei jo neiginys, o į trečią kintamojo p neiginys įeina du kartus.

Apibrėžimas

Formulės NDF vadinama tobula, jei jos visos elementarios konjunkcijos yra tobulos.

Tobulas NDF sutrumpintai žymėsime TNDF.

Pavyzdys

Formulės

$$(p \& q) \vee (\neg p \& \neg q),$$

$$(\neg p \& q \& r) \vee (\neg p \& q \& \neg r) \vee (p \& \neg q \& r)$$

yra TNDF, o

$$(p \& q) \vee (\neg p \& \neg q \& r),$$

$$(p \& q \& \neg p) \vee (\neg p \& \neg q)$$

nėra TNDF.

Pastaba

Dvi TNDF laikome lygiomis, jei sutampa į jas įeinančios TEK. Jų išsidėstymo tvarka reikšmės neturi.

Teorema

Kiekvienai įvykdomai loginei formulei egzistuoja vienintelė TNDF.

Irodymas. Jei formulė nėra tapačiai klaidinga, tai konstruodami jos NDF iš teisingumo lentelės, gauname jos TNDF, nes į kiekvieną elementarią konjunkciją įeina kiekvienas kintamasis arba jo neiginys po vieną kartą. Ir šita TNDF yra vienintelė, nes kiekvieną interpretaciją, su kuria formulė teisinga, atitinka viena tobula elementari konjunkcija. Iš tikro, jeigu būtų dvi skirtingos formulės TNDF, tai į jas įeitų skirtingos TEK, taigi, šios TNDF būtų teisingos su skirtingomis interpretacijomis, o tai prieštarauja tam, tad formulė yra ekvivalenti savo TNDF. \square

Pastaba

Jei formulė nėra įvykdoma, jina neturi TNDF.

Teorema

Dvi įvykdomos formulės yra ekvivalenčios tada ir tik tada, kai jų TNDF yra lygios.

Irodymas.

“ \Rightarrow ” Ekvivalenčių formulių teisingumo lentelės sutampa, todėl iš jų sukonstruotos TNDF taip pat sutaps.

“ \Leftarrow ” Tarkime, kad dvi formulės turi tą pačią TNDF. Jos abi yra jai ekvivalenčios, todėl jos yra tarpusavyje ekvivalenčios. \square

Jei turime formulės NDF, ją galime suvesti į TNDF, naudodami šį logikos dėsnį:

$$K \sim (K \& p) \vee (K \& \neg p),$$

kur K yra elementari konjunkcija. Ši taisyklė parodo, kaip mes fiktyviai galime prirašyti trūkstamą kintamąjį p.

Prirašę trūkstamus kintamuosius galime gauti, kad kai kurios EK kartojasi. Tokiu atveju galime pasinaudoti logikos dėsniu $p \vee p \sim p$, ir iš besikartojančių EK palikti tik vieną.

Pavyzdys

Formulė $p \vee (\neg p \& \neg q) \vee \neg q$ yra NDF, bet ne TNDF. Pirmoje elementarioje konjunkcijoje trūksta q arba $\neg q$, trečioje – p arba $\neg p$. Prirašome juos fiktyviai:

$$p \vee (\neg p \& \neg q) \vee \neg q \sim$$

$$\sim (p \& q) \vee (p \& \neg q) \vee (\neg p \& \neg q) \vee (\neg q \& p) \vee (\neg q \& \neg p) \sim$$

$$\sim (p \& q) \vee (p \& \neg q) \vee (\neg p \& \neg q).$$

Gavome TNDF. \square

Apibrėžimas

Elementarioji disjunkcija vadinama tobula, jei į ją po vieną kartą įeina kiekvienas kintamasis arba jo neiginy.

Tobulas elementarias disjunkcijas sutrumpintai žymėsime TED.

Apibrėžimas

Formulės NKF vadinama tobula, jei jos visos elementarios disjunkcijos yra tobulos.

Tobulas NKF sutrumpintai žymėsime TNKF. Dvi TNKF laikome lygiomis, jei sutampa į jas įeinančios TED. Jų išsidėstymo tvarka reikšmės neturi.

Pavyzdys

Formulė $(p \vee q) \& (\neg p \vee q)$ yra TNKF.

Teorema

Kiekvienai loginei formulei, išskyrus tapačiai teisingą, egzistuoja vienintelė TNKF.

Irodymas. Analogiškas teoremos apie TNDF įrodymui. \square

Pastaba

Tapačiai teisinga formulė neturi TNKF.

Teorema

Tarkime, turime dvi formules, kurios nėra tapačiai teisingos. Jos yra ekvivalenčios tada ir tik tada, kai jų TNKF yra lygios.

Irodymas. Analogiškas teoremos apie TNDF įrodymui. \square

Jei turime formulės NKF, ją galime suvesti į TNKF, naudodami šį logikos dėsnį:

$$D \sim (D \vee p) \& (D \vee \neg p),$$

kur D yra elementari disjunkcija. Jei gauname kelias vienodas elementarias disjunkcijas, galime suprastinti pagal logikos dėsnį $p \& p \sim p$.

Apibrėžimas

Formulės ekvivalenčiu pertvarkymu vadinsime jos suvedimą į jai ekvivalenčią formulę, naudojant logikos dėsnius.

Pavyzdys

Atliekame formulės ekvivalenčius pertvarkymus:

$$(p \mid q) \rightarrow r \sim \neg(p \mid q) \vee r \sim \neg(\neg(p \& q)) \vee r \sim (p \& q) \vee r.$$

Teorema

Bet kurias dvi ekvivalenčias formules galima ekvivalenčiais pertvarkymais suvesti vieną į kitą.

Irodymas. Žinome, kad abi ekvivalenčias formules galima ekvivalenčiais pertvarkymais suvesti į tą pačią TNDF (arba į TNKF). Todėl atvirkštiniais ekvivalenčiais pertvarkymais galime TNDF (arba TNKF) suvesti į jas. Todėl, kad suvestume vieną formulę į kitą, iš pradžių pirmąją suvedame į TNDF (arba TNKF), o paskui atvirkštiniais ekvivalenčiais pertvarkymais TNDF (arba TNKF) suvedame į antrąją formulę. \square

4 Loginės išvados

Logika yra mokslas apie taisyklingus samprotavimo būdus, t.y. apie būdus, leidžiančius iš teisingų teiginių gauti teisingas išvadas. Tokius samprotavimo būdus

mes, apie tai visai negalvodami, vartojame kiekvieną dieną. Šiame paragrafe mes sužinosime, kodėl jie taisyklingi.

Apibrėžimas

Teiginių seka vadinama samprotavimu. Visi jo teiginiai, išskyrus paskutinį, vadinami prielaidomis, o paskutinis vadinamas išvada.

Paprastai samprotavimas užrašomas taip: $A_1, A_2, \dots, A_n \therefore B$, kur A_1, A_2, \dots, A_n yra prielaidos, o B – išvada. Simbolis \therefore skaitomas “todėl”. Kartais rašoma stulpeliu:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & & A_1 \\ A_2 & & A_2 \\ : & \text{arba} & : \\ A_n & & A_n \\ \hline \therefore B & & \therefore B \end{array}$$

Apibrėžimas

Samprotavimas vadinamas pagrįstu, jei išvada yra teisinga su kiekviena interpretacija, su kuria visos prielaidos yra teisingos.

Pastaba

Jei nėra tokių interpretacijų, su kuriomis visos prielaidos būtų teisingos, samprotavimas laikomas pagrįstu.

Pavyzdys

Nustatysime, ar samprotavimas “Knyga yra ant stalo arba ant lentynos. Jos nėra ant lentynos. Todėl jina yra ant stalo.” pagrįstas, ar ne.

Pažymėkime raide p teiginį “Knyga yra ant stalo”, o raide q – “Knyga yra ant lentynos”. Tada duotą samprotavimą bus galima užrašyti taip: $p \vee q, \neg q \therefore p$. Pagal apibrėžimą, reikia imti visas interpretacijas, su kuriomis $p \vee q$ ir $\neg q$ yra teisingos, ir patikrinti, ar su jomis p yra teisinga (žr. dešinėje). Matome, kad tokia tėra tik viena interpretacija ($p = t, q = k$), ir su ja p yra teisinga. Todėl duotas samprotavimas yra pagrįstas. \square

p	q	$p \vee q$	$\neg q$
t	t	t	k
t	k	t	t
k	t	t	k
k	k	k	t

Teiginys

Samprotavimas $A_1, A_2, \dots, A_n \therefore B$ yra pagrįstas tada ir tik tada, kai formulė $(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) \rightarrow B$ yra tapačiai teisinga.

Įrodymas

“ \Rightarrow ” Tarkime, kad samprotavimas $A_1, A_2, \dots, A_n \therefore B$ yra pagrįstas. Įrodysime, kad formulė $(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) \rightarrow B$ yra tapačiai teisinga.

Imkime bet kurią formulės $(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) \rightarrow B$ interpretaciją. Reikia įrodyti, kad šita formulė yra teisinga su šita interpretacija.

Jei su šita interpretacija bent viena iš formulių A_1, A_2, \dots, A_n yra klaidinga, tai $A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n$ yra taip pat klaidinga, todėl formulė $(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) \rightarrow B$ yra teisinga.

Jei su šia interpretacija visos formulės A_1, A_2, \dots, A_n yra teisingos, tai pagal pagrįsto samprotavimo apibrėžimą formulė B taip pat yra teisinga, todėl formulė $(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) \rightarrow B$ yra teisinga.

Todėl su bet kuria interpretacija formulė $(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) \rightarrow B$ yra teisinga.

“ \Leftarrow ” Tarkime, kad formulė $(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) \rightarrow B$ yra tapačiai teisinga. Įrodysime, kad samprotavimas $A_1, A_2, \dots, A_n \therefore B$ yra pagrįstas.

Tarkime, kad prielaidos A_1, A_2, \dots, A_n yra teisingos. Reikia įrodyti, kad išvada B yra teisinga. Įrodysime prieštaros metodu. Tarkime, B nėra teisinga. Tada gauname, kad $(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) \rightarrow B$ yra klaidinga, nes $A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n$ yra teisinga, o B yra klaidinga. Taigi, gauname prieštarą tam, kad $(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) \rightarrow B$ yra tapčiai teisinga. \square

Matome, kad kiekvieną pagrįstą samprotavimą atitinka logikos dėsnis, todėl pagrįsti samprotavimai irgi kartais vadinami logikos dėsniais.

Pavyzdys

Patikrinsime, kad pagrįstas samprotavimas iš paskutinio pavyzdžio tikrai atitinka tapčiai teisingą loginę formulę, t.y., kad formulė $Q(p,q) \sim ((p \vee q) \& \neg q) \rightarrow p$ yra tapčiai teisinga (žr. dešinėje).

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \& \neg q$	$Q(p,q)$
t	t	t	k	t
t	k	t	t	t
k	t	t	k	t
k	k	k	k	t

Savybės

Tarkime, kad samprotavimas $A_1, A_2, \dots, A_n \therefore B$ yra pagrįstas. Tada:

- 1) Jei visos prielaidos A_1, A_2, \dots, A_n yra tapčiai teisingos, tai ir išvada B yra tapčiai teisinga.
- 2) Jei $A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n$ yra tapčiai klaidinga, tai B gali būti bet kokia formulė.
- 3) Jei B yra tapčiai teisinga, tai prielaidos A_1, A_2, \dots, A_n gali būti bet kokios formulės.

Įrodymas

Tiesiogiai išplaukia iš pagrįsto samprotavimo apibrėžimo. \square

Iš antros savybės matome, kad jei $A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n$ yra tapčiai klaidinga, tai bet kokia formulė B yra formulių A_1, A_2, \dots, A_n išvada.

Pavyzdys

“Dabar lyja. Dabar nelyja. Todėl drambliai moka skraidyti.” Tai pagrįstas samprotavimas, bet iš jo samprotaujant jokios naudos, nes jo prielaidos prieštarauja viena kitai. Išskirsime tokius samprotavimus.

Apibrėžimas

Samprotavimas vadinamas netinkamu, jei jo prielaidos prieštaringos, t.y., jei jo prielaidų konjunkcija yra tapčiai klaidinga, ir tinkamu priešingu atveju.

Taigi, ieškome pagrįstų tinkamų samprotavimų. Turėdami tokį samprotavimą, jo pagalba galime gauti teisingas išvadas iš teisingų prielaidų.

Apibrėžimas

Išvedimo taisyklė yra pagrįstas samprotavimas.

Turime, kad kiekvieną logikos dėsnį, kurio pavidalas yra $(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n) \rightarrow B$, atitinka išvedimo taisyklė $A_1, A_2, \dots, A_n \therefore B$.

Pavyzdys

$p \rightarrow (p \vee q)$ yra logikos dėsnis, todėl galioja išvedimo taisyklė $p \therefore p \vee q$ (t.y. formulė $p \vee q$ yra išvada iš prielaidos p).

Štai dažniausiai naudojamų išvedimo taisyklių sąrašas:

- 1) $p \therefore p \vee q$ (prijungimas)
- 2) $p \& q \therefore p$ (atskyrimas)
- 3) $p, q \therefore p \& q$ (konjunktyvus sujungimas)

- 4) $p \vee q, \neg q \therefore p$ (disjunktyvus silogizmas)
- 5) $p \rightarrow q, p \therefore q$ (modus ponens, arba teisingos išvados taisyklė)
- 6) $p \rightarrow q, \neg q \therefore \neg p$ (modus tollens, arba neteisingos išvados taisyklė)
- 7) $p \rightarrow q \therefore \neg q \rightarrow \neg p$ (kontrapozicija)

Kiekvieną iš šių išvedimo taisyklių galima įrodyti, naudojant teisingumo reikšmių lenteles. Pavyzdžiui, pirmame šio paragrafo pavyzdyje įrodėme disjunktyvaus silogizmo taisyklę.

Štai pavyzdžiai, iliustruojantys duotas išvedimo taisykles.

- 1) Aš mėgstu ledus. Todėl aš mėgstu ledus arba cepelinus.
- 2) Aš mėgstu ledus ir cepelinus. Todėl aš mėgstu ledus.
- 3) Aš mėgstu ledus. Aš mėgstu cepelinus. Todėl aš mėgstu ledus ir cepelinus.
- 4) (pirmas šio paragrafo pavyzdys)
- 5) Jei šiandien sekmadienis, tai paskaitų nėra. Šiandien sekmadienis. Todėl paskaitų nėra.
- 6) Jei šiandien sekmadienis, tai paskaitų nėra. Paskaitos yra. Todėl šiandien ne sekmadienis.
- 7) Jei šiandien sekmadienis, tai paskaitų nėra. Todėl jei paskaitos yra, tai šiandien ne sekmadienis.

Aišku, išvedimo taisyklių yra žymiai daugiau. Jei mes gauname kokį naują pagrįstą samprotavimą, tai jį irgi galime naudoti kaip išvedimo taisyklę.

Yra keli būdai nustatyti, ar samprotavimas $A_1, A_2, \dots, A_r \therefore B$ yra pagrįstas.

1 būdas

Naudojamės tuo, kad šis samprotavimas yra pagrįstas tada ir tik tada, kai loginė formulė $(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_r) \rightarrow B$ yra tapaciai teisinga. Taigi, naudodami teisingumo lentelę arba logikos dėsnius, patikriname, ar ši formulė yra tapaciai teisinga. Beje, šiuo būdu galime patikrinti ir ar samprotavimas yra tinkamas. Bet jei kintamųjų daug, tai teisingumo lentelė bus labai didelė, pavyzdžiui, jei turime 5 kintamuosius, tai lentelėje bus 32 eilutės, jei 6 – 64, ir t.t. Todėl naudojami ir kiti būdai.

2 būdas (loginė lygtis)

Bandome išspręsti loginę lygtį $(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_r) \rightarrow B = k$. Jei randame bent vieną sprendinį, reiškia, kairėje lygybės pusėje esanti formulė nėra tapaciai teisinga, todėl ją atitinkantis samprotavimas nėra pagrįstas. Iš kitos pusės, jei parodome, kad lygtis sprendinių neturi, tai reiškia, kad kairėje lygybės pusėje esanti formulė yra tapaciai teisinga, todėl ją atitinkantis samprotavimas yra pagrįstas. Ši lygtis lengvai susiveda į lygčių sistemą

$$\begin{cases} A_1 = t, \\ A_2 = t, \\ \vdots \\ A_r = t, \\ B = k. \end{cases}$$

Šią lygčių sistemą bandome dar smulkinti, o paskui perrinkinėjame variantus arba bandome atspėti sprendinį.

Pavyzdys

Tarkime, turime samprotavimą $p \rightarrow q, q \rightarrow r \therefore r$. Jį atitinka loginė lygtis

$$((p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r)) \rightarrow r = k.$$

Sprendami šią lygtį, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} p \rightarrow q = t \\ q \rightarrow r = t \\ r = k \end{cases}$$

Iš trečios lygties $r = k$ įstatome į antrą, gauname lygtį $q \rightarrow k = t$, kurią išsprendę gauname $q = k$. Įstatome tai į pirmą lygtį, gauname $p \rightarrow k = t$, todėl $p = k$. Gavome sprendinį $p = k$, $q = k$, $r = k$. Sprendinys iš tikro tenkina šią lygtį, tai yra, egzistuoja interpretacija, su kuria lygties kairė pusė yra klaidinga, taigi, samprotavimas nėra pagrįstas.

3 būdas (formaliosios dedukcijos metodas)

Išvedame išvadą nuosekliai, žingsnis po žingsnio, iš duotų prielaidų, naudodami išvedimo taisykles ir logikos dėsnius. Kiekvieno žingsnio rezultatas yra nauja prielaida tolesniems išvedimo žingsniams.

Pavyzdys

Įrodykite, kad samprotavimas

$$p \vee q, q \rightarrow r, (p \wedge s) \rightarrow v, \neg r, \neg q \rightarrow (u \wedge s) \therefore v$$

yra pagrįstas.

Patogumo dėlei prielaidas numeruokime ir rašykime stulpeliu. Gavę išvadą, šalia parašome, kokia išvedimo taisykle naudojantis ir iš kokių prielaidų ji gauta. Gautas išvadas naudojame kaip prielaidas tolesniuose išvedimo žingsniuose.

1. $p \vee q$
2. $q \rightarrow r$
3. $(p \wedge s) \rightarrow v$
4. $\neg r$
5. $\neg q \rightarrow (u \wedge s)$
6. $\neg q$ (modus tollens iš 2, 4)
7. p (disjunktivus silogizmas 1,6)
8. $u \wedge s$ (modus ponens 5, 6)
9. s (atskyrimas 8)
10. $p \wedge s$ (konjunktivus sujungimas 7, 9)
11. v (modus ponens 3, 10)

Įrodėme, kad samprotavimas yra pagrįstas, nes iš duotų prielaidų gavome išvadą naudodamiesi išvedimo taisyklėmis.

Šis ir du toliau pateikti būdai naudojami samprotavimo pagrįstumui įrodyti. Nepagrįstumo jais neįrodysime, nes jei negauname reikiamos išvados, tai dar nereiškia, kad jos neįmanoma gauti, galbūt tik mes to nesugebame. Todėl nepagrįstumas įrodinėjamas dviem pirmais būdais.

4 būdas (sąlyginio įrodymo metodas)

Naudojamas tada, kai išvada yra implikacija, tai yra $A \rightarrow B$ pavidalo formulė, arba disjunkcija, kuri lengvai perdirbama į implikaciją pagal implikacijos pašalinimo dėsnį. Taip pat gali būti naudojamas kaip dalis ilgesnio išvedimo pagal formaliąją dedukciją.

Taisyklė tokia: jei, padarę laikiną prielaidą p , galime įrodyti, kad galioja teiginys q , tai galime padaryti išvadą, kad formulė $p \rightarrow q$ yra teisinga (čia ir toliau “teiginys galioja” reiškia “teiginys yra teisingas”).

Pavyzdys

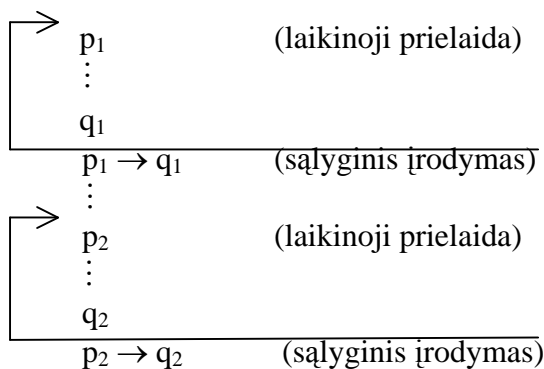
Irodykite, kad samprotavimas $A \vee B \rightarrow C \therefore A \rightarrow C$ yra pagrįstas.

- | | | |
|---|---|---------------------|
| → | 1. $A \vee B \rightarrow C$ | |
| ┌ | 2. A | (laikina prielaida) |
| | 3. $A \vee B$ | (prijungimas 2) |
| | 4. C | (modus ponens 1, 3) |
| | 5. $A \rightarrow C$ (sąlyginis įrodymas 2 – 4) | |

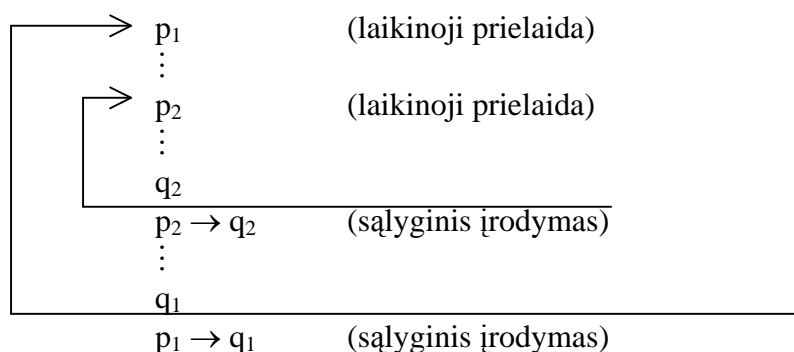
Čia šita linija mes pažymėjome laikinos prielaidos galiojimo sritį.

Pastabos

1. Neužmirškite “atsisveikinti” su laikina prielaida, t.y. uždaryti jos galiojimo srities.
2. Nei viena prielaida iš laikinosios prielaidos galiojimo srities negali būti naudojama už šios srities ribų.
3. Jei laikinųjų prielaidų padaroma daugiau nei viena, jų galiojimo sritys arba turi nesikirsti, arba turi būti viena kitoje, t.y. jų galiojimo sritis žyminčios linijos neturi kirstis. Pavyzdžiui, jei laikinų prielaidų yra dvi, jos viena kitos atžvilgiu turi būti išsidėsčiusios vienu iš šių dviejų būdų:



arba



5 būdas (prieštaros metodas, arba netiesioginis įrodymas)

Jam tinka viskas, kas pasakyta apie sąlyginio įrodymo metodą, įskaitant ir pastabas apie laikinos prielaidos galiojimo sritį, o taisyklė yra tokia: jei, padarę laikiną prielaidą p , galime išvesti prieštaravimą q & $\neg q$, tai galime padaryti išvadą, kad $\neg p$.

Pavyzdys

Irodykite, kad samprotavimas $A \rightarrow (B \& C), \neg B \therefore \neg A$ yra pagrįstas.

1. $A \rightarrow (B \& C)$

2.	$\neg B$	
→ 3.	A	(laikinoji prielaida)
4.	$B \& C$	(modus ponens 1, 3)
5.	B	(atskyrimas 4)
6.	$\neg B \& B$	(konjunktyvus sujungimas 2, 5)
7.	$\neg A$	(prieštaros metodas 3 – 6)

5 Predikatai

Panagrinėkime kelis pavyzdžius:

1. n yra pirminis skaičius.
2. Du iksai plius vienetas yra daugiau už nulį (trumpiau: $2x+1>0$).
3. $a+b=b-a$.

Iš pirmo žvilgsnio atrodytų, kad šie sakiniai kažką teigia, kad jie yra teiginiai. Tačiau ką jie teigia – tiesą ar netiesą – nustatyti negalime, nes šie sakiniai priklauso nuo kintamųjų. Paėmę vieną kintamojo reikšmę, galime gauti teisingą teiginį, paėmę kitą reikšmę – neteisingą. Pavyzdžiui, pirmas sakinytis yra teisingas, kai $n = 2$, ir neteisingas, kai $n = 4$.

Apibrėžimas

Predikatu vadinamas sakinytis su baigtiniu skaičiumi kintamųjų, kuris tampa teiginiu, vietoj kintamųjų įrašius konkrečias jų reikšmes. Kintamojo kitimo sritimi vadinama aibė reikšmių, kurias galima įstatyti vietoj kintamojo.

Pavyzdžiui, į trečią sakinį vietoj kintamųjų a ir b įstačius reikšmes atitinkamai 3 ir 5, gausime teiginį “ $3+5=5-3$ ”, kuris yra klaidingas teiginys. Trečio sakinio kintamųjų a ir b kitimo sritis gali būti, pavyzdžiui, sveikųjų skaičių aibė Z , racionaliųjų skaičių aibė Q , realiųjų skaičių aibė R ir kt.

Predikatus žymėsime didžiosiomis raidėmis, tarp skliaustų nurodydami į juos įeinančius kintamuosius. Pavyzdžiui, 1–3 sakinius galime pažymėti atitinkamai $T(n)$, $P(x)$ ir $R(a,b)$.

Matome, kad predikatą galime laikyti funkcija, priklausančia nuo kelių kintamųjų, kuri, įstačius reikšmes vietoj tų kintamųjų, įgyja reikšmę t arba k , priklausomai nuo to, ar gauname teisingą teiginį, ar klaidingą. Pavyzdžiui, $T(n)$ yra funkcija, kuri įgyja reikšmę t , kai n yra pirminis, ir k priešingu atveju.

Taigi, į predikatą vietoj kintamųjų įrašę konkrečias reikšmes, gauname teiginį. Yra ir kitas būdas iš predikato gauti teiginį: prirašant “egzistuoja” arba “kiekvienam”. Pavyzdžiui, pirmą predikatą galime paversti teiginiu tokiu būdu:

“Egzistuoja $n \in N$ toks, kad n yra pirminis skaičius”

(čia $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ yra natūraliųjų skaičių aibė). Iš tikro, šis sakinytis yra teiginys, nes galima nustatyti jo teisingumo reikšmę (tai teisingas teiginys). Taip pat ir sakinytis

“Kiekvienas $n \in N$ yra pirminis skaičius”

yra teiginys (klaidingas). Sutrumpintai šiuos teiginius galima užrašyti atitinkamai

$\exists n \in N \ T(n)$, ir

$\forall n \in N \ T(n)$.

Ženkilai \exists ir \forall vadinami atitinkamai *egzistavimo ir visuotinio (bendrumo) kvantoriais*. Jie skaitomi atitinkamai “egzistuoja” (“yra”) ir “kiekvienam” (“su visais”). Kintamojo kitimo sritis gali būti nenurodoma, jei ji yra numanoma arba nesvarbi, tokiu atveju galime tiesiog rašyti, pavyzdžiui, $\forall n \ T(n)$.

Teiginio su kvantoriais reikšmę galima išreikšti per teiginius be kvantorių. Tarkime, kad $Q(x)$ yra predikatas, o $x \in D$ (D – kintamojo x kitimo sritis). Tada:

- 1) Teiginys " $\forall x \in D \ Q(x)$ " yra teisingas tada ir tik tada, kai teiginys $Q(a)$ yra teisingas kiekvienam $a \in D$.
- 2) Teiginys " $\exists x \in D \ Q(x)$ " yra teisingas tada ir tik tada, kai teiginys $Q(a)$ yra teisingas bent vienam $a \in D$.

Pavyzdys

Jei $D = \{a, b\}$, tai

$$\forall x \in D \ Q(x) \sim Q(a) \wedge Q(b),$$

$$\exists x \in D \ Q(x) \sim Q(a) \vee Q(b). \quad \square$$

Kaip ir visus teiginius, teiginius su kvantoriais galima paneigti. Lengva įsitikinti, kad:

$$\neg(\forall x \in D \ Q(x)) \sim \exists x \in D \ \neg Q(x), \text{ ir}$$

$$\neg(\exists x \in D \ Q(x)) \sim \forall x \in D \ \neg Q(x).$$

Predikatus, kaip ir teiginius, galima jungti loginėmis operacijomis. Pavyzdžiui, jei $P(x)$ ir $Q(x)$ yra predikatai, $x \in D$, tai galime sudaryti predikatus $\neg P(x)$, $P(x) \& Q(x)$, $P(x) \rightarrow Q(x)$ ir t.t.

Pavyzdys

Jei $P(x)$ yra predikatas " x yra pirminis", $Q(x)$ – " x yra lyginis", $x \in \mathbb{N}$, tai predikatas $P(x) \& Q(x)$ yra " x yra pirminis ir lyginis". Pažymėkime jį $R(x)$. Tada $R(2)$ yra teisingas teiginys, o $R(3)$ – klaidingas. \square

Turėdami kokį nors predikatą $P(x)$, kintamojo x kitimo sritį galime padalinti į dvi dalis: į tuos x , su kuriais $P(x)$ yra teisingas teiginys, ir į tuos x , su kuriais tai yra klaidingas teiginys. Todėl kiekvienas predikatas $P(x)$ apibrėžia aibę, vadinamą *teisingumo reikšmių aibe* (arba tiesiog *teisingumo aibe*), žymimą $\{x \mid P(x)\}$ arba $\{x : P(x)\}$, kuri yra aibė tų x reikšmių, su kuriomis $P(x)$ tampa teisingu teiginiu. Vadinasi,

- jei $P(a)$ yra teisingas, tai $a \in \{x \mid P(x)\}$,
- jei $P(a)$ yra klaidingas, tai $a \notin \{x \mid P(x)\}$.

Pavyzdžiui, jei $P(x)$ yra antras predikatas iš paragrafo pradžios, tai jo teisingumo reikšmių aibė yra

$$\{x \mid P(x)\} = \{x \mid 2x + 1 > 0\} = (-1/2; \infty).$$

Šį intervalą gauname išsprendę nelygybę $2x + 1 > 0$, t.y. radę tas x reikšmes, su kuriomis predikatas $2x + 1 > 0$ tampa teisingu teiginiu.

Kadangi bet kuri lygtis, nelygybė ar jų sistema yra sakiny su kintamaisiais, tai jinai yra predikatas. Ją išspręsti – reiškia rasti to predikato teisingumo reikšmių aibę.

Beje, su žymėjimu $\{x \mid P(x)\}$ jau susidūrėme, mokydamiesi aibių teorijos. Tada sakėme, kad tai yra aibė elementų x , tenkinančių savybę P . Dabar matome, kad savybės matematiškai yra aprašomos predikatais.

Kaip patikrinti, ar samprotavimas pagrįstas, ar ne, jei į jį įeina teiginiai su kvantoriais ?

Pavyzdys

Turime tokį samprotavimą:

Bet kas, turintis laiko ir kantrybės, galėtų susiremontuoti savo mašiną. Deja, daugybė žmonių skundžiasi, kad negali patys susiremontuoti mašinos. Tai reiškia – daugybei žmonių tiesiog trūksta kantrybės.

Užrašykime jį matematiškai. Galime pažymėti tokius predikatus, kur kintamojo x kitimo sritis – visų žmonių aibė:

$L(x)$ – “x turi laiko”,
 $K(x)$ – “x turi kantrybės”,
 $M(x)$ – “x gali susiremontuoti savo mašiną”.

Tada samprotavimas gali būti užrašytas taip:

$$\forall x ((L(x) \wedge K(x)) \rightarrow M(x)), \exists x \neg M(x), \therefore \exists x \neg K(x). \quad \square$$

Samprotavimų, į kuriuos įeina kvantoriai, pagrįstumui nustatyti naudojame tuos pačius būdus kaip ir samprotavimams be kvantorių, tik dar įvedame papildomas taisykles kvantoriams panaikinti ir įvesti.

1 būdas (nepagrįstumui įrodyti)

Suvedame į loginę lygtį ir sprendžiame, kaip ir samprotavimams be kvantorių. Vienintelis keblumas – iš teiginių reikia pašalinti kvantorius. Tai darome tokiu būdu. Tegu $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ yra kintamojo x kitimo sritis. Tada

$$\forall x \in D P(x) \sim P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n), \text{ ir}$$

$$\exists x \in D P(x) \sim P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n),$$

t.y. visuotinio kvantorių galime išreikšti konjunkcija, o egzistavimo kvantorių – disjunkcija.

Jei aibė D yra didelė, tai ši konjunkcija ar disjunkcija gausis sudėtinga. Laimei, užtenka parodyti, kad samprotavimas nepagrįstas kuriame nors kitimo srities poaibyje, kad jis būtų nepagrįstas visoje kitimo srityje. Kai kuriems samprotavimams užtenka imti poaibį iš vieno elemento, pavyzdžiui, kai į samprotavimą įeina teiginiai tik su vienos rūšies kvantoriumi, pavyzdžiui, tik su visuotinio kvantoriumi. Kai įeina abu kvantoriai, dažniausiai reikia imti poaibį, sudarytą iš bent dviejų elementų, nes aibėje iš vieno elemento visuotinio ir egzistavimo kvantoriai sutampa (iš tikro, jei $D = \{a\}$, tai $\forall x \in D P(x) \sim \exists x \in D P(x)$).

Tais atvejais, kai samprotavimo nepagrįstumas neįrodomas aibei iš dviejų elementų, jis galbūt gali būti įrodytas didesnei aibei. Galima parodyti, kad užtenka samprotavimo pagrįstumą patikrinti visose aibėse, kurių elementų skaičius neviršija 2^m , kur m – į samprotavimą įeinančių predikatų skaičius. Jei jose neparodysime samprotavimo nepagrįstumo, tai samprotavimas pagrįstas.

Pavyzdys

Parodysime, kad pereinamo pavyzdžio samprotavimas nepagrįstas. Parodykime tai kintamojo x kitimo srities – visų žmonių aibės – poaibiui D iš dviejų elementų, $D = \{a, b\}$. Tuo pačiu samprotavimas bus nepagrįstas ir aibei iš visų žmonių.

Turime:

$$\forall x (L(x) \wedge K(x)) \rightarrow M(x) \sim ((L(a) \wedge K(a)) \rightarrow M(a)) \wedge ((L(b) \wedge K(b)) \rightarrow M(b)),$$

$$\exists x \neg M(x) \sim \neg M(a) \vee \neg M(b),$$

$$\exists x \neg K(x) \sim \neg K(a) \vee \neg K(b).$$

Pažymėkime:

$$L(a) = p_1, \quad L(b) = p_2,$$

$$K(a) = q_1, \quad K(b) = q_2,$$

$$M(a) = r_1, \quad M(b) = r_2.$$

Turime parodyti, kad samprotavimas

$$(p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1) \wedge (p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2), \neg r_1 \vee \neg r_2, \therefore \neg q_1 \vee \neg q_2$$

yra nepagrįstas. Tam bandysime rasti loginės lygties

$$(p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1) \wedge (p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2) \wedge (\neg r_1 \vee \neg r_2) \rightarrow (\neg q_1 \vee \neg q_2) = k$$

bent vieną sprendinį. Gauname sistemą

$$p_1 \wedge q_1 \rightarrow r_1 = t,$$

$$p_2 \wedge q_2 \rightarrow r_2 = t,$$

$$\neg r_1 \vee \neg r_2 = t,$$

$$\neg q_1 \vee \neg q_2 = k.$$

Iš ketvirtos lygties iškart gauname, kad $\neg q_1 = \neg q_2 = k$, tai yra $q_1 = q_2 = t$. Kitų kintamųjų reikšmes bandome kažkaip parinkti, pavyzdžiui, iš trečios lygties matome, kad arba abu $\neg r_1$ ir $\neg r_2$ įgyja reikšmes t, arba vienas iš jų. Pradžiai tarkime, kad $\neg r_1 = \neg r_2 = t$. Jei sprendinių nerasime, nagrinėsime likusius atvejus. Taigi, $r_1 = r_2 = k$. Įstatome į pirmas dvi lygtis ir gauname

$$p_1 \wedge t \rightarrow k = t,$$

$$p_2 \wedge t \rightarrow k = t,$$

iš kur išvedame $p_1 = p_2 = k$. Taigi, gavome lygties sprendinį

$$p_1 = k, p_2 = k, q_1 = t, q_2 = t, r_1 = k, r_2 = k,$$

todėl samprotavimas nepagrįstas aibei iš dviejų elementų (žmonių), o tuo pačiu nepagrįstas ir visų žmonių aibei. \square

2 būdas (pagrįstumui įrodyti)

Naudojame tuos pačius metodus (formalios dedukcijos, sąlyginio įrodymo, prieštaros), kaip ir samprotavimams be kvantorių, tik dar pridedame kvantorių paneigimo taisykles ir šias keturias išvedimo taisykles, leidžiančias pašalinti ir įvesti kvantorius.

1. $\forall x P(x) \therefore P(a)$, kur a žymi bet kurį laisvai pasirinktą objektą iš kintamojo x kitimo srities (universali instanciacija, sutrumpintai UI, – visuotinio kvantoriaus pašalinimas).
2. $P(a) \therefore \forall x P(x)$, su sąlyga, kad a – simbolis, įvestas taikant UI (universali generalizacija, UG, – visuotinio kvantoriaus įvedimas).
3. $\exists x P(x) \therefore P(a)$, su sąlyga, kad a – dar nepanaudotas simbolis (egzistencinė instanciacija, EI, – egzistavimo kvantoriaus pašalinimas).
4. $P(a) \therefore \exists x P(x)$, kur a – bet kurio objekto simbolis (egzistencinė generalizacija, EG, – egzistavimo kvantoriaus įvedimas).

Pavyzdys

Turime tokį samprotavimą:

Yra ne vienas muzikantas, kuris savęs nelaiko krepšinio sirgaliu. Lietuviai, kaip žinia, – visi yra didesni ar mažesni krepšinio gerbėjai. Taigi, dalis muzikantų, išėitų, nėra lietuviai.

Užrašykime jį matematiškai. Įveskime tokius predikatus, kur kintamojo x kitimo sritis yra visų žmonių aibė:

$M(x)$ “x yra muzikantas”,

$K(x)$ “x yra krepšinio sirgalius (gerbėjas)”,

$L(x)$ “x yra lietuvis”.

Tada šis samprotavimas užsirašys taip:

$$\exists x (M(x) \wedge \neg K(x)), \forall x (L(x) \rightarrow K(x)) \therefore \exists x (M(x) \wedge \neg L(x)).$$

Įrodykime, kad jis pagrįstas.

$$1. \exists x (M(x) \wedge \neg K(x))$$

$$2. \forall x (L(x) \rightarrow K(x))$$

$$3. M(a) \wedge \neg K(a) \quad (\text{EI iš 1 eilutės})$$

$$4. L(a) \rightarrow K(a) \quad (\text{UI 2})$$

$$5. \neg K(a) \quad (\text{atskyrimas 3})$$

$$6. \neg L(a) \quad (\text{modus tollens 4,5})$$

$$7. M(a) \quad (\text{atskyrimas 3})$$

$$8. M(a) \wedge \neg L(a) \quad (\text{konjunktyvus sujungimas 6,7})$$

$$9. \exists x (M(x) \wedge \neg L(x)) \quad (\text{EG } 8) \quad \square$$