

VYTAUTAS RINKEVIČIUS

ELEKTRA IR MAGNETIZMAS

VILNIAUS UNIVERSITETAS

2001



(1938 – 2001)

Vytautas Jonas Rinkevičius gimė 1938 m. sausio 27 d. Ilčiukuose, Utenos rajone. Studijavo Vilniaus universiteto Fizikos-matematikos fakultete. Baigęs studijas 1961 m., buvo paskirtas dirbti Puslaidininkių fizikos katedroje vyresniuoju dėstytoju. Tuo pat metu jis pradėjo stibio sulfido elektrinių savybių tyrimus ir 1970 m. apgynė mokslų daktaro disertaciją “Stibio sulfido monokristalų vietinių lygmenų ir piroelektrinių savybių tyrimas”. 1974 m. jam buvo suteiktas pedagoginis docento vardas. Doc. V.Rinkevičius buvo vienas pirmųjų, pritaikiusių termostimuliuotų srovių metodą puslaidininkių elektroninėms savybėms tirti, o jų interpretacijai naudojo sudėtingas kompiuterines programas. Jo atliktų didelės varžos puslaidininkių elektrinių savybių tyrimo rezultatai paskelbti prestižiniuose moksliniuose žurnaluose.

Doc. V.Rinkevičius mėgo pedagoginį darbą, pirmasis fakultete panaudojo kompiuterinę uždavinių sprendimo kontrolę. Skaitė paskaitas “Fizikos Olimpo” mokyklos moksleiviams, atspausdino šių paskaitų konspektą ir uždavinių rinkinį. Jis daugelį metų skaitė bendrosios fizikos kursą “Elektra ir magnetizmas”, kurio vadovėlį baigė rašyti paskutinėmis gyvenimo dienomis. Vadovėlio kalba netaisyta.

Turinys

Įvadas		7
1 skyrius	NUOSTOVUSIS ELEKTRINIS LAUKAS	7
	1. Nuostoviojo elektrinio lauko sąvokos fizikinė prasmė ir jos taikymo ribos	7
	2. Kulono dėsnis ir jo aiškinimas vartojant lauko sąvoką	7
	3. Elektrinio lauko stipris	8
	4. Superpozicijos principas	9
	5. Ilginis, paviršinis ir tūrinis krūvio tankiai	9
	6. Grafinis elektrinio lauko vaizdavimas jėgų linijomis. Jėgų linijų srautas	10
	7. Gauso dėsnis	11
	8. Gauso dėsnio diferencialinė išraiška	11
	9. Elektrostatinio lauko potencialumas	12
	10. Skaliarinis potencialas, jo nevienareikšmiškumas ir normavimas	13
	11. Taškinio krūvio, taškinių krūvių sistemos ir tolydžiai pasiskirsčiusių krūvių potencialas	14
	12. Elektrinio lauko stiprio ir potencialo gradiento sąryšis	15
	13. Puasono ir Laplaso lygtys	15
	14. Elektrinis laukas aplinkoje su laidininkais. Krūvių pasiskirstymas laidininko paviršiuje	16
	15. Laukas arti laidininko paviršiaus	16
	16. Paviršinio krūvio tankio priklausomybė nuo paviršiaus kreivio. Krūvio nutekėjimas nuo smailumos	17
	17. Metalinis ekranas	17
	18. Kulono dėsnio eksperimentinis tikrinimas Kevendišo metodu	18
	19. Laidininko potencialas	18
	20. Pavienio laidininko elektrinė talpa	18
	21. Laidininkų sistema. Kondensatoriai ir jų talpa	19
	22. Atvaizdų metodo sprendžiant kai kuriuos elektrostatikos uždavinius taikymo suvokimas	21
	23. Elektrostatinis laukas aplinkoje su dielektrikais. Dielektrikų poliarizacija ir jos molekulinis aiškinimas	24
	24. Elektrinio dipolio kuriamas laukas	24
	25. Poliarizuotumas. Poliarizacijos įtaka elektriniam laukui. Susietieji krūviai	25
	26. Elektrinis jautris. Dielektrinė skvarba	27
	27. Gauso dėsnis, kai aplinkoje yra dielektrikų. Elektrinė slinktis	27
	28. Elektrinis laukas dvi aplinkas skiriančiame paviršiuje	29
	29. Diskretinių krūvių sąveikos energija	30
	30. Tolydžiai pasiskirsčiusių krūvių savoji ir sąveikos energija	31
	31. Įelektrintų laidininkų energija	32
	32. Elektrinio lauko energijos tūrinis tankis	32
	33. Išoriniame lauke esančio elektrinio dipolio energija	33
	34. Jėgos, veikiančios taškinį krūvį, tolydžiai pasiskirsčiusį krūvį ir dipolį elektriniame lauke	33
	35. Laidininką veikiančios jėgos	34
	36. Dielektriką veikiančios jėgos. Jėgų skaičiavimas remiantis energijos išraiška	35

2 skyrius	DIELEKTRIKAI	37
	1. Vietinis (lokalinis) laukas ir jo skirtingumas nuo išorinio lauko	37
	2. Nėpoliniai dielektrikai	38
	3. Poliniai dielektrikai ir jų elektrinio jautrio priklausomybė nuo temperatūros	38
	4. Pagrindinės žinios apie pjezoelektrikus ir feroelektrikus	40
3 skyrius	NUOLATINĖ ELEKTROS SROVĖ	42
	1. Elektros srovės stipris ir srovės tankis	42
	2. Elektrinis laukas tekant nuolatinei srovei	43
	3. Tolydumo lygtis ir srovės pastovumo sąlyga	44
	4. Omo dėsnis ir jo diferencialinė išraiška	45
	5. Krūvininkų judris ir relaksacijos trukmė	46
	6. Pašalinės elektrovaros (ev)	47
	7. Srovės darbas ir galia. Džaulio dėsnis ir jo diferencialinė išraiška	48
	8. Tiesinės grandinės. Kirchhofo taisyklės	49
4 skyrius	ELEKTRINIS LAIDUMAS	52
	1. Metalų krūvininkų prigimtis	52
	2. Metalų elektrinio laidumo priklausomybė nuo temperatūros ir jos aiškinimas	54
	3. Superlaidumas	55
	4. Energijos juostų modelis	55
	5. Savasis puslaidininkų elektrinis laidumas ir jo priklausomybė nuo temperatūros	56
	6. Priemaišinis puslaidininkų laidumas ir jo priklausomybė nuo temperatūros	57
	7. Dielektrikų elektrinis laidumas ir jo priklausomybė nuo temperatūros	59
	8. Elektrolitų elektrinis laidumas ir jo priklausomybė nuo temperatūros	60
	9. Dujų elektrinis laidumas. Jonizacija ir jonų rekombinacija. Jonų griūtis	60
	10. Pagrindiniai dujinio išlydžio būdai	62
	11. Šiluminė (termoelektroninė) elektronų emisija. Erdvinis krūvis tekant srovei vakuume	63
	12. Kontaktinis (sąlytinis) potencialų skirtumas	64
	13. Termoelektrinis, Peltje ir Tomsono reiškiniai	64
	14. p-n sandūros elektrinis laidumas	65
	15. Tranzistorius	66
5 skyrius	NUOSTOVUSIS MAGNETINIS LAUKAS	67
	1. Judančių krūvių sąveika. Magnetinė jėga ir jos aiškinimas naudojant lauko sąvoką	67
	2. Judančio krūvio kuriamas magnetinis laukas	68
	3. Lorencio jėga	69
	4. Reliatyvistinė magnetinio lauko kilmė	69
	5. Srovės elemento kuriamas laukas. Bio ir Savaro dėsnis	70
	6. Ampero jėga	72
	7. Magnetinio srauto tankio (magnetinės indukcijos) vektorius	72
	8. Srovės elementų sąveikos dėsnis (Bio, Savaro, Laplaso ir Ampero dėsnis)	73
	9. Magnetinio srauto tankio vektoriaus cirkuliacijos teorema nuostoviuoju atveju	73

	10. Suminės srovės dėsnio integralinė ir diferencialinė išraiškos. Sūkurinis magnetinio lauko pobūdis	73
	11. Kontūras su srove magnetiniame lauke. Jėgos, veikiančios kontūrą su srove magnetiniame lauke. Kontūro su srove energija magnetiniame lauke	74
6 skyrius	MAGNETIKAI	77
	1. Magnetinis laukas magnetike, molekulinės srovės. Įmagnetėjimo vektorius	77
	2. Magnetinis jautris ir magnetinė skvarba	78
	3. Jėgos, veikiančios magnetikus nevienalyčiame magnetiniame lauke. Magnetikų klasifikavimas	78
	4. Magnetinio lauko stiprio vektorius	79
	5. Magnetinis laukas dvi aplinkas skiriančiame paviršiuje	80
	6. Magnetinis ekranavimas	81
	7. Induktyvumas ir abipusis induktyvumas	81
	8. Kontūrų su srovėmis magnetinio lauko energija	82
	9. Magnetinio lauko energijos tūrinis tankis	83
	10. Magnetinių jėgų skaičiavimas remiantis energijos išraiška	84
	11. Atomų ir molekulių magnetizmas	85
	12. Diamagnetizmo prigimtis. Larmoro precesija	86
	13. Paramagnetizmo prigimtis. Paramagnetinio jautrio priklausomybė nuo temperatūros. Kiuri dėsnis	86
	14. Feromagnetizmas. Histerezės kilpa. Feromagnetinių savybių priklausomybė nuo temperatūros. Feromagnetiniai domenai	87
	15. Nuolatiniai magnetai	87
	16. Triodas	88
	17. Elektronų spindulio valdymas. Elektronų pluošto fokusavimo būdai	89
	18. Magnetiniai veidrodžiai	91
	19. Elektringųjų dalelių greitintuvai	92
7 skyrius	ELEKTROMAGNETINĖ INDUKCIJA	93
	1. Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnis. Elektrovaros atsiradimas magnetiniame lauke judančiame laidininke	93
	2. Sūkurinis elektrinis laukas	95
	3. Fuko srovės	96
	4. Skinefektas	97
8 skyrius	KVAZINUOSTOVIOSIOS KINTAMOSIOS SROVĖS GRANDINĖS	97
	1. Kvazinuostovumo sąlyga	97
	2. Aktyvioji, talpinė ir induktyvioji varžos. Kintamosios srovės grandinių skaičiavimas vektorinių diagramų ir kompleksinių dydžių metodais. Omo dėsnis kintamosios srovės grandinei. Impedansas	98
	3. Kintamosios srovės grandinių skaičiavimas vektorinių diagramų ir kompleksinių dydžių metodais. Impedansas	100
	4. Įtampos rezonansas	104
	5. Srovės rezonansas	106
	6. Kintamosios elektros srovės darbas ir galia	107
	7. Srovės stiprio ir įtampos efektinės vertės	109
	8. Grandinė su abipuse indukcija. Transformatoriai ir autotransformatoriai	109

	9. Pagrindinės žinios apie trifazę srovę ir jos panaudojimą	111
	10. Sukamasis magnetinis laukas	112
	11. Elektros varikliai	113
	12. Virpesių kontūras. Laisvieji elektromagnetiniai virpesiai	114
	13. Grįžtamojo ryšio generatorius	116
9 skyrius	MAKSVELO LYGTYS.	
	PAGRINDINĖS ELEKTROMAGNETINIŲ BANGŲ SAVYBĖS	116
	1. Slinkties srovė	116
	2. Maksvelo lygčių sistema ir atskirų tos sistemos lygčių fizikinė prasmė	118
	3. Elektromagnetinės bangos	118

Įvadas

Šiuo metu žinomos keturios sąveikos tarp elementariųjų dalelių rūšys: stiprioji, elektromagnetinė, silpnoji ir gravitacinė. Elektromagnetinė sąveika, pagal savo stiprumą būdama antroje vietoje, gamtoje yra itin svarbi. Jos dėka egzistuoja atomai, molekulės, skystieji ir kietieji kūnai. Daugelis mechanikos bei molekulinės fizikos kurse nagrinėtų jėgų (pvz., smūgio, trinties, klampumo, tamprumo ir kt. Jėgos) iš esmės yra elektromagnetinės prigimtys.

Elektros krūvis - tai vienas iš pagrindinių elementariųjų dalelių apibūdinimų (šalia masės, judėjimo kiekio momento (sukinio) ir kt.). Kiekviena elementarioji dalelė turi arba **teigiamą**, arba **neigiamą** elektros krūvį, ar esti **neutrali** (t.y. neturi krūvio arba turi po lygiai teigiamų ir neigiamų krūvių). Bet kokio kūno krūvis yra tą kūną sudarančių elementariųjų dalelių krūvių algebrinė suma. Eksperimentiškai nustatyta, kad bet kokio kūno krūvis q yra kvantuotas, t. y. gali būti išreikštas sąryšiu $q = \pm Ne$. Čia N – sveikasis skaičius, o e vadinamas **elementariuoju krūviu**. $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C ir yra lygus protono krūviui. Elektrono krūvis yra neigiamas ir lygus $-e$. Kai kūno krūvis esti daug didesnis už e (siekia nanokulonus, mikrokulonus ar pan.), t. y. N – didelis, tuo atveju galima tarti, kad krūvio didumas gali kisti tolydžiai ir nebekelti klausimo, ar jis yra kartotinis e , ar ne.

Elektros krūvio tvermės dėsnis teigia, kad **uždaros sistemos krūvių algebrinė suma nekinta**. Matematiškai šį teiginį galima užrašyti taip:

$$\sum_i q_i = \text{const.}$$

Šis dėsnis galioja bet kokių atveju, kad ir kokie vyksmai vyktų sistemos viduje. Joje gali vykti įvairios cheminės, branduolinės bei elementariųjų dalelių virsmų reakcijos.

Pastebėsime, jog elektros krūvis nepriklauso nuo greičio. Imkime tokį pavyzdį. Žinoma, kad bet kokios medžiagos atomą sudaro branduolys ir aplink jį skriejantys elektronai. Toks atomas yra neutrali sistema, nors elektronai aplink branduolį skrieja gana dideliais (reliatyvistiniais) greičiais. Atomą galima jonizuoti nuo branduolio atplėšus elektronus. Eksperimentas rodo, kad nuo branduolio atplėštų ir sustabdytų elektronų krūvių suma absoliutiniu didumu lygi branduolio krūviui. Sakoma, jog krūvis yra **reliatyvistinis invariantas**. To negalima pasakyti, pavyzdžiui, apie masę, kuri pagal reliatyvumo teoriją priklauso nuo greičio.

1 skyrius

NUOSTOVUSIS ELEKTRINIS LAUKAS

1. Nuostoviojo elektrinio lauko sąvokos fizikinė prasmė ir jos taikymo ribos

Elektrostatika nagrinėja nejudančių krūvių sąveiką bei tokių krūvių sukurtą lauką, vadinamą elektrostatiniu lauku. Elektrostatinis laukas tam tikra prasme yra abstrakcija, nes gamtoje nejudančių krūvių nėra. Kaip žinome, visos elementariosios dalelės ir iš jų sudaryti atomai bei molekulės nuolat netvarkingai juda. Tačiau jei kūno krūvį sudaro daug elementariųjų dalelių ir erdvės taško, kuriame nagrinėjamas laukas, nuotolis nuo kūno yra daug didesnis už netvarkingai judančių elektringųjų dalelių trajektorijų matmenis, lauką nagrinėjame taške tam tikru tikslumu galime laikyti **elektrostatiniu lauku**. Taigi yra visiška analogija su statika mechanikoje: nors bet koki kūną sudarančios dalelės nepaliaujamai juda, pats kūnas, sudarytas iš tų dalelių, gali ir nejudėti.

2. Kulono dėsnis ir jo aiškinimas vartojant lauko sąvoką

1785 m., eksperimentiškai matuodamas įelektrintų kūnų sąveikos jėgą naudodamasis sukamosiomis svarstyklėmis, Kulonas (*Ch. O. Coulomb*) atrado dėsnį: du sąveikaujantys taškiniai krūviai q_1 ir q_2 , esantys vakuume r atstumu vienas nuo kito, veikia vienas kitą jėga

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.1)$$

Čia k – proporcingumo koeficientas, priklausantis nuo pasirinktos vienetų sistemos. Tarptautinėje (SI) vienetų sistemoje jėgos vienetas yra niutonas (N), atstumo – metras (m), o krūvio – kulonas (C). Tuomet $k = 9 \cdot 10^9$ m/F. Tačiau konstanta k Kulono dėsnyje retai vartojama. Kad būtų paprastesnės kitos elektros moksle naudojamos formulės, įvedama nauja konstanta $\epsilon_0 = 1/(4\pi k)$. Tuomet Kulono dėsnis užrašomas taip:

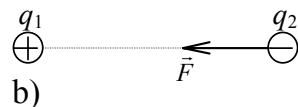
$$F = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 r^2}. \quad (1.2)$$

Dydis ϵ_0 vadinamas **elektrine konstanta**. Jos skaitinė vertė tokia: $\epsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi) \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Taškiniai krūviai - tai įelektrinti kūnai, kurių matmenys daug mažesni už atstumus tarp jų. Taigi taškinio krūvio sąvoka analogiška materialaus taško sąvokai mechanikoje. Taip pat buvo eksperimentiškai nustatyta ir Kulono jėgos kryptis: ji yra tiesėje, einančioje per krūvius q_1 ir q_2 , t.y. kuloninės sąveikos jėgos yra **centrinės** (1 pav.).

Nuo seno yra žinoma, kad du krūviai gali arba stumti, arba traukti vienas kitą. To paties ženklo (vienarūšiai) krūviai vienas kitą stumia (1 pav., a), o skirtingų ženklų (įvairiarūšiai) krūviai - traukia (1 pav., b). Pažymėję \vec{r} vektorių, nukreiptą nuo pirmojo krūvio q_1 į antrąjį krūvį q_2 , antrąjį krūvį veikiančios jėgos vektorių \vec{F} galime užrašyti taip:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{4 \pi \epsilon_0 r^3}. \quad (1.3)$$



1 pav.

Tuomet stūmos atveju ($q_1 q_2 > 0$) $\vec{F} \parallel \vec{r}$, o traukos atveju ($q_1 q_2 < 0$) $\vec{F} \parallel -\vec{r}$.

Elektrostatinė sąveika tarp krūvių perduodama per tarpininką – **elektrostatinį lauką**. Tai yra tam tikra materijos forma. Šiuo metu žinomos dvi materijos formos - medžiaga ir laukas. Taigi kiekvienas krūvis erdvėje aplink save kuria elektrostatinį lauką. Jei tame lauke yra kitas krūvis, tai jį veikia jėga. Dažnai sakoma, kad krūvį veikia elektrostatinis (arba elektrinis) laukas, tuo lyg ir atsiribojant nuo tą lauką sukuriančių krūvių.

Pažymėsime, kad be elektrostatinio (t.y. sukurto nejudančių krūvių) lauko yra žinomas ir kitos kilmės elektrinis laukas, kurį sukuria kintantis laike magnetinis laukas. Nors tas laukas kai kuriomis savybėmis skiriasi nuo elektrostatinio lauko, vis dėlto svarbiausia jo savybė - veikti krūvį tam tikra jėga, yra ta pati. Todėl dažnai vietoj **elektrostatinio** lauko sakoma ir rašoma **elektrinis** laukas.

3. Elektrinio lauko stipris

Tai pagrindinė elektrinio lauko charakteristika. Jėga, veikianti tam tikrame lauko taške esantį krūvį q , yra proporcinga to krūvio dydžiui, taip pat ji priklauso nuo lauko savybių. Ta priklausomybė gali būti taip užrašyta:

$$\vec{F} = \vec{E}q. \quad (1.4)$$

Iš (1.4) gauname:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.5)$$

Dydis \vec{E} vadinamas elektrinio lauko stiprio vektoriumi. Taigi **elektrinio lauko stipris lygus jėgai, veikiančiai vienetinį teigiamą krūvį**. Jo SI vienetas yra 1 N/C = 1 V/m.

Taškinio krūvio q lauko stipris taške, nutolusiame atstumu r nuo to krūvio, lengvai apskaičiuojamas, į (1.5) įrašius jėgos išraišką pagal Kulono dėsnį (1.3). Gausime:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4 \pi \epsilon_0 r^3}, \quad (1.6)$$



o \vec{E} modulis

2 pav.

$$E = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2}. \quad (1.7)$$

Esant teigiamam taškiniam krūviui \vec{E} yra nukreiptas nuo krūvio, o neigiamam - į krūvį (2 pav.).

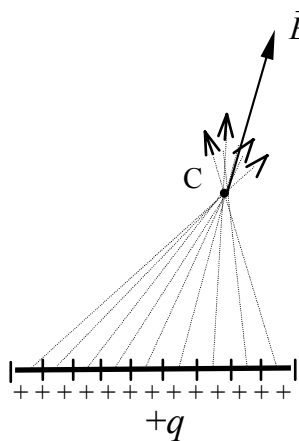
4. Superpozicijos principas

Šis principas teigia, kad *taškinių krūvių sistemos sukurto elektrinio lauko stipris yra lygus atskirų tos sistemos krūvių sukurtų laukų stiprių vektorinei sumai*:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^3}. \quad (1.8)$$

Superpozicijos principo negalima įrodyti vien tik teoriniais samprotavimais. Tai yra eksperimentinių faktų apibendrinimo rezultatas.

Superpozicijos principas leidžia bet kokios krūvių sistemos sukurtą lauką apskaičiuoti naudojantis taškinio krūvio lauko stiprio formulę (1.6). Pavyzdžiui, norėdami apskaičiuoti tiesios įelektrintos atkarpos lauką bet kokiame taške C, mintyse padalykime tą atkarpą į tokias mažas atkarpėles, kad jose esančius krūvius būtų galima laikyti taškiniais, ir vektoriškai sudėkime tų atkarpėlių laukus (3 pav.). Praktiškai tas atliekama integruojant.



3 pav.

5. Ilginis, paviršinis ir tūrinis krūvio tankiai

Taškiniai krūviai, kaip ir materialieji taškai, gamtoje neegzistuoja, o krūviai būna pasiskirstę linijose, paviršiuose ar tūriuose. Šiems pasiskirstymams apibūdinti įvedami atitinkami dydžiai.

Jei krūvis q yra tolydžiai pasiskirstęs l ilgio linijos atkarpoje, dydis

$$\tau = \frac{q}{l} \quad (1.9)$$

vadinamas **ilginiu krūvio tankiu**. Netolydžiai pasiskirstčius krūviui reikia imti be galo mažą linijos atkarpėlę dl . Jei tos atkarpėles krūvis dq ,

$$\tau = \frac{dq}{dl}. \quad (1.10)$$

Ilginio krūvio tankio SI vienetas yra 1 C/m.

Analogiškai apibrėžiami **paviršinis krūvio tankis**

$$\sigma = \frac{q}{S} \quad (1.11)$$

bei

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad (1.12)$$

ir **tūrinis krūvio tankis**

$$\rho = \frac{q}{V} \quad (1.13)$$

bei

$$\rho = \frac{dq}{dV}. \quad (1.14)$$

Šių dydžių vienetai atitinkamai yra 1 C/m² ir 1 C/m³. Žinant krūvių tankius, sistemos krūviai nustatomi integruojant:

$$q = \int_{(l)} \tau dl, \quad (1.15)$$

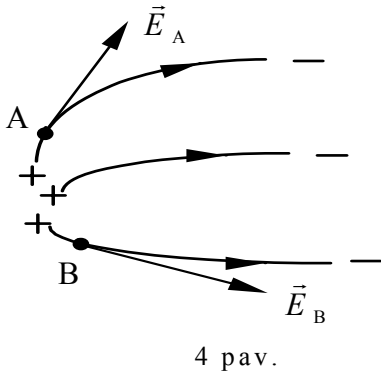
$$q = \int_{(S)} \sigma dS, \quad (1.16)$$

$$q = \int_{(V)} \rho dV. \quad (1.17)$$

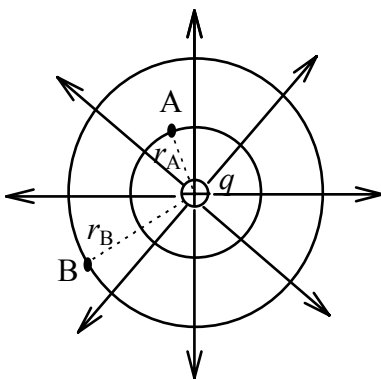
6. Grafinis elektrinio lauko vaizdavimas jėgų linijomis. Jėgų linijų srautas

Kiekvieną elektrinio lauko tašką apibūdina vektorius \vec{E} . Jį būtų galima pavaizduoti tiesės atkarpa su rodykle, kaip yra vaizduojami vektoriai. Tačiau toks vaizdavimo būdas nėra patogus, kai mus domina ne vienas lauko taškas, o tam tikra lauko sritis. Patogesnis būtų Faradėjaus (*M. Faraday*) pasiūlytas lauko vaizdavimas jėgų linijomis.

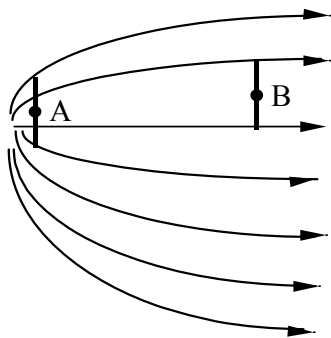
Jėgų linija yra tokia, kurios liestinės kiekviename taške kryptis sutampa su \vec{E} vektoriaus kryptimi tame taške. Kad būtų aišku, kuria iš dviejų galimų liestinės kryptių nukreiptas vektorius \vec{E} , jėgų linijos pažymimos rodyklėmis (4 pav.).



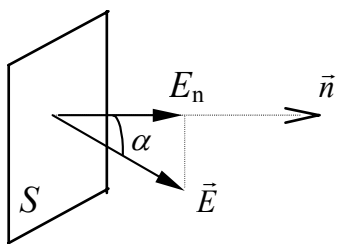
4 pav.



5 pav.



6 pav.



7 pav.

Sutarta, jog jėgų linijos prasideda teigiamuose krūviuose ir baigiasi neigiamuose (arba begalybėje, jei tokių krūvių nėra). Teigiamieji krūviai yra elektrostatinio lauko šaltiniai, o neigiamieji krūviai – sankaupų taškai arba neigiamieji šaltiniai. Kaip sužinosime vektoriaus \vec{E} ilgį (modulį)? Jei turėtume nubrėžtą tik vieną jėgos liniją, einančią per mums rūpimą tašką, to padaryti negalėtume. Reikia turėti jėgų linijų vaizdą to taško aplinkoje. Tada **\vec{E} modulis yra proporcingas skaičiui jėgų linijų, kertančių vienetinį statmenai jėgų linijoms paimtą plotą (jėgų linijų tankiui).** Kad taip yra taškinių krūvių atvejais, matyti iš 5 pav.

Jei taškas A nutolęs nuo krūvio atstumu r_A , o taškas B – atstumu r_B , pagal (1.7)

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{r_B^2}{r_A^2}.$$

Kadangi sferų paviršių plotai $S_A = 4\pi r_A^2$, $S_B = 4\pi r_B^2$ ir abu paviršius kerta tiek pat jėgų linijų, akivaizdu, kad

$$\frac{E_A}{E_B} = \frac{S_B}{S_A},$$

arba

$$E_A S_A = E_B S_B = \Psi. \quad (1.18)$$

Čia Ψ – skaičius jėgų linijų, kertančių plotą S_A arba S_B . Ψ vadinamas **jėgų linijų srautu** per paviršius S_A bei S_B .

Bet kokios krūvių sistemos laukas pagal superpozicijos principą gali būti išivaizduojamas kaip taškinių krūvių laukų vektorinė suma, tad teiginys, kad \vec{E} modulis yra proporcingas jėgų linijų tankiui, yra teisingas bet kokiam elektrostatiniam laukui. Pavyzdžiui, 6 pav. taške A laukas du kartus stipresnis negu taške B.

Kai jėgų linijos nesi statmenos paviršiui S , jėgų linijų (arba \vec{E} vektoriaus) srautu per paviršių S vadinamas dydis

$$\Psi = E_n S = E S \cos \alpha. \quad (1.19)$$

Čia α – kampas tarp \vec{E} ir paviršiaus normalės (statmens) \vec{n} , $E_n = E \cos \alpha$ – \vec{E} projekcija į paviršiaus normalę. Esant nevienalyčiam laukui reikia sumuoti srautus $d\Psi$ per be galo mažus plotelius dS . Tada

$$\Psi = \int_{(S)} E_n dS = \int_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (1.20)$$

Čia $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$, jei \vec{n} yra normalės vienetinis vektorius, t. y. $|\vec{n}| = 1$. Dydis $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ vadinamas dviejų vektorių \vec{E} ir $d\vec{S}$ skaliarine sandauga.

Elektrostatinio lauko srauto SI vienetas yra $1 \text{ V/m} \cdot 1 \text{ m}^2 = 1 \text{ V} \cdot \text{m}$.

7. Gauso dėsnis

Taškinį krūvį q padėkime R spindulio sferos centre ir apskaičiuokime srautą per sferos paviršiaus plotą $S=4\pi R^2$ (8 pav.). Kadangi visos \vec{E} linijos šiuo atveju statmenos sferos paviršiui ir \vec{E} modulis visuose sferos paviršiaus taškuose yra vienodas ir lygus $E=q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$,

$$\Psi = ES = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.21)$$

Kaip matome, srautas Ψ nepriklauso nuo sferos spindulio R , jis priklauso tik nuo krūvio q .

Dabar vietoj sferos imkime bet kokios formos uždara paviršių, apgaubiantį krūvį q , pavyzdžiui, S_1 (8 pav.). Tuomet srautą turėsime skaičiuoti pagal (1.20), nes \vec{E} nebus statmenas tam paviršiui, o ir \vec{E} modulis įvairiose paviršiaus vietose bus skirtingas. Tačiau tą paviršių kirs visos tos jėgų linijos, kaip ir sferos paviršių S . Tad srautas per abu paviršius S ir S_1 bus vienodas ir lygus q/ϵ_0 . Todėl galėsime užrašyti:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.22)$$

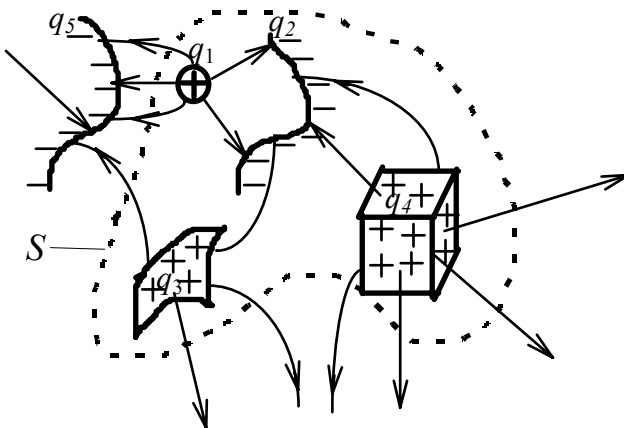
8 pav.

Imkime bet kokią krūvių sistemą (9 pav.). Joje gali būti taškinių, linijinių, paviršinių bei tūrinių krūvių. Bent dalį tų krūvių apgaubkime bet kokios formos uždaru paviršiumi S . Tos sistemos mažą krūvį Δq_i galima laikyti taškiniu. Pagal (1.22) šio krūvio sukurto lauko $\Delta \vec{E}_i$ srautui per paviršių S galima užrašyti:

$$\oint_{(S)} \Delta \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{\Delta q_i}{\epsilon_0},$$

o visos sistemos sukurtą srautą gausime sumuodami:

$$\sum_i \oint_{(S)} \Delta \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \oint_{(S)} \sum_i \Delta \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i \Delta q_i}{\epsilon_0}.$$



9 pav.

Kadangi pagal superpozicijos principą

$$\sum_i \Delta \vec{E}_i = \vec{E},$$

o nagrinėjamu atveju

$$\sum_i \Delta q_i = q_1 - q_2 + q_3 + q_4,$$

vadinasi,

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_1 - q_2 + q_3 + q_4}{\epsilon_0}.$$

Krūvis $-q_5$ yra šalia uždaro paviršiaus S , taigi, jo įnašas į srautą lygus nuliui. Todėl šis krūvis sumuojant neįskaitomas.

Apibendrintai Gauso (K. F. Gauss) dėsnį galima užrašyti taip:

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}, \quad (1.23)$$

o žodžiais – taip suformuluoti: ***E vektoriaus srautas per bet koki uždara paviršių lygus algebrinei sumai krūvių, apgaubtų šiuo paviršiumi, padalytai iš elektrinės konstantos ϵ_0 .***

8. Gauso dėsnio diferencialinė išraiška

Iš (1.21) matyti, kad Gauso dėsnis galioja tik todėl, kad pagal Kulono dėsnį taškinio krūvio sąveikos jėga, o tuo pačiu ir taškinio krūvio sukurto lauko stipris yra atvirkščiai proporcingi atstumo kvad-

ratui, nes tik tuo atveju (1.21) formulėje atstumas R susiprastina. Todėl galima sakyti, kad Kulono dėsnis yra Gauso dėsnio fizikinis pagrindas. Kitaip sakant, Gauso dėsnį, bendru pavidalu išreiškiamą (1.23) formule, galima laikyti Kulono dėsnio integraline išraiška, nes jis susieja lauko stiprį E ir krūvį q skirtinguose erdvės taškuose. Norint gauti sąryšį tarp lauko stiprio ir krūvio tame pačiame taške, reikia krūvį gaubiantį uždara paviršių imti be galo mažą. To mažo paviršiaus plotą pažymėkime ΔS , juo apribotą tūrį ΔV , o tūrinį krūvio tankį toje vietoje ρ . Tokiu atveju (1.23) išraiškoje vietoje $\sum_i q_i$ įrašy-

sime $\int_{(\Delta V)} \rho dV$:

$$\oint_{(\Delta S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\int_{(\Delta V)} \rho dV}{\epsilon_0}. \quad (1.24)$$

Prisiminę, kad

$$\text{div } \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{(\Delta S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \quad (1.25)$$

ir matematinę Gauso teoremą, siejančią vektoriaus paviršinį ir tūrinį integralus

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{(V)} \text{div } \vec{E} dV, \quad (1.26)$$

(1.24) išraišką galime užrašyti taip:

$$\int_{(\Delta V)} \text{div } \vec{E} dV = \frac{\int_{(\Delta V)} \rho dV}{\epsilon_0}$$

arba

$$\int_{(\Delta V)} (\text{div } \vec{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}) dV = 0. \quad (1.27)$$

Iš (1.27) nustatome, kad

$$\boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}. \quad (1.28)$$

(1.28) lygybė ir yra Kulono (arba Gauso) dėsnio diferencialinė išraiška. Ji susieja lauko stiprį su tūriniu krūvio tankiu tame pačiame erdvės taške.

9. Elektrostatinio lauko potencialumas

Potencialiniu vadinamas laukas, kuriame darbas uždaramame kelyje lygus nuliui. Iš mechanikos žinome, kad gravitacinis laukas yra potencialinis. Palyginę Kulono dėsnį su Niutono gravitacijos dėsniu matome, kad jų abiejų pobūdis vienodas. Todėl ir **elektrostatinis laukas yra potencialinis**, t.y. perkeltant krūvį elektrostatiniame lauke uždara trajektorija atliktas darbas lygus nuliui. Matematiškai galime užrašyti taip:

$$A = \oint_{(L)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0,$$

Šiuo atveju pagal (1.4)

$$\vec{F} = q_0 \vec{E},$$

taigi

$$\boxed{\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}. \quad (1.29)$$

Čia L yra bet kokio uždaro kontūro, esančio elektrostatiniame lauke, ilgis. (1.29) ir yra elektrostatinio lauko potencialumo integralinė išraiška. Į (1.29) įeinantis integralas vadinamas vektoriaus cirkuliacija, todėl žodžiais elektrostatinio lauko potencialumą galima nusakyti taip: **elektrostatinio lauko stiprio vektoriaus cirkuliacija lygi nuliui**.

Elektrostatinio lauko potencialumo diferencialinę išraišką gausime išnagrinėję atvejį, kai uždaras kontūras be galo mažas. Juo apribotą plotą pažymėkime ΔS . Iš vektorių analizės kurso žinome, kad

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\Delta S}. \quad (1.30)$$

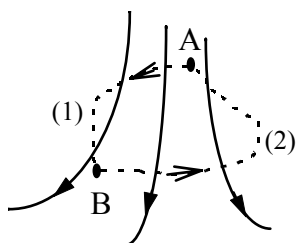
Atsižvelgus į (1.29), (1.30) tampa:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = 0.} \quad (1.31)$$

(1.31) vadinama elektrostatinio lauko potencialumo diferencialine išraiška.

Elektrostatiniame lauke imkime bet kuriuos du taškus, pavyzdžiui, A ir B, ir apskaičiuokime darbą, atliekamą perkeliame krūvį q_0 iš taško A į tašką B (10 pav.) koku nors pasirinktu keliu (1):

$$A_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (1.32)$$



10 pav.

Perkelkime krūvį q_0 iš taško B atgal į tašką A koku nors kitu keliu (2). Tada

$$A_{BA} = q_0 \int_{(B)}^{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (1.33)$$

Sudėję panariui (1.32) ir (1.33), apskaičiuosime darbą uždaroje trajektorijoje. Jis turi būti lygus nuliui. Tad

$$\underbrace{q_0 \int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{(1 \text{ keliu})} + \underbrace{q_0 \int_{(B)}^{(A)} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{(2 \text{ keliu})} = 0.$$

Antrajame integrale sukeiskime vietomis režius. Tuomet pasikeis integralo ženklas. Tada užrašysime:

$$q_0 \int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot d\vec{l} - q_0 \int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

(1 keliu) (2 keliu)

o iš čia nustatysime, kad

$$A_{AB} = q_0 \int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (1.34)$$

(1 keliu) (2 keliu)

Kadangi (1) ir (2) keliai buvo laisvai pasirinkti, tad remiantis (1.34) lygybe galima teigti, jog **darbas, atliekamas perkeliame krūvį elektrostatiniame lauke iš vieno taško į kitą, nepriklauso nuo pasirinkto kelio**. Iš (1.34) taip pat matyti, kad šis darbas yra proporcingas keliamo krūvio q_0 didumui. Taigi šio darbo santykis su krūviu q_0 yra dydis, priklausantis tik nuo lauko savybių bei taškų A ir B padėties. **Dydis, lygus darbo, atliekamo perkeliame teigiamą krūvį elektrostatiniame lauke iš vieno taško į kitą santykiui su keliamojo krūvio dydžiu, vadinamas potencialų skirtumu (įtampa) tarp tų taškų:**

$$\boxed{U = \frac{A}{q_0} = \int_{(A)}^{(B)} \vec{E} \cdot d\vec{l}.} \quad (1.35)$$

(bet koku keliu)

Potencialų skirtumo SI vienetas yra voltas (V). $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$.

10. Skaliarinis potencialas, jo nevienareikšmiškumas ir normavimas

Atliekant darbą, kinta sistemos potencinė energija. Nagrinėjamu atveju sistema susideda iš krūvių, kuriančių lauką ir krūvio q_0 . Jei darbą atlieka sistema, potencinė jos energija mažėja, o jei išorinės jėgos – didėja. Todėl darbas gali būti išreikštas kaip sistemos potencinės energijos pokytis:

$$A_{AB} = W_A - W_B, \quad (1.36)$$

o potencialų skirtumas

$$U = \frac{W_A}{q_0} - \frac{W_B}{q_0}. \quad (1.37)$$

Dydis, lygus potencinės energijos, kurią turi krūvis būdamas tam tikrame lauko taške, ir to krūvio santykiui, vadinamas to lauko taško potencialu φ . Taigi

$$\boxed{\varphi = \frac{W}{q}} \quad (1.38)$$

(1.37) tada galima taip užrašyti:

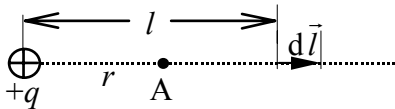
$$U = \varphi_A - \varphi_B. \quad (1.39)$$

Akivaizdu, kad potencialo vienetas irgi yra voltas (V).

Būtina pabrėžti, jog potencinės energijos vertės nėra vienareikšmiai apibrėžtos. (Panašiai esti ir mechanikoje. Pavyzdžiui, Žemės traukos lauke esančio kūno potencinės energijos išraiškos mgh skaitinė vertė priklauso nuo to, nuo kurio lygmens matuojamas aukštis h). Kitaip sakant prie potencinių energijų galima pridėti bet kokią laisvai pasirinktą konstantą. Apibrėžtą skaitinę vertę turi tik potencialų skirtumas. Norint, kad potencialo vertės irgi būtų apibrėžtos, reikia pasirinkti, kokio lauko taško potencialą laikysime lygiu nuliui. Šis pasirinkimas vadinamas potencialo normavimu. Iš principo bet kurio lauko taško potencialą galima pasirinkti lygiu nuliui. Aišku, nuo to pasirinkimo priklausys visų kitų lauko taškų potencialų skaitinės vertės. **Dažniausiai sutariama be galo toli nutolusių taškų (begalybės) potencialą laikyti lygiu nuliui.** Tuomet kalbame apie potencialą begalybės atžvilgiu. Taip pat dažnai Žemės potencialas laikomas lygiu nuliui.

11. Taškinio krūvio, taškinių krūvių sistemos ir tolydžiai pasiskirsčiusių krūvių potencialas

Apskaičiuosime lauko taško A, nutolusio atstumu r nuo taškinio krūvio q , potencialą (begalybės atžvilgiu) (11 pav.).



11 pav.

Pasinaudosime (1.39) formule, manydami, kad taškas B yra be galo toli, tad $\varphi_B = \varphi_\infty = 0$. Tada pasinaudojus (1.35)

$$\varphi_A = U = \int_{(A)}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Iš daugybės kelių nuo taško A į begalybę pasirinkime integravimą jėgos linija, einančia per tašką A, kuri šiuo atveju yra tiesė. Tada kampas tarp \vec{E} ir $d\vec{l}$ lygus nuliui ir $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E dl$. Lauko stiprį E atstumu l nuo krūvio rasime pagal (1.7), vietoj r įrašę l . Turėsime:

$$\varphi_A = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 l^2} \cdot dl = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dl}{l^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Taigi taškų, nutolusių atstumu r nuo taškinio krūvio q , potencialas

$$\boxed{\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad (1.40)$$

Potencialo ženklas sutampa su krūvio q ženklu.

Potencialui, kaip ir lauko stipriui, tinka **superpozicijos principas**:

$$\boxed{\varphi = \sum_i \varphi_i} \quad (1.41)$$

Kadangi potencialas yra skaliarinis dydis, (1.41) formulėje suma yra algebrinė. Todėl krūvių sistemų potencialą apskaičiuoti dažnai būna lengviau nei lauko stiprį.

Remdamiesi (1.41), (1.40) ir (1.15) – (1.17) formulėmis, galime užrašyti formules linijinio, paviršinio ir tūrinio krūvio potencialams begalybės atžvilgiu skaičiuoti:

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(L)} \frac{\tau dl}{r}} \quad (1.42)$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(S)} \frac{\sigma dS}{r}} \quad (1.43)$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(V)} \frac{\rho dV}{r}} \quad (1.44)$$

12. Elektrinio lauko stiprio ir potencialo gradiento sąryšis

Jei A ir B – du artimi lauko taškai, atstumas tarp kurių $d\vec{l}$, o potencialų skirtumas tarp tų taškų $d\varphi$, pagal (1.35)

$$d\varphi = (\vec{E}, d\vec{l}) = E dl \cos \alpha. \quad (1.45)$$

Matome, kad potencialų skirtumas priklauso nuo kampo α tarp \vec{E} ir $d\vec{l}$, t.y. nuo lauke pasirinktos krypties. Jei pasirinktume $\vec{E} \parallel d\vec{l}$, būtų $\alpha=0$, o $d\varphi$ skaitinė vertė šia kryptimi būtų didžiausia, nes $\cos 0=1$. Taigi potencialas sparčiausiai kinta jėgų linijų kryptimi. Kadangi jėgų linijos nuo teigiamųjų krūvių yra nukreiptos neigiamųjų link, o potencialo vertės yra didesnės arčiau teigiamųjų krūvių ir mažesnės arčiau neigiamųjų, galime teigti, kad jėgų linija – tai sparčiausio potencialo mažėjimo kryptis lauke. Šiuo atveju (1.45) virsta

$$d\varphi = E dl \quad (1.46)$$

arba

$$E = \frac{d\varphi}{dl}, \quad (1.47)$$

t.y. \vec{E} modulis lygus potencialo išvestinei pagal koordinatę sparčiausio potencialo mažėjimo erdvėje kryptimi (jėgų linijų kryptimi). Iš vektorių analizės kurso žinome, kad vektorius, kurio kryptis sutampa su sparčiausio skaliarinės funkcijos didėjimo erdvėje kryptimi, vadinamas tos skaliarinės funkcijos gradientu. Kadangi \vec{E} yra nukreiptas sparčiausio potencialo mažėjimo, o ne didėjimo, kryptimi, galima užrašyti:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (1.48)$$

13. Puasono ir Laplaso lygtys

Dekarto koordinatinių sistemoje divergencija ir gradientas išreiškiami taip:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (1.49)$$

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}. \quad (1.50)$$

Čia $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – vienetiniai atitinkamų koordinatinių ašių vektoriai. Toje sistemoje

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}. \quad (1.51)$$

Pagal (1.48), (1.50) ir (1.51) nustatome, kad

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \text{ Įrašę tai į (1.49), gauname:}$$

$$\text{div } \vec{E} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (1.52)$$

Įrašydami (1.52) į Kulono dėsnio diferencialinę išraišką (1.28), gauname:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.53)$$

Ši lygybė vadinama Puasono (*S. D. Poisson*) lygtimi. Jis sieja potencialą ir tūrinį krūvio tankį tame pačiame erdvės taške. Išsprendę (1.53) lygtį, galime surasti potencialą φ .

Tose erdvės srityse, kuriose nėra krūvių, (1.53) tampa:

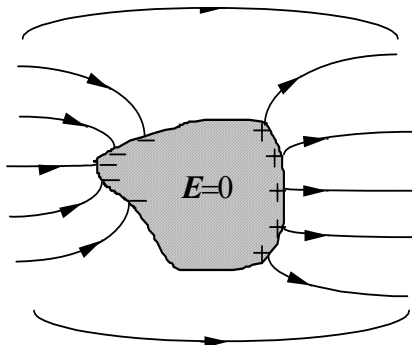
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.54)$$

(1.54) vadinama Laplaso (*P. S. Laplace*) lygtimi.

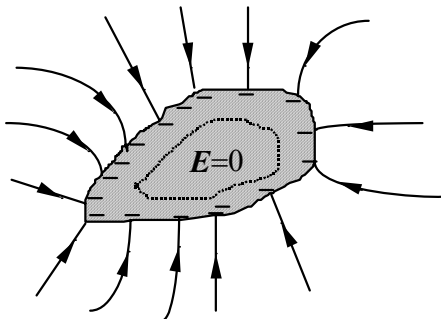
14. Elektrinis laukas aplinkoje su laidininkais.

Krūvių pasiskirstymas laidininko paviršiuje

Laidininkai - tai medžiagos, gerai praleidžiančios elektros srovę. Juose esti daug galinčių laisvai judėti elektringųjų dalelių, vadinamų **krūvininkais**. Metaluose tai yra laisvieji (atitrūkę nuo atomų) elektronai, laidžiuose skysčiuose (elektrolituose) - teigiamieji bei neigiamieji jonai.



13 pav.



14 pav.

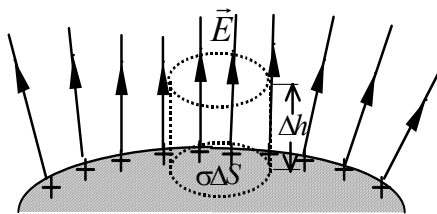
Laidininkui patekus į elektrinį lauką, laisvieji krūvininkai jo veikiami ima judėti. Teigiamieji krūvininkai juda lauko kryptimi, o neigiamieji - prieš lauką. Taigi priešingų ženklų krūvininkai yra atskiriami erdvėje. Šis procesas trunka labai trumpai, nes atskirtieji krūvininkai kuria savo elektrinį lauką, nukreiptą prieš išorinį. Kai šis laukas susilygina su išoriniu, atstojamojo lauko laidininke nelieta. Nelieta ir krūvininkus veikiančios jėgos. Geruose laidininkuose, pavyzdžiui, metaluose, išoriniam laukui kompensuoti užtenka laidininko paviršiuje esančių laisvųjų elektronų. Dėl to kompensuojantys lauką krūvininkai būna susitelkę labai ploname (gardelės konstantos matmenų) paviršiniame sluoksnyje. **Paviršinių krūvių atsiradimas laidininko paviršiuje, veikiant išoriniam elektriniam laukui, yra vadinamas elektrostatine indukcija, o tie krūviai - indukuotaisiais krūviais** (13 pav.).

Metaluose laisvai judėti gali tik neigiamieji krūvininkai (laisvieji elektronai). Teigiamieji krūvininkai (jonai) būna tvirtai susikibę gardelės mazguose. Teigiamąjį indukuotąjį krūvį metaluose sudaro tie jonai, kurių aplinkoje nelieta pakankamo kiekio laisvųjų elektronų. Remdamiesi krūvio tvermės dėsniu galime teigti, kad **indukuotųjų krūvių algebrinė suma visada lygi nuliui**.

Panašiai būna ir suteikus metalo gabalui krūvį, t.y. jį įelektrinus. Ir šiuo atveju suteiktasis krūvis pasiskirsto tik metalo paviršiuje, o metale krūvio ir lauko nebūna (14 pav.).

15. Laukas arti laidininko paviršiaus

Visais atvejais prie pat laidininko paviršiaus jėgų linijos turi būti statmenos paviršiui, nes priešingu atveju būtų lygiagreti su paviršiumi \vec{E} dedamoji. Jai veikiant laisvieji krūvininkai judėtų laidininko paviršiumi, t.y. neturėtume elektrostatikos atvejo.



15 pav.

Nustatysime sąryšį tarp paviršinio krūvio tankio laidininko paviršiuje ir lauko stiprio prie to paviršiaus. Mažą paviršiaus plotelį ΔS su krūviu $\sigma \Delta S$ apgaubkime stačiuoju cilindru, kurio vienas pagrindas yra šalia laidininko, nutolęs nuo jo mažu atstumu Δh , o kitas - laidininke (15 pav.). Kadangi jėgų linijos statmenos laidininko paviršiui, o laidininko viduje $\vec{E}=0$, srautas per cilindro paviršių bus lygus srautui per šalia laidininko esantį pagrindą (15 pav.). Pagal Gauso dėsnį

$$E \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}.$$

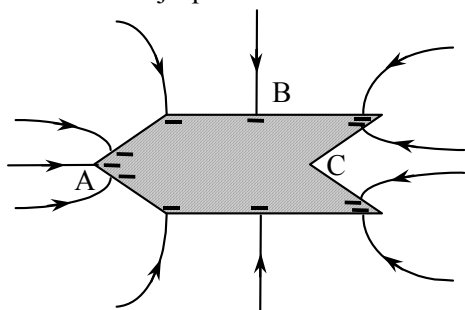
Iš čia gauname:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.55)$$

16. Paviršinio krūvio tankio priklausomybė nuo paviršiaus kreivio.

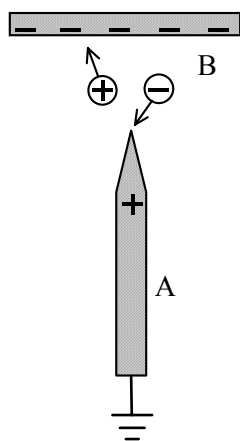
Krūvio nutekėjimas nuo smailumos

Žinome, kad elektrostatiniai krūviai esti tik laidininko paviršiuje. Tų krūvių pasiskirstymo pobūdis priklauso nuo laidininko formos. Tarkime, jog įelektriname sudėtingos formos laidininką (16 pav.). Tuo atveju paviršinis krūvio tankis įvairiuose paviršiaus taškuose bus skirtingas: didžiausias ten, kur



16 pav.

paviršiaus kreivis didžiausias (taškas A), vidutinis mažesnio kreivio paviršiaus vietose (taškas B) ir artimas nuliui įdubusiose paviršiaus vietose (neigiamas kreivis, taškas C). Kadangi lauko stipris E proporcingas paviršiniam krūvio tankiui σ (žr. 1.55), todėl laukas esti stipriausias prie didžiausio kreivio laidininko paviršiaus vietų, t. y. smailumų. Jei prie ore esančio laidininko smailumos laukas tiek sustiprėja, kad prasideda oro molekulių jonizacija, pasireiškia krūvio nutekėjimas nuo smailumos. Šio reiškinio priežastį paaiškina 17 pav. Tarkime, prie įžeminto laidininko A smailumos priartiname neigiamai įelektrintą plokštę B. Tuomet laidininke A atsiranda teigiamieji indukuotieji krūviai, kurių didžiausias tankis, taigi ir lauko stipris, esti prie smailumos.



17 pav.

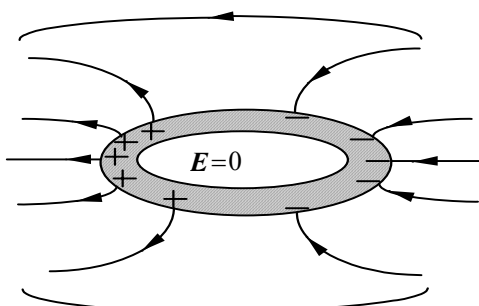
Šio lauko veikiami neigiamieji jonai (ar elektronai), juda link laidininko A ir, jį pasiekę, sumažina jo teigiamą krūvį, o teigiamieji jonai juda link laidininko B ir sumažina jo neigiamą krūvį. Be to, nuo smailumos stumiami teigiamieji jonai velka su savimi ir neutralias oro molekules. Taip atsiranda nuo smailumos nukreiptas **elektrinis vėjas**, kurį galima aptikti netoli smailumos padėjus uždegtą žvakę. Žvakės liepsna nukrypsta tolyn nuo smailumos.

Krūvio nutekėjimo nuo smailumos reiškinio pagrįstas **žaibolaidžio** veikimas. Žaibolaidį sudaro gerai įžemintas aukštas laidininkas smaila viršūne. Jo veikimui suprasti irgi tinka 17 pav., tik šiuo atveju vietoje plokštės B reikia įsivaizduoti įelektrintą audros debesį. Žaibolaidis išelektrina debesį panašiai, kaip laidininkas A išelektrina laidininką B, taigi tikimybė atsirasti žaibo iškrovai sumažėja.

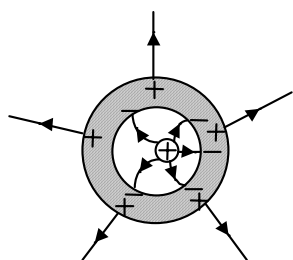
Aukštos įtampos linijose, mašinose ar prietaisuose krūvio nutekėjimo nuo smailumų reiškinys yra žalingas, nes dėl jo atsiranda elektros energijos nuostoliai ar gali sutrikti mašinų bei prietaisų veikimas. Todėl šiuose įrenginiuose neturi būti smailumų. Jų metaliniai laidininkai daromi apvaliais galais.

17. Metalinis ekranas

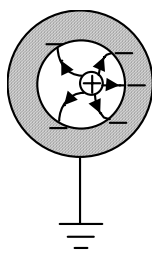
Laidininko tūryje imkime bet kokią uždarą paviršių (14 pav. pažymėta punktyru). Jį kertantis \vec{E} srautas lygus nuliui, nes laidininke nėra lauko. Pagal Gauso dėsnį (1.23) nustatome, jog ir krūvis, esantis tuo paviršiumi apgaubtame tūryje, taip pat turi būti lygus nuliui. **Elektrostatikos atveju laidininko tūris yra neutralus.** Jei tą tūrį pašalintume, laidininke atsirastų ertmė, o krūvių pasiskirstymas laidininko paviršiuje bei laukas šalia laidininko nepakistų. Ertmėje lauko taip pat neatsirastų. Taigi norint kokį nors tūrį apsaugoti nuo išorinių elektrostatinų laukų, reikia jį apgaubti bet kokio storio laidžiu (metalinium) apvalkalu. Toks apvalkalas vadinamas **elektrostatiniu ekranu** (18 pav.).



18 pav.



19 pav.



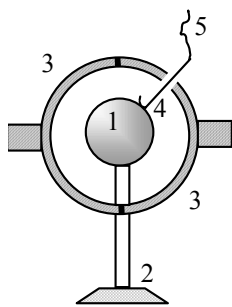
20 pav.

Panagrinėkime, kas atsitiktų, jei ertmėje uždarytume elektros krūvius. Ar toks ekranas apsaugotų už ekrano esančią erdvę nuo šių krūvių elektrostatinio lauko? Kaip matyti iš 19 pav., neapsaugotų, nes uždarytieji krūviai ekrano vidiniame paviršiuje indukuotų tokio pat dydžio priešingo ženklo krūvius, o išorinis ekrano paviršius išelektrintų tokio pat ženklo ir dydžio krūviu, kaip ir uždarytieji vi-

duje. Tačiau jei ekraną įžemintume, išoriniame paviršiuje būtų krūviai nutekėtų į žemę, ir toks ekranas apsaugotų išorinę erdvę nuo uždarytų jame krūvių lauko (20 pav.). Nepakenktų įžeminimas ir tuo atveju, kai nuo pašalinių laukų veikimo norima apsaugoti ekranu apsuptą erdvę (18 pav.). Todėl elektrostatiniai ekranai visada įžeminami. Praktiškai gana dažnai vietoje ištinio metalinio apvalkalo efektyviam ekranavimui pasiekti užtenka ir tankaus metalinio tinklelio.

18. Kulono dėsnio eksperimentinis tikrinimas Kevendišo metodu

Aiškindamiesi klausimą, kodėl krūviai elektrostatikos atveju esti pasiskirstę tik laidininko paviršiuje, rėmėmės Gauso dėsniu, o pastarasis galioja tik tuo atveju, jei galioja Kulono dėsnis, t. y. jei taškinių krūvių sąveikos jėga $F \propto 1/r^2$. Jei būtų ne taip, krūvis turėtų būti ir laidininkų viduje. Taigi Kulono dėsnį galima patikrinti eksperimentiškai įsitikinant, ar tikrai laidininkų viduje nesti krūvių. Pirmą



21 pav.

kartą tokį eksperimentą atliko Kevendišas (*H. Cavendish*) 1772 m. Jo schema pavaizduota 21 pav. Metalinis rutulys 1 pritvirtintas prie nelaidaus stovo 2. Dvi stiklu nuo žemės izoliuotos metalinės pussferės 3 įtaisytos taip, kad jas abi galima sujungti kartu, sudarant vieną rutulį 1 apgaubiančią sferą. Vienoje pussferėje yra maža skylutė, į kurią galima įkišti šilkinio siūlo pritvirtintą metalinę vielytę 4 ir ją sujungti rutulį su sfera neišelektrinant prietaiso.

Eksperimentas atliekamas taip. Pussferės 3 suglaudžiamos, vielytė 4 sujungiamos su rutuliu 1 ir visa ši sistema įelektrinama. Paskui vielytė 4, paėmus ją už šilkinio siūlo 5, ištraukiama, o pussferės 3 atitraukiamos viena nuo kitos ir iškraunamos, sujungiant jas su žeme. Tiksliau prietaisu (koks galėjo būti tais laikais) tikrinama, ar rutulyje yra koks nors krūvis. Jokio krūvio niekada nepavyk-davo aptikti.

Panašius eksperimentus, tik turėdami tikslesnius prietaisus, ne kartą yra atlikę ir kiti tyrinėtojai.

Tarkime, kad taškinių krūvių sąveikos jėga $F \propto 1/r^{2+\delta}$. Jei Kulono dėsnis galioja tiksliai, $\delta=0$ turi būti. Žemiau pateikiamos eksperimentiškai nustatytos δ vertės:

$$\delta \leq 1/50 \text{ (1772 m. Kevendišo duomenys);}$$

$$\delta \leq 10^{-9} \text{ (1936 m. duomenys);}$$

$$\delta \leq 10^{-16} \text{ (1971 m. duomenys).}$$

Matome, kad Kulono dėsnis galioja labai dideliu tikslumu.

19. Laidininko potencialas

Kaip žinome, laidininke elektrostatikos atveju lauko nebūna ($\vec{E} = 0$). Pasinaudojus (1.47) matyti, jog $\varphi = \text{const}$, nes konstantos išvestinė yra lygi nuliui. Taigi **visų laidininko taškų potencialas esti vienodas**. Todėl galime kalbėti apie laidininko potencialą nenurodydami, apie kurio jo taško potencialą kalbame.

20. Pavienio laidininko elektrinė talpa

Pavienio laidininko elektrinė talpa C vadinamas dydis, kurio skaitinė vertė lygi laidininko krūvio q ir jo potencialo φ santykiui:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (1.56)$$

Elektrinės talpos SI vienetas yra **faradas** (F). $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$.

Elektrinė talpa priklauso nuo laidininko formos bei matmenų. Lengva apskaičiuoti laidaus rutulio talpą. Suteikime R spindulio laidžiam rutuliui krūvį q . Jis tolygiai pasiskirstys visame rutulio paviršiuje, nes rutulio paviršiaus kreivis visur vienodas. Skačiuokime rutulio centro potencialą, nes bet kokio kito jo taško potencialas bus toks pat. Pasinaudokime (1.43) formule. Kadangi centrui $r=R=\text{const.}$, jį iškeliamė prieš integralo ženklą. Gausime:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \oint_{(S)} \sigma dS.$$

Bet

$$\oint_{(S)} \sigma dS = q,$$

tad

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Rutulio talpa

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (1.57)$$

Kitokios formos pavienių laidininkų elektrinę talpą sunku, o dažnai ir neįmanoma analiziškai apskaičiuoti. Be to, pavienių laidininkų talpos būna labai mažos. Pavyzdžiui, $R=1$ m spindulio rutulio talpa, apskaičiuota pagal (1.57) formulę, lygi 111 pF, Žemės rutulio ($R=6400$ km) – $C=711$ μF.

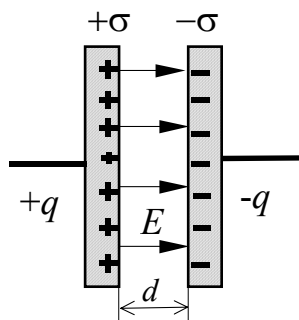
21. Laidininkų sistema. Kondensatoriai ir jų talpa

Kur kas didesnę talpą gali turėti kondensatoriai. **Kondensatorius - tai dviejų laidininkų sistema, kurioje jėgų linijos, išeinančios iš vieno laidininko, pasibaigia antrajame.** Pagal laidininkų formą kondensatoriai skirstomi į **plokščiuosius**, **sferinius** ir **cilindrinčius**. Kondensatorių sudarantys laidininkai dažnai vadinami plokštelėmis, nors jie gali būti sferos ar cilindrai. Tarp plokštelių gali būti oras ar vakuumas arba bet koks dielektrikas. Įelektrinant kondensatorių jo plokštelėms suteikiami lygių modulių priešingų ženklų krūviai $+q$ ir $-q$. **Kondensatoriaus elektrinė talpa vadinamas dydis, lygus vienos plokštelės krūvio ir potencialų skirtumo tarp plokštelių santykio moduliui:**

$$C = \left| \frac{q}{U} \right|. \quad (1.58)$$

Apskaičiuosime įvairių kondensatorių, tarp kurių plokštelių yra vakuumas ar oras, talpas.

Plokščiąjį kondensatorių sudaro dvi lygiagrečios laidžios plokštelės. Tegu kiekvienos plotas S ir atstumas tarp jų d (22 pav.). Laukas tokiame kondensatoriuje toli nuo kraštų vienalytis. Jo stipris (žr. (1.55))



22 pav.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S},$$

o potencialų skirtumas

$$U = Ed = \frac{qd}{\epsilon_0 S}.$$

Talpa

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (1.59)$$

Sferinį kondensatorių sudaro dvi bendracentrės metalinės sferos, kurių spinduliai R_1 ir R_2 (23 pav.). Lauko stipris dielektrike r atstumu nuo centro lengvai apskaičiuojamas pagal Gauso dėsnį (1.23):

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Iš čia

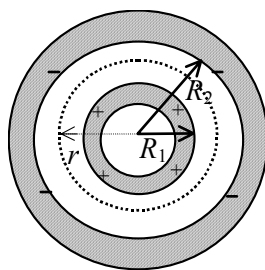
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Potencialų skirtumas tarp sferų pagal (1.35)

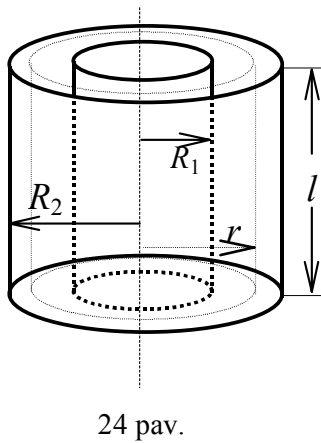
$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

o talpa

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}. \quad (1.60)$$



23 pav.



Cilindrinį kondensatorių sudaro du bendraašiai R_1 ir R_2 spindulių laidūs cilindrai, kurių ilgis l . (24 pav.). Apgaubę vidinį cilindrą su krūviu $+q$ įsivaizduojamu l ilgio r spindulio cilindru, pagal (1.23) turime:

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

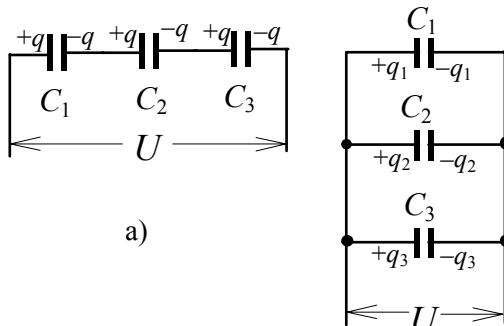
Iš čia

$$E = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 r l},$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 l} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 l} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Talpa

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi \varepsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (1.61)$$



25 pav.

b)

Bendra įtampa

$$U_1 = \frac{q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{q}{C_2}, \quad U_3 = \frac{q}{C_3}.$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

ir

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{q} = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Jei grandinėje yra n nuosekliai sujungtų kondensatorių, tokios grandinės talpa skaičiuojama pagal formulę

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}} \quad (1.62)$$

Jungiant kondensatorius lygiagrečiai, jų visų įtampa būna ta pati, o krūviai

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U, \quad q_3 = C_3 U.$$

Visos sistemos krūvis

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U.$$

Kadangi pagal (1.58)

$$q = CU,$$

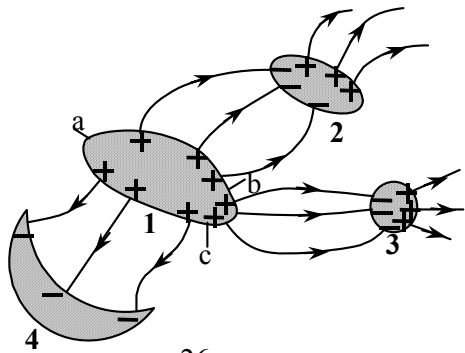
šiuo atveju

$$C = C_1 + C_2 + C_3.$$

Esant n lygiagrečiai sujungtų kondensatorių

$$\boxed{C = \sum_{i=1}^n C_i}. \quad (1.63)$$

Dabar panagrinėkime sudėtingesnę laidininkų sistemą, sudarytą daugiau nei iš dviejų laidininkų (26 pav.). (Tokia sistema kartais vadinama sudėtingu kondensatoriumi). Kaip matyti iš 26 pav., iš 1 laidininko išėjusios jėgų linijos eina į 2, 3 ir 4 laidininkus. Visą 1 laidininko paviršiaus plotą suskirstykime dalimis pagal tai, į kuriuos laidininkus nueina iš tų dalių išėjusios jėgų linijos, pavyzdžiui, iš dalies, pažymėtos ab, linijos nueina į 2 laidininką, iš bc dalies – į 3, iš ca – į 4. Matome, kad 1 laidininko



26 pav.

ab dalis ir 2 laidininkas sudaro paprastą kondensatorių, nes iš šios dalies išėjusios jėgų linijos visos pasibaigia 2 laidininke. ab dalies krūvį pažymėję q_{ab} , o potencialų skirtumą tarp 1 ir 2 laidininkų – $\Delta\varphi_{12}$, remdamiesi (1.58) galėsime užrašyti:

$$q_{ab} = C_{ab}\Delta\varphi_{12}. \quad (1.64)$$

Panašiai samprotaudami užrašome:

$$q_{bc} = C_{bc}\Delta\varphi_{13}, \quad (1.65)$$

$$q_{ca} = C_{ca}\Delta\varphi_{14}. \quad (1.66)$$

1 laidininko krūvį pažymėkime q_1 . Akivaizdu, kad

$$q_1 = q_{ab} + q_{bc} + q_{ca}.$$

Taigi sudėję (1.64) – (1.66) gauname:

$$q_1 = C_{ab}\Delta\varphi_{12} + C_{bc}\Delta\varphi_{13} + C_{ca}\Delta\varphi_{14}. \quad (1.67)$$

Tegu laidininkų potencialai yra $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ir φ_4 . Tada

$$\Delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2,$$

$$\Delta\varphi_{13} = \varphi_1 - \varphi_3,$$

$$\Delta\varphi_{14} = \varphi_1 - \varphi_4.$$

Įrašę tai į (1.67) ir sugrupavę narius prie atitinkamų potencialų, gausime:

$$q_1 = (C_{ab} + C_{bc} + C_{ca})\varphi_1 - C_{ab}\varphi_2 - C_{bc}\varphi_3 - C_{ca}\varphi_4. \quad (1.68)$$

Pažymėkime:

$$C_{11} = C_{ab} + C_{bc} + C_{ca}, \quad C_{12} = -C_{ab}, \quad C_{13} = -C_{bc}, \quad C_{14} = -C_{ca}.$$

Tada gausime tokį sąryšį tarp 1 laidininko krūvio ir visų sistemos laidininkų potencialų:

$$q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2 + C_{13}\varphi_3 + C_{14}\varphi_4. \quad (1.69)$$

Apibendrinkime tardami, kad sistemą sudaro n laidininkų. Tada kurio nors vieno iš jų (sakykime, i -tojo) krūvis

$$q_i = \sum_{k=1}^n C_{ik}\varphi_k. \quad (1.70)$$

C_{ik} vadinami **talpiniais koeficientais**. Talpiniai koeficientai, kai $i=k$ (abu indeksai vienodi), vadinami **savosiomis talpomis**. Savosios talpos sieja to paties laidininko krūvį su jo potencialu ir visada esti teigiamos. Kai $i \neq k$, talpiniai koeficientai vadinami **abipusėmis talpomis**. Jie sieja skirtingų laidininkų krūvį ir potencialą. Abipusės talpos visada esti neigiamos.

Grįžkime prie anksčiau nagrinėto keturių laidininkų pavyzdžio ir pasiaiškinkime, kaip galima būtų nustatyti talpinius koeficientus. Iš (1.69) matyti, kad, pavyzdžiui,

$$C_{11} = \frac{q_1}{\varphi_1}, \text{ kai } \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0.$$

Norint užtikrinti šias sąlygas, reikia 2, 3 ir 4 laidininkus įžeminti, o 1 laidininką įelektrinti ir išmatuoti ar apskaičiuoti jo potencialą. Akivaizdu, kad šiuo atveju krūvis ir potencialas turės vienodus ženklus. O štai

$$C_{12} = \frac{q_1}{\varphi_2}, \text{ kai } \varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0.$$

Šiuo atveju reikia įžeminti 1, 3 ir 4 laidininkus, o 2 laidininką įelektrinti, išmatuoti ar apskaičiuoti jo potencialą φ_2 ir 1 laidininko krūvį q_1 . 1 laidininke bus tik indukuotasis krūvis q_1 , kurio ženklas priešingas 2 laidininko krūvio bei potencialo ženklui.

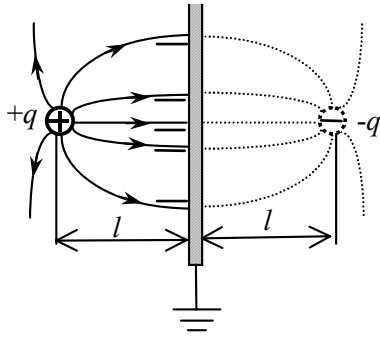
22. Atvaizdų metodo sprendžiant kai kuriuos elektrostatikos uždavinius taikymo suvokimas

Jei elektriniame lauke į bet kokią ekvipotencialinę paviršių įdėsime laidininką ir suteiksime jam ekvipotencialinio paviršiaus potencialą, tai elektrinis laukas išliks nepakitęs. Tuo remiantis kartais galima gerokai supaprastinti kai kuriuos sudėtingų krūvių sistemų kuriamų laukų skaičiavimo uždavinius.

Panagrinėsime du atvejus: atvaizdą plokštumoje ir atvaizdą sferoje.

1) Atvaizdas plokštumoje.

Tarkime, kad yra du lygių modulių, bet priešingų ženklų krūviai $+q$ ir $-q$, atstumas tarp kurių $2l$ (27 pav.). Šių krūvių lauke imkime vienodai nutolusią nuo abiejų krūvių begalinę plokštumą, statmeną



27 pav.

per krūvius einančiai tiesei. Akivaizdu, kad bet kurio šios plokštumos taško potencialas bus lygus nuliui. Taigi vietoje šios plokštumos galime įdėti laidžią įžemintą (t. y. turinčią nulinį potencialą) plokštę. Tai padarius, laukas nepakis. Vieną iš tų dviejų krūvių, pavyzdžiui, dešinėsios pusės neigiamąjį, dabar galima pašalinti. Jį pašalinus, į krūvį $+q$ atkreiptoje plokštės pusėje atsiras šio krūvio indukuoti neigiami krūviai. Kairėje pusėje dėl to laukas irgi išliks nepakitęs, nes begalinė plokštė ekranuoja kairiąją pusę nuo dešinėsios. Tiesa, ši nepakitusi lauką dabar kurs krūvis $+q$ kartu su plokštėje jo indukuotais neigiamais krūviais.

Trumpiau šio metodo esmę galima nusakyti taip: **laukas, kurį kuria šalia įžemintos begalinės laidžios plokštės l atstumu esantis taškinis krūvis $+q$ kartu su plokštėje indukuojamais krūviais yra toks, kokį sukurtų tas krūvis kartu su kitoje plokštės pusėje l atstumu esančiu taškiniu krūviu $-q$.**

Apskaičiuoti dviejų taškinių krūvių lauką yra daug paprasčiau, nei taškinių krūvio ir plokštėje jo indukuotų paviršinių krūvių kuriamą suminį lauką.

2) Atvaizdas sferoje.

Nustatykime, kokią geometrinę formą turi dviejų nelygių modulių priešingų ženklų taškinių krūvių $+q$ ir $-q'$ kuriamo lauko ekvipotencialiniai paviršiai. Tarkime, kad $|q'| < |q|$. Tegu stačiakampėje koordinatinių sistemoje tie krūviai būna x ašyje: krūvio q' koordinatės $(a, 0, 0)$, o krūvio q $(d, 0, 0)$ (28 pav.). Bet kokio taško $A(x, y, z)$ potencialas

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r_-}.$$

Čia r_+ ir r_- – atstumai tarp taško A ir krūvių. Juos galime išreikšti koordinatėmis:

$$r_+ = \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}, \quad r_- = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}.$$

Taigi

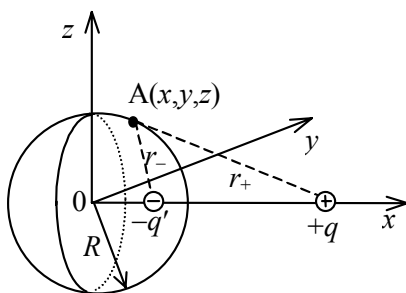
$$\varphi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{q'}{\sqrt{(a-d)^2 + y^2 + z^2}} \right).$$

Taško A potencialas bus lygus nuliui, jei

$$\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q'}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}}. \quad (1.71)$$

(1.71) pertvarkome taip:

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{(x-d)^2 + y^2 + z^2} &= \frac{q'^2}{(x-a)^2 + y^2 + z^2}, \\ q^2 x^2 - 2q^2 a x + q^2 a^2 + q^2 y^2 + q^2 z^2 &= q'^2 x^2 - 2q'^2 a x + q'^2 a^2 + q'^2 y^2 + q'^2 z^2, \\ (q^2 - q'^2)x^2 + (q^2 - q'^2)y^2 + (q^2 - q'^2)z^2 + 2(q^2 d - q'^2 a)x - q'^2 d^2 + q^2 a^2 &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2(q'^2 d - q^2 a)x}{q^2 - q'^2} - \frac{q'^2 d^2 - q^2 a^2}{q^2 - q'^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.72)$$



28 pav.

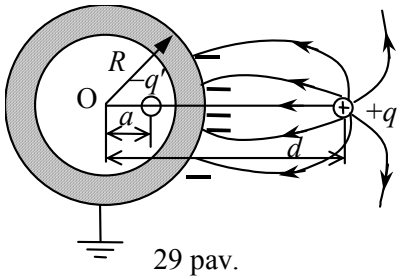
Žinome, kad lygtis sferos, kurios centras koordinatinių sistemos pradžioje ir spindulys R , yra

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (1.73)$$

(1.72) įgautų (1.73) pavidalą, jei būtų tenkinamos šios dvi sąlygos:

$$\begin{cases} q'^2 d - q^2 a = 0, \\ \frac{q'^2 d^2 - q^2 a^2}{q^2 - q'^2} = R^2. \end{cases} \quad (1.74)$$

Išsprendę (1.74) q' ir a atžvilgiu, nustatome, kad



29 pav.

$$q' = -\frac{R}{d}q, \quad (1.75)$$

$$a = \frac{R^2}{d}. \quad (1.76)$$

(1.75) prirašėme minuso ženklą norėdami pabrėžti, kad q ir q' yra priešingų ženklų, nes iš (1.74) nustatėme tik krūvio q' modulį.

Dabar tarkime, kad šalia laidžios ižemintos R spindulio sferos (ar rutulio) d nuotolyje nuo centro yra taškinis krūvis q (29 pav.). Jei sferos viduje, a nuotolyje nuo centro, būtų taškinis krūvis q' , tai krūvių q ir q' kuriamas sferos potencialas būtų lygus nuliui. Taigi laukas šalia sferos, kurį kuria krūvis q ir jo indukuoti sferoje krūviai, yra toks pat, kaip ir tų dviejų taškinių krūvių kuriamas laukas. Čia q' apskaičiuojamas pagal (1.75), o

jo atstumas nuo centro a – pagal (1.76). Krūvis $-q'$ šiuo atveju yra krūvio $+q$ atvaizdas sferoje.

Atvaizdų sferoje metodą galima pritaikyti ir tuo atveju, jei krūvis $+q$ esti šalia neutralios neižemintos laidžios sferos. Šiuo atveju sferos potencialas (skaičiuojame centro potencialą)

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d}. \quad (1.77)$$

Kadangi krūviai $+q$ ir $-q'$ sferoje sukuria nulinį potencialą, tai jos centre turi būti toks krūvis $+q''$, kuris sukurtų tą potencialą, t. y.

$$\varphi = \frac{q''}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (1.78)$$

Sulyginę (1.77) ir (1.78) dešiniąsias puses, nustatome, kad

$$q'' = \frac{R}{d}q = -q'.$$

Taigi šiuo atveju lauką už sferos galima skaičiuoti kaip trijų taškinių krūvių $+q$, $-q'$ ir $+q''$ kuriamų laukų superpoziciją.

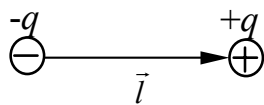
Pagaliau jei taškinis krūvis $+q$ yra šalia krūviu q_1 įelektrintos laidžios sferos (ar rutulio), centre turi būti krūvis $q_1 + q'$.

Pabrėšime, jog atvaizdų metodą galima pritaikyti ir kai krūvis $+q$ esti laidžios sferos viduje. Šiuo atveju atvaizdo krūvis ir jo atstumas nuo centro apskaičiuojamas pagal tas pačias formules (1.75) ir (1.76), o laukas – sferos viduje.

23. Elektrostatinis laukas aplinkoje su dielektrikais.

Dielektrikų poliarizacija ir jos molekulinis aiškinimas

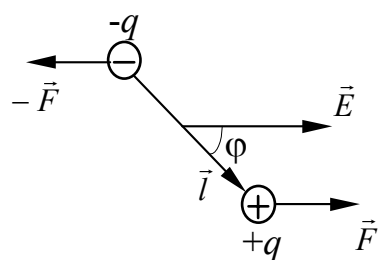
Dielektrikuose nėra laisvųjų krūvininkų, galinčių veikiant laukui judėti makroskopiniais atstumais. Dielektriką sudarančios molekulės yra neutralios, tačiau sudarytos iš elektringųjų dalelių - protonų ir elektronų, įeinančių į atomų struktūras. Dielektrike sudarius elektrinį lauką atsiranda jėgų, veikiančių teigiamuosius krūvius lauko kryptimi, o neigiamuosius - prieš lauko kryptį. Šioms jėgoms veikiant molekulės šiek tiek pakinta, nes į jų sudėtį įeinančios elektringosios dalelės truputį paslenka, dėl to molekulių teigiamų ir neigiamų krūvių centrai nebesutampa. Sakoma, kad molekulės tampa **dipoliais**. Paprasčiausias yra **taškinis dipolis**, kurį sudaro du lygių modulių, bet priešingų ženklų taškiniai krūviai $+q$ ir $-q$, atstumas tarp kurių yra l (30 pav.). l vadinamas **dipolio petimi**.



30 pav.

Pagrindinė dipolio charakteristika yra jo **elektrinis dipolinis momentas** $p=ql$. Jo SI vienetas yra $1 \text{ C} \cdot 1\text{m} = 1 \text{ C} \cdot \text{m}$. Sutarta atstumą tarp krūvių l laikyti vektoriumi, kurio kryptis yra **nuo neigiamo krūvio į teigiamą** (30 pav.). Tada elektrinio dipolinio momento vektorius

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (1.79)$$



31 pav.

Išoriniame vienalyčiame elektriniame lauke esanti dipolį veikia jėgų pora, kurios momento modulis

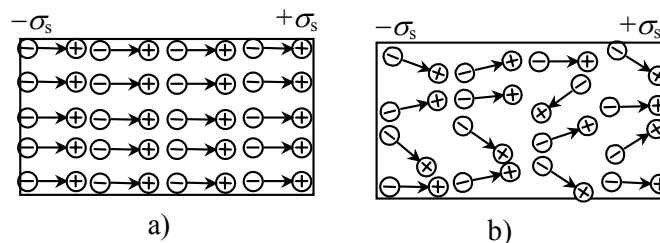
$$M = pE \sin \varphi,$$

o vektorius

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (1.80)$$

Čia φ - kampas tarp vektorių \vec{E} ir \vec{p} (31 pav.). Momentui \vec{M} veikiant dipolis stengiasi pasisukti taip, kad jo dipolinis momentas būtų lygiagretus su išorinio lauko stiprio vektoriumi \vec{E} .

Yra dviejų rūšių dielektrikai. Vienų dielektrikų molekulės nėra dipoliai kol nėra išorinio elektrinio lauko (tai **nepoliniai dielektrikai**), o kitų dielektrikų molekulės esti dipoliai ir be išorinio lauko (tai **poliniai dielektrikai**). Nepoliniam dielektrikui patekus į elektrinį lauką, molekulės tampa dipoliais, kurių dipoliniai momentai orientuoti lauko kryptimi (32 pav., a). Esant



32 pav.

poliniam dielektrikui laukas stengiasi orientuoti jo molekulių dipolinius momentus lygiagrečiai su lauku. Tam trukdo šiluminis judėjimas, todėl pasiekama tik dalinė (paprastai visai nedidelė) orientacija (32 pav., b, kuriame dėl vaizdumo orientacijos laipsnis labai padidintas). Ir vienu, ir kitu atvejais teigiamieji krūviai šiek tiek paslenka lauko kryptimi, o neigiamieji – prieš lauką. Šis vyksmas vadinamas **dielektrikų poliarizacija**.

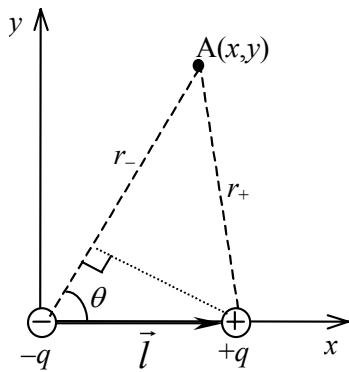
24. Elektrinio dipolio kuriamas laukas

Ankstesniame paragrafe nagrinėjome, kaip elektrinį dipolį veikia išorinis elektrinis laukas. Tačiau ir pats dipolis kuria savo elektrinį lauką. Jį skaičiuosime pasinaudodami sąryšiu tarp elektrinio lauko stiprio ir potencialo gradiento (1.48).

Plokščiojoje stačiakampėje koordinatinių sistemoje dipolio neigiamąjį krūvį sutapdinkime su koordinatinių sistemos pradžia, o teigiamasis krūvis tegu bus x ašyje, l atstumu nuo koordinatinių sistemos pradžios (33 pav.). Dipolio lauką skaičiuosime laisvai pasirinktame taške $A(x,y)$, esančiame toli nuo dipolio, t. y., kai atstumai nuo taško A iki krūvių $-q$ ir $+q$ r_- ir r_+ daug didesni už dipolio ilgį l :

$$r_+ \gg l, \quad r_- \gg l. \quad (1.81)$$

(1.81) matematiškai išreiškia **dipolinį artutinumą**. (Braižant 33 pav. dipolinio artutinumo nesilaikyta.)



33 pav.

Taško A potencialas

$$\varphi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\epsilon_0 r_+ r_-}. \quad (1.82)$$

Galiojant dipoliniam artutinumui (1.81), $r_- - r_+ \approx l \cos \theta$, $r_+ r_- \approx r^2$, o r – atstumas tarp taško A ir bet kurio dipolio taško, pavyzdžiui, krūvio $-q$. Tuo atveju

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

Taigi

$$\varphi_A = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{px}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{px}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi_A}{\partial x} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x^2 + y^2)^{3/2} - x \cdot 3/2 (x^2 + y^2)^{1/2} \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^3} = \\ &= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r^2 - 3r^2 \cos^2 \theta}{r^5} = \frac{p(3 \cos^2 \theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \end{aligned} \quad (1.83)$$

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\partial \varphi_A}{\partial y} = -\frac{px}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{-3/2 (x^2 + y^2)^{1/2} \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{3pxy}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{5/2}} = \\ &= \frac{3p \sin \theta \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Nustatę lygiagrečiąją su dipoliu lauko stiprio dedamąją E_x ir statmenąją E_y , galime lengvai apskaičiuoti dipolio kuriamo lauko stiprio modulį:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{(3 \cos^2 \theta - 1)^2 + (3 \sin \theta \cos \theta)^2}.$$

Atlikę požaknyje matematinius veiksmus gauname:

$$E = \frac{p \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (1.85)$$

Atkreipkime dėmesį, kad dipolio kuriamo lauko stipris atvirkščiai proporcingas atstumo kubui.

25. Poliarizuotumas. Poliarizacijos įtaka elektriniam laukui. Susietieji krūviai

Dielektriko poliarizacijos laipsnį apibūdina **poliarizuotumas**, kuris apibrėžiamas kaip **dielektriko tūrio vieneto dipolinis momentas**.

Poliarizuotame dielektrike išskirkime bet koki tūrį V . To tūrio dipolinį momentą sudaro visų jame telpančių molekulių dipolinių momentų \vec{p} vektorinė suma. Poliarizuotumo vektorius

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V}. \quad (1.86)$$

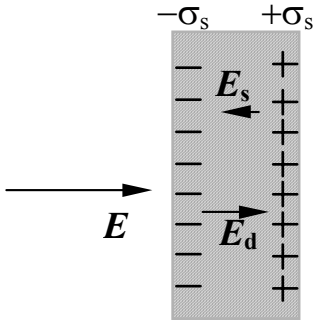
Poliarizuotumo SI vienetas yra $1 \text{ C} \cdot \text{m} / 1 \text{ m}^3 = 1 \text{ C} / \text{m}^2$ ir sutampa su paviršinio krūvio tanki σ SI vienetu.

Akivaizdu, kad jei molekulių skaičiaus tankį pažymėsime n , poliarizuotumą galėsime ir taip išreikšti:

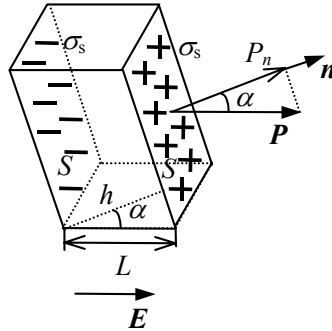
$$\vec{P} = n \vec{p}. \quad (1.87)$$

Nepolinio dielektriko atveju čia \vec{p} yra kiekvienos molekulės įgytas dipolinis momentas, o polinio dielektriko atveju – tokios pat absoliutinės vertės, bet skirtingų krypčių erdvėje dipolinių momentų vidutinis dipolinis momentas.

Kaip matyti iš 32 pav., dielektrikui poliarizuojantis atsiranda paviršiniai krūviai, kurie vadinami **susietaisiais krūviais**. (Susietieji krūviai kartais vadinami poliarizaciniais krūviais). Jų paviršinių tankių žymėsime σ_s . O tūryje esant vienalyčiams dielektrikams krūvių nesusidaro, nes dipoliai vienas į kitą atsukti priešingų ženklų krūviais. Nevienalyčiuose dielektrikuose be paviršinių susidaro ir tūriniai susietieji krūviai. Susietieji paviršiniai krūviai sukuria savo elektrinį lauką \vec{E}_s , nukreiptą prieš išorinį



34 pav.



35 pav.

lauką \vec{E} (34 pav.). Dėl to laukas dielektrike \vec{E}_d susilpnėja, nes $\vec{E}_d = \vec{E} + \vec{E}_s$, o modulis $E_d = E - E_s$.

Nustatysime sąryšį tarp susietųjų krūvių paviršinio tankio σ_s ir poliarizuotumo P . Tarkime, kad dielektrikas yra pasvirosios prizmės formos, o išorinis elektrinis laukas E nukreiptas lygiaagrečiai su jos viršutiniu ir apatiniu pagrindais (35 pav.). Viso

dielektriko dipolinis momentas $p = \sigma_s SL$, prizmės tūris $V = Sh = SL \cos \alpha$, o poliarizuotumas

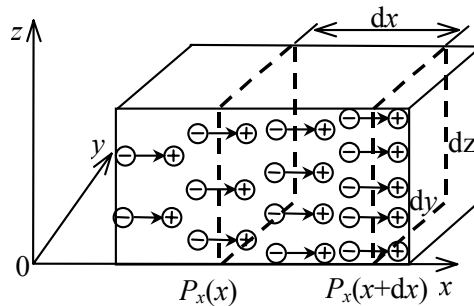
$$P = \frac{p}{V} = \frac{\sigma_s}{\cos \alpha}.$$

Iš čia nustatome, kad

$$\sigma_s = P \cos \alpha = P_n. \quad (1.88)$$

Taigi, **susietųjų krūvių paviršinis tankis lygus poliarizuotumo vektoriaus statmenajai paviršiui dedamajai**. Kai elektrinis laukas esti statmenas dielektriko paviršiui, (t. y. $\alpha = 0$), tada $\sigma_s = P$.

Nevienalyčiuose dielektrikuose be paviršinių susietųjų krūvių atsiranda dar ir **tūriniai susietieji krūviai**. Jų tūrinį tankį pažymėkime ρ .



36 pav.

Tegu stačiakampėje koordinatinių sistemoje (36 pav.) poliarizuotumo vektoriaus dedamosios yra P_x, P_y, P_z . Panagrinėkime dielektriko tūrio elementą $dV = dx dy dz$. Nepoliarizuotame dielektrike tas tūris buvo neutralus, nes jame nebuvo dipolių (nepoliniam dielektrike) arba tie dipoliai buvo netvarkingai orientuoti. Dielektrikui poliarizuojantis dalis krūvio išeis (arba įeis) per tūrio elemento sienes. Paprastumo dėlei tarkime, kad juda tik teigiamieji krūviai. Apskaičiuosime, koks krūvis įeis per abi statmenas x ašiai sienes. Per kairiąją sienelę, kurios plotas dydz, įėjęs krūvis lygus $q n l_x dy dz = P_x(x) dy dz$, o per dešiniąją sienelę išėjęs krūvis lygus atitinkamai $P_x(x+dx) dy dz$. Tačiau

$$P_x(x+dx) = P_x(x) + \frac{\partial P_x}{\partial x} \cdot dx.$$

Matome, kad per abi statmenas x ašiai sienes išėjęs teigiamasis krūvis yra

$$P_x(x+dx) dy dz - P_x(x) dy dz = \frac{\partial P_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial P_x}{\partial x} dV. \quad (1.89)$$

Panašiai apskaičiuotume ir per kitas y ir z ašims statmenas sienelių poras išėjusį krūvį. Per visas sienes išėjęs teigiamasis krūvis lygus

$$\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) dV = \operatorname{div} \vec{P} dV. \quad (1.90)$$

Išėjus teigiamam krūviui tūrio elemente dV atsirado neigiamas krūvis $-\rho_d dV$. Sulyginę jį su (1.90), galutinai nustatome, kad

$$\boxed{\rho_t = -\operatorname{div} \vec{P}.} \quad (1.91)$$

26. Elektrinis jautris. Dielektrinė skvarba

Dielektrikai poliarizuojasi veikiant elektriniam laukui. Todėl natūralu manyti (tą patvirtina ir eksperimentai), kad poliarizuotumas yra proporcingas elektrinio lauko dielektrike stipriui: $P \sim E_d$. Proporcingumo faktorius χ vadinamas **elektriniu jautriu**. Tam, kad χ dimensija būtų lygi vienetui, sąryšis tarp P ir E_d užrašomas taip:

$$\boxed{\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}_d.} \quad (1.92)$$

Dielektrinėms savybėms apibūdinti dažniau naudojamas ir kitas faktorius, vadinamas dielektrine skvarba. Panagrinėkime, kokią poveikį kondensatoriaus talpai daro dielektrikas. Jei plokščiojo kondensatoriaus krūvis q , o tarp plokštelių yra vakuumas (37 pav. a), jo talpa pagal (1.59)

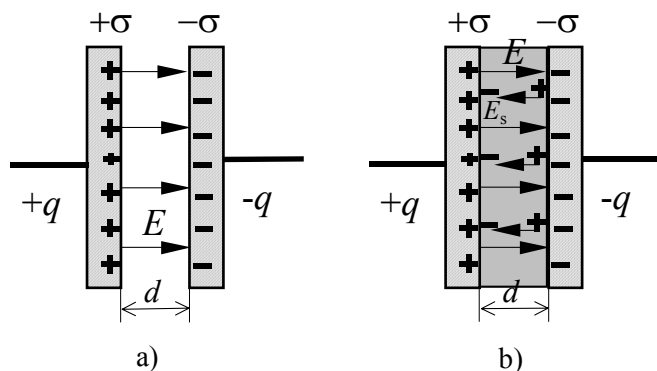
$$C_0 = \frac{q}{U_0} = \frac{q}{Ed}. \quad (1.93)$$

Esant tarp plokštelių dielektrikui (37 pav., b), talpa

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{(E - E_s)d} = \frac{q}{E_d d}. \quad (1.94)$$

Akivaizdu, kad $C > C_0$, nes $E_d < E$. **Kondensatoriaus talpų su dielektriku ir be jo santykis vadinamas dielektriko dielektrine skvarba ϵ .**

$$\boxed{\epsilon = \frac{C}{C_0}.} \quad (1.95)$$



37 pav.

vių įtakos dielektrike susilpnėja ir dviejų taškinių krūvių sąveikos jėga. Taigi Kulono dėsnio (1.3) formulę, jei abu krūviai yra dielektrike, reikia taip užrašyti:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^3}. \quad (1.96)$$

Pakinta ir kitos formulės, pavyzdžiui, (1.6), (1.22) ir kt. Jose vietoj ϵ_0 reikia rašyti $\epsilon \epsilon_0$.

27. Gauso dėsnis, kai aplinkoje yra dielektrikų. Elektrinė slinktis

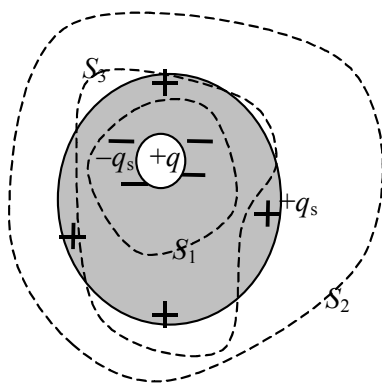
Elektrinį lauką kuria visi krūviai – tiek laisvieji, tiek susietieji. Todėl užrašant Gauso dėsnį (1.23) reikia susumuoti visus krūvius. Tarkime, kad laisvasis krūvis $+q$ yra apsuptas vienalyčio dielektriko (38 pav.). Jei paviršius S_1 , per kurį skaičiuojame srautą, visas yra tame dielektrike, Gauso dėsnį galima užrašyti taip:

Pastebėsime, kad dalydami (1.94) iš (1.93) gautume, jog

$$\epsilon = \frac{E}{E_d}.$$

Taigi dielektrinė skvarba apibūdina, kiek kartų laukas dielektrike (tiksliau, dielektrikui statmenoji lauko dedamoji) silpnėsnis negu už jo. Taip pat atkreipsime dėmesį, kad visuose kondensatoriuose (plokščiajame, cilindriname ar sferiniame) elektrinis laukas esti statmenas dielektriko paviršiui.

Dėl susietųjų (poliarizacinių) krū-



38 pav.

$$\oint_{(S_1)} \vec{E}_d \cdot d\vec{S} = \frac{q - q_s}{\epsilon_0}, \quad (1.97)$$

nes susietasis krūvis $+q_s$ nėra šio paviršiaus apribotame tūryje, o lauko stipris dielektrike yra susilpnėjęs ir lygus E_d . Jei norėtume apskaičiuoti srautą per paviršių S_2 , apgaubiantį krūvį su visu dielektriku, tuo atveju rašytume

$$\oint_{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q - q_s + q_s}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Tačiau kaip reikėtų užrašyti Gauso dėsnį, pavyzdžiui, paviršiui S_3 , kurio kai kurios dalys eina per dielektriką, o kai kurios už jo?

Arba ką daryti tuo atveju, jei paviršius eina per kelis skirtingus, galbūt nevienalyčius, dielektrikus? Šiais atvejais išraiška, panaši į (1.97) nėra patogi. Ją galima pertvarkyti kitaip. Žinome, kad laukas dielektrike yra ϵ kartų silpnesnis negu vakuume. Todėl ir srautas per dielektrike esantį paviršių bus ϵ kartų mažesnis. (1.97) lygybės kairėje pusėje į tai atsižvelgta vietoje lauko stiprio E rašant E_d , o dešinėje – vietoje q rašant $q - q_s$. Tačiau galima į tai atsižvelgti ir kitaip: dešinėje pusėje rašyti ne $q - q_s$, o q/ϵ , t. y. tarti, kad lauką kuria tik laisvieji krūviai q . Tada vietoje (1.97) užrašysime

$$\oint_{(S_1)} \vec{E}_d \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}. \quad (1.98)$$

(1.98) abi puses padauginame iš $\epsilon \epsilon_0$, įkeldami juos po integralu:

$$\oint_{(S_1)} \epsilon \epsilon_0 \vec{E}_d \cdot d\vec{S} = q.$$

Pažymėkime

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}_d}. \quad (1.99)$$

Vektorius \vec{D} vadinamas elektrinės slinkties vektoriumi. Panaudodami šį vektorių, vietoje (1.23) Gauso dėsnio integralinę išraišką bendru pavidalu galime užrašyti taip:

$$\boxed{\oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i}. \quad (1.100)$$

Čia q_i yra tik laisvieji krūviai.

Analogiškai (1.28), Gauso dėsnio diferencialinė forma vektoriui \vec{D} įgauna tokį pavidalą:

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho}. \quad (1.101)$$

Čia ρ – tik laisvųjų krūvių tūrinis tankis.

Taigi \vec{D} šaltiniai yra tik laisvieji krūviai.

Elektrinės slinkties SI vienetą galime nustatyti remdamiesi (1.99):

$1 \text{ F/m} \cdot 1 \text{ V/m} = 1 \text{ C/m}^2$. Jis sutampa su paviršinio krūvio tankio σ ir poliarizuotumo P vienetais.

Nustatysime sąryšį tarp vektorių \vec{E}_d , \vec{P} ir \vec{D} . Tarkime, kad elektrinis laukas E statmenas dielektrinei plokštei (39 pav.). Tada atsižvelgdami į (1.88) užrašysime:

$$\vec{E}_d = \vec{E} + \vec{E}_s = \vec{E} - \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \cdot \vec{n} = \vec{E} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}.$$

Iš čia nustatome, kad

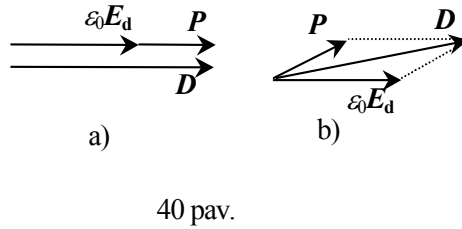
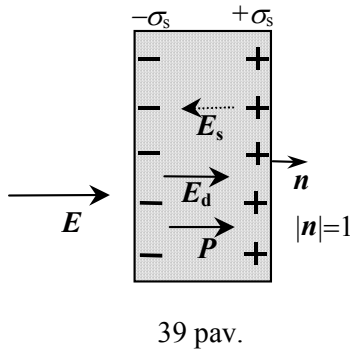
$$\vec{P} = \epsilon_0 (\vec{E} - \vec{E}_d) = \epsilon_0 (\epsilon \vec{E}_d - \vec{E}_d) = \epsilon_0 (\epsilon - 1) \vec{E}_d. \quad (1.102)$$

Palyginę šią išraišką su (1.92) matome, kad elektrinis jautris susijęs su dielektrine skvarba taip:

$$\boxed{\chi = \epsilon - 1}. \quad (1.103)$$

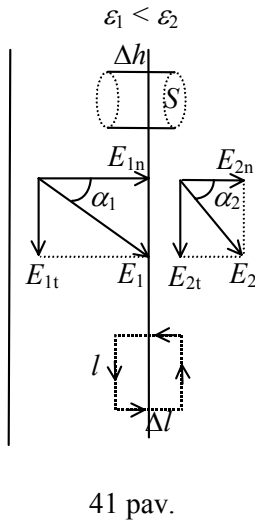
Atsižvelgę į (1.99), sąryšį (1.102) tarp vektorių \vec{D} , \vec{E}_d ir \vec{P} galime užrašyti ir taip:

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_d + \vec{P}}. \quad (1.104)$$



Izotropiniuose dielektrikuose vektoriai \vec{D} , \vec{E}_d ir \vec{P} esti lygiagretūs (40 pav., a). Anizotropiniuose dielektrikuose jų kryptys gali ir nesutapti (40 pav., b). Tuo atveju ϵ esti antrojo rango tenzorius.

28. Elektrinis laukas dvi aplinkas skiriančiame paviršiuje



Nagrinėsime \vec{E} ir \vec{D} vektorių eigą du dielektrikus skiriančiame paviršiuje. Tarkime, kad pirmajame dielektrike, kurio dielektrinė skvarba ϵ_1 , elektrinio lauko stiprio linijos krinta α_1 kampu į paviršių, o antrajame dielektrike, kurio dielektrinė skvarba ϵ_2 , jos lūžta sudarydamos kampą α_2 (41 pav.). \vec{E} ir \vec{D} abiejuose dielektrikuose išskaidykime į dvi dedamąsias: statmeną paviršiui (normalinę) ir lygiagrečiąją (tangentinę). Imkime cilindrą, kurio vienas pagrindas S yra viename dielektrike, kitas – antrame, o jo aukštis $\Delta h \rightarrow 0$ ir pritaikykime Gauso dėsnį (1.100) vektoriui \vec{D} (dėl Δh mažumo į srautą per šoninį paviršių nekreipiame dėmesio):

$$-D_{1n}S + D_{2n}S = 0,$$

nes cilindre nėra uždarytų laisvųjų krūvių. Iš čia nustatome, kad

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (1.105)$$

Pasinaudodami sąryšiu tarp D ir E_d (1.99), gauname:

$$\epsilon_1 \epsilon_0 E_{1n} = \epsilon_2 \epsilon_0 E_{2n},$$

arba

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (1.106)$$

Apskaičiuokime \vec{E} cirkuliaciją stačiakampiu, kurio viena kraštinė l yra viename dielektrike, kita – kitame, o statmenoji paviršiui kraštinė $\Delta l \rightarrow 0$, todėl jos įnašas nepaisome:

$$E_{1t}l - E_{2t}l = 0.$$

Iš čia gauname

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (1.107)$$

Pritaikius (1.99), pastaroji lygybė gali būti užrašyta taip:

$$\frac{D_{1t}}{\epsilon_1 \epsilon_0} = \frac{D_{2t}}{\epsilon_2 \epsilon_0},$$

arba

$$\frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (1.108)$$

Dabar jau galime apskaičiuoti kampus α_1 ir α_2 :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}.$$

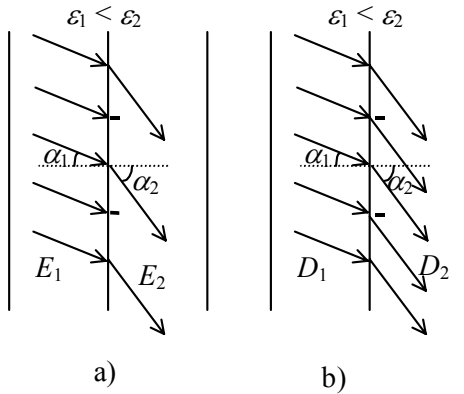
Dalydami šias dvi lygybes vieną iš kitos ir atsižvelgdami į (1.107) ir (1.106), gauname:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \quad (1.109)$$

Slinkties vektoriui gauname tokias pačias išraiškas:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{1t}}{D_{1n}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{2t}}{D_{2n}}.$$



42 pav.

Dalydami vieną lygybę iš kitos ir atsižvelgdami į (1.105) ir (1.108), gauname (1.109) lygybę. Taigi elektrinio lauko stiprio ir elektrinės slinkties vektoriai lūžta vienodais kampais, kurių tangentai proporcingi dielektrinėms skvarboms. Skirtumas tik tas, kad kai kurios lauko stiprio linijos pasibaigia arba prasideda paviršiniuose susietuosiuose krūviuose (42 pav., a), o slinkties linijos pereina paviršių nenutrūkdamos (42 pav., b), nes jų šaltiniai yra tik laisvieji krūviai. Dėl tokio lūžimo elektrinio lauko stipris esti mažesnis dielektrike, kurio dielektrinė skvarba didesnė, o slinkties, atvirkščiai, esti didesnė ten, kur dielektrinė skvarba didesnė. Tai matyti iš 42 pav.

29. Diskretinių krūvių sąveikos energija

Iš pradžių apskaičiuokime dviejų taškinių krūvių q_1 ir q_2 , atstumas tarp kurių r_{12} , sąveikos energiją. Ji lygi darbui, kurį reikia atlikti norint padaryti šią dviejų krūvių sistemą, t.y. priartinti krūvį q_2 iš begalybės iki atstumo r_{12} nuo krūvio q_1 . Pagal (1.38)

$$W = q_2 \varphi_2.$$

Čia φ_2 pažymėtas potencialas taško, į kurį atkeliamas krūvis q_2 . Šį potencialą sukuria krūvis q_1 . Pagal (1.40)

$$\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}}.$$

Čia ε – aplinkos, kurioje yra krūviai, dielektrinė skvarba.

Taigi dviejų taškinių krūvių sąveikos energiją galima taip užrašyti:

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}}. \quad (1.110)$$

Tarę, kad krūvį q_1 keliame prie krūvio q_2 , gautume:

$$W = q_1 \varphi_1.$$

Kadangi abu krūviai į energijos formulę įeina simetriškai, dviejų diskretinių krūvių sąveikos energiją galima ir taip užrašyti:

$$W = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_1 + q_2 \varphi_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 q_i \varphi_i.$$

Dabar tarkime, kad norime padaryti trijų krūvių sistemą, atkeldami dar trečią krūvį q_3 iš begalybės iki atstumo r_{13} nuo krūvio q_1 ir r_{23} nuo krūvio q_2 . Tam reikės papildomo darbo

$$A = q_3 \varphi_3.$$

Čia φ_3 – potencialas taško, į kurį atkeliamas krūvis q_3 . Tą potencialą sukuria krūviai q_1 ir q_2 , tad

$$\varphi_3 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{23}},$$

$$A = \frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{23}}. \quad (1.111)$$

Trijų taškinių krūvių sistemos energijos išraišką gausime, prie (1.110) pridėję (1.111):

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{23}}.$$

Jei sistema sudaryta iš n taškinių krūvių, jų sąveikos energiją galima užrašyti taip:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i \quad (1.112)$$

arba

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \frac{q_i q_k}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{ik}}. \quad (1.113)$$

(1.112) formulėje φ_i yra taško, kuriame esti krūvis q_i , potencialas, sukurtas visų sistemos krūvių, išskyrus krūvį q_i :

$$\varphi_i = \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \frac{q_k}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_{ik}}.$$

Kadangi krūvis nesąveikauja pats su savimi, (1.113) formulėje atmetami su vienodais indeksais esantys nariai. Be to, išskleidus (1.113) dvigubas sumas, nariai su tais pačiais indeksais įeitų po du kartus, todėl prieš sumų ženklus parašytas daugiklis $\frac{1}{2}$.

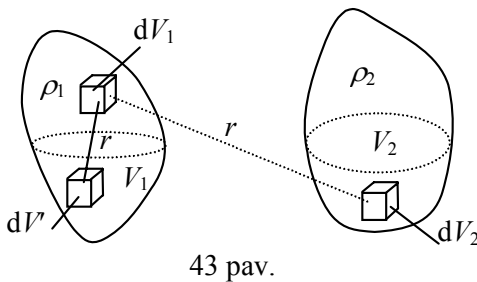
30. Tolydžiai pasiskirsčiusių krūvių savoji ir sąveikos energija

Tarkime, turime du įelektrintus kūnus, kurių tūriai V_1 ir V_2 , o jų tūriniai krūvio tankiai ρ_1 ir ρ_2 (43 pav.). Tegu tūrio elemente dV_1 yra krūvis $dq_1 = \rho_1 dV_1$. Tada jo sąveikos su likusių dalių krūviais energiją galima užrašyti pasinaudojant (1.112)

$$dW = \frac{1}{2} \varphi dq_1 = \frac{1}{2} \varphi \rho_1 dV_1, \quad (1.114)$$

o visa tūrio V_1 energija

$$W = \frac{1}{2} \int_{(V_1)} \varphi \rho_1 dV_1. \quad (1.115)$$



Čia φ yra tūrio elemento dV_1 potencialas, kurį sukuria visi krūviai, išskyrus dq_1 . Tačiau šiuo atveju skaičiuojant φ nebūtina atimti krūvio dq_1 kuriamą potencialą, nes dq_1 yra labai mažas krūvis, taigi ir jo kuriamas potencialas yra labai mažas. (1.115) gali reikšti tiek savąją, tiek sąveikos, tiek ir visą tūrio V_1 energiją priklausomai nuo to, kokių krūvių kuriamą potencialą φ ten įrašysime. Remdamiesi (1.41), užrašykime:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Čia φ_1 ir φ_2 – tūryje V_1 ir V_2 esančių krūvių kuriami potencialai atitinkamai. Pagal (1.44)

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{(V_1)} \frac{\rho_1 dV_1}{r},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{(V_2)} \frac{\rho_2 dV_2}{r}.$$

Jei (1.115) imsime $\varphi = \varphi_1$, apskaičiuosime tūrio V_1 **savąją energiją**. Taigi **savoji energija – tai įvairių to krūvio elementų sąveikos energija**.

Jei imsime $\varphi = \varphi_2$, apskaičiuosime tūriuose V_1 ir V_2 esančių krūvių **sąveikos energiją**, o jei $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ – tūrio V_1 **visą energiją**, kuri lygi savosios ir sąveikos energijų sumai.

Panašiu būdu, tik remiantis (1.43) ir (1.42) formulėmis, reikėtų skaičiuoti energiją esant paviršiniams bei linijiniams krūviams.

31. Įelektrintų laidininkų energija

Žinome, kad elektrostatikos atveju laidininkuose esti tik paviršiniai krūviai ir kad laidininko visų taškų potencialas yra vienodas. Taigi vietoje (1.115) šiuo atveju užrašysime:

$$W = \frac{1}{2} \int_{(S)} \varphi \sigma dS = \frac{\varphi}{2} \int_{(S)} \sigma dS = \frac{q\varphi}{2}. \quad (1.116)$$

Čia S – laidininko paviršiaus plotas, σ – paviršinio krūvio tankis.

Pasinaudoję sąryšiu tarp laidininko krūvio, potencialo ir talpos (1.56), galime gauti ir tokias pavienio įelektrinto laidininko energijos išraiškas:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}. \quad (1.117)$$

Jei sistemą sudaro n laidininkų, energija apskaičiuojama sumuojant (1.117):

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ik} \varphi_i \varphi_k. \quad (1.118)$$

(Užrašant (1.118) pasinaudota sąryšiu (1.70)).

Norėdami pagal (1.118) apskaičiuoti paprasto kondensatoriaus energiją, imame $n=2$ ir išskleidžiame:

$$W = \frac{1}{2} (C_{11}\varphi_1^2 + C_{12}\varphi_1\varphi_2 + C_{21}\varphi_2\varphi_1 + C_{22}\varphi_2^2)$$

Šiuo atveju $C_{11}=C_{22}=C$, $C_{12}=C_{21}=-C$, nes visos elektrinio lauko linijos, išėjusios iš vienos plokštelės, pasibaigia antroje. Taigi

$$W = \frac{C}{2} (\varphi_1^2 - 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2) = \frac{C}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}. \quad (1.119)$$

32. Elektrinio lauko energijos tūrinis tankis

Plokščiojo kondensatoriaus energijos išraišką (1.119) galime pertvarkyti taip, kad joje atsirastų elektrinio lauko stipris E_d . Tarkime, kad tarp plokštelių yra dielektrikas, kurio dielektrinė skvarba ε . Jo talpa pagal (1.59)

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

o potencialų tarp plokštelių skirtumas

$$U = E_d d.$$

Taigi energija

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S E_d^2 d^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_d^2}{2} \cdot V.$$

Čia $V=SD$ – tūris tarp kondensatoriaus plokštelių. Tiksliai šiame tūryje sutelktas visas kondensatoriaus elektrinis laukas. Matome, kad energija proporcinga tam tūriui. Dydis

$$u_e = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E_d^2}{2} = \frac{E_d D}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \quad (1.120)$$

vadinamas **elektrinio lauko energijos tūriniu tankiu**. Tai vienetiniam tūriui tenkanti elektrinio lauko energija. Ji priklauso nuo elektrinio lauko stiprio ir dielektrinės skvarbos.

Energijos tūrinio tankio SI vienetas yra 1 J/m^3 . Atkreipkime dėmesį, kad $1 \text{ J/m}^3 = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$, t.y. energijos tūrinio tankio dimensija sutampa su slėgio dimensija.

Žinant elektrinio lauko pasiskirstymą erdvėje visą energiją galima apskaičiuoti integruojant:

$$W = \int_{(V)} u_e dV. \quad (1.121)$$

Pavyzdžiui, apskaičiuosime R spindulio laidaus rutulio, įelektrinto krūviu q ir esančio aplinkoje, kurios dielektrinė skvarba ε , energiją. Tokio rutulio elektrinė talpa sutinkamai su (1.57) $C=4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$, tad pagal (1.117) energija

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}. \quad (1.122)$$

Tačiau galima skaičiuoti ir kitaip. Lauko stipris r nuotolyje nuo rutulio centro

$$E_d = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2},$$

o energija, sutelkta r spindulio dr storio sferiniame sluoksnyje, kurio tūris $dV=4\pi r^2 dr$

$$dW = u_e dV = \frac{\epsilon\epsilon_0 E_d^2}{2} dV = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon\epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2 dr}{8\pi \epsilon\epsilon_0 r^2}.$$

Integruodami nustatome, kad energija

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0 R},$$

o tai sutampa su (1.122).

Tas faktas, kad energija proporcinga tūriui erdvės, kurioje yra elektrostatinis laukas, kelia mintį, jog energija, galbūt, ir yra sutelkta tame tūryje, o ne ten, kur yra išsidėstę krūviai. Atsakymą į šį klausimą gali duoti tik eksperimentas. Elektrostatikos atveju toks eksperimentas negali būti atliktas, nes laukas be jį kuriančių krūvių neegzistuoja. Tačiau kintamasis elektrinis laukas gali egzistuoti ir be jį sukūrusių krūvių (pavyzdžiui, elektromagnetinėje bangoje). Eksperimentiškai nustatyta, kad elektromagnetinė banga neša su savimi energiją, kuri lygi jos elektrinio ir magnetinio laukų energijų sumai. Tuo remiantis galima teigti, kad ir elektrostatikos atveju **energija yra sutelkta toje erdvės dalyje, kur yra elektrinis laukas, o ne ten, kur yra krūviai**.

Pastebėsime, kad izotropiniams dielektrikams tinka visos trys (1.120) pateiktos energijos tūrinio tankio išraiškos. Tačiau anizotropiniams dielektrikams, kai vektoriai \vec{E}_d ir \vec{D} nėra lygiagretūs, elektrostatinio lauko energijos tūrinis tankis išreiškiamas taip:

$$u_e = \frac{\vec{E}_d \cdot \vec{D}}{2}. \quad (1.123)$$

33. Išoriniame lauke esančio elektrinio dipolio energija

Žinome, kad elektriniame lauke dipolį veikia jėgos momentas, kurio modulis $M = pE \sin \varphi$ (žr. (1.80)). Tarkime, kad šiam jėgos momentui veikiant dipolis pasisuko mažu kampu $d\varphi$ (44 pav.). Dipolio potencinės energijos pokytis bus lygus šio proceso metu atliktajam darbui:

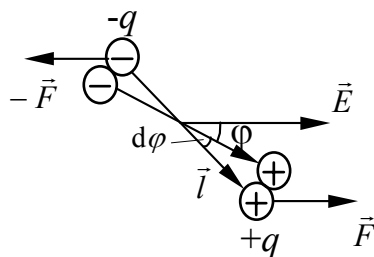
$$dW = M d\varphi = pE \sin \varphi d\varphi.$$

Suintegravę gauname:

$W = pE \int \sin \varphi d\varphi = -pE \cos \varphi + K$. Čia K – integravimo konstanta, kurią potencinės energijos išraiškoje galima pasirinkti laisvai. Paprastai pasirenkama $K=0$. Tada dipolio energija išreiškiama taip:

$$W = -pE \cos \varphi = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (1.124)$$

Jei $\varphi=0$ (dipolio pastovios pusiausvyros padėtis), jo energija esti mažiausia ir lygi $-pE$, o jei $\varphi=\pi$ (nepastovios pusiausvyros padėtis), energija esti didžiausia ir lygi pE .



44 pav.

34. Jėgos, veikiančios taškinį krūvį, tolydžiai pasiskirsčiusį krūvį ir dipolį elektriniame lauke

Taškinį krūvį elektriniame lauke veikianti jėga, kaip matyti iš (1.5), lygi

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Čia \vec{E} – lauko, sukurto visų kitų krūvių, išskyrus krūvį q , stipris.

Jei krūvis tolydžiai pasiskirstęs, norint apskaičiuoti jėgą reikia jį mintyse padalyti į mažas dalis, kad jose esančius krūvius būtų galima laikyti taškiniais, ir visas tas dalis veikiančias jėgas vektoriškai susumuoti.

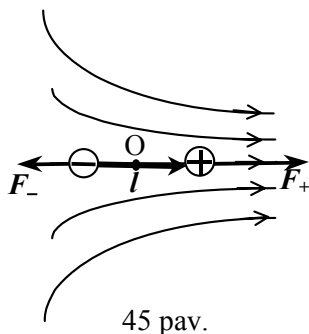
Jei netaškinis įelektrintas kūnas yra vienalyčiame elektriniame lauke, tada toks skaičiavimas labai supaprastėja, nes atskiras to kūno dalis veikiančios jėgos esti lygiagrečios, ir vektorinė suma virsta algebrine:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{E} \Delta q_i = \vec{E} \sum_i \Delta q_i = q \vec{E}.$$

Matome, kad vienalyčio lauko atveju ir netaškiniam krūviui tinka taškinio krūvio jėgos išraiška, o tos jėgos veikimo taškas randamas tokiu pat būdu, kaip masės centras, vietoj medžiagos tankio imant jo krūvio tankį.

Jau žinome, kad vienalyčiame lauke dipolį veikia jėgos momentas

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \text{ (žr. (1.80)).}$$



45 pav.

Panagrinėsime, kokios jėgos veikia elektrinį dipolį nevienalyčiame elektriniame lauke. Tarkime, kad dipolis jau orientuotas lauko jėgos linijos kryptimi (45 pav.). Matome, kad vienas dipolio krūvis (45 pav. teigiamas) yra stipresnio lauko srityje, negu kitas, taigi dipolį veikianti atstojamoji jėga $F = F_+ - F_- \neq 0$. Apskaičiuosime tą jėgą. Lauko stiprį ties dipolio viduriu (taškas O 45 pav.) pažymėkime E . Tada lauko stipris toje vietoje, kur yra teigiamas krūvis

$$E_+ = E + \frac{\partial E}{\partial l} \cdot \frac{l}{2},$$

o ten, kur yra neigiamas krūvis

$$E_- = E - \frac{\partial E}{\partial l} \cdot \frac{l}{2}.$$

Teigiamą ir neigiamą krūvį veikiančios jėgos

$$F_+ = E_+ q = \left(E + \frac{\partial E}{\partial l} \cdot \frac{l}{2} \right) q,$$

$$F_- = E_- q = \left(E - \frac{\partial E}{\partial l} \cdot \frac{l}{2} \right) q.$$

Atstojamoji jėga

$$F = F_+ - F_- = Eq + \frac{\partial E}{\partial l} \cdot \frac{l}{2} q - Eq + \frac{\partial E}{\partial l} \cdot \frac{l}{2} q = lq \frac{\partial E}{\partial l} = p \frac{\partial E}{\partial l}.$$

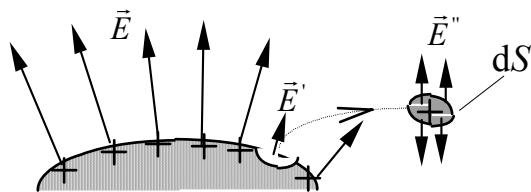
Taigi galutinai užrašysime:

$$F = p \frac{\partial E}{\partial l} = p \cdot |\text{grad } E|. \quad (1.125)$$

Ši jėga nukreipta lauko stiprėjimo kryptimi. Ji proporcinga elektriniam dipoliniam momentui p ir lauko stiprio gradientui.

35. Laidininką veikiančio jėgos

Žinome, kad elektrostatikos atveju laidininke esti tik paviršiniai krūviai, o elektrinio lauko linijos nukreiptos statmenai metalo paviršiui. Vienarūšių krūvių stūmos jėgų veikiamas metalo paviršius yra tempiamas statmena to paviršiaus kryptimi.



46 pav.

Apskaičiuosime, kokia jėga mažą laidininko paviršiaus plotelį dS su krūviu σdS veikia kitų krūvių, esančių ir to paties laidininko likusiame paviršiuje, ir šalia laidininko (jei tokių krūvių yra), laukas. Norėdami surasti to lauko stiprį E' , mintyse pašalinkime iš metalo paviršiaus plotelį dS su krūviu $dq = \sigma dS$ (46 pav).

Bet kokios formos mažą plotelį galime laikyti plokščiu, tad tame plotelyje esančių krūvių sukurtą lauką E''

galime skaičiuoti pagal plokštumos sukurtą lauko formulę

$$E'' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Lauko stiprį E' apskaičiuosime iš lauko E (žr. (1.55)) atėmę E'' :

$$E' = E - E'' = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Tad jėgos, veikiančios plotelį dS , modulis

$$dF = E'dq = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \sigma dS = \frac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0}. \quad (1.126)$$

Ši jėga nukreipta statmenai į paviršių ir sukelia įtempimą

$$\tau = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}. \quad (1.127)$$

Vektoriškai (1.126) galima užrašyti taip:

$$d\vec{F} = \frac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{n}. \quad (1.128)$$

Čia \vec{n} - paviršiaus normalės vienetinis vektorius. Norint rasti baigtinio ploto paviršių veikiančią jėgą, reikia integruoti (1.128).

Pasinaudodami (1.128) apskaičiuosime, kokia jėga traukia viena kitą plokščiojo orinio kondensatoriaus plokštelės, jei jų krūviai $+q$ ir $-q$, o lauko stipris tarp jų E . Šiuo atveju visas plokštelių dalis veikia tos pačios krypties jėgos, o laukas vienalytis, tad vietoj dS galime imti plokštelės visą plotą S . Pasinaudodami paviršinio krūvio tankio apibrėžtimi (1.11) bei sąryšiu tarp paviršinio krūvio tankio ir lauko stiprio prie metalo paviršiaus (1.55), apskaičiuojame, kad

$$F = \frac{qE}{2}.$$

Pastebėsime, kad pastarąją jėgos išraišką galima gauti ir kitaip samprotaujant. Lauko stiprį E sukuria abi plokštelės. Kaip jau buvo pabrėžta, norint apskaičiuoti vieną plokštelę veikiančią jėgą, reikia tos plokštelės krūvį q padauginti iš kitos plokštelės (o ne abiejų plokštelių) sukurto lauko stiprio, kuris lygus $E/2$.

36. Dielektriką veikiančios jėgos. Jėgų skaičiavimas remiantis energijos išraiška

Išoriniame elektriniame lauke esantį dielektriką gali veikti tūrinės ir paviršinės jėgos, kurias čia panagrinėsime.

Tūrinės jėgos. Jos veikia tik nevienalyčiame elektriniame lauke ir yra vektorinė suma jėgų, veikiančių kiekvieną molekulę kaip dipolį. Mintyse išskirkime mažą dielektriko tūrio elementą dV . Jei dielektriko poliarizuotumas P , šio tūrio elemento dipolinis momentas pagal (1.86)

$$d\vec{p} = \vec{P} \cdot dV,$$

o jį veikianči jėga sutinkamai su (1.125)

$$d\vec{F} = d\vec{p} \cdot \text{grad}|E_d| = P \cdot \text{grad}|E_d| dV.$$

Pasinaudodami (1.92) ir (1.103), poliarizuotumą galime išreikšti taip:

$$P = \varepsilon_0 \chi E_d = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_d.$$

Taigi

$$d\vec{F} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) E_d \text{ grad}|E_d| \cdot dV.$$

Gradientas yra išvestinė pagal koordinates, tad E_d galima ten įkelti. Galutinai gauname tokią elementą dV veikiančios jėgos išraišką:

$$d\vec{F} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon - 1)}{2} \text{ grad} E_d^2 \cdot dV. \quad (1.129)$$

Ši jėga nukreipta lauko stiprėjimo kryptimi.

Norint apskaičiuoti didelio tūrio dielektriką veikiančią jėgą, reikia integruoti (1.129).

Paviršinės jėgos. Jos proporcingos dielektriko paviršiaus plotui. Šio jėgos veikia esant ir vienalyčiam elektriniam laukui. Suprasti šių jėgų prigimtį gali padėti toks pavyzdys. Tarkime, yra plokščiasis

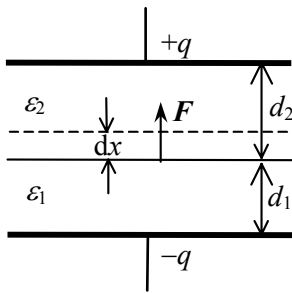
kondensatorius, kuriam suteiktas krūvis q , o paskui jis atjungtas nuo šaltinio. Jo energija remiantis (1.120) gali būti išreikšta taip:

$$W = u_e V = \frac{D^2}{2\epsilon\epsilon_0} V. \quad (1.130)$$

Čia ϵ yra kondensatoriaus dielektriko dielektrinė skvarba, V – to dielektriko tūris. Pasinaudodami (1.99) ir (1.55) nustatome, kad elektrinė slinktis D lygi plokštelėse esančių laisvųjų krūvių paviršiniam tankiui σ .

$$D = \epsilon\epsilon_0 E_d = \epsilon\epsilon_0 \cdot \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} = \sigma = \frac{q}{S} \quad (1.131)$$

ir yra pastovus dydis, kai krūvis q negali kisti. Iš (1.130) matome, kad tokio kondensatoriaus energija yra tuo mažesnė, kuo didesnė jo dielektriko dielektrinė skvarba, nes kiti (1.130) dydžiai pastovūs. Kai neveikia išorinės jėgos, bet kokia sistema siekia užimti mažiausios energijos būseną. Taigi atsiranda jėgos, įtraukiančios dielektriką tarp įelektrinto kondensatoriaus plokštelių, o norint ištraukti dielektriką iš kondensatoriaus išorinėms jėgoms tenka atlikti tam tikrą darbą.



47 pav.

Tarkime, kad yra plokščiasis kondensatorius su dviem skirtingais dielektrikais, kurių skiriamasis paviršius lygiagretus su plokštelėmis (47 pav.). Tegu pirmojo dielektriko sluoksnio storis d_1 , dielektrinė skvarba ϵ_1 , o antrojo atitinkamai d_2 ir ϵ_2 . Jei $\epsilon_1 > \epsilon_2$, pirmasis dielektrikas, siekdamas užimti kuo didesnę tūrį, spaus antrąjį tam tikrą jėga F . Norėdami apskaičiuoti tą jėgą, tarkime, kad jai veikiant dielektriką skiriamasis paviršius paslinko mažą nuotolį dx . Šio proceso metu jėgos F atliktas darbas turi būti lygus kondensatoriaus energijos pokyčiui su minuso ženklu:

$$dA = F dx = -dW.$$

Pradinė kondensatoriaus energija

$$W_1 = u_{e1} V_1 + u_{e2} V_2 = \frac{D^2}{2\epsilon_1\epsilon_0} \cdot Sd_1 + \frac{D^2}{2\epsilon_2\epsilon_0} \cdot Sd_2.$$

Čia S – kondensatoriaus plokštelės plotas, o slinktis D , kaip matyti iš (1.131), lygi laisvųjų krūvių paviršiniam tankiui ir yra ta pati abiejuose dielektrikuose, nes q nekinta.

Energija paslinkus dielektriką skiriamajam paviršiui

$$W_2 = \frac{D^2}{2\epsilon_1\epsilon_0} \cdot S(d_1 + dx) + \frac{D^2}{2\epsilon_2\epsilon_0} \cdot S(d_2 - dx).$$

Energijos pokytis

$$dW = W_2 - W_1 = \frac{D^2}{2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \cdot S dx,$$

o jėga

$$F = -\frac{dW}{dx} = \frac{D^2}{2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) \cdot S.$$

Matome, kad ši jėga proporcinga dielektrikus skiriančiųjų paviršių plotui ir nukreipta į mažesnės dielektrinės skvarbos dielektriką. Ji gniuždo mažesnės dielektrinės skvarbos dielektriką ir tempia didesnės dielektrinės skvarbos dielektriką. Šiai jėgai veikiant dielektrikai deformuojasi, o ta deformacija vadinama **elektrostrikcija**. Tos jėgos sąlygojamas mechaninis įtempimas

$$\tau = \frac{F}{S} = \frac{D^2}{2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) = u_{e2} - u_{e1}. \quad (1.132)$$

Kaip matyti iš (1.132), **mechaninis įtempimas lygus elektrostatinės energijos tūrinių tankių besiliečiančiuose dielektrikuose skirtumui**.

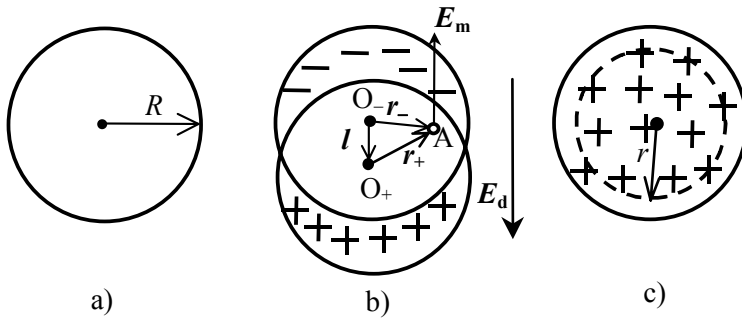
Tokias pat jėgos bei įtempimo išraiškas gautume, jei išnagrinėtume atvejį, kai dielektriką skiriamasis paviršius statmenas kondensatoriaus plokštelėms. Taigi kokios formos bebūtų dielektrikas, veikiant elektriniam laukui, jis bus visomis kryptimis gniuždomas, jei bus apsuptas didesnės dielektrinės skvarbos dielektriko ir tempiamas, jei apsuptas mažesnės skvarbos dielektriko.

Atkreipsime dėmesį, kad dielektriką veikianti paviršinė jėga proporcinga D^2 , o tuo pačiu ir elektrinio lauko stiprio kvadratumui, nes $D \sim E_d$. Taigi šios jėgos kryptis nepakinta pakitus elektrinio lauko kryptiai. Ta pati jos kryptis išlieka ir kintamame elektriniame lauke.

2 skyrius DIELEKTRIKAI

1. Vietinis (lokalinis) laukas ir jo skirtingumas nuo išorinio lauko

Išoriniame elektriniame lauke atsidūręs dielektrikas poliarizuojasi ir pats tampa elektrinio lauko šaltiniu. Todėl lauko stipris dielektrike E_d skiriasi nuo išorinio lauko stiprio E . Išskirkime dielektrike vieną jo molekulę ir panagrinėkime, kokiai jėgai veikiant ji įgyja dipolinį momentą. Nepolinio dielektriko molekulė, kai jos neveikia joks elektrinis laukas, yra neutrali, nors joje yra teigiamųjų (atomų branduoliai) ir neigiamųjų (aplink branduolius skriejantys elektronai) krūvių. Tų krūvių išsidėstymo pobūdis priklauso nuo molekulę sudarančių atomų išsidėstymo ir kiekvienai medžiagai gali būti skirtingas. Nenagrinėdami konkrečių molekulių, čia priimsime paprasčiausią molekulės modelį: tarsime, kad molekulė susideda iš dviejų vienodų rutulių, kuriuose teigiamieji ir neigiamieji krūviai yra vienodai pasiskirstę visame jų tūryje. Tų krūvių tūrinius tankius pažymėkime $+\rho$ ir $-\rho$. Nesant išorinio lauko, tų rutulių centrai sutampa, molekulė yra neutrali ir jokio lauko nesukuria (48 pav., a). Patekus mo-



48 pav.

lekulei į išorinį elektrinį lauką, jo veikiami tie molekulę sudarantys rutuliai paslenka (48 pav., b), molekulė įgyja dipolinį momentą ir pati kuria tam tikrą lauką E_m . Paslinkti krūvius verčianti jėga proporcinga lauko, kuris lygus lauko stiprio dielektrike E_d ir molekulės kuriamo lauko E_m , skirtumui. (Prisiminkime, kad skaičiuojant jėgą būtina atimti tų krūvių, kuriuos veikiančią jėgą skaičiuojame, kurią lauką). Tas laukas vadinamas **vietiniu (lokaliniu) lauku**. Vietinio lauko stiprį pažymėję E' , užrašysime:

$$\vec{E}' = \vec{E}_d - \vec{E}_m. \quad (2.1)$$

Apskaičiuosime molekulės kuriamą lauką E_m . Tam tikslui iš pradžių apskaičiuosime tolydžiai įelektrinto rutulio, kurio tūrinis krūvio tankis ρ , sukurtą lauką rutulio viduje, r atstumu nuo jo centro. Pagal Gauso dėsnį r spindulio sferiniam paviršiui (48 pav., c):

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \cdot \frac{1}{\epsilon_0},$$

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}.$$

Pritaikome tai poliarizuotai molekulėi. Pasirinkę joje bet kokią tašką A, apskaičiuojame tame taške teigiamai ir neigiamai įelektrintų rutulių kuriamų laukų stiprius, kurių vektorinė suma lygi E_m :

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho \vec{r}_+}{3\epsilon_0}, \quad \vec{E}_- = -\frac{\rho \vec{r}_-}{3\epsilon_0},$$

$$\vec{E}_m = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = -\frac{\rho \vec{l}}{3\epsilon_0}.$$

Čia l – atstumas tarp neigiamo ir teigiamo rutulių centrų O_- ir O_+ (dipolio petys). Šią E_m išraišką galime pertvarkyti taip, kad į ją įeitų poliarizuotumas P . Pagal (1.79) molekulės dipolinis momentas

$$\vec{p} = q\vec{l} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \vec{l},$$

o poliarizuotumas pagal (1.86)

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}}{V} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho \vec{l}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \rho \vec{l}.$$

Taigi molekulės kuriamas laukas

$$\vec{E}_m = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}, \quad (2.2)$$

o vietinis laukas

$$\vec{E}' = \vec{E}_d + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}. \quad (2.3)$$

Kaip matyti iš (2.2), vietinis laukas E' yra stipresnis už lauką dielektrike E_d .

2. Nepoliniai dielektrikai

Pirmuoju artutiniu galima manyti, kad molekulės įgyjamas dipolinis momentas proporcingas molekulę veikiančiam vietiniam laukui E' :

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}'. \quad (2.4)$$

Proporcingumo koeficientas α vadinamas **molekuliniu elektriniu jautriu**. Jo SI vieneta galime nustatyti iš (2.4) išreiškę α ir įrašę kitų dydžių vienetus:

$$\alpha = \frac{p}{\epsilon_0 E'} = \frac{1 \text{ C} \cdot \text{m}}{\frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 1 \frac{\text{V}}{\text{m}}} = 1 \text{ m}^3.$$

Dėl labai stiprių savųjų vidinių elektrinių laukų molekulėje molekulinis elektrinis jautris nelabai priklauso nuo temperatūros ir medžiagos tankio. Pagal (1.87) poliarizuotumas

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha\epsilon_0\vec{E}' = n\alpha\epsilon_0\left(\vec{E}_d + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}\right).$$

Įrašykime čia E_d , išreiškę jį iš (1.102):

$$\vec{P} = n\alpha\epsilon_0\left(\frac{\vec{P}}{\epsilon_0(\epsilon-1)} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}\right).$$

Pastaroji lygybė, ją pertvarkius, gali būti užrašyta taip:

$$\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2} = \frac{n\alpha}{3}. \quad (2.5)$$

(2.5) sąryšis vadinamas Klauzijaus ir Mosočio (*R. E. Clausius, O. F. Mosotti*) lygtimi. Ją patvirtina ir eksperimentai. Be to, ji rodo, kad nepolinių dielektrikų dielektrinė skvarba ϵ nepriklauso nuo temperatūros, jei neatsižvelgiama į gana silpną n ir α priklausomybę nuo temperatūros. Tą irgi patvirtina eksperimentai.

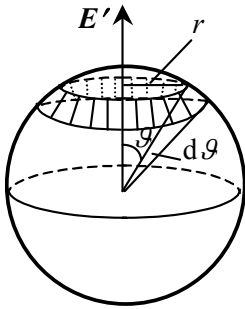
3. Poliniai dielektrikai ir jų elektrinio jautrio priklausomybė nuo temperatūros

Polinių dielektrikų molekulės turi dipolinius momentus ir nesant išorinio elektrinio lauko. Jei laukas yra, jis stengiasi orientuoti molekules taip, kad jų dipoliniai momentai būtų nukreipti lauko kryptimi, nes tada energija esti mažiausia (žr. (1.124)). Tam trukdo šiluminis judėjimas. Tarp šių dviejų procesų nusistovi tam tikra pusiausvyra.

Tegu molekulių skaičiaus tankis yra n . Tada pagal Bolemano pasiskirstymą skaičius t ūrio vienetė molekulių, sudarančių kampą ϑ su lauko kryptimi, ir esančių erdviniam kampe $d\Omega$, atitinkančiame kampą $d\vartheta$

(49 pav.)

$$dn = A_0 \exp\left(-\frac{W}{kT}\right) d\Omega = A_0 \exp\left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{E}'}{kT}\right) d\Omega = A_0 \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) d\Omega.$$



Pagal erdvinio kampo apibrėžtį

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} = \frac{2\pi r R d\vartheta}{R^2} = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta.$$

(49 pav. plotas dS užbrūkšniuotas).

$$dn = A \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Čia $A=2\pi A_0$ – naujas proporcingumo daugiklis.

Šių dipolių sukuriamas poliarizuotumas

$$dP = p \cos \vartheta dn = pA \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta.$$

49 pav.

Visą poliarizuotumą surasime integruodami:

$$P = pA \int_0^\pi \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta.$$

Konstantą A nustatysime iš sąlygos

$$n = A \int_0^\pi \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Iš čia

$$A = \frac{n}{\int_0^\pi \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) \sin \vartheta d\vartheta}.$$

Taigi

$$P = pn \frac{\int_0^\pi \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta}{\int_0^\pi \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) \sin \vartheta d\vartheta}.$$

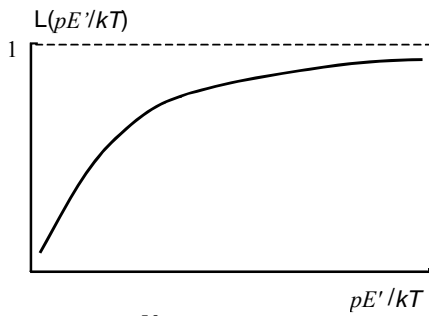
Šiuos du integralus apskaičiuosime atskirai.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) \sin \vartheta d\vartheta &= -\frac{kT}{pE'} \int_0^\pi \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) d\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) = \\ &= -\frac{kT}{pE'} \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) \Big|_0^\pi = \frac{kT}{pE'} \left(\exp\left(\frac{pE'}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{pE'}{kT}\right) \right). \\ \int_0^\pi \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta &= -\frac{kT}{pE'} \int_0^\pi \cos \vartheta d\left(\exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right)\right) = \\ &= -\frac{kT}{pE'} \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) \cos \vartheta \Big|_0^\pi + \frac{kT}{pE'} \int_0^\pi \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) d(\cos \vartheta) = \\ &= \frac{kT}{pE'} \exp\left(-\frac{pE'}{kT}\right) + \frac{kT}{pE'} \exp\left(\frac{pE'}{kT}\right) - \frac{kT}{pE'} \int_0^\pi \exp\left(\frac{pE' \cos \vartheta}{kT}\right) \sin \vartheta d\vartheta, \end{aligned}$$

o pastarąjį integralą tik ką apskaičiavome. Įrašę šias integralų išraiškas gauname, kad poliarizuotumas

$$P = pn \cdot \frac{\exp\left(\frac{pE'}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{pE'}{kT}\right) - \frac{kT}{pE'} \left(\exp\left(\frac{pE'}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{pE'}{kT}\right) \right)}{\exp\left(\frac{pE'}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{pE'}{kT}\right)} =$$

$$= pn \left[\operatorname{cth}\left(\frac{pE'}{kT}\right) - \frac{kT}{pE'} \right] = pn \cdot L\left(\frac{pE'}{kT}\right).$$



50 pav.

Čia

$$L\left(\frac{pE'}{kT}\right) = \operatorname{cth}\left(\frac{pE'}{kT}\right) - \frac{kT}{pE'} \quad (2.6)$$

vadinama Lanževano (*P. Langevin*) funkcija. Jos diagrama pateikiama 50 pav. Stiprėjant laukui, kai $pE' \gg kT$, ji artėja prie soties. Tada galima sakyti, kad visi dipoliniai momentai jau esti orientuoti lauko kryptimi. Tačiau molekulių dipoliniai momentai būna apie 10^{-30} C·m didumo, o $kT \approx 4 \cdot 10^{-21}$ J, tad norint pasiekti sotį reikia gana stiprių laukų, dažniausiai viršijančių dielektriko pramušimo įtampą. Todėl sprendžiant daugumą praktiškai svarbių uždavinių esti tenkinama sąlyga $pE' \ll kT$. Tada hiperbolinį kotangentą išskleidę eilute

$$\operatorname{cth}\left(\frac{pE'}{kT}\right) \approx \frac{kT}{pE'} + \frac{1}{3} \left(\frac{pE'}{kT} \right) + \frac{1}{45} \left(\frac{pE'}{kT} \right)^3 + \dots$$

ir paėmę tik du pirmuosius narius, nustatome, kad

$$L\left(\frac{pE'}{kT}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{pE'}{kT} \right)$$

ir poliarizuotumas

$$P = \frac{np^2 E'}{3kT}.$$

Pasinaudoję (2.3), (1.92), ir (1.103) formulėmis, šią išraišką galime pertvarkyti taip:

$$P = \frac{np^2}{3kT} \left(E_d + \frac{P}{3\varepsilon_0} \right) = \frac{np^2}{3kT} \left[\frac{P}{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)} + \frac{P}{3\varepsilon_0} \right].$$

Iš čia gauname, kad

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{np^2}{9\varepsilon_0 kT}. \quad (2.7)$$

Matome, kad polinių dielektrikų dielektrinė skvarba priklauso nuo temperatūros.

Nagrinėdami polinius dielektrikus, padarėme prielaidą, kad molekulių dipoliniai momentai laukui veikiant nekinta, o yra tik orientuojami. Tačiau akivaizdu, kad jie dar gali ir padidėti, panašiai, kaip nopoliniuose dielektrikuose. Tuo atveju vietoje (2.5) ir (2.7) užrašysime:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n}{3} \left(\alpha + \frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT} \right). \quad (2.8)$$

4. Pagrindinės žinios apie pjezoelektrikus ir feroelektrikus

Kai kurie kristalai poliarizuojasi ir be išorinio elektrinio lauko, juos mechanškai tempiant ar spaudžiant, t. y. deformuojant. Šis reiškinys vadinamas **tiesioginiu pjezoelektriniu reiškiniu** (trumpiau **tiesioginiu pjezoejektu**). Jų poliarizuotumas yra proporcingas mechaniniam įtempimui τ .

$$P = d\tau. \quad (2.9)$$

Proporcingumo koeficientas vadinamas **pjezoelektriniu moduliu (pjezomoduliu)**. Jo SI vienetas nustatomas iš (2.9) išreiškus d ir įrašius P ir τ SI vienetus:

$$\frac{1}{\frac{C}{\frac{m^2}{N}}} = 1 \frac{C}{N}.$$

Pjezoelektrinis reiškiny pasireiškia tik kristaluose, neturinčiose simetrijos centro, nes turi būti ypatinga kryptis, kuria ir nukreiptas vektorius \vec{P} . Iš 32 kristalografinių klasių yra 20 pjezoelektrinių klasių. Be to, pjezoelektrinis reiškiny pasireiškia tempiant ar spaudžiant kristalą tik tam tikromis kryptimis, vadinamomis polinėmis pjezoelektrinio ašimis.

Plačiai naudojamas pjezoelektrikas yra kvarcas. Jo kristalai priklauso heksagoninei singonijai ir turi taisyklingos šešiakampės prizmės formą. Pjezoelektrinis reiškiny pasireiškia tik deformuojant kvarco kristalą kryptimi, statmena tos prizmės ašiai (ji dažnai žymima raide c). Poliarizacijos vektorius irgi esti statmenas c ašiai.

Be tiesioginio pjezoelektrinio reiškinio esti ir **atvirkštinis pjezoelektrinis reiškinys**. Jis pasireiškia tuo, kad kristale sudarius elektrinį lauką E , kristalas mechaniškai deformuojasi, t. y. pakinta jo matmenys.

Santykinė deformacija $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ esti proporcinga to lauko stipriui E :

$$\boxed{\varepsilon = dE.} \quad (2.10)$$

Čia d – tas pats pjezomodulis, kaip ir tiesioginiame pjezoelektriniame reiškinyje.

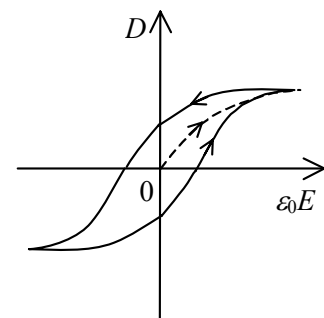
Atvirkštinio pjezoelektrinio reiškinio buvimas ir abiejų pjezomodulių lygybė išplaukia iš tiesioginio reiškinio buvimo ir energijos tvermės dėsnio. Deformuojant pjezoelektrinį kristalą jėgos F atliktas darbas virsta kristalo deformacijos energija ir susidariusio elektrinio lauko energija. Vadinas, pasireiškiant pjezoeftui, ta jėga turi atlikti didesnę darbą, nei ją atliktų tik deformuodama kristalą. Kadangi darbas nusakomas jėgos ir kelio sandauga, savaime aišku, kad esant tam pačiam keliui (tai pačiai deformacijai) reikalinga didesnė jėga, t. y. veikia prieš jėgą F priešinga kryptimi nukreipta atvirkštinio pjezoefto jėga F_a . Šiai jėgai veikiant kristalas ir deformuojas sudarius jame išorinį lauką.

Feroelektrikais vadinami poliniai dielektrikai, kurie tam tikrame temperatūros intervale poliarizuojasi savaime (t. y. nesant išorinio elektrinio lauko).

Feroelektrą gali paaiškinti tik kvantinė teorija. Todėl čia apsiribosime tik išvardydami feroelektrikams būdingas savybes.

1) Labai didelė dielektrinė skvarba ($\varepsilon \approx 10000$ ir daugiau), kuri priklauso nuo lauko stiprio, bet ta priklausomybė nėra vienareikšmė ir priklauso nuo to, kaip keitėsi lauko stipris, kol ta vertė buvo pasiekta. Be to, didelė dielektrinė skvarba esti tik polinės ašies kryptimi, o jai statmena kryptimi ε esti tokia pat, kaip ir paprastų dielektrikų.

2) Feroelektrikams būdinga **histerezės kilpa**. Kadangi ε priklauso nuo E , tai slinktis $D = \varepsilon_0 E$ priklauso nuo E nevienareikšmiškai ir netiesiškai. Šią priklausomybę vaizduojanti diagrama vadinama histerezės kilpa (51 pav.).



51 pav.

3) Savaiminė poliarizacija priklauso nuo temperatūros. Pakėlus temperatūrą virš tam tikros kiekvienam feroelektrikui būdingos vertės T_C , vadinamos **Kiuri (P. Curie) temperatūra**, feroelektrinės savybės išnyksta, ir jis virsta paprastu poliniu dielektriku. Kiuri temperatūroje įvyksta pirmosios arba antrosios rūšies fazinis virsmas.

4) Feroelektriniai domenai. Eksperimentais patvirtinta, kad feroelektrikas sudarytas iš mažų (tačiau turinčių milžinišką molekulių skaičių) sričių, kuriose visų molekulių elektriniai dipoliniai momentai orientuoti viena ir ta pačia kryptimi. Tokios sritys vadinamos **feroelektriniais domenais**. Sudarius išorinį elektrinį lauką, jis orientuoja ne molekulių, bet domenų dipolinius momentus. Domenų matmenys tokio dydžio, kad juos galima matyti pro optinį mikroskopą, naudojant poliarizuotą šviesą. Domenų susidarymui paaiškinti reikalinga kvantinė teorija.

3 skyrius NUOLATINĖ ELEKTROS SROVĖ

1. Elektros srovės stipris ir srovės tankis

Elektros srovė yra bet koks kryptingas elektronų judėjimas. Laisvųjų elektronų metaluose ar teigiamųjų bei neigiamųjų jonų elektrolituose judėjimas, įelektrinto bet kokio kūno slenkamasis ar sukamasis judėjimas yra elektros srovės pavyzdžiai. Tačiau dažniausiai kalbėdami apie elektros srovę turime galvoje kryptingą elektringųjų dalelių judėjimą medžiagoje ar vakuume. Šios elektringosios dalelės dar vadinamos **krūvininkais**.

Tekant elektros srovei atsiranda naujų reiškinių, kurie nebūdingi nejudantiems krūviams. Iš jų paminėtini:

- 1) **Šiluminis veikimas.** Laidininkas, kuriuo teka elektros srovė, išsyla.
- 2) **Cheminis veikimas.** Tekant elektros srovei gali kisti medžiagos cheminė sudėtis. Šis reiškinys būdingas tik medžiagoms, kuriose krūvininkai yra jonai, pavyzdžiui, elektrolitams – vandeniniams druskų, rūgščių ar šarmų tirpalams.
- 3) **Magnetinis veikimas.** Elektros srovė kuria magnetinį lauką. Pavyzdžiui, arti laido padėtos magnetinės rodyklės kryptis pakinta, kai laidu ima tekėti elektros srovė.

Magnetinis srovės veikimas, skirtingai nuo šiluminio ir cheminio, yra bendriausias. Jis pasireiškia visais elektros srovės atvejais, netgi judant masyviems įelektrintiems kūnams, kada šiluminio ir cheminio veikimo nesti. Cheminio veikimo nesti tekant srovei medžiagomis, kuriuose krūvininkai yra laisvieji elektronai, pavyzdžiui, metalais. Šiluma neišsiskiria tekant srovei superlaidininkais.

Pagrindinė kiekybinė elektros srovės charakteristika yra **srovės stipris**. **Jis lygus krūviui, pratekančiam laidininko skerspjūviu per laiko vienetą.**

Jei per laiko intervalą dt prateka elektros krūvis dq , tai srovės stipris

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (3.1)$$

Krūvis, pratekantis per baigtinį laiko intervalą t , pagal (3.1) yra

$$q = \int_0^t I dt'. \quad (3.2)$$

Jeigu srovės kryptis laikui einant nekinta, tokia srovė vadinama **nuolatine srove**, jei nesikeičia ir jos stipris – **pastovioji nuolatine srove**. Pastoviosios nuolatinės srovės atveju $I = \text{const}$, todėl ją galima rašyti prieš integralą. Tuo atveju (3.2) užrašysime taip:

$$q = It, \quad (3.3)$$

o (3.1) –

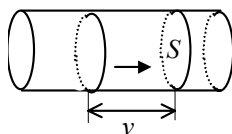
$$I = \frac{q}{t}. \quad (3.4)$$

Srovės stiprio SI vienetas yra **amperas** (1 A). Tai pagrindinis vienetas. Jis nusakomas remiantis srovių magnetine sąveika.

Srovės stipris I yra algebrinis skaliarinis dydis. Jis gali būti teigiamas arba neigiamas. **Sutarta teigiamąją elektros srovės kryptį laikyti tą kryptį, kuria juda teigiamieji krūviai.**

Nustatysime sąsają tarp srovės stiprio I ir krūvininkų kryptingo judėjimo greičio v bei jų skaičiaus tankio n . Tarkime, kad skerspjūvio, pro kurį teka srovė, plotas S , o kiekvieno krūvininko krūvis q_0 (52 pav.). Pro šį plotą per laiko vienetą pralėks tie krūvininkai, kurie nutolę nuo jo atstumu, ne didesniu už vidutinį kryptingo judėjimo greitį v . Tų krūvininkų skaičius lygus nvS , o jų krūvis $q = q_0 nvS$. Taigi

$$I = q_0 nvS. \quad (3.5)$$



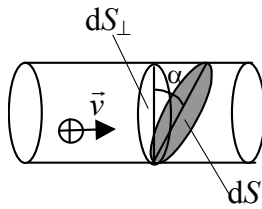
52 pav.

Kitas svarbus srovę apibūdinantis dydis yra **srovės tankis** j . **Jis lygus krūviui, pratekančiam per laiko vienetą pro vienetinį plotą, statmeną krūvių judėjimo kryptiai:**

$$j = \frac{dq}{dt \cdot dS_{\perp}}. \quad (3.6)$$

Remdamiesi (3.6) galime užrašyti:

$$dI = j \cdot dS_{\perp}. \quad (3.7)$$



53 pav.

Jei plotelis dS nestatmenas krūvininkų judėjimo kryptčiai, tuomet $dS_{\perp} = dS \cos \alpha$ (53 pav.), ir pagal (3.7)

$$dI = j dS \cos \alpha. \quad (3.8)$$

(3.8) lygybę galima užrašyti kaip vektorių \vec{j} ir $d\vec{S}$ skaliarinę sandaugą:

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (3.9)$$

Srovės, tekančios pro bet kokio baigtinio dydžio plotą S , stipris apskaičiuojamas integruojant (3.9):

$$I = \int_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (3.10)$$

Jeigu srovės tankis visame skerspjūvio plote vienodas, (3.10) lygybė tampa

$$I = \vec{j} \cdot \vec{S}, \quad (3.11)$$

o jei dar ir \vec{j} kryptis sutampa su ploto S normalės kryptimi –

$$I = jS. \quad (3.12)$$

Srovės tankio SI vienetas yra 1 A/m^2 .

Atsižvelgę į (3.5) lygybę, srovės tankio vektorių \vec{j} galime taip susieti su vidutiniu kryptingo krūvininkų judėjimo greičiu \vec{v} :

$$\boxed{\vec{j} = q_0 n \vec{v}}. \quad (3.13)$$

Atkreipsime dėmesį, kad laisvieji elektronai, panašiai, kaip dujų molekulės, visą laiką netvarkingai (chaotiškai) juda. Tai šiluminis judėjimas. Elektronų šiluminio judėjimo greitis kambario temperatūroje yra gana didelis ir siekia apie 10^5 m/s , o kryptingo judėjimo greitis paprastai esti $\approx 1 \text{ mm/s}$. Kryptingas laisvųjų metalo elektronų judėjimas kartais vadinamas **dreifu**, o greitis v – elektronų **dreifo greičiu**.

Bendru atveju elektros srovę gali sąlygoti ne vien tik elektronų, bet ir kitokių krūvininkų (pvz., jonų elektrolituose ar dujose, skylių puslaidininkuose) kryptingas judėjimas. Judant kelių rūšių krūvininkams jų įnašai į srovę sumuojasi. Tuo atveju (3.13) virsta

$$\boxed{\vec{j} = \sum_i q_i n_i \vec{v}_i}. \quad (3.14)$$

2. Elektrinis laukas tekant nuolatinei srovei

Tekant elektros srovei krūvininkai juda veikiami elektrinio lauko. Taigi šiuo atveju, skirtingai negu elektrostatikoje, laidininke turi būti elektrinis laukas

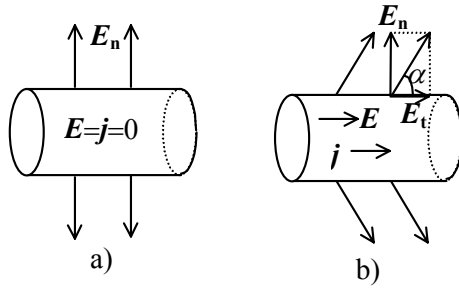
$$(\vec{E} \neq 0). \quad (3.15)$$

Kadangi elektrinio lauko stipris ir potencialas susiję sąryšiu (1.48), tai iš (1.48) ir (3.15) išplaukia, kad tekant srovei įvairių laidininko taškų potencialai turi būti skirtingi.

Teigiamieji krūvininkai juda lauko kryptimi, o neigiamieji – prieš lauko kryptį. Taigi srovės tankis turi būti nukreiptas lauko kryptimi: $\vec{j} \parallel \vec{E}$. Laidininko paviršiuje \vec{j} ir \vec{E} turi sutapti su paviršiaus liestinės kryptimi, nes srovės tankio vektorius \vec{j} nekerta šoninio paviršiaus. Žinome, kad lauko stiprio tangentinė dedamoji dvi aplinkas skiriančią paviršių praeina nepakisdama (žr. (1.107)). Už laidininko, prie pat jo paviršiaus, ji turi būti tokia, kaip ir laidininke, tačiau ji ten sumuosius su normaline dedamoja, kuri elektrostatikoje ir tebuvo. Todėl šalia laidininko prie pat jo paviršiaus elektrinis laukas jau nebus statmenas laidininko paviršiui, o sudarys su juo tam tikrą kampą

$$\alpha = \arctg \frac{E_n}{E_t}.$$

Elektrinio lauko linijos esant cilindriniam laidininkui elektrostatikos atveju pavaizduotos 54 pav., a), o tekant srovei – 54 pav., b).



54 pav.

Tekant srovei, kaip ir elektrostatikos atveju, lauką laidininke bei šalia jo sukuria to laidininko paviršiuje esantys krūviai, tik tų krūvių pasiskirstymas esti kitoks, tad pakinta ir jų kuriamas laukas.

3. Tolydumo lygtis ir srovės pastovumo sąlyga

Laidininke, kuriuo teka elektros srovė, mintyse paimkime bet koki uždaraį paviršių S . Juo apribotą turį pažymėkime V , o tame tūryje esantį krūvį q . Kadangi uždariesiems paviršiams sutarta normalės, taigi ir $d\vec{S}$, teigiamąją kryptimi laikyti išorinę kryptį, tai sutinkamai su (3.10)

$$I = \oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (3.16)$$

yra per laiko vienetą iš to paviršiaus ištekančias teigiamasias krūvis. Taigi (3.16) išreiškia teigiamojo krūvio tūryje V sumažėjimą per laiko vienetą:

$$\oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}. \quad (3.17)$$

(3.17) vadinama **tolydumo lygtimi**. Iš esmės ji išreiškia krūvio tvermės dėsnį.

(3.17) yra srovės tolydumo lygties integralinė išraiška. Norint gauti diferencialinę išraišką, reikia tarti, kad paviršius S bei juo apribotas tūris V darosi be galo maži. Tūrinį krūvio tankį pažymėję ρ , krūvį q išreikškime pasinaudodami (1.17) ir įrašykime į (3.17):

$$\oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_{(V)} \rho dV = -\int_{(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (3.18)$$

Pritaikę vektoriui \vec{j} matematinę Gauso teoremą panašiai, kaip tą darėme vektoriui \vec{E} (žr. 1.26)), gauname:

$$\oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_{(V)} \text{div} \vec{j} dV. \quad (3.19)$$

Iš (3.18) ir (3.19) išplaukia, kad

$$\text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.20)$$

(3.20) lygybė vadinama srovės **tolydumo lygties diferencialine išraiška**.

Tolydumo lygtis, kuri išreiškiama (3.17) ar (3.18) lygybėmis, galioja visada tekant bet kokioms srovėms, nes ji išreiškia krūvio tvermės dėsnį.

Tekant pastoviajai nuolatinei srovei krūvių pasiskirstymas erdvėje neturi kisti laikui einant. Iš tikrųjų, jei krūvis q bei jo tūrinis tankis ρ kistų laikui einant, tai kistų ir jų kuriamas lauko stipris E , nes šiuos dydžius sieja Gauso dėsnis (žr. (1.23) ir (1.28)). O kintant E , kistų ir srovės stipris I bei jos tankis j , taigi srovė būtų kintamoji, o ne pastovioji nuolatinė. Tuo remiantis srovės pastovumo sąlygą remiantis (3.20) galima suformuluoti taip:

$$\text{div} \vec{j} = 0. \quad (3.21)$$

(3.21) lygybė rodo, kad pastoviosios nuolatinės srovės tankio linijos yra uždaros ir neturi šaltinių.

4. Omo dėsnis ir jo diferencialinė išraiška

Nagrinėsime dažniausiai praktikoje pasitaikantį atvejį, kai elektros srovė teka medžiaga, kurioje yra laisvųjų krūvininkų. Tokią medžiagą vadinsime laidininku, nors atskirais atvejais tai gali būti puslaidininkis ar elektrolitas. Tačiau laisvųjų krūvininkų buvimo dar nepakanka srovei atsirasti. Jų kryptingam judėjimui sukelti ir palaikyti reikia jėgos, veikiančios tam tikra kryptimi. Kai ši jėga nustoja veikti, kryptingas krūvininkų judėjimas greitai nutrūksta dėl varžos, sąlygotos laisvųjų krūvininkų sąveikos su kitomis medžiagoje esančiomis dalelėmis (metalų kristalinės gardelės jonais, priemaišiniais atomais, elektrolitų neutraliosiomis molekulėmis ir pan.). Kryptingą laisvųjų krūvininkų judėjimą sukelianti ir palaikanti jėga dažniausiai esti elektrinės prigimtys. Žinome, kad elektriniame \vec{E} stiprio lauke esantį krūvį q_0 veikia jėga $\vec{F} = q_0 \vec{E}$. Taip pat žinome, kad elektrostatikos atveju laidininke lauko nesti ($\vec{E} = 0$), o įvairių laidininko taškų potencialai esti vienodi ($\varphi = \text{const}$). Vadinas, kad laidininku tekėtų elektros srovė, jame turi būti elektrinis laukas ($\vec{E} \neq 0$) ir potencialų skirtumas $\Delta\varphi$.

1826 m. Omas (*G. Ohm*) nustatė, kad srovės stipris laidininke I tiesiai proporcingas potencialų skirtumui (įtampai) tarp laidininko galų U : ($I \sim U$). Proporcingumo koeficientą pažymėję G , užrašysime:

$$I = GU. \quad (3.22)$$

Dydis G vadinamas **elektriniu laidumu**. Iš (3.22) išreiškę G , turėsime: $G = I/U$. Elektrinio laidumo SI vienetas vadinamas **simensu** (S). $1 \text{ S} = 1 \text{ A/V}$.

Dažniau naudojamas atvirkščias laidumui dydis R , vadinamas **elektrine varža**: $R = 1/G$. Tuomet Omo dėsnis grandinės daliai užrašomas taip:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (3.23)$$

Iš (3.23) išreiškę R , turėsime:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (3.24)$$

Varžos SI vienetas vadinamas **omu** (Ω). $1 \Omega = 1 \text{ V/1 A} = 1 \text{ S}^{-1}$.

Bandymais nustatyta, kad varža priklauso nuo laidininko medžiagos ir jo geometrinių matmenų. Laidininko, kurio ilgis l ir pastovus skerspjūvio plotas S , varža

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (3.25)$$

Čia dydis ρ vadinamas medžiagos **savitąja varža**. Savitoji varža priklauso nuo laidininko medžiagos ir temperatūros. Iš (3.25) išreiškę ρ , turėsime: $\rho = \frac{RS}{l}$ ir nustatysime, kad savitosios varžos SI vienetas yra $1 \Omega \cdot 1 \text{ m}^2 / 1 \text{ m} = 1 \Omega \cdot \text{m}$. Taip pat iš (3.25) aišku, kad savitoji varža lygi varžai laidininko, kurio ilgis $l = 1 \text{ m}$ ir skerspjūvio plotas $S = 1 \text{ m}^2$.

Atvirkščias savitajai varžai dydis σ vadinamas **savituoju laidumu**:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}.$$

Jo SI vienetas yra $1 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} = 1 \text{ S/m}$.

Priminsime, kad nuosekliai sujungtų kelių laidininkų varža lygi atskirų laidininkų varžų sumai:

$$R = \sum_i R_i, \quad (3.26)$$

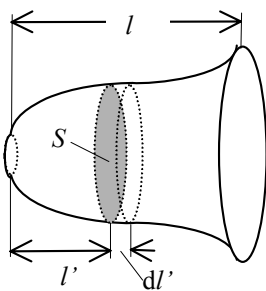
o lygiagrečiai sujungtų laidininkų laidumas lygus atskirų laidininkų laidumų sumai:

$$G = \sum_i G_i, \quad (3.27)$$

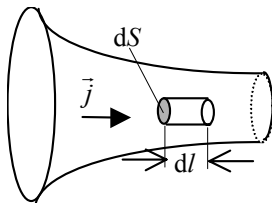
arba

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}. \quad (3.28)$$

Jei laidininko skerspjūvio plotas arba savitoji varža nėra pastovūs (55 pav.), varžą galima apskaičiuoti integruojant:



55 pav.



56 pav.

$$R = \int_0^l \rho \frac{dl'}{S}. \quad (3.29)$$

Kad galėtume apskaičiuoti (3.29) integralą, turime žinoti, koku dėsniu kinta ρ ir S išilgai laidininko.

Nustatysime sąsają tarp srovės tankio j ir elektrinio lauko stiprio E tame pačiame laidininko taške. Tam bet kokios formos laidininke, kuriuo teka srovė, mintyse išskirkime srovės tankio vektoriaus \vec{j} kryptimi be galo mažą laidininko elementą, kurio ilgis dl ir skerspjūvio plotas dS (56 pav.). Šiuo elementu tekančios srovės stipris $dI = jdS$, įtampa tarp jo galų $dU = Edl$, o jo varža

$$R = \rho \frac{dl}{dS}. \text{ Įrašę šias išraiškas į Omo dėsnio (3.23) formulę, turėsime:}$$

$$jdS = \frac{Edl}{\rho \frac{dl}{dS}},$$

arba suprastinę

$$j = \frac{E}{\rho} = \sigma E.$$

Kadangi j ir E yra vektoriniai dydžiai, o ρ ir σ - skaliariai, be to, $\vec{j} \parallel \vec{E}$, pastarąją formulę galima užrašyti ir vektoriškai:

$$\boxed{\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \sigma \vec{E}.} \quad (3.30)$$

(3.30) išreiškia **Omo dėsnio diferencialinę** (vietinę, lokalią) **formą**, nes susieja dydžius tame pačiame laidininko taške.

5. Krūvininkų judris ir relaksacijos trukmė

Tekant srovei krūvininkai dreifuoja veikiami elektrinio lauko, todėl jų dreifo greitis proporcingas lauko stipriui: ($v \propto E$). Proporcingumo koeficientą pažymėję μ , užrašysime:

$$\vec{v} = \mu \vec{E}. \quad (3.31)$$

Proporcingumo koeficientas μ vadinamas krūvininkų judriu. Išreiškę jį iš (3.31), gauname:

$$\boxed{\mu = \frac{\vec{v}}{\vec{E}}}. \quad (3.32)$$

Kaip matome iš (3.32), **judris yra lygus vienetinio stiprio elektriniame lauke įgytam krūvininkų dreifo greičiui**.

Judrio SI vienetas nustatomas iš (3.32):

$$\frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \frac{\text{V}}{\text{m}}} = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}.$$

Atsiradus elektriniam laukui, dreifo greitį v krūvininkas įgyja per tam tikrą vidutinį laiką τ . Taigi vidutinis krūvininko pagreitis

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}}{\tau}. \quad (3.33)$$

Pagal antrąjį Niutono dėsnį krūvininko pagreitį galime išreikšti ir šitaip:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q_0 \vec{E}}{m}. \quad (3.34)$$

Čia F – krūvininką veikianti jėga elektriniame lauke, m – krūvininko masė. Iš (3.33), (3.34) ir (3.32) lygybių nustatome, kad dreifo greitis

$$\vec{v} = \frac{q_0 \tau}{m} \vec{E}, \quad (3.35)$$

o judris

$$\mu = \frac{q_0 \tau}{m}. \quad (3.36)$$

Nustojus veikti elektriniam laukui, krūvininkai praranda dreifo greitį v per laiką τ sąveikaudami su laidininko atomais. Šis laikas τ vadinamas **krūvininkų relaksacijos trukme**.

Pasinaudodami (3.30), (3.13) ir (3.32) lygybėmis, medžiagų savitąjį laidumą galime išreikšti ir taip:

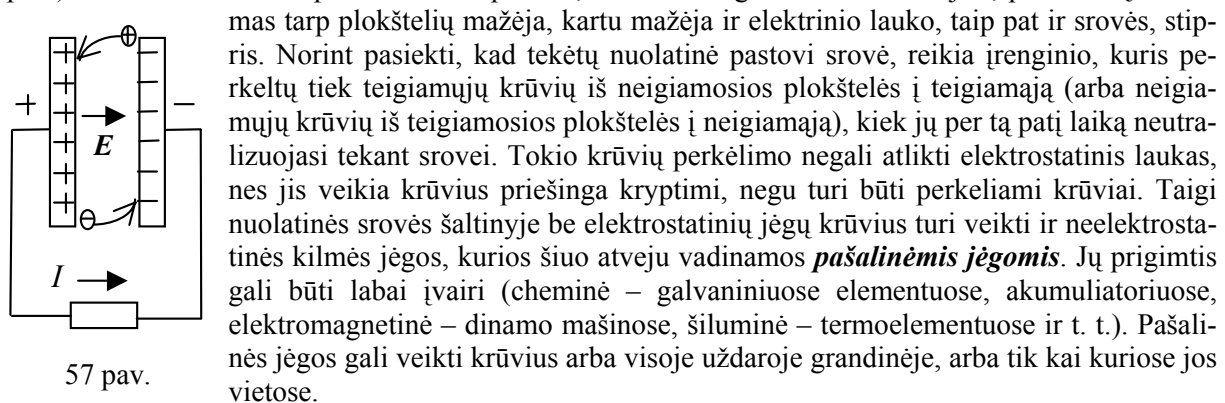
$$\sigma = q_0 n \mu, \quad (3.37)$$

o esant kelių rūšių krūvininkams vietoje (3.13) pasinaudoję (3.14) gausime:

$$\sigma = \sum_i |q_i n_i \mu_i|. \quad (3.38)$$

6. Pašalinės elektrovaros (ev).

Jeigu laidininku sujungsime įelektrinto kondensatoriaus plokšteles, ims tekėti elektros srovė (57 pav.). Bet ši srovė bus nepastovi ir trumpalaikė, nes krūviai greitai neutralizuojasi, potencialų skirtumas tarp plokštelių mažėja, kartu mažėja ir elektrinio lauko, taip pat ir srovės, stipris.



57 pav.

Norint pasiekti, kad tekėtų nuolatinė pastovi srovė, reikia įrenginio, kuris perkeltų tiek teigiamųjų krūvių iš neigiamosios plokštelės į teigiamąją (arba neigiamųjų krūvių iš teigiamosios plokštelės į neigiamąją), kiek jų per tą patį laiką neutralizuojasi tekant srovei. Tokio krūvių perkėlimo negali atlikti elektrostatinis laukas, nes jis veikia krūvius priešinga kryptimi, negu turi būti perkeltami krūviai. Taigi nuolatinės srovės šaltinyje be elektrostatinių jėgų krūvius turi veikti ir neelektrostatinės kilmės jėgos, kurios šiuo atveju vadinamos **pašalinėmis jėgomis**. Jų prigimtis gali būti labai įvairi (cheminė – galvaniniuose elementuose, akumuliatoriuose, elektromagnetinė – dinamo mašinose, šiluminė – termoelementuose ir t. t.). Pašalinės jėgos gali veikti krūvius arba visoje uždaroje grandinėje, arba tik kai kuriose jos vietose.

Svarbiausias fizikinis dydis, apibūdinantis pašalines jėgas, vadinamas **elektrovara** (sutrumpintai žymimas EV arba ev). **Elektrovara yra fizikinis dydis, lygus pašalinių jėgų darbo, atliekamo perkeliant teigiamąjį krūvį uždara grandine, ir to krūvio santykiui:**

$$\mathcal{E} = \frac{A_p}{q}. \quad (3.39)$$

Elektrovaros SI vienetas yra 1 J/1 C=1 V. Jis yra toks pat, kaip ir potencialo ar potencialų skirtumo (įtampos) vienetas.

Pašalinę jėgą pažymėkime F_p . Tada uždaroje grandinėje atliktas pašalinės jėgos darbas

$$A_p = \oint_{(L)} \vec{F}_p \cdot d\vec{l}. \quad (3.40)$$

Įrašę (3.40) į (3.39), gauname:

$$\mathcal{E} = \oint_{(L)} \frac{\vec{F}_p}{q} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} \vec{E}_p \cdot d\vec{l}. \quad (3.41)$$

Čia

$$\vec{E}_p = \frac{\vec{F}_p}{q} \quad (3.42)$$

yra pašalinių jėgų lauko stipris.

Bendru atveju, jei krūvininkus veikia elektrostatinė ir pašalinės jėgos, Omo dėsnio diferencialinė forma (3.30) užrašoma taip:

$$\vec{j} = \frac{\vec{E} + \vec{E}_p}{\rho}. \quad (3.43)$$

(3.43) abi puses skaliariškai dauginame iš $\rho d\vec{l}$ ir integruokime uždaru kontūru L :

$$\oint_{(L)} \rho \vec{j} \cdot d\vec{l} = \oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_{(L)} \vec{E}_p \cdot d\vec{l}. \quad (3.44)$$

Skerspjūvio plotą pažymėję S , (3.44) lygybėje vietoj j įrašykime I/S ir I iškelkime prieš integralo ženklą, nes visame integravimo kelyje I vertė ta pati. Be to, (3.44) dešinės pusės pirmasis integralas lygus nuliui, nes elektrostatinis laukas yra potencialinis, o antrasis integralas sutinkamai su (3.41) lygus \mathcal{E} . Taigi (3.44) galime užrašyti taip:

$$I \oint_{(L)} \frac{\rho dl}{S} = \mathcal{E}. \quad (3.45)$$

(3.45) lygybėje integralas reiškia uždaros grandinės suminę varžą (žr.(3.29)). Galime tarti, jog uždara grandinė susideda iš dviejų dalių: išorinės ir vidinės. Išorinę grandinę sudaro prie srovės šaltinio gnybtų prijungtų laidininkų varža, o vidinę – tarp tų gnybtų šaltinio viduje esančių medžiagų varža. Išorinės grandinės varžą pažymėję R , o vidinės grandinės r , (3.45) lygybę užrašysime taip:

$$I(R + r) = \mathcal{E}, \quad (3.46)$$

arba

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (3.47)$$

(3.46) arba (3.47) išreiškia Omo dėsnį uždarajai elektros grandinei. Atsižvelgę į Omo dėsnį grandinės daliai (žr. (3.23)), (3.46) galime užrašyti taip:

$$U + Ir = \mathcal{E}. \quad (3.48)$$

Čia U yra šaltinio gnybtų įtampa, o Ir dar vadinama įtampos kritimu vidinėje varžoje. Iš (3.48) matyti, jog

$$U = \mathcal{E} - Ir, \quad (3.49)$$

t. y. kai srovės šaltinis tiekia srovę išorinei grandinei, jo gnybtų įtampa esti mažesnė už jo ev dydžiu Ir . Tačiau jei $I=0$, tada $U=\mathcal{E}$. Todėl šaltinio elektrovartą galima ir taip nusakyti: **elektrovartą lygi šaltinio gnybtų įtampai, kai šaltiniu srovė neteka**. Tuo paprastai naudojamos norint praktiškai išmatuoti srovės šaltinio ev.

7. Srovės darbas ir galia. Džaulio dėsnis ir jo diferencialinė išraiška

Panagrinėkime grandinės dalį. Tarkime, kad tos dalies įtampa U , o ta grandine tekančios nuolatinės srovės stipris I . Jei per laiką t prateka krūvis q , elektrinis laukas atlieka darbą

$$A = qU.$$

Kadangi tekant nuolatinei pastoviai srovei $q = It$, tai srovės atliktas darbas

$$A = UI t. \quad (3.50)$$

Elektros srovės darbas grandinės dalyje lygus įtampos, srovės stiprio ir laiko, per kurį atliekamas darbas, sandaugai.

Pagal energijos tvermės dėsnį šis darbas turi būti lygus nagrinėjamos grandinės dalies energijos pokyčiui. Jeigu grandinės dalyje judančių laidininkų nėra ir nevyksta jokie cheminiai kitimai, tai padidėja jos vidinė energija, t. y. padidėja temperatūra. Šiuo atveju visas srovės darbas virsta šiluma: $Q=A$. Temperatūros didėjimo mechanizmas toks: krūvininkai (pavyzdžiui, metalo laisvieji elektronai), veikiami elektrinio lauko jėgos, įgyja papildomą kinetinę energiją, kurią paskui atiduoda gardelei susidurdami su jos mazguose esančiais jonais.

Pasinaudodami Omo dėsniu grandinės daliai (3.23), šilumos kiekį, išsiskyrusį per laiką t , galime išreikšti ir taip:

$$Q = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t. \quad (3.51)$$

(3.51) formulė išreiškia Džaulio (*J. P. Joule*) dėsnį, kurį žodžiais galima taip suformuluoti: **šilumos kiekis, išsiskiriantis laidininke, kai juo teka srovė, lygus srovės stiprio kvadrato, laidininko varžos ir laiko sandaugai.**

Pagal galios P apibrėžtį $P=A/t$. Taigi elektros srovės galia

$$P = UI. \quad (3.52)$$

Tuo atveju, kai visas srovės darbas virsta šiluma, galią galima išreikšti ir taip:

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (3.53)$$

Atkreipsime dėmesį, kad (3.50) ir (3.52) formules galima taikyti ir tuo atveju, kai visa elektros energija ar jos dalis virsta ne tik šiluma, bet ir mechanine, chemine ar kitokios formos energija, o (3.51) ir (3.53) – tik kai visa energija virsta šiluma.

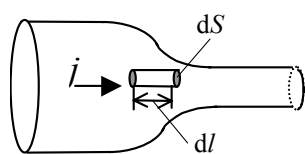
Panagrinėkime energijos virsmus uždarojoje grandinėje, turinčioje pašalinę elektrovarą \mathcal{E} . (3.48) formulės, išreiškiančios Omo dėsnį uždarajai grandinei, abi puses padauginame iš srovės stiprio I :

$$UI + I^2 r = \mathcal{E}I. \quad (3.54)$$

Čia $\mathcal{E}I$ yra pašalinių jėgų išvystoma galia. Matome, kad ji lygi išorinės grandinės (kuri nebūtinai visa virsta šiluma) ir vidinės grandinės šiluminių galių sumai. Taigi grandine tekant srovei pašalinių jėgų atliekamas darbas virsta kitų rūšių energija, o elektrinis laukas tik padeda tą energiją perkelti iš šaltinio į kitas grandinės dalis.

Pagal (3.52) ar (3.53) galima apskaičiuoti tik visame laidininke išsiskiriančią šiluminę galią. Jei laidininkas nevienalytis (pavyzdžiui, nevienodas jo skerspjūvio plotas ar nevienoda savitoji varža), tai išsiskirianti šiluma esti nevienodai pasiskirsčiusi jo tūryje.

Tačiau galima rasti būdą tam tikrame laidininko taške išsiskiriančiai šiluminei galiai apskaičiuoti.



58 pav.

Bet kokios formos laidininke mintyse išskirkime be galo mažą jo elementą, kurio ilgis dl nukreiptas lygiagrečiai su srovės tankio vektoriumi \vec{j} , o skerspjūvio plotas dS – statmenai jam (58 pav.). Tokio elemento varža

$$R = \rho \frac{dl}{dS},$$

o juo tekančios srovės stipris

$$dI = j dS.$$

Jame išsiskirianti šiluminė galia pagal (3.53)

$$dP = (dI)^2 R = j^2 (dS)^2 \rho \frac{dl}{dS} = \rho j^2 dV = \sigma E^2 dV. \quad (3.55)$$

Čia $dV = dl \cdot dS$ – laidininko elemento tūris, o pagal (3.20) $j = \sigma E$.

Fizikinis dydis

$$w = \frac{dP}{dV} = \rho j^2 = \sigma E^2 \quad (3.56)$$

vadinamas **elektros srovės šiluminės galios tūriniu tankiu**. Tai tūrio vienetė išsiskirianti šiluminė galia. Šiluminės galios tūrinio tankio w SI vienetas yra 1 W/m^3 . (3.56) formulė vadinama **Džaulio dėsnio diferencialine** (vietinė, lokalia) **forma**. Pagal (3.56) apskaičiuojama šiluminė galia, išsiskirianti tam tikrame laidininko taške. Visame laidininke išsiskirianti šiluminė galia gali būti apskaičiuota integruojant:

$$P = \int_{(V)} w dV = \int_{(V)} \rho j^2 dV. \quad (3.57)$$

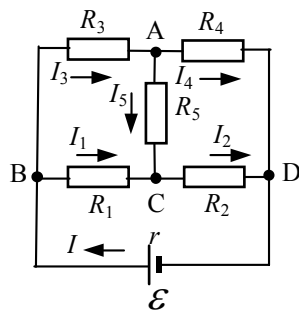
8. Tiesinės grandinės. Kirchhofo taisyklės

Tiesine vadinama tokia grandinė, kurioje srovės stipris tiesiškai priklauso nuo įtampos. Ta priklausomybė aprašoma (3.22) arba (3.23) išraiškomis. Taigi grandinė yra tiesinė, jei jos laidumas G arba varža R yra pastovūs, nepriklausantys nuo įtampos dydžiai. O jei varža priklauso nuo įtampos, tokia grandinė yra netiesinė.

Visiškai tiesinių grandinių nėra, nes varža priklauso nuo temperatūros, o pastaroji turi kisti keičiantis įtampai, nes išsiskiria Džaulio šiluma. Tačiau esant mažoms įtampoms laidininkai praktiškai neišyla, todėl jo varža išlieka pastovi ir grandinė gali būti laikoma tiesine.

Ne visais atvejais sudėtingose grandinėse tekančių srovių stiprius galima apskaičiuoti remiantis vien tik Omo dėsniu ir pasinaudojant nuoseklaus, lygiagretaus bei mišraus varžų jungimo formulėmis

(žr. (3.26), (3.28)). Praktikoje dažnai pasitaiko šakotinės grandinės, kuriose, be to, gali būti keletas įvairiai sujungtų srovės šaltinių. Šakotinės grandinės pavyzdys parodytas 59 pav.



59 pav.

Grandinės taškas, į kurį sueina trys ar daugiau laidų, vadinamas **mazgu**. 59 pav. schemoje yra 4 mazgai. Jie pažymėti A, B, C, D. Grandinės dalis, jungianti du gretimus mazgus, vadinama **šaka**. Minėtoje schemoje yra 6 šakos: AB, AC, AD, BC, CD ir B \mathcal{E} D. Bet kuri uždara grandinė vadinama **kontūru**, pvz., BACB, BCD \mathcal{E} B, BACD \mathcal{E} B ir t. t. Kontūras, kurio viduje nėra šakų, vadinamas **elementariuoju kontūru**. 59 pav. schemoje yra 3 elementarieji kontūrai: BACB, ADCA ir BCD \mathcal{E} B. Kiti kontūrai, pvz., BADCB, BACD \mathcal{E} B, BAD \mathcal{E} B nėra elementarieji.

Tarkime, kad grandinės šakomis tekančių srovių stipriai yra $I_1, I_2, I_3, \dots, I_6$, o jų kryptys tokios, kaip pavaizduota rodyklėmis.

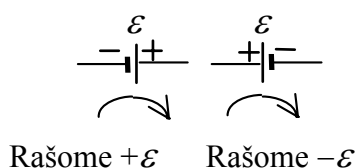
Pirmoji Kirchhofo (*G. Kirchhoff*) taisyklė teigia, kad **į mazgą sutekančių srovių stiprių algebrinė suma lygi nuliui**. Sumuojant sroves, į mazgą įtekančias ir ištekančias sroves reikia rašyti su priešingais ženklais, pvz., įtekančias su “+” ženklu, o ištekančias – su “-”. Žinoma, galima daryti ir atvirkščiai. Pavyzdžiui, 59 pav. mazgui A užrašysime: $I_3 - I_4 - I_5 = 0$. Apibendrintai pirmoji Kirchhofo taisyklė užrašoma taip:

$$\sum_k I_k = 0. \quad (3.58)$$

Antroji Kirchhofo taisyklė teigia, kad **bet kokio uždaro kontūro šakomis tekančių srovių stiprių ir varžų sandaugų algebrinė suma lygi tame kontūre esančių šaltinių elektrosvarų algebrinei sumai**:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_j \mathcal{E}_j. \quad (3.59)$$

Norint užrašyti lygtį pagal antrąją Kirchhofo taisyklę, reikia laisvai pasirinkti kontūro apėjimo kryptį (pagal arba prieš laikrodžio rodyklę). Jei srovės šakoje kryptis sutampa su pasirinkta apėjimo kryptimi, tai sandauga $I_k R_k$ rašoma su “+” ženklu, jei ne – su “-” ženklu. Paskui dar kartą ta pačia kryptimi apeinamas tas kontūras ir užrašoma (3.59) lygties dešinė pusė – ev suma. Šiuo atveju būtina atsiminti: **jei per šaltinį tenka eiti potencialo didėjimo kryptimi (t. y. iš “-” į “+”), jo ev imama su “+” ženklu, o jei potencialo mažėjimo kryptimi (iš “+” į “-”), jo ev rašoma su “-” ženklu**. Kad lengviau tą išsimintume, pailiustruosime piešiniais 60 pav. kuriame lankelis su rodykle rodo ėjimo per šaltinį kryptį.



60 pav.

Pavyzdžiui, 59 pav. kontūrai BAD \mathcal{E} B, pasirinkę apėjimo kryptį pagal laikrodžio rodyklę, užrašysime:

$$I_3 R_3 + I_4 R_4 + I r = \mathcal{E}.$$

Pastebėsime, kad pirmoji Kirchhofo taisyklė susijusi su srovės pastovumo sąlyga. Jei į mazgą sutekančių srovių algebrinė suma nebūtų lygi nuliui, tai laikui einant tame mazge kauptųsi teigiamas ar neigiamas krūvis, taigi ir elektrinio lauko stipris, o kartu ir srovės tankis bei stipris irgi kistų, t. y. srovė nebūtų pastovi nuolatinė. Antroji Kirchhofo taisyklė

susijusi su elektrostatinio lauko potencialumu ir pašalinių elektrosvarų samprata.

Kirchhofo taisyklės įgalina apskaičiuoti srovės stiprius bet kokio sudėtingumo nuolatinės srovės grandinėje, kai žinomos visos varžos (išorinės ir vidinės) ir visos ev. Jei visos grandinės varžos yra pastovios (t. y. nepriklauso nuo įtampos), tinkamai užrašius lygtis pagal pirmąją ir antrąją Kirchhofo taisyklę, gaunama tiesinių lygčių sistema. Kad ta sistema turėtų vienintelį sprendinį, joje neturi būti tiesiškai priklausomų lygčių. Tam reikia laikytis šių reikalavimų:

1) jei grandinėje yra iš viso n mazgų, sudarant lygčių sistemą reikia rašyti tik $n-1$ lygtį pagal pirmąją Kirchhofo taisyklę;

2) pagal antrąją Kirchhofo taisyklę rašyti tiek lygčių, kiek grandinėje yra elementariųjų kontūrų.

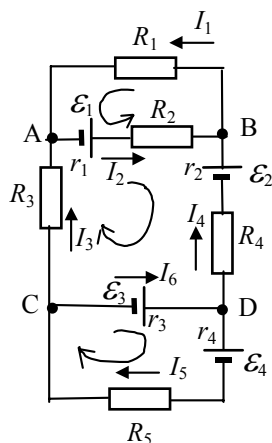
Laikantis šių dviejų reikalavimų, sistemą sudarys tiek lygčių, kiek šakų (tuo pačiu ir skirtingo stiprio srovių) yra grandinėje. Išsprendę ją, nustatysime visų srovių stiprius.

Pastabos. a) Sudėtingoje grandinėje, ypač jei joje yra keletas įvairiai sujungtų srovės šaltinių, srovės tekėjimo kryptį ne visada galima iš anksto numatyti. Tačiau srovių kryptis prieš sudarant lygčių

sistemą galima pasirinkti laisvai. Jei išsprendus lygčių sistemą kurių nors srovių stiprių vertės pasirodys esančios neigiamos, tai reikš, kad tos srovės iš tikrųjų teka priešingomis kryptimis, negu buvo pasirinkta, o jų moduliai bus lygūs tų srovių stipriams.

b) Teiginys, kad pagal antrąją Kirchhofo taisyklę galima rašyti tiek lygčių, kiek yra elementariųjų kontūrų, teisingas tik tuo atveju, jei grandinės schema yra atvaizduota plokštumoje. Tūrinės schemas atveju lygčių gali būti mažiau, negu yra elementariųjų kontūrų (žr. 1 pavyzdį).

Kaip pavyzdį užrašysime Kirchhofo lygčių sistemą grandinei, kurios schema pavaizduota 61 pav. Joje 4 mazgai ir 3 elementarieji kontūrai, tad lygčių sistemą sudarys 3 lygtys pagal pirmąją ir 3 pagal antrąją Kirchhofo taisyklę. Jei srovių kryptys ir kontūrų apėjimų kryptys pasirinktos tokios, kaip parodyta rodyklėmis 61 pav., lygčių sistema bus tokia:



61 pav.

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0, \\ -I_1 + I_2 + I_4 = 0, \\ -I_3 + I_5 - I_6 = 0, \\ I_2(R_2 + r_1) + I_1 R_1 = \mathcal{E}_1, \\ I_2(R_2 + r_1) - I_4(R_4 + r_2) - I_6 R_3 + I_3 R_5 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3, \\ I_5(R_5 + r_4) + I_6 R_3 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4. \end{cases}$$

Pastebėsime, kad pagal Omo dėsnį grandinės daliai $I_k R_k = U_k$, tad antrąją Kirchhofo taisyklę galima užrašyti ir taip:

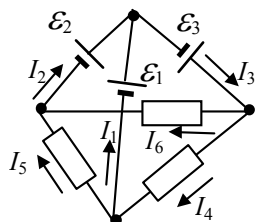
$$\sum_k U_k = \sum_j \mathcal{E}_j. \quad (3.60)$$

(3.60) formule tenka naudotis, jei kurioje nors grandinės šakoje yra kondensatorių arba netiesinių rezistorių (žr. 2 ir 3 pavyzdžius).

1 pavyzdys. Tetraedro trijose briaunose įjungti srovės šaltiniai $\mathcal{E}_1=2$

V, $\mathcal{E}_2=4$ V ir $\mathcal{E}_3=6$ V, o kitose trijose – vienodi $R=10 \Omega$ varžos rezistoriai (61 pav.). Kokio stiprio srovės teka šaltiniais? Į šaltinių vidines varžas neatsižvelkite.

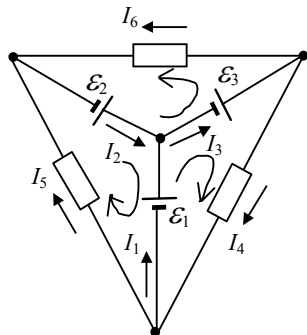
Sprendimas



62 pav.

62 pav. grandinėje matome 4 mazgus ir 4 elementariuosius kontūrus. Tačiau nepriklausomi tik 3 kontūrai, nes parašius lygtis pagal antrąją Kirchhofo taisyklę, tarkime, trims pasviriesiems kontūrams jau bus panaudotos visos grandinės šakos, ir lygtis horizontaliajam kontūrai su varžomis R būtų tiesinė ankstesnių lygčių kombinacija. Taip atsitiko todėl, kad 62 pav. grandinės schema tūrinė. 63 pav. pavaizduota tos pačios grandinės lygiavertė schema plokštumoje, kurioje matome 3 elementariuosius kontūrus. Taigi šioje grandinėje yra 4 mazgai ir 3 elementarieji kontūrai. Pasirinkę srovių kryptis ir kontūrų apėjimo kryptis, tarkime, tokias, kaip pavaizduota

63 pav. užrašome tokią 6 lygčių sistemą:



63 pav.

$$\begin{cases} -I_1 + I_4 - I_5 = 0, \\ -I_2 + I_5 + I_6 = 0, \\ I_3 - I_4 - I_6 = 0, \\ I_6 R = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3, \\ I_5 R = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1, \\ I_4 R = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3. \end{cases}$$

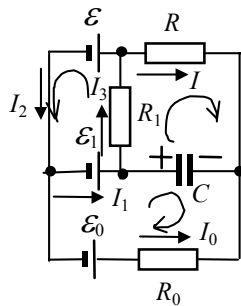
Išsprendę ją, apskaičiuojame šaltiniais tekančių srovių stiprius:

$$I_1 = \frac{2\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3}{R} = 0,6 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{2\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3}{R} = 1,2 \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_3}{R} = 1,8 \text{ A}.$$

2 pavyzdys. Grandinėje, kurios schema pavaizduota 64 pav., $\mathcal{E}=9 \text{ V}$, $\mathcal{E}_1=18 \text{ V}$, $\mathcal{E}_0=27 \text{ V}$, $R=270 \Omega$, $R_1=90 \Omega$, $R_0=180 \Omega$, $C=1 \mu\text{F}$. Pereinamieji procesai pasibaigę. Kokia yra kondensatoriaus įtampa? Į šaltinių vidines varžas neatsižvelkite.



64 pav.

Sprendimas

Grandinėje yra 4 mazgai ir 3 elementarieji kontūrai. Pasirinkę srovių kryptis, kontūrų apėjimų kryptis ir kondensatoriaus įtampos U poliškumą, kaip pažymėta 64 pav. ir žinodami, kad nuolatinė pastovioji srovė per kondensatorių neteka, sudarome tokią lygčių sistemą:

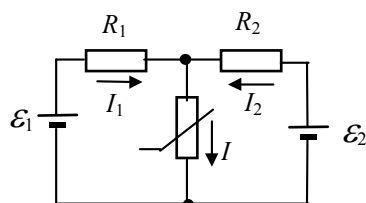
$$\begin{cases} I_3 - I_2 - I = 0, \\ I_2 - I_1 - I_0 = 0, \\ I_1 - I_3 = 0, \\ I_3 R_1 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}, \\ IR - U + I_3 R_1 = 0, \\ U - I_0 R_0 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0. \end{cases}$$

Išsprendę ją, apskaičiuojame, kad

$$U = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0)R - (\mathcal{E} - \mathcal{E}_1)R_0}{R + R_0} = -1,8 \text{ V}.$$

Neigiamas sprendinys rodo, kad kondensatoriaus įtampos poliškumas yra priešingas, negu buvo pasirinkta užrašant lygtis, o jo įtampa lygi $1,8 \text{ V}$.

3 pavyzdys. Grandinę sudaro du elementai, kurių elektrovaros $\mathcal{E}_1=2 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2=6 \text{ V}$, du rezistoriai, kurių varžos $R_1=6 \Omega$, $R_2=18 \Omega$, ir netiesinis rezistorius, kurio voltamperinė charakteristika aprašoma lygtimi $I = 0,3\sqrt{U}$ (žr. 65 pav.). Apskaičiuokite srovių I , I_1 ir I_2 stiprius.



65 pav.

Sprendimas

Netiesinio rezistoriaus įtampą pažymėkime U , o srovės stiprį jame I . Tris lygtis užrašę remdamiesi Kirchhofo taisyklėmis ir dar prirašę voltamperinės charakteristikos lygtį, gauname tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I = 0, \\ I_1 R_1 + U = \mathcal{E}_1, \\ I_2 R_2 + U = \mathcal{E}_2, \\ I = 0,3\sqrt{U}. \end{cases}$$

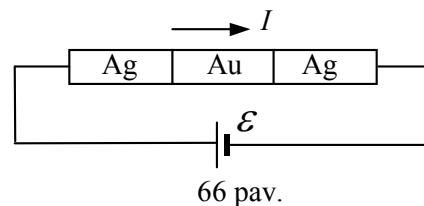
Išsprendę ją, apskaičiuojame, kad $U=1,40 \text{ V}$, $I=0,36 \text{ A}$, $I_1=0,10 \text{ A}$, $I_2=0,26 \text{ A}$.

Pastebėsime, kad esant grandinėje netiesinių rezistorių (diodų, tranzistorių, varistorių, termorezistorių ir pan.), Kirchhofo taisyklės irgi galioja, tačiau gaunama netiesinių lygčių sistema, kuri gali turėti nebūtinai vienintelį sprendinį.

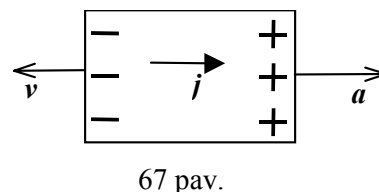
4 skyrius ELEKTRINIS LAIDUMAS

1. Metalų krūvininkų prigimtis

Dar gerokai prieš elektronų atradimą buvo eksperimentiškai įrodyta, kad tekant elektros srovei metaluose jų medžiaga nepernešama. Buvo padarytas toks bandymas: per dviejų skirtingų metalų (aukso ir sidabro) sąlytį ilgą laiką (apie metus) buvo leidžiama stipri nuolatinė elektros srovė (66 pav.). Per tą laiką pratekėjo didžiulis krūvis, tačiau vieno metalo prasiskverbimo į kitą ties sandūromis nebuvo pastebėta. Atskirų metalo gabalų masės taip pat nepakito. Tas įrodo, kad metalų jonai tekant srovei elektrinio lauko veikiami nejudėjo.

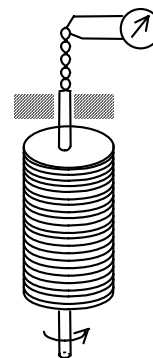


Įtikinamų įrodymų, kad srovę metaluose perneša laisvieji elektronai, davė bandymai, pagrįsti elektronų inercija. Šių bandymų idėja paaiškėja iš 67 pav. Tarkime, kad greičiu v judantis metalo gabalas stabdomas pagreičiu a (stabdant pagreičio ir greičio kryptys esti priešingos). Dėl inercijos laisvieji elektronai turi judėti greičio v kryptimi ir susirinkti tame gabalo gale įelektrindami jį neigiamu krūviu, o kitas galas, kuriame susidaro elektronų trūkumas, elektrinis teigiamai. Dėl tokio elektronų judėjimo metalė turi atsirasti trumpalaikė elektros srovė, kurios tankio j kryptis 67 pav. pavaizduota rodykle.



Šią idėją kokybiškai pirmieji 1913 m. patikrino Mandelštamai (*Л. И. Мандельштам*) ir Papaleksis (*Н. Д. Папалекси*). Jų eksperimento principinė schema pavaizduota 68 pav. Daug vijų turinti ritė įsukama, o paskui staigiai stabdoma. Stabdant prie ritės galų prijungtose telefono ausinėse girdisi traškėjimas.

1916 m. Tolmenas (*R. Tolman*) ir Stiuartas (*T. Stewart*) su panašiu įrenginiu atliko kiekybinius tyrimus, telefono ausines pakeitę jautriu balistiniu galvanometru, kuriuo buvo galima išmatuoti stabdymo metu pratekanti krūvį Q . Bandymai parodė, jog galvanometro nuokrypis atitinka neigiamų krūvininkų judėjimą.



Pažymėkime: m – krūvininko masę, q – jo krūvį, $\frac{dv}{dt}$ – ritės vijų linijinį pagreitį, l – ritėje suvyniotos vielos ilgį, R – grandinės varžą, v_0 – įsuktos ritės linijinį greitį.

Stabdant ritę elektroną veikia inercijos jėga

$$F_p = m \frac{dv}{dt}.$$

Ši jėga ir yra pašalinė jėga. Jos lauko stipris

$$E_p = \frac{F_p}{q} = \frac{m}{q} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Dėl stabdymo grandinėje atsirandanti elektrovara

$$\mathcal{E} = \oint E_p dl' = \int_0^l \frac{m}{q} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dl' = \frac{ml}{q} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Grandinėje atsirandanti elektros srovė

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{ml}{qR} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Per be galo mažą laikotarpį dt pratekėjęs krūvis

$$dQ = I dt = \frac{ml}{qR} dv,$$

o stabdant ritę visas pratekėjęs krūvis

$$Q = \int_0^{v_0} \frac{ml}{qR} dv = \frac{mlv_0}{qR}. \quad (4.1)$$

Iš (4.1) galima apskaičiuoti krūvininko krūvio ir jo masės santykį

$$\frac{q}{m} = \frac{lv_0}{QR}.$$

Jis buvo gautas artimas elektrono krūvio ir masės santykiui, nustatytam ir kitais būdais (pagal katodinių spindulių nuokrypį elektriniuose ir magnetiniuose laukuose).

2. Metalų elektrinio laidumo priklausomybė nuo temperatūros ir jos aiškinimas

Bandymai rodo, kad įvairių medžiagų elektrinė varža priklauso nuo temperatūros. Šiai priklausomybei apibūdinti naudojamas dydis, vadinamas temperatūriniu varžos koeficientu. **Temperatūrinis varžos koeficientas α lygus varžos santykiniam pokyčiui, pakitus temperatūrai 1 K.** Tarkime, kad laidininko varža temperatūroje T lygi R , o pakitus temperatūrai dydžiu dT ji pakito dydžiu dR . Tada

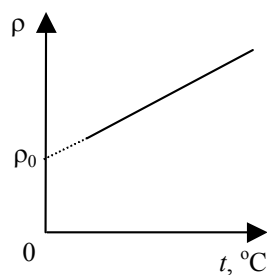
$$\alpha = \frac{dR}{RdT}. \quad (4.2)$$

Varžos priklausomybę nuo temperatūros iš esmės nulemia savitosios varžos ρ priklausomybė nuo temperatūros, nes matmenų kitimo dėl šiluminės plėtos įtaka čia maža. Todėl vietoj (4.2) galima užrašyti:

$$\alpha = \frac{d\rho}{\rho dT}. \quad (4.3)$$

Jei temperatūrai didėjant varža didėja, tai $\alpha > 0$, o jei mažėja tai $\alpha < 0$. Metalų esti $\alpha > 0$, o elektrolitų $\alpha < 0$.

Temperatūrinio varžos koeficiento SI vienetas yra 1 K^{-1} .



69 pav.

Bandymai rodo, kad metalų varža temperatūrai didėjant neženkiai didėja. Nelabai dideliame temperatūrų intervale jų varža ir savitoji varža tiesiškai priklauso nuo temperatūros (69 pav.).

Sutariama metalų atveju (4.2) formulėje imti $R=R_0$ ir (4.3) $\rho=\rho_0$. Čia R_0 ir ρ_0 – metalo varža ir savitoji varža 0°C temperatūroje. Tada tiesinės priklausomybės atveju $\alpha=\text{const}$, nes $dR/dT=\text{const}$. Atskyrus kintamuosius ir suintegravus (4.2) gaunama:

$$dR = \alpha R_0 dT,$$

$$R = \alpha R_0 T + A.$$

Čia A – integravimo konstanta, kurią reikia nustatyti iš pradinės sąlygos: kai $T=0^\circ \text{C}$, $R=R_0$. Taigi $A=R_0$ ir galutinai gauname:

$$R = R_0(1 + \alpha t) \quad (4.4)$$

bei

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t). \quad (4.5)$$

Būtina nepamiršti, kad (4.4) ir (4.5) formulėse temperatūra t išreikšta $^\circ\text{C}$.

Mėgindami išsiaiškinti, kas lemia metalų varžos priklausomybę nuo temperatūros, pasinaudokime (3.37) formule. Metaluose laisvųjų krūvininkų tankis n nuo temperatūros nepriklauso, o varžos didėjimą kylant temperatūrai lemia judrio μ mažėjimas.

Panagrinėkime šį klausimą išsamiau. Pagal (3.36) judris μ yra proporcingas relaksacijos trukmei τ . Elektrono vidutinį laisvojo kelio ilgį pažymėkime λ , o jo vidutinį šiluminį greitį u . Tada relaksacijos trukmę galėsime išreikšti taip:

$$\tau = \frac{\lambda}{u}. \quad (4.6)$$

Įrašę (4.6) į judrio išraišką (3.36), gausime

$$\mu = \frac{q_0 \lambda}{mu}, \quad (4.7)$$

o (4.7) įrašę į savitojo elektrinio laidumo formulę (3.37) –

$$\sigma = \frac{q_0^2 n \lambda}{mu}. \quad (4.8)$$

Laisviesiems metalo elektronams pritaikykime idealiųjų dujų šiluminio judėjimo vidutinio greičio formulę

$$u = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (4.9)$$

Iš jos matyti, kad $u \propto T^{1/2}$. Vidutinis laisvojo kelio ilgis lygus atstumui tarp metalo atomų ar jonų ir nuo temperatūros bent kiek ženkliu nepriklauso (jei neatsižvelgsime į šiluminę plėtrą, kuri palyginti maža). Taigi vienintelis nuo temperatūros priklausanti parametras metalų elektrinio laidumo išraiškoje (4.8) yra vidutinis elektronų šiluminio judėjimo greitis u . Kaip matyti iš (4.8), savitasis laidumas $\sigma \propto T^{-1/2}$, o savitoji varža $\rho = 1/\sigma \propto T^{1/2}$. Kaip jau buvo minėta, eksperimentai rodo, kad $\rho \propto T$ (žr. 4.5)). Eksperimentas nelabai sutampa su teorija.

3. Superlaidumas

1911 m. Kamerlingas Onas (*H. Kamerlingh-Onnes*) pastebėjo, kad 4,15 K temperatūroje gyvsidabris (Hg) staiga visiškai netenka varžos. Vėliau buvo pastebėta, kad ir daugelis kitų metalų bei lydinių labai žemoje temperatūroje netenka varžos. Šis reiškinys buvo pavadintas **superlaidumu**, o medžiagos – **superlaidininkais**. Superlaidžiam žiede kartą sužadinta (pavyzdžiui, elektromagnetinės indukcijos būdu) srovė nemažėdama gali tekėti metus laiko ir ilgiau. Temperatūra, iki kurios atšaldytas laidininkas tampa superlaidus, vadinama **krizine temperatūra**. Superlaidumu pasižymi nemažai grynų metalų (pvz., Zn, Al, Hg, Sn, Pb, Nb), bet jų krizinės temperatūros yra gana žemos (neviršija 10 K). Šiek tiek aukštesnės gali būti lydinių krizinės temperatūros. Pavyzdžiui, Nb₃N krizinė temperatūra yra apie 23 K.

1986 m. Bednorcas ir Miuleris (*J. G. Bednorz, K. A. Müller*) atrado LaBaCuO, kurio krizinė temperatūra apie 33 K, superlaidumą. Nuo to laiko daugelyje pasaulio šalių imta ieškoti naujų superlaidininkų, pasižyminčių aukšta krizine temperatūra, ir daug tokių medžiagų buvo surasta. Pavyzdžiui, HgBa-CaCuO krizinė temperatūra yra 153 K (1993 m. duomenys).

Klasikinė elektrinio laidumo teorija superlaidumo nepaaiškina. Tam reikalinga kvantinė teorija.

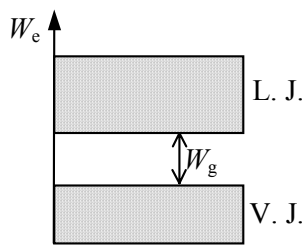
4. Energijos juostų modelis

Kvantinė teorija teigia, kad elektronai atome esti išsidėstę tam tikrose orbitose (lygmenyse). Elektrono energija atome priklauso nuo to, kuriame lygmenyje jis yra. Kiekvienas elektronas turi savo **pagrindinį lygmenį**, kuriame jis gali būti neribotą laiką, ir daugybę **sužadintų lygmenų**, į kuriuos jis gali patekti tik gavęs iš šalies papildomos energijos. Juose elektronas gali būti tik ribotą laiką. Jei atomas turi daug elektronų, tai kiekvienas elektronas turi savo pagrindinius ir sužadintus lygmenis.

Paulio (*V. Pauli*) draudimo principas teigia, kad viename lygmenyje gali būti ne daugiau dviejų elektronų. Jei tame pačiame lygmenyje esti du elektronai, tai jų sukiniai turi būti priešingi. Kitaip sakant, vienodą energiją atome gali turėti ne daugiau dviejų elektronų.

Paulio principas tinka ne tik atomui, bet ir bet kokiai tarpusavy sąveikaujančių atomų sistemai. Tokia sistema yra ir kietasis kūnas. Kad būtų išlaikytas šis principas, suartėjant atomams kiekvienas jų lygmuo suskyla į tiek lygmenų, kiek sistemoje yra atomų. Pavyzdžiui, 1 cm³ kieto kūno esti apie 10²² atomų. Į tiek lygmenų suskils ir kiekvienas izoliuoto atomo lygmuo. Taip vietoj lygmenų susidaro išplitusios juostos. Jų plotis siekia vieną ar keletą elektronvoltų, taigi vidutinis atstumas tarp atskirų lygmenų juostose esti labai mažas ($\Delta W \approx 10^{-22}$ eV). Suskyla tiek pagrindinės, tiek ir sužadintos būsenos atitinkantys lygmenys.

Kietųjų kūnų elektriniam laidumui paaiškinti užtenka dviejų juostų. Viena jų susidariusi iš valentinių elektronų pagrindinio lygmens ir vadinama **valentine juosta** (paveiksluose ją sutrumpintai žymėsime V. J.), o kita – iš valentinių elektronų pirmojo sužadinto lygmens ir vadinama **laidumo juosta** (L. J.). Tarp šių dviejų juostų gali būti **draustinė juosta**, kurioje elektronų būti negali. Draustinės juostos plotį žymėsime W_g . Kadangi valentinė juosta atsiradusi iš nesužadinto lygmens, tad joje būna daug elektronų, o į laidumo juostą elektronai patenka tik gavę papildomos energijos.

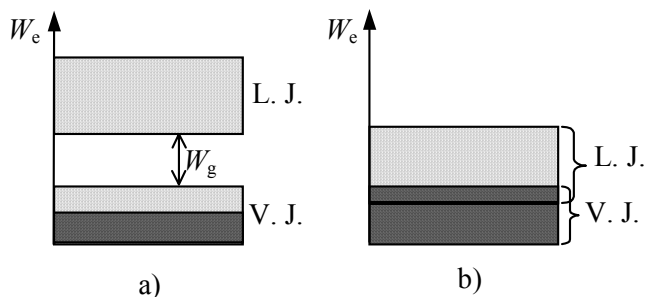


70 pav.

Energijos juostos pavaizduotos 70 pav. Jame W_e žymi elektronų energiją.

Elektronai stengiasi užimti kuo mažesnės energijos lygmenis, esančius juostų apačioje, tačiau kiekviename lygmenyje telpa tik po du elektronus.

Pavyzdžiui, pirmosios elementų sistemos grupės metalai turi tik po vieną valentinį elektroną, taigi jie užima tik apatinę valentinės juostos pusę, o aukščiau lieka neužimti lygmenys. Į juos gali patekti elektronai įgiję kad ir nedidelę energiją, nes, kaip minėjome, atstumai tarp lygmenų labai maži. Priminsime, kad elektrono šiluminio judėjimo vidutinė energija kambario temperatūroje $kT \approx 10^{-2}$ eV, o esant sudarytam kad ir nestipriam elektriniam laukui laisvojo kelio ilgyje įgytoji energija $eE\lambda \approx 10^{-8} - 10^{-4}$ eV. Todėl veikiant elektriniam laukui elektronai patenka į neužimtus lygmenis ir gali judėti prieš lauko kryptį. Tai ir sąlygoja didelį šių metalų elektrinį laidumą.



71 pav.

Antrosios grupės metalai turi po du valentinius elektronus, todėl jie visiškai užpildo valentinės juostos lygmenis, ir bet koks jų judėjimas toje juostoje tampa negalimas. Tačiau šiuo atveju valentinė ir laidumo juostos dalinai persikloja, t. y. nesti tarp jų draustinės juostos ir elektronai gali judėti patekdami į tuščius laidumo juostos lygmenis. Šitaip aiškinamas antrosios grupės metalų didelis elektrinis laidumas.

Pirmos grupės metalų juostų modelis parodytas 71 pav., a), o antros – 71 pav., b). Elektronais užpildyta juostos dalis pažymėta tamsiau.

5. Savasis puslaidininkių elektrinis laidumas ir jo priklausomybė nuo temperatūros

Puslaidininkiuose valentiniai elektronai esti gana tvirtai susiję su savo atomais, tad negali judėti veikiant elektriniam laukui. Pagal juostų modelį tai reiškia, kad valentinė juosta būna visiškai užpildyta elektronais. Laidumo juostą nuo valentinės juostos skiria siauresnė ar platesnė draustinė juosta. Dėl šiluminio judėjimo dalis valentinių elektronų įgyja energiją, kurios pakanka atitrūkti nuo savo atomų, t. y. patekti į laidumo juostą. Ten būdami jie gali judėti veikiant elektriniam laukui ir sąlygoja elektrinį laidumą, nes yra pakankamai tuščių lygmenų. Be to valentinėje juostoje irgi atsiranda tiek tuščių lygmenų, kiek elektronų esti perėję į laidumo juostą. Taigi atsiranda šioji tokia judėjimo galimybė ir valentinės juostos elektronams. Tačiau puslaidininkiuose peršokusį į laidumo juostą elektronų, o tuo pačiu ir atsiradusių valentinėje juostoje tuščių lygmenų skaičius paprastai esti mažas lyginat su visu valentinės juostos elektronų skaičiumi, tad tik mažai valentinių elektronų daliai atsiranda galimybė į juos patekti ir sąlygoti elektrinį laidumą. Esant puslaidininkyje elektriniam laukui ir valentinės juostos elektronai juda prieš lauką. Nagrinėjant elektrinį laidumą neigiamo krūvio judėjimas prieš lauką yra tolygus tokio pat modulio teigiamo krūvio judėjimui lauko kryptimi (žr., pavyzdžiui, (3.13), kurioje pasikeitus q_0 ženklui pakinta ir v ženklas, bet jų sandauga išlieka nepakitusi). Todėl nagrinėjant krūvininkų judėjimą valentinėje juostoje yra paprasčiau tarti, kad ten juda ne elektronai, o teigiamieji krūvininkai, kurių skaičius lygus laidumo juostoje tuo metu esančių elektronų skaičiui. Šie teigiamieji krūvininkai vadinami *skylėmis*.

Panagrinėkime savojo puslaidininkio elektrinį laidumą kiekybiškai.

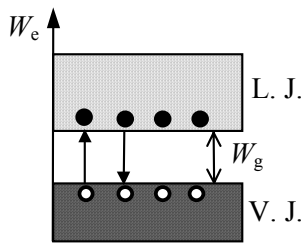
Pažymėkime: n – laidumo juostos elektronų tankis, p – valentinės juostos skylių tankis, N_c – laidumo juostos efektyvus lygmenų tankis, P_v – valentinės juostos efektyvus lygmenų tankis, W_g – draustinės juostos plotis, k – Bolcmano (*L. E. Boltzmann*) konstanta, T – absoliutinė temperatūra.

Galima tarti, jog esant tam tikrai temperatūrai vyksta du priešingų krypčių procesai: elektronų peršokimas iš valentinės juostos į laidumo juostą (*generacija*, 71 pav. pavaizduota į viršų nukreipta rodykle) ir elektronų grįžimas iš laidumo juostos į valentinę juostą (*rekombinacija*, pavaizduota žemyn nukreipta rodykle).

Skaičius elektronų, generuojamų puslaidininkio vienetiniame tūryje per laiko vienetą yra proporcingas jų tankiui valentinėje juostoje P_v , lygmenų tankiui laidumo juostoje N_c ir Bolcmano daugikliui $\exp(-W_g/kT)$:

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{gen}} = \gamma N_c P_v \exp\left(-\frac{W_g}{kT}\right). \quad (4.10)$$

Čia γ – proporcingumo koeficientas.



72 pav.

Rekombinuojančių elektronų skaičius proporcingas jų tankiui laidumo juostoje n ir neužimtų vietų (skylių) tankiui valentinėje juostoje p :

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{rek}} = \gamma np = \gamma n^2. \quad (4.11)$$

(Užrašant (4.11) atsižvelgta, kad esant savajam laidumui $p=n$).

Esant termodinaminei pusiausvyrai

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{gen}} = \left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{rek}}. \quad (4.12)$$

Iš (4.10) – (4.12) nustatome, kad

$$n = p = \sqrt{N_c P_v} \exp\left(-\frac{W_g}{2kT}\right),$$

o savitasis laidumas

$$\sigma = q_0 \mu_n n + q_0 \mu_p p = q_0 (\mu_n + \mu_p) \sqrt{N_c P_v} \exp\left(-\frac{W_g}{2kT}\right). \quad (4.13)$$

Laidumo ir valentinės juostų efektingus lygmenų tankius apskaičiuoti galima tiksliai remiantis kvantine kietųjų kūnų teorija. Gaunamos tokios išraiškos:

$$N_c = 2 \left(\frac{2\pi m_n^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad P_v = 2 \left(\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.14)$$

Čia m_n^* ir m_p^* – atitinkamai elektronų ir skylių efektingos masės (jos gali keletą ar net keliasdešimt kartų būti didesnės ar mažesnės už laisvojo elektrono masę, yra būdingos kiekvienam puslaidininkiiui ir surandamos žinyuose), h – Planko (*M. Planck*) konstanta. Tariant, kad efektingos masės lygios laisvojo elektrono masei (t. y. $m_n^* = m_p^* = m$), įrašę kitas konstantas į (4.14), gauname:

$$N_c = P_v = 4,82 \cdot 10^{21} T^{\frac{3}{2}} \text{ m}^{-3}.$$

Kaip matome iš (4.13), savojo puslaidininkio laidumo priklausomybė nuo temperatūros yra gana sudėtinga, nes nuo temperatūros priklauso N_c , P_v , o taip pat elektronų ir skylių judrumai μ_n ir μ_p . Judrumų priklausomybė nuo temperatūros paprastai išreiškiama laipsnine funkcija, t. y. $\mu_n, \mu_p \propto T^\gamma$. γ vertė priklauso nuo krūvininkų sklaidos mechanizmo: esant sklaidai šiluminiais gardelės virpesiais (fononais) $\gamma = -3/2$ (šis sklaidos mechanizmas vyrauja aukštesnėse temperatūrose), o esant sklaidai jonizuotomis priemaišomis $\gamma = +3/2$ (būdinga žemoms temperatūroms). Vis tiksliai elektrinio laidumo priklausomybei nuo temperatūros didžiausią įtaką turi eksponentinis daugiklis. Pažymėję

$$A = q_0 (\mu_n + \mu_p) \sqrt{N_c P_v}$$

ir neatsižvelgdami į jo priklausomybę nuo temperatūros, vietoj (4.13) galėsime užrašyti

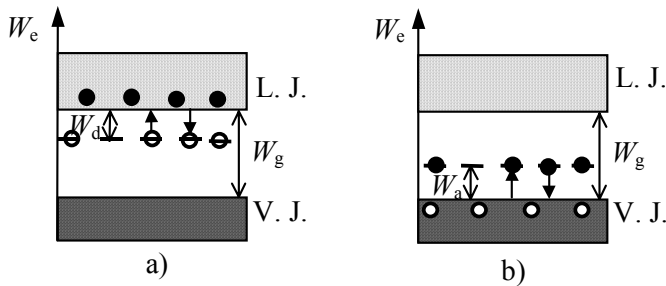
$$\sigma = A \exp\left(-\frac{W_g}{2kT}\right). \quad (4.14)$$

Kaip matyti iš (4.14), pavaizdavę šią priklausomybę $\ln \sigma = f(1/T)$ koordinačių sistemoje galėsime nustatyti draustinės juostos plotį W_g .

6. Priemaišinis puslaidininkių laidumas ir jo priklausomybė nuo temperatūros

Priemaišos ženkliai pakeičia puslaidininkių elektrines savybes. Panagrinėkime priemaišų veikimą tipišrame IV grupės puslaidininkyje germanyje ar silicyje. Šių puslaidininkių kiekvienas atomas turi po keturis valentinius elektronus. Tarkime, kad dalį šių atomų pakeitė V grupės priemaišos (P, As, Sb ir kt.), turinčios penkis valentinius elektronus. Keturi elektronai sudarys valentinę ryšį su kaimyniniais

Ge ar Si atomais, o penktasis liks silpnai susijęs su savo atomu. Jam atitrūkti nuo atomo, t. y. patekti į laidumo juostą, užtenka mažesnės energijos negu nuo puslaidininkio atomo Ge ar Si. Tokios priemaišos vadinamos **donorais**. Juostų modelyje donorų lygmenys paprastai esti draustinėje juostoje arčiau laidumo juostos nei valentinės (73 pav., a). Donorai sąlygoja elektroninį (*n*-tipo) puslaidininkio laidumą.



73 pav.

Dabar tarkime, kad Ge ar Si pakeičia III grupės priemaišos (B, In, Ga ir kt.), kurių atomai turi po tris valentinius elektronus. Kadangi ryšiui su puslaidininkio atomais sudaryti reikia keturių elektronų, priemaišinis atomas trūkstamą elektroną stengiasi paimti iš Ge ar Si atomo. Taip valentinėje juostoje atsiranda elektronų trūkumas (skylės), kurios ir sąlygoja skylinį (*p*-tipo) elektrinį laidumą. Tokios priemaišos

vadinamos **akceptoriais**. Juostų modelyje akceptorinių lygmenys dažniausiai esti draustinėje juostoje netoli valentinės juostos (73 pav. b).

Tarkime, kad donorinių lygmenų tankis yra N_d , jų gylis skaičiuojant nuo laidumo juostos apačios (aktyvacijos energija) W_d , o elektronų, perėjusių iš tų lygmenų į laidumo juostą tankis n . Tuomet elektronų donoriniuose lygmenyse tankis yra $N_d - n$, o neužimtų lygmenų tankis n . Taigi galime užrašyti:

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{gen}} = \gamma(N_d - n)N_c \exp\left(-\frac{W_d}{kT}\right), \quad (4.15)$$

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{\text{rek}} = n^2. \quad (4.16)$$

Esant pusiausvyrai galioja (4.12). Sulyginę (4.15) ir (4.16) dešinės pusės gauname kvadratinę lygtį n atžvilgiu:

$$n^2 = (N_d - n)N_c \exp\left(-\frac{W_d}{kT}\right). \quad (4.17)$$

Panagrinėkime (4.17) lygties sprendinių atskirus atvejus.

1) **Žemos temperatūros.** Šiuo atveju tik maža donorinių lygmenų elektronų dalis bus perėjusi į laidumo juostą, t. y. galime tarti, kad $n \ll N_d$. Tada iš (4.17) nustatome, kad

$$n = \sqrt{N_c N_d} \exp\left(-\frac{W_d}{2kT}\right), \quad (4.18)$$

o savitasis laidumas

$$\sigma = q_0 \mu_n \sqrt{N_c N_d} \exp\left(-\frac{W_d}{2kT}\right). \quad (4.19)$$

2) **Aukštos temperatūros.** Šiuo atveju praktiškai visi elektronai iš donorinių lygmenų jau yra perėję į laidumo juostą, taigi

$$n = N_d \quad (4.20)$$

ir

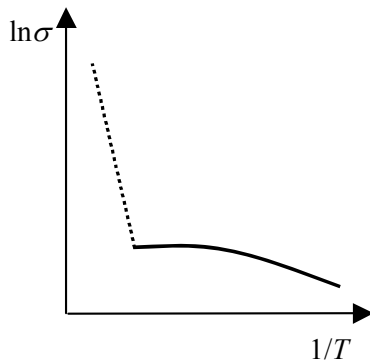
$$\sigma = q_0 \mu_n N_d \quad (4.21)$$

(4.19) lygybėje pažymėkime

$$B = q_0 \mu_n \sqrt{N_c N_d}$$

ir neatsižvelkime į jo priklausomybę nuo temperatūros. Tada priemaišinių puslaidininkių laidumą žemose temperatūrose galėsime išreikšti taip:

$$\sigma = B \exp\left(-\frac{W_d}{2kT}\right) \quad (4.22)$$



74 pav.

Temperatūrai kylant priemaišinis savitasis laidumas artėja prie pastovios vertės, aprašomos (4.21) (jei neatsižvelgsime į elektronų judrio priklausomybę nuo temperatūros).

Panašias išraiškas gautume nagrinėdami ir p -tipo puslaidininkio elektrinį laidumą.

Priemaišinio elektrinio laidumo logaritmo priklausomybės nuo atvirkštinės temperatūros diagrama pateikiama 74 pav. Joje punktyrine linija pavaizduotas savasis elektrinis laidumas.

7. Dielektrikų elektrinis laidumas ir jo priklausomybė nuo temperatūros

Dielektrikų elektrinis laidumas esti ženkliai mažesnis negu metalų ar puslaidininkių.

Pagal tai, kokie krūvininkai juda tekant elektros srovei, dielektrikų laidumas gali būti: 1) elektroninis (skylinis), 2) joninis, 3) mišrusis.

Elektroninio (skylinio) laidumo mechanizmas yra toks pat, kaip ir puslaidininkiuose. Dielektrikams tinka 70 pav. parodytas energijos juostų modelis. Skirtingai nuo puslaidininkių, jų draustinės energijos juosta esti platesnė, tad ir elektronų peršokimas iš valentinės į laidumo juostą būna labiau apsunkintas.

Joninį laidumą sąlygoja jonų judėjimas veikiant elektriniam laukui.

Joninis laidumas skirstomas į priemaišinį ir savąjį. Priemaišiniai jonai, ypač įterptiniai, esti silpnai susiję su kristaline gardele. Jų peršokimo iš vieno tarpmazgio į kitą tikimybė proporcinga $\exp(-W_p/kT)$, todėl priemaišinis joninis laidumas

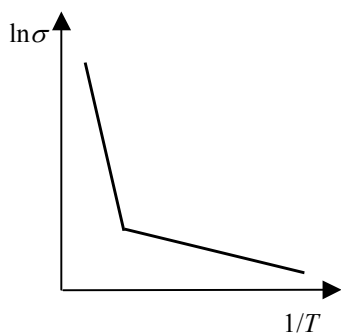
$$\sigma_p = A \exp\left(-\frac{W_p}{kT}\right).$$

Savojo joninio laidumo atveju krūvininkai esti į tarpmazgius ištrūkę savosios medžiagos jonai bei tušti mazgai, turintys krūvį. Šiuo atveju

$$\sigma_s = B \exp\left(-\frac{W_s}{kT}\right).$$

Bendru atveju

$$\sigma = \sigma_p + \sigma_s = A \exp\left(-\frac{W_p}{kT}\right) + B \exp\left(-\frac{W_s}{kT}\right). \quad (4.23)$$

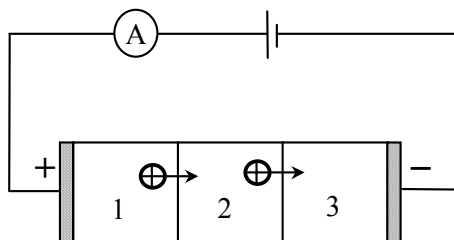


75 pav.

Dažniausiai esti $W_p < W_s$, nes priemaišiniai jonai silpniau susiję su gardele nei savieji. Todėl žemose temperatūrose vyrauja (4.23) pirmasis narys, o aukštos – antrasis.

Joninio elektrinio laidumo logaritmo priklausomybės nuo atvirkštinės temperatūros diagrama pateikta 75 pav. Panaši priklausomybė esti ir elektroninio laidumo atveju, taigi vien tik iš laidumo priklausomybės nuo temperatūros tyrimų negalima nustatyti, kokio laidumo – elektroninio ar joninio – esama.

Atsakymą į šį klausimą duoda toks eksperimentas. Iš tiriamojo dielektriko padaromi trys gabalai (76 pav.). Iš pradžių jie pasveriami, o paskui suglaudžiami ir ilgą laiką jais leidžiama elektros srovė. Vidurinio gabalo masė nekinta, o kraštinių esant joniniam laidumui kinta. Pavyzdžiui, jei juda teigiamieji jonai, tada 1 gabalo masė mažėja, o 3 – didėja. 1 ir 3 gabalų masių pokyčiai visada būna vienodi: $|\Delta m_1| = |\Delta m_3|$. Esant vien tik joniniam laidumui šie masių pokyčiai turi tenkinti Faradėjaus elektrolizės dėsnius:



76 pav.

$$|\Delta m_1| = |\Delta m_3| = \frac{MIt}{ZF}. \quad (4.24)$$

Čia M – molio masė, I – srovės stipris, t – srovės tekėjimo trukmė, Z – jono valentingumas, F – Faradėjaus skaičius.

Tačiau yra dielektrikų, kuriems

$$\left| \Delta m_1 \right| = \left| \Delta m_3 \right| < \frac{MIt}{ZF}. \quad (4.25)$$

Tai dielektrikai, kurių elektrinis laidumas mišrus. Jais tekant srovei juda ir elektronai (skylės), ir jonai.

8. Elektrolitų elektrinis laidumas ir jo priklausomybė nuo temperatūros

Elektrolitai – tai druskų, rūgščių ar šarmų vandeniniai tirpalai bei išlydytos šios medžiagos. Jie yra nebloginiai laidininkai, nes dėl elektrolitinės disociacijos juose atsiranda teigiamieji ir neigiamieji jonai, kurie ir juda veikiami elektrinio lauko.

Tegu N – ištirpusių molekulių tankis (t. y. jų skaičius tirpalo tūrio vienetė), n – disocijavusių molekulių tankis, $\alpha = n/N$ disociacijos laipsnis.

Tarkime, kad kiekviena molekulė disocijuoja į du jonus. Tada teigiamų ir neigiamų jonų tankiai $n = \alpha N$, o nedisocijavusių molekulių tankis $N - \alpha N = (1 - \alpha)N$. Disocijuojančių per laiko vienetą jonų tankis proporcingas dar nedisocijavusių molekulių tankiui:

$$\left(\frac{dn}{dt} \right)_{\text{dis}} = \gamma(1 - \alpha)N, \quad (4.26)$$

o rekombinuojančių jonų tankis turi būti proporcingas teigiamų ir neigiamų jonų tankiams:

$$\left(\frac{dn}{dt} \right)_{\text{rek}} = \beta(\alpha N)^2. \quad (4.27)$$

Čia γ ir β – proporcingumo koeficientai. Esant pusiausvyrai (4.26) ir (4.27) kairiosios pusės turi būti lygios, tad sulyginę dešiniąsias puses gauname:

$$\gamma(1 - \alpha)N = \beta\alpha^2 N^2,$$

arba

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{\gamma}{\beta N}. \quad (4.28)$$

Iš (4.28) matome, kad $\alpha \rightarrow 1$, kai $N \rightarrow 0$, t. y. smarkiai praskiestame tirpale disocijuoja visos molekulės.

Jei tirpale yra sudarytas E stiprio elektrinis laukas, jis joną veikia $F_E = q_0 Z E$ jėga. Jai veikiant jonas įgyja vidutinį dreifo greitį v . Judantį tirpale joną veikia taip pat pasipriešinimo (klamos) jėga, kuri pagal Stokso dėsnį proporcinga greičiui: $F_p = a v$. Čia a – proporcingumo koeficientas. Nusistovėjus pusiausvyrai $F_E = F_p$. Iš čia nustatome, kad jono dreifo greitis proporcingas elektrinio lauko stipriui:

$$v = \frac{q_0 Z}{a} E,$$

o jo judris pagal (3.32)

$$\mu = \frac{v}{E} = \frac{q_0 Z}{a}$$

nuo lauko stiprio nepriklauso. Tokiu atveju galioja Omo dėsnis, pagal kurį (žr. (3.38))

$$\sigma = q_0 Z n (\mu_+ + \mu_-) = q_0 Z \alpha N (\mu_+ + \mu_-). \quad (4.29)$$

Čia μ_+ ir μ_- – teigiamų ir neigiamų jonų judris.

Elektrolitų elektrinio laidumo priklausomybę nuo temperatūros lemia du veiksniai. Pirma, disociacijos laipsnis α didėja temperatūrai didėjant, nes kuo intensyvesnis šiluminis judėjimas, tuo lengviau molekulėms suskilti į jonus. Antra, judris temperatūrai didėjant irgi didėja, nes mažėja tirpiklio (vandens) klampa. Dėl šių priežasčių **elektrolitų elektrinis laidumas didėja didėjant temperatūrai**.

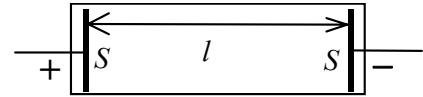
9. Dujų elektrinis laidumas. Jonizacija ir jonų rekombinacija. Jonų griūtis

Dujos, kuriose nėra elektringų dalelių, yra nebloginiai izoliatoriai. Tik jonizuotos dujos pasidaro laidžios, nes tada jose atsiranda krūvininkai: teigiamieji bei neigiamieji jonai ir elektronai. Taigi kad dujos taptų laidžios, būtinas išorinis poveikis (aukšta temperatūra, ultravioletiniai ar Rentgeno spinduliai ir t. t.). Jei elektrinis laukas nestiprus, tai srovė dujose nutrūksta, kai tik dingsta išorinis jonizuojantis poveikis. Toks dujų laidumas vadinamas **nesavaiminiu**.

Jei elektrinis laukas stiprus, jis pats jonizuoja dujas, ir jos pasidaro laidžios. Šis dujų laidumas vadinamas **savaiminiu**.

Panagrinėkime dujų nesavaiminį laidumą nuosekliau. Tar- kime, uždaramė vamzdyje su dviem laidžiais elektrodais yra du- jos (77 pav.).

Pažymėkime: l – atstumas tarp elektrodų, S – elektrodo plotas, r – rekombinacijos koeficientas, n – vieno ženklo jonų tankis (tariame, kad teigiamų ir neigiamų jonų yra po lygiai), q – jono krūvis, j – srovės tankis, ξ – jonų sukūrimo tūrio vienetė sparta



77 pav.

$$\xi = \left(\frac{dn}{dt} \right)_{\text{gen}}.$$

Jonų skaičiaus vamzdyje kitimą aprašo lygtis

$$\frac{d(lSn)}{dt} = \xi lS - rn^2 lS - \frac{jS}{q}. \quad (4.30)$$

Šios lygties dešinės pusės pirmasis narys išreiškia per laiko vienetą jonizatoriaus sukuriamų jonų skai- čių vamzdyje, antrasis – rekombinuojančių jonų skaičių, o trečiasis – pasiekiančių elektrodus ir virs- tančių neutraliomis molekulėmis jonų skaičių.

(4.30) galime suprastinti padaliję iš vamzdžio tūrio lS :

$$\frac{dn}{dt} = \xi - rn^2 - \frac{j}{ql}. \quad (4.31)$$

Esant pusiausvyrai $\frac{dn}{dt} = 0$, taigi

$$\xi - rn^2 - \frac{j}{ql} = 0. \quad (4.32)$$

Panagrinėkime (4.32) lygties atskirus atvejus.

1) Elektrodus pasiekiančių jonų skaičius mažas lyginat su rekombinuojančių jonų skaičiumi, t. y.

$$\frac{j}{ql} \ll rn^2.$$

Tuo atveju (4.32) lygtyje atmetę trečiąją narį nustatome, kad

$$n = \sqrt{\frac{\xi}{r}}$$

nepriklauso nuo lauko stiprio, t. y. galioja Omo dėsnis, pagal kurį (žr. (3.30) ir (3.38))

$$j = q(\mu_+ + \mu_-)nE = q(\mu_+ + \mu_-)\sqrt{\frac{\xi}{r}}E. \quad (4.33)$$

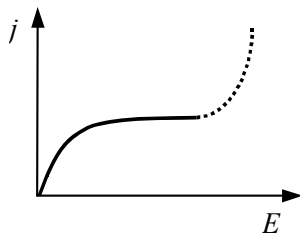
2) Elektrodus pasiekiančių jonų skaičius daug didesnis už rekombinuojančių jonų skaičių, t. y.

$$\frac{j}{ql} \gg rn^2.$$

Šiuo atveju atmetę (4.32) antrąją narį gauname, kad srovės tankis

$$j = q\xi l, \quad (4.34)$$

tuo pačiu ir srovės stipris $I = jS$ yra pastovūs. Ši srovė vadinama **soties srove**.

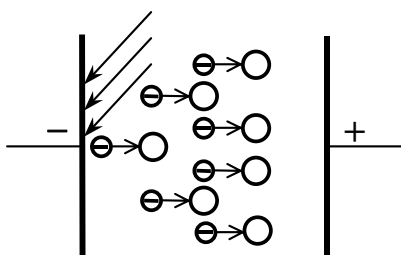


78 pav.

Srovės tankio priklausomybės nuo elektrinio lauko stiprio diagrama parodyta 78 pav. Joje punktyrinė kreivė vaizduoja savaiminės srovės tankį.

Savaiminis dujų laidumas pasireškia tada, kai dujose esantys elektronai prieš rekombinuodami su dujų jonais suspėja tiek pagreitėti, kad savo smūgiais jonizuoja dujų molekules. Šis reiškinys dažnai vadinamas **jonų griūtimi**. Jonų griūtis prasideda tada, kai elektrono energija, įgyjama laisvojo kelio ilgyje λ , pasidaro ne mažesnė už jonizacijos energiją W :

$$q_0 \lambda E \geq W. \quad (4.35)$$

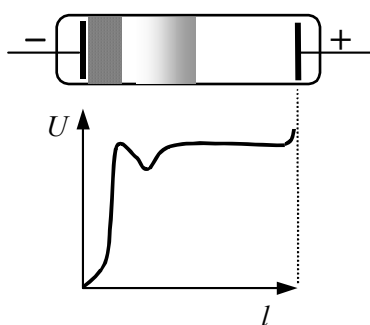


79 pav.

Jonų griūties susidarymo schema pavaizduota 79 pav. Jame mažesnieji neigiamai įelektrinti rutuliukai vaizduoja elektronus, o didesnieji neutralūs – dujų atomus. Kad savaiminė srovė nenutrūktų, dujose prie katodo nuolat turi atsirasti kad ir nedidelis elektronų skaičius, nes elektronai pasiekia anodą. Taiigi būtinas pašalinis jonizatorius, išmušantis iš katodo elektronus, pavyzdžiui, ultravioletiniai spinduliai, kurie 79 pav. pavaizduoti rodyklėmis. Nesant pašalinio jonizatoriaus, kai laukas pakankamai stiprus, elektronus iš katodo gali išmušti ir jį bombarduojantys teigiamieji dujų jonai. Toks reiškinys vadinamas antrine elektronų emisija iš katodo.

10. Pagrindiniai dujinio išlydžio būdai

Tekant dujomis savaiminei elektros srovei, priklausomai nuo sąlygų, gali pasireikšti gana įvairūs reiškiniai. Keletą jų trumpai aptarsime.



80 pav.

1) Rusenantysis išlydis. Jis vyksta praretintose dujose. Mažėjant slėgiui laisvojo kelio ilgis λ didėja, tad susidaro sąlygos patenkinti (4.35) nelygybę. Be to, šio išlydžio metu vyksta antrinė elektronų emisija iš katodo, kuri neleidžia jam užgęsti. Stebint šį išlydį, tarp katodo ir anodo matosi šviesios ir tamsios sritys, kurių matmenys ir forma priklauso nuo slėgio ir lauko stiprio. Tačiau svarbiausią reikšmę turi tik dvi sritys – prie katodo esanti tamsi ir už jos esanti šviesi. Potencialo pasiskirstymo matavimai rodo, kad didžioji jo dalis tenka prie katodo esančiai tamsiajai sričiai (80 pav.). Šios srities plotis maždaug lygus vidutiniam elektrono laisvajam keliui. Pralėkę ją elektronus įgyja energiją, reikalingą jonų griūčiai sukelti. Taiigi staigus potencialo kitimas prie katodo yra būdingas rusenančiojo išlydžio požymis.

2) Kibirkštinis išlydis. Jis atsiranda esant atmosferos slėgiui ir maždaug vienalyčiam elektriniam laukui, kai jo stipris pasiekia tam tikrą krizinę vertę (maždaug $3 \cdot 10^6$ V/m ore normaliomis sąlygomis). Kibirkštis atrodo kaip ryškiai švytintis siauras įvairiai išsilankstęs ir šakotas kanalas. Kanalo varža esti gana maža, tad prasidėjus šiai iškrovai įtampa, o kartu ir lauko stipris, dažniausiai greitai mažėja, ir iškrova nutrūksta. Kibirkštinio išlydžio pavyzdys gamtoje – žaibas. Žaibo srovės stipris siekia ($10^2 - 4 \cdot 10^4$) A, įtampa $(1 - 3) \cdot 10^6$ V, trukmė apie 1 ms, bet kartais tuo pačiu kanalu vienas po kito įvyksta keli žaibai, kurių visų trukmė gali siekti 1,5 s.

3) Vainikinis išlydis. Šis išlydis atsiranda irgi esant palyginti dideliame slėgiui (pavyzdžiui, atmosferos), kai elektrinis laukas esti ženkliai nevienalytis. Kaip jau žinome, toks laukas esti, pavyzdžiui, prie smailumų (žr. 17 pav.). Arčiau smailumos lauko stipris turi būti pakankamas jonų griūčiai palaikyti, tad ten vyksta jonizacijos ir rekombinacijos procesai, ši sritis švyti. Švytėjimo intensyvumas esti didesnis ten, kur laukas stipresnis, t. y. arčiau smailumos. Tolstant nuo smailumos, jis silpnėja. Dar toliau, kai lauko stiprio nebeužtenka jonų griūčiai palaikyti, veikiant laukui juda tik vienerūšiai krūvininkai, ir švytėjimo nebėsti.

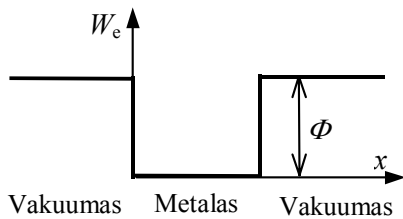
Gamtoje pasitaikantys šio tipo išlydžiai vadinami šv. Elmo ugnimis. Jie kartais susidaro prie medžių viršūnių, bažnyčių bokštų, laivų stiebų ir t. t. Į juos reikia atsižvelgti konstruojant aukštos įtampos įrenginius, pavyzdžiui, tiesiant aukštos įtampos linijas. Ten reikia vengti smailumų ir naudoti pakankamai storus laidus.

4) Lankinis išlydis. Šis išlydis vyksta esant nedidelei įtampai (keliasdešimt voltų), bet stipriai srovei (dešimtys ar šimtai amperų). Pavyzdžiui, sulietus du anglinius elektrodus daugiausia šilumos išsiskiria sąlyčio vietoje. Pamažu tolinant elektrodus, tarp jų atsiranda išlinkęs ryškiai šviečiančių dujų kanalas, kuris vadinamas elektros lanku. Patys elektrodai irgi smarkiai įkaista. Labiausiai įkaista neigiamasis elektrodas (katodas), kuriame atsiranda įduba (lanko krateris). Jo temperatūra esant atmosferos slėgiui siekia apie 4000° C. Nustatyta, kad didelį elektros lanko dujų elektrinį laidumą sąlygoja intensyvi šiluminė elektronų (termoelektroninė) emisija iš katodo esant tokiai aukštai temperatūrai.

Elektros lankas kartais naudojamas kaip intensyvios šviesos šaltinis projekciniuose aparatuose, atliekant metalų suvirinimo ir pjaustymo darbus, gyvsidabrinuose lygintuvuose ir kitur.

11. Šiluminė (termoelektroninė) elektronų emisija. Erdvinis krūvis tekant srovei vakuume

Metaluose yra laisvųjų elektronų. Panagrinėkime, kokia galimybė jiems išlėkti iš metalo dėl jų šiluminio judėjimo. Tarkime, kad metalas yra vakuume. Pasiekę metalo elektronai jį įelektrina neigiamai, tuo tarpu kiek giliau esantys jonai – teigiamai. Taip metalo paviršiuje susidaro dvigubas įelektrintas sluoksnis, kurio laukas veikia elektronus jėga, nukreipta į metalo vidų. Kad išlėktų iš metalo, elektronas praeidamas šį sluoksnį turi atlikti tam tikrą darbą. Tam darbui atlikti reikalinga energija. Mažiausia energija, kurią reikia suteikti elektronui, kad jis išlėktų iš kūno, vadinama **elektrono išlaisvinimo darbu** (Φ). Įvairių metalų išlaisvinimo yra skirtingi ir siekia kelis elektronvoltus.

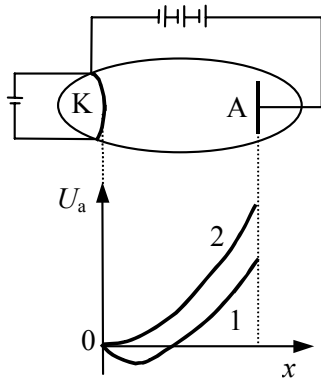


81 pav.

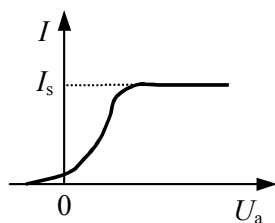
Elektrono energija metalo sąlytyje su vakuumu pavaizduota 81 pav. Taigi metale esančio elektrono energija yra Φ dydžiu mažesnė nei vakuume. Kartais sakoma, kad metale esantys elektronai yra potencialinėje duobėje.

Laisvieji elektronai dalyvauja šiluminiame judėjime. Jeigu paviršiaus link judančio elektrono šiluminė energija didesnė už išlaisvinimo darbą Φ , elektronas gali išlėkti iš kūno į vakuumą. Elektronų išlėkimas iš kietojo kūno dėl jų šiluminio judėjimo vadinamas **šilumine elektronų (termoelektronine) emisija**.

Panagrinėkime išlėkusius iš katodo elektronus vakuuminiame diode (82 pav.). Jei potencialų skirtumas tarp anodo ir katodo (anodinė įtampa) nedidelė, išlėkę elektronai susitelkia prie katodo, sudarydami ten neigiamą tūrinį krūvį – elektronų debesėlį, kurio laukas stabdo emituojamus elektronus, dėl to dalis jų grįžta atgal į katodą.



82 pav.



83 pav.

Potencialo pasiskirstymą tarp katodo ir anodo šiuo atveju vaizduoja 1 kreivė. Kai anodinė įtampa padidinama tiek, kad jos kuriamas laukas prie katodo viršija elektronų debesėlio lauką, visi emituoti elektronai pasiekia anodą (2 kreivė). Šiuo atveju srovės stipris nepriklauso nuo anodinės įtampos. Tokia srovė vadinama **soties srove**.

Srovės stiprio priklausomybės nuo anodinės įtampos diagrama (diodo voltamperinė charakteristika) pavaizduota 83 pav. Kaip matyti, esant nedidelėms įtampoms srovės stipris didinant įtampą didėja sparčiau nei tiesiškai (voltamperinė charakteristika supertiesinė), nes mažėja elektroninis debesėlis. Atlikus pakankamai sudėtingus skaičiavimus, teoriškai galima parodyti, kad mažų anodinių įtampų srityje $I \propto U_a^{3/2}$ (trijų antrųjų dėsnis). Be to, tam tikra labai nedidelė turėjusių didelį šiluminį greitį elektronų dalis pasiekia anodą ir nesant anodinės įtampos. Kai įtampa pakankamai didelė, pasiekama soties srovė I_s .

Apskaičiuosime soties srovės tankį j_s laisviesiems elektronams taikydami dujų dėsnius. Pažymėkime: n – laisvųjų elektronų tankis, u – jų šiluminio judėjimo vidutinis greitis, q_0 – elektrono krūvis, T – absoliutinė temperatūra, k – Bolcmano konstanta, n_1 – iš paviršiaus ploto vieneto per laiko vienetą išlekiančių elektronų skaičius. Per laiko vienetą iš metalo išlėks tik tie elektronai, kurie nutolę nuo paviršiaus ne didesniu už u atstumu, o jų šiluminio judėjimo greitis nukreiptas link paviršiaus ir energija ne mažesnė už išlaisvinimo darbą. Atsižvelgdami į visas galimas judėjimo kryptis trimatėje erdvėje, nustatome kad tokių elektronų bus

$$n_1 = \frac{1}{6} n \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right),$$

o jų sąlygojamas soties srovės tankis

$$j_s = q_0 n_1 u = \frac{1}{6} q_0 n u \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right) = C T^{1/2} \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right). \quad (4.36)$$

Užrašant (4.36), buvo atsižvelgta, kad $u \propto T^{1/2}$ (žr. 4.9) ir C pažymėta nuo temperatūros nepriklausančių konstantų sandauga. (4.36) vadinama Ričardsono (O. V. Richardson) formule.

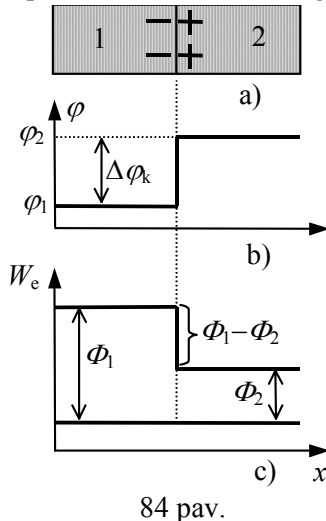
Skaičiavimai pagal kvantinę teoriją duoda šiek tiek kitokią (tikslėnę) soties srovės tankio išraišką:

$$j_s = AT^2 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right). \quad (4.37)$$

(4.37) vadinama Ričardsono ir Dašmano (*O. V. Richardson, S. Dushman*) formule. Joje konstanta $A=1,2 \cdot 10^6 \text{ A}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^2)$.

12. Kontaktinis (sąlytinis) potencialų skirtumas

Panagrinėkime dviejų metalų, turinčių skirtingus išlaisvinimo darbus, sąlytį. Tarkime, kad 1 metalo išlaisvinimo darbas Φ_1 didesnis negu 2 metalo išlaisvinimo darbas Φ_2 (84 pav.). Tokiu atveju daugiau elektronų pereis iš 2 metalo į 1, negu iš 1 į 2.



1 metalas įsielektrins neigiamai, o 2 – teigiamai (84 pav., a). Nusistovėjus pusiausvyrai elektronų energijos abiejuose metaluose pasidarys vienodos (84 pav. c). 1 metalo potencialą pažymėkime φ_1 , o 2 – φ_2 . Tada kontaktinis potencialų skirtumas $\Delta\varphi_k = \varphi_1 - \varphi_2$ (84 pav. b). Jį galima susieti su išlaisvinimo darbų skirtumu. Reikia tik atsižvelgti, kad elektrono krūvis q_0 neigiamas, todėl jo energija $W_e = q_0 \varphi$ yra mažesnė ten, kur potencialas didesnis, ir atvirkščiai (tai matyti iš 84 pav. b) ir c)). Elektrono energijos šuolis pereinant iš vieno metalo į kitą yra $\Phi_1 - \Phi_2$, o kontaktinis potencialų skirtumas

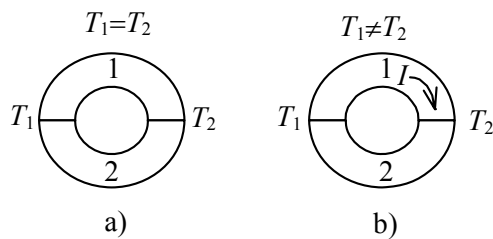
$$\Delta\varphi_k = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{q_0} \quad (4.38)$$

Pastebėsime, kad kontaktinis potencialų skirtumas susidaro ne tik dviejų metalų sąlytyje, bet ir tarp metalo ir puslaidininkio, tarp metalo ir izoliatoriaus, tarp dviejų puslaidininkių ir t. t. Skirtumas tik tas, kad metaluose dėl didelio laisvųjų elektronų tankio kontaktinis laukas esti sutelktas labai plona (atominų matmenų, t. y. $\sim 10^{-10} \text{ m}$ storio) sluoksnyje sąlyčio vietoje (todėl braižydami paveikslus tarėme, kad elektrono energija ir potencialas

pakinta šuoliškai), o puslaidininkių ar dielektrikų atveju tas laukas gana giliai prasiskverbia į mažesnio laidumo medžiagą.

13. Termoelektrinis, Peltjė ir Tomsono reiškiniai

Iš dviejų skirtingų metalų padarykime uždara grandinę. Jei abiejų sąlyčių temperatūra ta pati, grandinėje srovės nebus, nes potencialų šuolių suma apeinant tokią uždara grandinę lygi nuliui ($\Delta\varphi_{12} = \Delta\varphi_{21}$) (85 pav. a).



Tačiau jei sąlyčių temperatūros skirtingos, grandinėje teka elektros srovė (85 pav. b). Šio reiškinio priežastis yra kontaktinio potencialų skirtumo priklausomybė nuo temperatūros, nes elektrono išlaisvinimo darbas šiek tiek priklauso nuo temperatūros. Taigi esant skirtingoms sąlyčių temperatūroms $\Delta\varphi_{12} \neq \Delta\varphi_{21}$, ir grandinėje veikianti elektrovara $\mathcal{E} = |\Delta\varphi_{12} - \Delta\varphi_{21}| \neq 0$. Šis reiškinys vadinamas termoelektriniu (arba Zėbeko, (*T. J. Seebeck*)) reiškiniu.

Esant nelybiai dideliu sąlyčių temperatūrų skirtumui ΔT termoelektrovara $\mathcal{E} \propto \Delta T$. Proporcingumo koeficientą pažymėję α , užrašysime:

$$\mathcal{E} = \alpha \Delta T. \quad (4.39)$$

α vadinamas **termoelektriniu koeficientu**. Jo SI vienetas yra 1 V/K . Apskritai α šiek tiek priklauso nuo temperatūros. Todėl norint šį reiškinį aprašyti tiksliau reikia naudotis mažo temperatūros pokyčio dT sąlygojamu termoelektrovaros pokyčiu $d\mathcal{E}$ ir vietoje (4.39) rašyti

$$d\mathcal{E} = \alpha dT. \quad (4.40)$$

Čia α vadinamas diferencialiniu termoelektriniu koeficientu. Iš (4.40) nustatome, kad

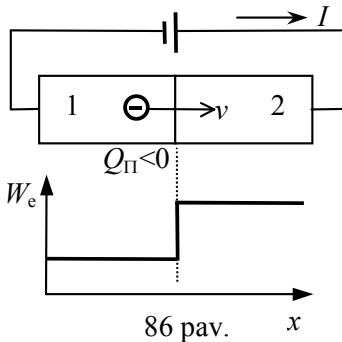
$$\alpha = \frac{d\mathcal{E}}{dT}. \quad (4.41)$$

Praktikoje plačiai naudojami termoelementai bei termostulpeliai temperatūroms matuoti. Vietoje metalų panaudojant puslaidininkius, yra sukurti termoelektriniai generatoriai, kurie naudojami kaip srovės šaltiniai.

Jeigu per dviejų skirtingų metalų sąlytį leidžiama elektros srovė, tai sąlytyje šalia Džaulio šilumos išsiskiria (arba esti sunaudojama) papildoma šiluma, vadinama Peltjė (Ž. Š. A. *Peltier*) šiluma. Peltjė šilumos kiekis Q_{Π} proporcingas pratekėjusiam elektros krūviui q . Taigi galima užrašyti:

$$Q_{\Pi} = \Pi q. \quad (4.42)$$

Čia Π – Peltjė koeficientas. Jo SI vienetas yra $\frac{1 \text{ J}}{1 \text{ C}} = 1 \text{ V}$.



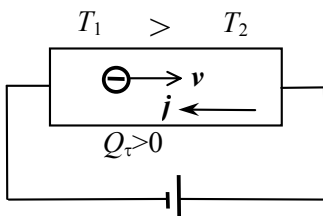
Peltjė reiškinys aiškinamas taip. Tekant srovei krūvininkai (tarkime, elektronai) sąlytyje pereina iš vieno metalo į kitą. Kadangi dėl skirtingų išlaisvinimo darbų elektronų energija skirtinguose metaluose esti skirtinga, elektronai, patekę iš vieno metalo į kitą, turi arba didesnę energiją, negu to metalo elektronai (tada energijos perteklių jie atiduoda metalo gardelei ir Peltjė šiluma išsiskiria), arba mažesnę (tada energijos trūkumą pasiima iš gardelės ir sąlyčio temperatūra sumažėja).

Peltjė reiškinio paaiškinimui skirtas 86 pav. Jame srovės kryptis tokia, kad elektronai, judėdami iš 1 metalo į 2, turi įveikti potencinį barjerą, taigi šiuo atveju Peltjė šiluma bus sugerama, sąlytis vės. Pakeitus srovės kryptį, Peltjė šiluma sąlytyje išsiskirtų.

Jei laidininku, kuriame yra sudarytas temperatūros gradientas, teka elektros srovė, tai šalia Džaulio šilumos išsiskiria (arba yra sugerama) papildoma šiluma, vadinama Tomsono (*V. Thomson*) šiluma. Išsiskyrusios Tomsono šilumos kiekis tūrio vienetą per laiko vienetą proporcingas temperatūros gradientui dT/dx ir srovės tankiui j :

$$\frac{Q_{\tau}}{Vt} = \tau \frac{dT}{dx} j. \quad (4.43)$$

Čia Q_{τ} – Tomsono šilumos kiekis, V – tūris, t – laikas. Proporcingumo koeficientas τ vadinamas Tomsono koeficientu. Jis priklauso nuo laidininko rūšies bei temperatūros.



Tomsono reiškiniai paaiškinti skirtas 87 pav. Jame srovės kryptis tokia, kad elektronai dreifuoja iš šiltesnio laidininko galo link šaltesnio. Šiltesniame gale jų kinetinė energija didesnė nei šaltesniame. Taip judėdami jie į šaltesnės srities patenka turėdami energijos perteklių, kurį pralėkę laisvojo kelio ilgį, atiduoda gardelei. Taigi šiuo atveju visame laidininko tūryje išsiskiria Tomsono šiluma. Pakeitus srovės arba temperatūros gradiento kryptį, Tomsono šiluma būtų sugerama.

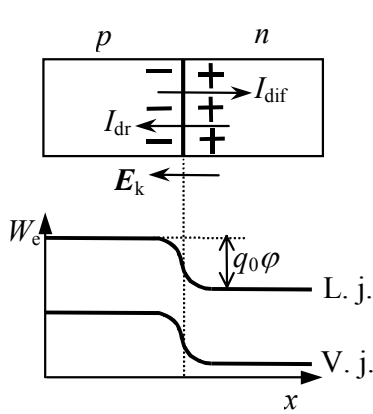
Pažymėsime, kad Tomsono šiluma esti labai nedidelė.

14. *p-n* sandūros elektrinis laidumas

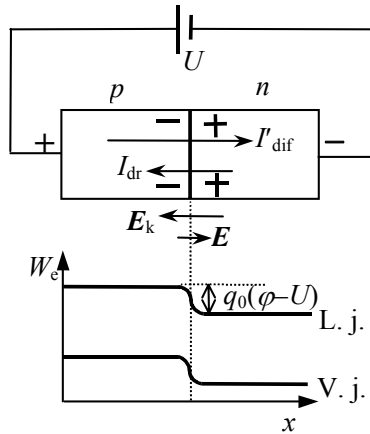
p-n sandūrą sudaro to paties puslaidininkio skylinio ir elektroninio laidumo tipų sąlytis. Praktiškai *p-n* sandūra sudaroma ne suglaudžiant tų dviejų tipų atskirus gabalus, o difuzijos būdu tą patį gabalą legiruojant atitinkamomis priemaisomis.

Elektronai iš *n* tipo puslaidininkio difunduoja į *p* tipo puslaidininkį, o skylės – iš *p* tipo į *n* tipo puslaidininkį, todėl ties sandūra *n* tipo puslaidininkyje kaupiasi teigiamieji krūviai, o *p* tipo puslaidininkyje – neigiamieji (88 pav.). Šie krūviai sukuria kontaktinį lauką E_k , veikiantį krūvininkus jų difuzijai priešinga kryptimi. Kai įtampos šaltinis neprijungtas pusiausvyroje difuzijos ir dreifo srovių moduliai turi būti lygūs ($|I_{\text{dif}}| = |I_{\text{dr}}| = I_0$), o srovė lygi nuliui ($I = I_{\text{dif}} - I_{\text{dr}} = 0$).

88 pav. taip pat pateikiamas *p-n* sandūros juostų modelis. Kad būtų paprasčiau, pavaizduota tik laidumo juostos apačia ir valentinės juostos viršus. Kaip ir metalų atveju (žr. 84 pav.), elektrono energija didesnė ten, kur susikaupę neigiamieji krūviai, tik puslaidininkiuose elektrono energija bei potencialas kinta ne staigiai, o palaipsniui, nes sąlytinis laukas į puslaidininkį gali prasiskverbti ir gana giliai. Susidaręs potencialo barjeras pažymėtas ϕ .



88 pav.



89 pav.

difunduojantys krūvininkai jį lengviau įveikia, tad difuzijos srovė ženkliai padidėja. Skaičiavimai, kurių čia nepateikiame, rodo, kad difuzijos srovė padidėja $\exp\left(\frac{q_0 U}{kT}\right)$ kartų ir tampa lygi $I'_{dif} = I_0 \exp\left(\frac{q_0 U}{kT}\right)$. Dreifo srovė, kol galioja sąlyga $E \ll E_k$, beveik nepakinta, t. y. lieka lygi I_0 . Srovės grandinėje stipris

$$I = I'_{dif} - I_0 = I_0 \left(\exp \frac{q_0 U}{kT} - 1 \right). \quad (4.44)$$

Kaip matyti iš (4.44), didinant šaltinio įtampą srovės stipris didėja eksponentiškai. Sakoma, kad šaltinis prijungtas pralaidžiaja kryptimi.

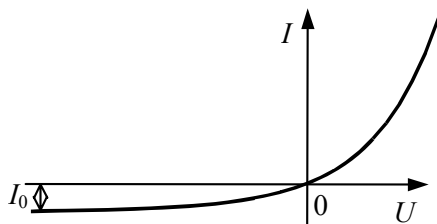
Jei šaltinio teigiamąjį polių prijungtume prie n tipo puslaidininkio, o neigiamąjį – prie p tipo, šaltinio kuriamas laukas E būtų tos pačios krypties, kaip ir kontaktinis laukas E_k . Šiuo atveju difuzinė srovė sumažėtų $\exp\left(\frac{q_0 U}{kT}\right)$ kartų ir taptų lygi $I_0 \exp\left(-\frac{q_0 U}{kT}\right)$, o srovės grandinėje stipris būtų lygus

$$I = I_0 \left(\exp - \frac{q_0 U}{kT} - 1 \right). \quad (4.45)$$

Didinant įtampą, šiuo atveju srovės stipris gana greitai artėja prie soties srovės I_0 . Sakoma, kad srovės šaltinis šiuo atveju prijungtas užtvarine kryptimi.

Srovės stiprio priklausomybę nuo įtamos patogų išreikšti viena formule

$$I = I_0 \left(\exp \pm \frac{q_0 U}{kT} - 1 \right). \quad (4.46)$$



90 pav.

Čia “+”, ženklas rašomas pralaidžiajai kryptčiai, o “-”, – užtvarinei.

p - n sandūros (puslaidininkinio diodo) voltamperinė charakteristika, nubraižyta remiantis (4.46), pateikta 90 pav.

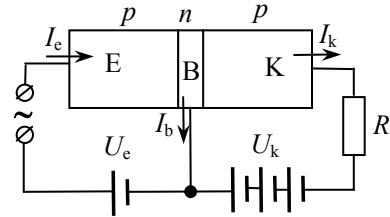
15. Tranzistorius

Bipolinių tranzistorių sudaro dvi p - n sandūros. Pagal p ir n sričių išdėstymą bipoliniai tranzistoriai esti dviejų tipų: p - n - p ir n - p - n .

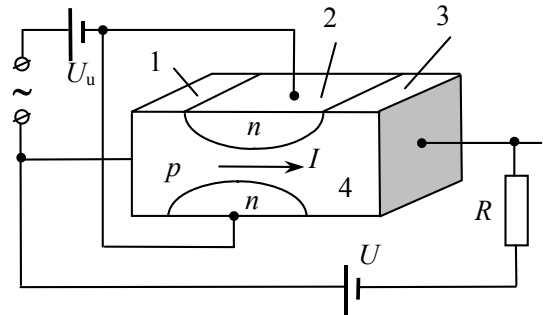
Panagrinėkime išsamiau p - n - p tipo tranzistoriaus sandarą ir veikimo principą. Jo struktūrinė schema pateikta 91 pav. Pirmoji p sritis E vadinama emiteriu, vidurinė n sritis (B) – baze, kita p sritis (K) – kolektoriumi. Jei tranzistorius jungiamas bendra baze, tarp emiterio ir bazės esanti p - n sandūra paprastai jungiama pralaidžiaja kryptimi, o tarp

bazės ir kolektoriaus – užtvarinė (toks jungimo būdas pavaizduotas 91 pav.). Taip sujungus barjeras skylėms pereiti iš emiterio į bazę esti sumažėjęs, todėl daug jų gali patekti į bazę. Per bazę link kolektoriaus tos skylės juda difuzijos būdu. Nedidelė jų dalis rekombinuoja su bazės elektronais. Dėl teka tam tikra nedidelė bazės srovė I_b . Pasiekusios bazės ir kolektoriaus sandūrą, skylės lengvai patenka į bazę, nes šios sandūros užtvarinė kryptis yra bazės elektronams, bet ne skylėms. Taigi kolektoriaus grandinė teka beveik tokio pat stiprio srovė, kaip ir emiteriu ($I_b \approx I_e$). Kadangi sandūros tarp bazės ir kolektoriaus varža didelė (užtvarinė kryptis), šioje grandinėje galima jungti gerokai didesnės įtampos šaltinį U_k ir didesnės varžos apkrovos rezistorių R negu emiterio grandinėje. Tai srovei tekant didesnės varžos rezistoriumi esti didesnė ir jo įtampa $U = I_k R$ lyginant su emiterio grandinės įtampa. Taip gaunamas įtampos stiprinimas. Aišku, kad tranzistorius stiprina ir galią, kuri, esant tai pačiai srovei, yra proporcinga įtampai.

Vienpoliame (lauko) tranzistoriuje srovę I sudaro pagrindiniai krūvininkai, kurių srautą valdo išorinis elektrinis laukas, statmenas srovės kryptčiai (92 pav.). Srovė I iš šaltinio U laidžiu kanalu 4 teka nuo ištakos 1 į santaką 3. Šios srovės stiprį galima keisti keičiant kanalo (p - n sandūros tarp užtūros 2 ir kanalo 4) efektyvųjį skerspjūvį, kurį valdo užtūros įtampos šaltinis U_u bei nuosekliai su juo jungiamas stiprinamasis signalas. Sustiprintas signalas gaunamas apkrovos rezistoriuje R .



91 pav.



92 pav.

5 skyrius

NUOSTOVUSIS MAGNETINIS LAUKAS

1. Judančių krūvių sąveika. Magnetinė jėga ir jos aiškinimas naudojant lauko sąvoką

Nagrinėsime dviejų taškinių krūvių q_1 ir q_2 sąveikos jėgas dviejose koordinačių sistemose: xyz , kurios atžvilgiu krūviai nejuda, ir $x'y'z'$, judančioje pirmosios sistemos (taigi ir krūvių) atžvilgiu x ašies kryptimi greičiu v (93 pav.). Tegu per krūvius išvesta tiesė lygiagreti z ašiai, o atstumas tarp krūvių r . Sistemoje xyz , kurios atžvilgiu krūviai nejuda, juos veikia lygiagreti z ašiai kulinė stūmos jėga

$$F_z = F_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (5.1)$$

Ši jėga gali būti išreikšta ir taip:

$$F_z = \frac{dp_z}{dt}. \quad (5.2)$$

Čia p_z yra impulso z dedamoji.

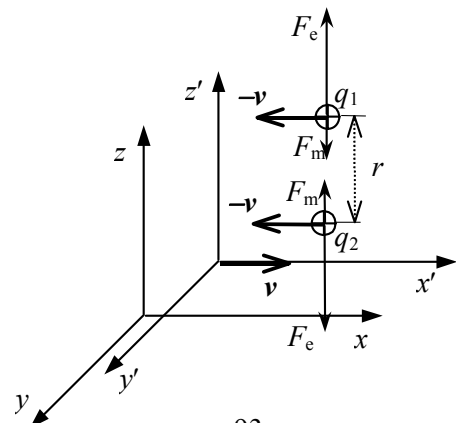
Sistemoje $x'y'z'$ krūvių sąveikos jėga

$$F'_z = \frac{dp'_z}{dt'} = \frac{dp_z}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'}. \quad (5.3)$$

Pagal Lorencą (*H. A. Lorentz*) transformacijas

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

arba išreiškus t



93 pav.

$$t = t' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{vx}{c^2}.$$

Iš čia nustatome, kad

$$\frac{dt}{dt'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (5.4)$$

nes $dx/dt=0$ (xyz sistema nejuda).

Taigi remiantis (5.2), (5.3) ir (5.4)

$$F'_z = F_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (5.5)$$

Iš (5.5) matome, kad $F'_z < F_z$, t. y. sąveikos jėga krūviams judant sumažėja. Apskaičiuosime to sumažėjimo dydį. Tam (5.5) lygybės dešinę pusę padauginame ir padalykime iš $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$:

$$F'_z = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{q_1 q_2 v^2}{4\pi \epsilon_0 r^2 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Esant nedideliems greičiams (t. y. kai $v \ll c$) ši išraiška virsta tokia:

$$F'_z = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2} - \frac{q_1 q_2 v^2}{4\pi \epsilon_0 c^2 r^2} = F_e - F_m. \quad (5.6)$$

(5.6) lygybės antrasis narys, pažymėtas F_m , išreiškia krūvių sąveikos jėgos sumažėjimą jiems judant. Ši jėga vadinama **magnetine jėga**.

Kad F_m išraiška būtų paprastesnė pažymėkime

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}. \quad (5.7)$$

μ_0 vadinamas **magnetine konstanta**. Jos skaitinė vertė tokia: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \approx 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$.

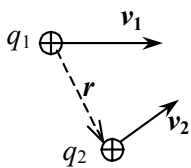
Taigi dviem vienarūšiams krūviams judant vienodais greičiais v , kai tie greičiai statmeni krūvių jungiančiai tiesės atkarpai r , tarp jų atsiranda traukos jėga, kurios modulis

$$F_m = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v^2}{4\pi r^2}.$$

Bendru atveju, jei krūvių greičiai v_1 ir v_2 būtų skirtingi ir nukreipti bet kaip tiek vienas kito, tiek ir tiesės atkarpos r atžvilgiu (94 pav.), jų magnetinės sąveikos jėgos išraiška būtų tokia:

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0 q_1 q_2 (\vec{v}_2 \times (\vec{v}_1 \times \vec{r}))}{4\pi r^3}. \quad (5.8)$$

Kaip matome, judančių krūvių sąveikai aprašyti nepakanka Kulono dėsnio, nes atsiranda papildoma jėga, kuri buvo pavadinta magnetine. Panašiai, kaip elektrostatinė sąveika perduodama per elektrostatinį lauką, taip ir magnetinė sąveika perduodama per tam tikrą materijos formą – **magnetinį lauką**.



94 pav.

2. Judančio krūvio kuriamas magnetinis laukas

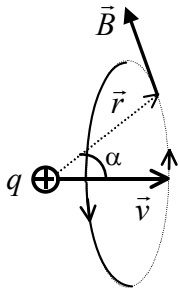
I (5.8) išraišką, aprašančią dviejų kūnų sąveiką, įeina abu kūnus apibūdinantys dydžiai: krūviai q_1 ir q_2 ir greičiai v_1 ir v_2 . Naudojant magnetinio lauko sąvoką, galima tarti, kad vienas tų kūnų sukuria magnetinį lauką, o antrąjį tas magnetinis laukas veikia. Tegu magnetinį lauką kuria krūvis q_1 . Tada tą magnetinį lauką taške, kuriame yra krūvis q_2 , galima apibūdinti fizikiniu dydžiu

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q_1 (\vec{v}_1 \times \vec{r})}{4\pi r^3}. \quad (5.9)$$

Dydis \vec{B} vadinamas **magnetinio srauto tankio** arba **magnetinės indukcijos vektoriumi**. (Priminsime, kad elektrostatikoje analogiškas dydis vadinamas elektrinio lauko stipriu).

Taigi greičiu v judantis krūvis taške, esančiame \vec{r} atstumu nuo jo, sukuria magnetinį lauką, kurio srauto tankis

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q (\vec{v} \times \vec{r})}{4\pi r^3}. \quad (5.10)$$



95 pav.

\vec{B} vektoriaus kryptį nusako dviejų vektorių \vec{v} ir \vec{r} vektorinės sandaugos taisyklė. Praktiškai \vec{B} kryptį nustatyti patogiau pasinaudoti dešiniojo sraigto (grąžto) taisykle: **jei dešiniojo sraigto slenkamasis judesys sutampa su teigiamo krūvio judėjimo kryptimi, tai sraigto galvutės sukimosi kryptis rodo magnetinio lauko jėgų linijų kryptį**. (95 pav.).

Kaip matyti iš (5.10), $\vec{B} \perp \vec{v}$ ir $\vec{B} \perp \vec{r}$.

Judant neigiamam krūviui sraigto slenkamasis judesys turi būti nukreiptas prieš krūvio greičio kryptį.

3. Lorencio jėga

I (5.8) įrašę (5.9), nustatome, kad krūvi q_2 veikianti magnetinė jėga išreiškiama taip:

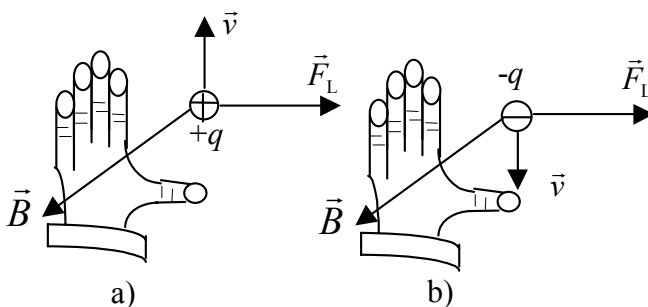
$$\vec{F}_m = q_2 (\vec{v}_2 \times \vec{B}).$$

Judantį magnetiniame lauke krūvi veikianti jėga vadinama **Lorencio**

(H. A. Lorentz) **jėga**. Jei krūvis q juda magnetiniame lauke greičiu v , jį veikia Lorencio jėga

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (5.11)$$

Iš (5.11) matome, kad $\vec{F}_L \perp \vec{v}$ ir $\vec{F}_L \perp \vec{B}$. Šios jėgos kryptį nustatyti taip pat galima pritaikyti kairiosios



96 pav.

rankos taisyklę: jeigu kairiąją ranką ištiesime taip, kad magnetinio lauko vektorius \vec{B} būtų nukreiptas į delną, o ištiesti keturi pirštai nukreipti teigiamojo krūvio greičio \vec{v} kryptimi (96 pav., a)) (arba priešingai neigiamojo krūvio greičio kryptiai (96 pav., b))), tai atlenktas stačiu kampu nykštys rodys jėgos \vec{F}_L kryptį.

Iš mechanikos kurso žinome, kad greičiui statmena jėga neatlieka darbo, taigi nepakeičia kūno kinetinės energijos, tuo pačiu ir jo greičio modulio. Taigi **magnetiniame lauke judančios elektringos dalelės greičio modulis nekinta, o kinta tik greičio vektoriaus kryptis**.

Jei kartu yra magnetinis ir elektrinis laukai, tai Lorencio jėga

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (5.12)$$

4. Reliatyvistinė magnetinio lauko kilmė

Iš (5.10) matyti, kad magnetinio srauto tankis B priklauso nuo krūvio greičio v . Tačiau greitis yra reliatyvus dydis, nes jo vertė priklauso atskaitos sistemos pasirinkimo. Taigi ir magnetinio srauto tankis priklauso nuo pasirinktos atskaitos sistemos.

Kaip matyti iš (5.6),

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{v^2}{c^2}, \quad (5.13)$$

t. y. magnetinė jėga, lyginant ją su Kulono jėga, yra antros eilės mažas dydis v/c atžvilgiu. Todėl magnetinės sąveikos stiprumą galima lyginti su elektrinės sąveikos stiprumu tik kai elektringų dalelių greičiai yra gana dideli. Bet ji esti ženkliai ir esant mažiems krūvių greičiams, jei dėl kokių nors priežasčių elektrinė sąveika nepasireiškia. Pavyzdžiui, tekant elektros srovei laidininkais jie praktiškai esti neutralūs, nes judančių elektronų krūvi neutralizuoja teigiamieji laidininkų jonai. Tad lieka tik magnetinė jėga, kuri, esant įprastiems

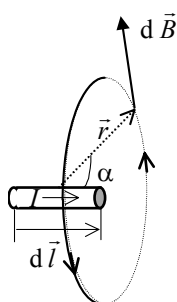
elektronų dreifo greičiams, nors esti apie 10^{20} kartų mažesnė už Kulono jėgą, tačiau būna pakankamai didelė. Jos dėka veikia elektros varikliai, sukantys galingas fabrikų mašinas, varantys troleibusus ir t. t.

5. Srovės elemento kuriamas laukas. Bio ir Savaro dėsnis

Kaip matėme, judantys krūviai kuria magnetinį lauką. Elektros srovė yra kryptingas krūvių judėjimas, Vadinasi, elektros srovė taip pat turi kurti magnetinį lauką.

Elektros srovės sukurtas magnetinio srauto tankis (magnetinio lauko indukcija) priklauso ne tik nuo srovės stiprio bei atstumo iki laido, bet ir nuo laido formos, jo matmenų ir orientacijos erdvėje. Todėl bendros formulės, pagal kurią būtų galima apskaičiuoti elektros srovės kuriamo magnetinio lauko srauto tankį, nėra.

Palyginti nesudėtingai galima išreikšti tik labai trumpos plonos laido su srove atkarpėlės kuriamą magnetinį lauką. Atkarpėlės ilgį pažymėkime dl , o ja tekančios srovės stiprį I . Vektorius $I d\vec{l}$ vadinamas **srovės elementu**. Čia $|d\vec{l}| = dl$, o $d\vec{l}$ kryptis sutampa su srovės tekėjimo kryptimi (97 pav.).



97 pav.

Krūvininkų skaičių srovės elemente pažymėkime dN , o jų dreifo greitį v , srovės elemento skerspjūvio plotą S , krūvininkų tankį n . Tada pasinaudodami (5.10) apskaičiuojame, kad srovės elemento sukurtas magnetinio srauto tankis

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 q (\vec{v} \times \vec{r})}{4\pi r^3} \cdot dN. \quad (5.14)$$

Pasinaudodami (3.5), nustatome, kad

$$v = \frac{I}{qnS}, \quad (5.15)$$

o

$$dN = n dV = nS dl. \quad (5.16)$$

Įrašę šias v ir dN išraiškas į (5.14), gauname:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I (d\vec{l} \times \vec{r})}{4\pi r^3}. \quad (5.17)$$

(5.17) formulė išreiškia Bio ir Savaro (*J. B. Biot, F. Savart*) dėsnį.

$d\vec{B}$ vektorius kryptį nusako dviejų vektorių $d\vec{l}$ ir \vec{r} vektorinės sandaugos taisyklė.

Praktiškai $d\vec{B}$ kryptį nustatyti patogiau pasinaudoti dešininio sraigto (grąžto) taisykle: **jei dešininio sraigto slenkamasis judesys sutampa su elektros srovės kryptimi srovės elemente, tai sraigto galvutės sukimosi kryptis rodo magnetinio lauko jėgų linijų kryptį**. $d\vec{B}$ vektorius esti nukreiptas jėgų linijos liestinės kryptimi. Srovės elemento kuriamo magnetinio lauko jėgų linijos yra apskritimai, kurių ašyje yra srovės elementas (žr. 97 pav.).

Kaip matyti iš (5.17), $d\vec{B} \perp d\vec{l}$ ir $d\vec{B} \perp \vec{r}$. Be to, $d\vec{B} = 0$, jei $d\vec{l} \parallel \vec{r}$, t. y. srovės elemento tęsinyje magnetinis laukas nesukuriamas.

Srovės elemento sukuriama magnetinio srauto tankio modulis

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin \alpha dl}{4\pi r^2}. \quad (5.18)$$

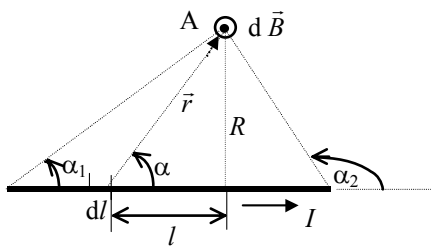
\vec{B} vektoriui, panašiai kaip ir \vec{E} , galioja **superpozicijos principas**:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (5.19)$$

Juo galima pasinaudoti norint apskaičiuoti bet kokios formos laidininku tekančios srovės sukurtą magnetinio srauto tankį. Praktiškai tai atliekama integruojant.

Panagrinėsime keletą svarbesnių pavyzdžių.

1 pavyzdys. Apskaičiuosime tiesaus plono laido, kuriuo teka srovė I , sukurtą magnetinio srauto tankį bet kokiame taške A, esančiame R atstumu nuo to laido (98 pav.).



98 pav.

l nuotolyje nuo statmens, nuleisto iš taško A į laidą, išskirkime srovės elementą $I d\vec{l}$. Jo sukurto magnetinio lauko srauto tankio dB modulis nusakomas (5.18) formule. Šiuo atveju $l=R\cot\alpha$, taigi

$$dl = -\frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Be to,

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Irašę šias dl ir r išraiškas į (5.18), gauname:

$$dB = -\frac{\mu_0 I \sin \alpha d\alpha}{4\pi R}.$$

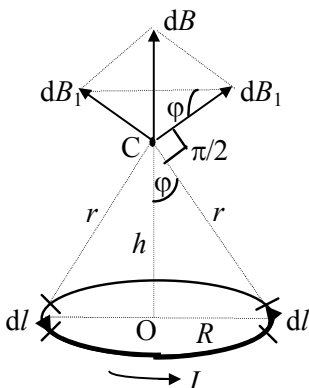
Pagal grąžto taisyklę nustatome, kad $d\vec{B}$ nukreiptas į mus (tuo atveju brėžinyje jo kryptį žymime \odot) ir jo kryptis nekinta kintant $d\vec{l}$ padėčiai laide. Taigi galime integruoti nuo α_1 iki α_2 :

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} |\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1|. \quad (5.20)$$

Jei laidas su srove yra begalinis, tuo atveju $\alpha_2 \rightarrow \pi$, $\alpha_1 \rightarrow 0$, ir pagal (5.20) gauname:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (5.21)$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime apskritos R spindulio vijos, kuria teka srovė I , kuriame magnetinio lauko srauto tankį taške C, esančiame statmenyje, iškeltame iš vijos plokštumos centro O ir nutolusiame nuo jo atstumu h (99 pav.).



99 pav.

Šiuo atveju iš pradžių galime vektoriškai sudėti dviejų vienodų modulių srovės elementų $I d\vec{l}$, esančių diametraliai priešingose vijos pusėse, kuriame lauko srauto tankius, kurių moduliai pagal (5.18)

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2},$$

nes kampas tarp $d\vec{l}$ ir \vec{r} $\alpha=90^\circ$, $\sin \alpha=1$. dB yra rombo, kurio kraštinė dB_1 , įstrižainė, taigi

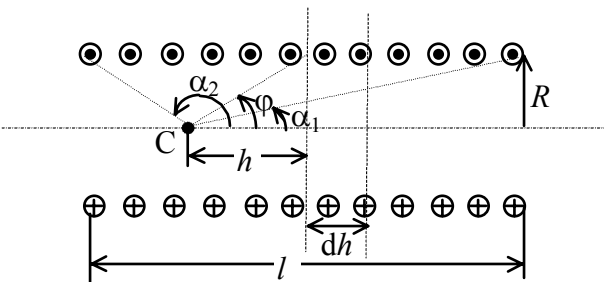
$$dB = 2 dB_1 \sin \varphi = 2 dB_1 \cdot \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I R dl}{2\pi r^3},$$

$$B = \frac{\mu_0 I R}{2\pi r^3} \int_0^{2\pi} dl = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I \sin^3 \varphi}{2R}, \quad (5.22)$$

nes $\sin \varphi = R/r$, o $r = (R^2 + h^2)^{1/2}$. Vektorius \vec{B} nukreiptas išilgai vijos ašies.

Pastebėsime, kad apskritos vijos atveju patogiau naudotis apgręžta dešiniojo sraigto taisykle: jei sraigą sukume taip, kad jo galvutės sukimosi kryptis sutaptų su srovės vijoje kryptimi, tada sraigto slenkamasis judesys rodytų vektoriaus \vec{B} kryptį vijos ašyje.

3 pavyzdys. Apskaičiuosime rite tekančios srovės I kuriame magnetinio lauko srauto tankį bet kuriame taške C, esančiame ritės ašyje. Ritės spindulys R , ilgis l , vijų skaičius N .



100 pav.

100 pav. vaizduoja ritės išilginį pjūvį brėžinio plokštuma. h nuotolyje nuo taško C mintyse išskirkime be galo trumpo dh ilgio ritės dalį. Tos dalies kuriame magnetinio srauto tankį dB taške C galime skaičiuoti pagal apskritos vijos formulę (5.22), padauginę ją iš vijų skaičiaus dN , tenkančio ritės ilgiui dh :

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin^3 \varphi}{2R} \cdot dN.$$

Šiuo atveju

$$dN = \frac{N}{l} \cdot dh,$$

o

$$h = R \operatorname{ctg} \varphi, \quad dh = -\frac{R d\varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Taigi

$$dB = -\frac{\mu_0 IN}{2l} \cdot \sin \varphi d\varphi$$

ir

$$B = -\frac{\mu_0 IN}{2l} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 IN}{2l} |(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)|. \quad (5.23)$$

Ilgos ritės (ji dar vadinama solenoidu) atveju taškui C esant ritės viduje toli nuo galų $\alpha_1 \rightarrow 0$, $\alpha_2 \rightarrow \pi$ ir

$$B = \frac{\mu_0 IN}{l} = \mu_0 In. \quad (5.24)$$

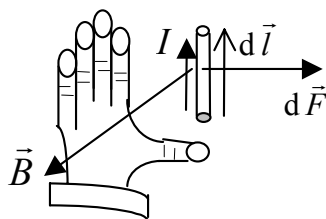
Čia $n=N/l$ – vijų skaičius ritės ilgio vienetu. Iš (5.24) matyti, kad ilgoje ritėje toli nuo jos galų magnetinio srauto tankis nepriklauso nuo vietos ritės ašyje. Sudėtingesni skaičiavimai rodo, kad šiuo atveju B vertė nekinta ir einant skersai ritės. Taigi **tekant srovei ilgios ritės vijomis, jos viduje toli nuo galų sukuriamas vienalytis magnetinis laukas**.

6. Ampero jėga

Apskaičiuosime, kokia jėga magnetinis laukas veikia srovės elementą, vieną krūvininką veikiančią jėgą (5.11) dauginami iš krūvininkų skaičiaus dN : $dF_A = F_L dN$. Įrašė čia v ir dN išraiškas (5.15) ir (5.16), apskaičiuojame, kad srovės elementą veikianti jėga

$$d\vec{F}_A = I(d\vec{l} \times \vec{B}). \quad (5.25)$$

Laidininką su srove magnetiniame lauke veikianti jėga vadinama Ampero (*A. M. Ampère*) jėga. Ją galima apskaičiuoti remiantis (5.25).



101 pav.

Ampero jėgos kryptį nusako dviejų vektorių $d\vec{l}$ ir \vec{B} vektorinės sandaugos taisyklė, tačiau praktiškai $d\vec{F}$ kryptį patogu pasinaudoti **kairiosios rankos taisykle**: jei kairiąją ranką ištiesime taip, kad statmenoji laidui magnetinio lauko srauto tankio vektoriui \vec{B} dedamoji būtų nukreipta į delną, o ištiesiti keturi pirštai rodytų srovės laide kryptį, tai atlenktas stačiu kampu nykštys rodys Ampero jėgos kryptį (žr. 101 pav.).

7. Magnetinio srauto tankio (magnetinės indukcijos) vektorius

Jei srovė teka tiesiu laidininku, esančiu vienalyčiame magnetiniame lauke, tai jį veikianti Ampero jėga

$$\vec{F}_A = I(\vec{l} \times \vec{B})$$

o tos jėgos modulis

$$F_A = BIl \sin \alpha.$$

Ta jėga esti didžiausia, kai $\alpha=90^\circ$:

$$F_{\max} = BIl. \quad (5.26)$$

(5.26) galima panaudoti magnetinio srauto tankio (magnetinės indukcijos) vektoriui \vec{B} moduliui nusakyti. Iš (5.26) gauname, kad

$$B = \frac{F_{\max}}{Il}. \quad (5.27)$$

Iš (5.27) matome, kad **magnetinio srauto tankio modulis lygus maksimalios Ampero jėgos, veikiančios tiesų laidininką, esantį vienalyčiame magnetiniame lauke, santykiui su laidininku tekančios srovės stipriu ir laidininko ilgiu**. Magnetinio srauto tankio SI vienetas yra **tesla** (T): $1 \frac{N}{A \cdot m} = 1 \text{ T}$.

8. Srovės elementų sąveikos dėsnis (Bio, Savaro, Laplaso ir Ampero dėsnis)

Tarkime, kad vienas srovės elementas sukuria magnetinį lauką, o kitą elementą, esantį tame lauke, veikia Ampero jėga. Srovės elemento $I_1 d\vec{l}_1$ sukuriamas magnetinio srauto tankis pagal (5.17)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1 (d\vec{l}_1 \times \vec{r})}{4\pi r^3}. \quad (5.28)$$

Srovės elementą $I_2 d\vec{l}_2$ veikianti Ampero jėga pagal (5.25) lygi

$$d\vec{F}_A = I_2 (d\vec{l}_2 \times \vec{B}). \quad (5.29)$$

Irašę (5.28) į (5.29), gauname:

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 (d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}))}{4\pi r^3}. \quad (5.30)$$

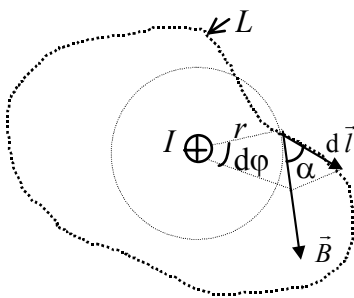
(5.30) išraiška vadinama Bio, Savaro, Laplaso ir Ampero dėsniumi.

Reikia pažymėti, kad Bio ir Savaro dėsnis (5.17), Ampero jėga (5.25) bei srovės elementų sąveikos dėsnis (5.30) buvo eksperimentiškai atrasti dar XIX a. viduryje, t. y. gerokai anksčiau nei buvo sukurta reliatyvumo teorija. Todėl juos galima pateikti ir nesiremiant reliatyvumo teorija. Tačiau reliatyvistinė magnetinio lauko kilmė paaiškėjo tik XX a. pradžioje, kai buvo atrastos Lorencio transformacijos formulės.

9. Magnetinio srauto tankio vektoriaus cirkuliacijos teorema nuostoviuoju atveju

Apskaičiuosime

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$



102 pav.

bet kokių kontūrų L , apjuosiančių tiesų begalinį laidą su srove I (102 pav.). Tarkime, kad laidas yra statmenas brėžinio plokštumai, srovė juo teka nuo mūsų (pažymėta \oplus), o kontūras L yra brėžinio plokštumoje. Kontūro elemento $d\vec{l}$ kryptį pasirinkime susijusią su srovės kryptimi dešininio sraigto taisykle. Nubrėžkime jėgos liniją, einančią per elementą $d\vec{l}$. Tai bus apskritimas, kurio spindulį pažymėkime r . Kampą tarp $d\vec{l}$ ir \vec{B} pažymėkime α . Tada $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl \cos \alpha = B dl_B$. Čia dl_B – $d\vec{l}$ projekcija į vektoriaus \vec{B} kryptį. Tačiau $dl_B = r d\varphi$. Čia $d\varphi$ yra centrinis kampas, atitinkantis dl_B . Taigi $\vec{B} \cdot d\vec{l} = Br d\varphi$. Pasinaudodami (5.21) formule, galime užrašyti:

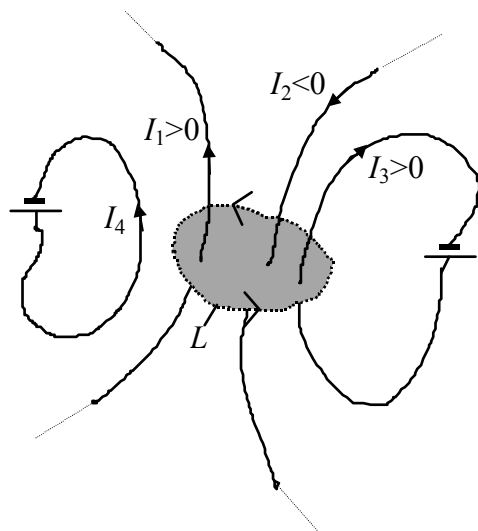
$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} Br d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I.$$

Taigi \vec{B} cirkuliacijos teorema nuostoviuoju atveju išreiškiama taip:

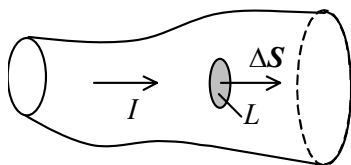
$$\boxed{\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I.} \quad (5.31)$$

10. Suminės srovės dėsnio integralinė ir diferencialinė išraiškos. Sukurinis magnetinio lauko pobūdis

Apibendrinsime (5.31) formulę bet kokiai srovių sistemai, pavyzdžiui, pavaizduotai 103 pav. Bent dalį srovių (pvz., I_1 , I_2 ir I_3) apjuoskime bet kokios formos uždaru kontūru L . Tada



103 pav.



104 pav.

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_1 - I_2 + I_3).$$

Srovės, kurių kryptis susijusi su pasirinktąja kontūro L apėjimo kryptimi pagal sraigto taisyklę, rašomos su “+” ženklu, priešingu atveju – su “-” ženklu. Srovės, kurios neperveria kontūro L ribojamo ploto, iš viso neišskaitomos (pvz., I_4).

Apskritai suminės srovės dėsnio integralinę išraišką galima užrašyti taip:

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k, \quad (5.32)$$

o žodžiais suformuluoti taip: ***\vec{B} cirkuliacija yra lygi magnetinei konstantai μ_0 , padaugintai iš algebrinės sumos srovių, kertančių to kontūro apjuosiamą plotą.***

Diferencialinę išraišką, susiejančią magnetinio srauto tankį su srove tame pačiame erdvės taške, gausime išnagrinėję atvejį, kai kontūras L tampa be galo mažas (104 pav.). Tegu ΔS yra to kontūro ribojamas plotas. Tada

$$\sum_k I_k = \vec{j} \cdot \Delta \vec{S}$$

ir pagal (5.32)

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \vec{j} \cdot \Delta \vec{S}.$$

Panašiai, kaip vektoriui \vec{E} , pritaikę vektoriui \vec{B} (1.30) formulę,

$$\text{rot } \vec{B} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l}}{\Delta S}$$

nustatome, kad

$$\boxed{\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.} \quad (5.33)$$

(5.33) lygybė ir yra suminės srovės dėsnio diferencialinė išraiška.

Priminsime, kad elektrostatinio lauko atveju \vec{E} vektoriaus cirkuliacija visada lygi nuliui ir tai yra elektrostatinio lauko potencialumo matematinė formuluotė. Matome, jog \vec{B} vektoriaus pobūdis yra kitoks, nes jo cirkuliacija gali būti nelygi nuliui. Taigi ***magnetinis laukas nėra potencialinis***. Jo jėgos linijos neturi nei pradžios, nei pabaigos, o yra uždaros kreivės. Toks laukas vadinamas ***sūkuriniu*** lauku. Todėl Gauso dėsnis vektoriui \vec{B} užrašomas taip:

$$\oint_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}) = 0, \quad (5.34)$$

t. y. magnetinis srautas per bet kokį uždarą paviršių visada esti lygus nuliui, o jo diferencialinė išraiška

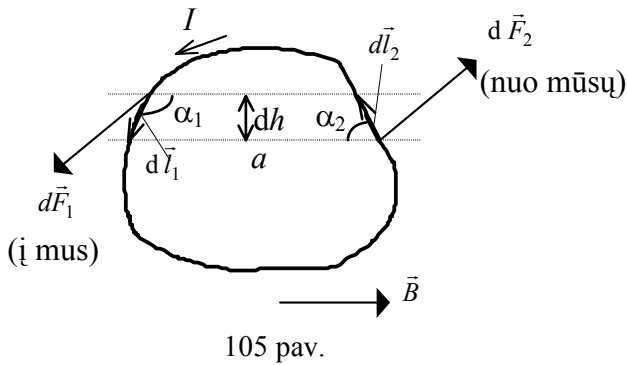
$$\text{rot } \vec{B} = 0. \quad (5.34a)$$

Pastebėsime, kad (5.31), (5.32) ir (5.33) išraiškos tinka tik pastovios nuolatinės srovės (t. y. nuostoviųjų) atveju. Kintamosios srovės atveju jas teks papildyti (žr. psl.).

Suminės srovės dėsnį galima panaudoti elektros srovės kuriamo magnetinio lauko srauto tankiui apskaičiuoti kai kuriais simetriškais atvejais (panašiai, kaip Gauso dėsnį elektrostatoje).

11. Kontūras su srove magnetiniame lauke. Jėgos, veikiančios kontūrą su srove magnetiniame lauke. Kontūro su srove energija magnetiniame lauke

1) Vienalytis laukas. Iš pradžių panagrinėkime bet kokios formos kontūrą su srove I , kai magnetinis laukas yra lygiagretus su kontūro plokštuma (105 pav.).



105 pav.

jėgų pora. Jos momentas $dM = dF \cdot a = IB a dh = IB dS$. Čia a - atstumas tarp elementų (jėgų poros petys), o $dS = a dh$ - kontūro dalies, esančios tarp punktyrinių linijų, plotas. Visą kontūrą veikiančių jėgų momentą apskaičiuosime integruodami:

$$M = IB \int_{(S)} dS = BIS. \quad (5.35)$$

Jėgų momento veikiamas kontūras stengiasi taip pasisukti, kad vektorius \vec{B} būtų statmenas kontūro plokštumai.

Srovės stiprio ir kontūro ploto sandauga vadinama **kontūro magnetiniu momentu**:

$$p_m = IS.$$

Magnetinio momento SI vienetas yra $1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

Žinome, kad plotui gali būti suteiktos vektoriaus savybės: $\vec{S} = S\vec{n}$. Čia \vec{n} - ploto normalės (statmens) vienetinis vektorius ($|\vec{n}| = 1$). Teigiamą \vec{n} vektoriaus kryptimi šiuo atveju reikia imti tą, kuri susijusi su srovės kryptimi dešiniojo sraigto taisykle. Tada magnetinio momento vektorius

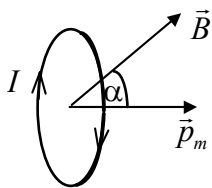
$$\vec{p}_m = I\vec{S}. \quad (5.36)$$

Bendru atveju, kai kontūro plokštuma nėra lygiagreti su magnetinio srauto tankio vektoriumi \vec{B} (106 pav.), kontūrą veikiančių jėgų momento modulis

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (5.37)$$

o jo vektorius

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (5.38)$$



106 pav.

Iš (5.38) matyti, kad $\vec{M} = 0$, kai $\vec{p}_m \parallel \vec{B}$. Taigi vienalyčiame magnetiniame lauke kontūras su srove stengiasi taip pasisukti, kad jo magnetinis momentas \vec{p}_m būtų lygiagretus su magnetinio srauto tankio vektoriumi \vec{B} .

Apskaičiuosime kontūro su srove, esančio vienalyčiame magnetiniame lauke, energiją. Iš mechanikos kurso žinome, kad jėgų poros darbas, atliekamas pasukant mažu kampu $d\alpha$, yra $dA = M d\alpha$. Kontūro su srove atveju M nusakomas (5.37) formule, tad

$$dA = p_m B \sin \alpha d\alpha.$$

Suintegravę gauname:

$$W = p_m B \int \sin \alpha d\alpha = -p_m B \cos \alpha + C.$$

Potencinės energijos išraiškose integravimo konstantą C galima laisvai pasirinkti. Šiuo atveju pasirinkime $C=0$. Tada

$$W = -p_m B \cos \alpha = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}. \quad (5.39)$$

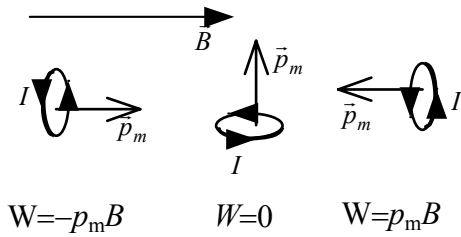
Taigi kontūro su srove energija nusakoma (5.39) formule. Pasinaudodami (5.36), ją galime užrašyti ir taip:

$$W = -I(\vec{S} \cdot \vec{B}) = -I\Phi. \quad (5.40)$$

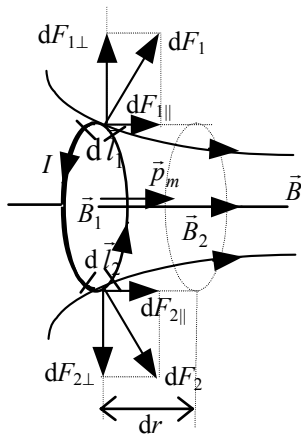
Čia

$$\Phi = \vec{S} \cdot \vec{B} = BS \cos \alpha \quad (5.41)$$

yra magnetinis srautas per kontūro ribojamą plotą. Magnetinio srauto SI vienetas yra **veberis** (Wb): $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ V} \cdot \text{s}$.



107 pav.



108 pav.

Kaip aiškėja iš (5.39) ir (5.40), energija esti mažiausia, kai $\vec{p}_m \parallel \vec{B}$ (pastovios pusiausvyros padėtis), lygi nuliui, kai $\vec{p}_m \perp \vec{B}$, ir didžiausia, kai $\vec{p}_m \parallel -\vec{B}$ (nepastovios pusiausvyros padėtis) (žr. 107 pav.).

2) Nevienalytis laukas. Nevienalyčiame lauke kontūras su srove irgi esti orientuojamas taip, kad jo magnetinis momentas būtų lygiagretus su magnetinio srauto tankio vektoriumi \vec{B} . Tačiau ir tada atskiras kontūro dalis veikiančių jėgų atstojamoji nepasidaro lygi nuliui. Tai matyti iš 108 pav.

Panagrinėkime priešingose kontūro pusėse esančius du srovės elementus $I d\vec{l}_1$ ir $I d\vec{l}_2$ veikiančias jėgas $d\vec{F}_1$ ir $d\vec{F}_2$. Šios jėgos yra statmenos vektoriui \vec{B} tose vietose, kur yra tie srovės elementai. Išskaidykime jas į dedamąsias, statmenas vektoriui \vec{B} ties kontūro centru $d\vec{F}_{1\perp}$ ir $d\vec{F}_{2\perp}$ ir lygiagretes $d\vec{F}_{1\parallel}$ ir $d\vec{F}_{2\parallel}$. Matome, kad statmenosios dedamosios yra priešingų krypčių. Jas atsveria kontūro tamprumo jėgos. Lygiagrečiosios dedamosios nukreiptos ta pačia kryptimi. Jų atstojamoji nelygi nuliui, o yra nukreipta lauko stiprėjimo kryptimi. Norėdami apskaičiuoti visą kontūrą veikiančią tą atstojamąją jėgą, tarkime, kad jos veikiamas kontūras paslinko į stipresnio lauko sritį mažu atstumu dr . Vidutinį magnetinio srauto tankį kontūrai esant pradinėje padėtyje pažymėkime B_1 , o galinėje B_2 . Sutinkamai su (5.40), kontūro energijos lygios atitinkamai $W_1 = -I\Phi_1 = -ISB_1$, $W_2 = -ISB_2$. Paslenkant kontūrui atliekamas darbas $dA = F \cdot dr = W_1 - W_2 = IS(B_2 - B_1) = p_m(B_2 - B_1)$.

Sąryšį tarp B_2 ir B_1 galima išreikšti taip:

$$B_2 = B_1 + \frac{\partial B}{\partial r} \cdot dr.$$

Taigi

$$B_2 - B_1 = \frac{\partial B}{\partial r} \cdot dr$$

ir

$$F \cdot dr = p_m \cdot \frac{\partial B}{\partial r} \cdot dr.$$

Iš čia nustatome, kad

$$F = p_m \cdot \frac{\partial B}{\partial r} = p_m \text{ grad } B. \quad (5.42)$$

(5.36), (5.38), (5.39) ir (5.42) formulės labai panašios į atitinkamas formules, aprašančias elektrinį dipolį ir jį veikiančias jėgas bei energiją elektriniame lauke. Todėl kontūras su srove dar vadinamas **magnetiniu dipoliu**.

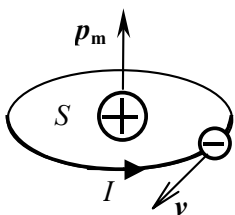
6 skyrius MAGNETIKAI

1. Magnetinis laukas magnetike, molekulinės srovės. Įmagnetėjimo vektorius

Bandymai rodo, kad medžiagoje magnetinis laukas esti kitoks negu vakuumė. Tai rodo, kad medžiaga, patekusi į išorinį magnetinį lauką, pati kuria savo magnetinį lauką, kuris vektoriškai sumuojasi su išoriniu lauku. Sakoma, kad medžiagos magnetiniame lauke *įmagnetėja*. Įmagnetėjančios medžiagos vadinamos *magnetikais*.

\vec{B}_0 pažymėkime magnetinio srauto tankį vakuumė, \vec{B}' - medžiagos kuriamo lauko magnetinio srauto tankį, \vec{B} - magnetinio srauto tankį medžiagoje. Tada

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \quad (6.1)$$



109 pav.

Žinome, kad nuostovųjį magnetinį lauką kuria tekanti elektros srovė. Kokios gi magnetikuose tekančios srovės sukuria lauką B' ? Tos srovės buvo pavadintos *molekulinėmis srovėmis*. Jų prigimtis gali būti tokia: 1) elektronų sukimasis aplink branduolius nuostoviosiomis orbitomis, 2) elektronų sukimasis aplink savo ašis (elektronų sukiniai), 3) branduolius sudarančių protonų ir neutronų sukiniai.

Aplink branduolį skriejantis elektronas kuria magnetinį lauką panašiai, kaip apskritas kontūras su srove (109 pav.). Jei elektrono sukimosi sąlygojamos srovės stipris I , o orbitos apjuosiamas plotas S , tai orbitinis magnetinis momentas sutinkamai su (5.36)

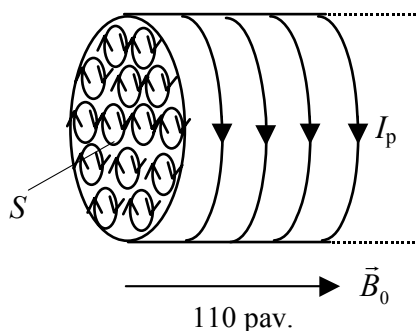
$$\vec{p}_m = I\vec{S} \quad (6.2)$$

Daugelio medžiagų atomai turi savo magnetinius momentus. Juos sąlygoja elektronų skriejimas aplink branduolius uždaromis elipsinėmis orbitomis, taip pat elektronų sukiniai. Nesant išorinio magnetinio lauko, atomų magnetiniai momentai esti netvarkingai išsidėstę, ir jų kuriamas magnetinis laukas pasinaikina. Išorinis magnetinis laukas stengiasi orientuoti atomų magnetinius momentus panašiai, kaip kontūrą su srove, todėl medžiaga įmagnetėja.

Įmagnetėjimo didumą apibūdina medžiagos tūrio vieneto magnetinis momentas, vadinamas *įmagnetėjimo vektoriumi* \vec{J} :

$$\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{p}_{mi}}{V} \quad (6.3)$$

Čia $\sum_i \vec{p}_{mi}$ yra V tūryje esančių atomų magnetinių momentų vektorinė suma.



110 pav.

Kad būtų paprasčiau skaičiuoti, imkime ilgo ritinio formos magnetiko gabalą (110 pav.). Tarkime, kad išorinis magnetinis laukas \vec{B}_0 yra lygiagretus su ritinio ašimi, o atomų magnetiniai momentai orientuoti viena kryptimi. Ant elektronų orbitų pažymėtos rodyklės rodo skriejančių elektronų sąlygotos elektros srovės kryptį. Jei medžiaga vienalytė, tūryje esančių kaimyninių atomų srovės „teka“ priešingomis kryptimis, todėl jų sukurti magnetiniai laukai vienas kitą kompensuoja. Tokios kompensacijos nėra atomams, esantiems prie ritinio šoninio paviršiaus. Todėl galima tarti, kad aplink ritinį teka tam tikra *paviršinė srovė* I_p , kuri ir sukuria magnetinį lauką \vec{B}' . To lauko magnetinio srauto tankį galima apskaičiuoti pagal solenoido formulę (5.24), vietoj IN įrašant I_p :

$$B' = \frac{\mu_0 I_p}{l} = \mu_0 j_p \quad (6.4)$$

Čia $j_p = I_p/l$ - paviršinė srovė, tenkanti ritės ilgio vienetui, dar vadinama paviršinės srovės tankiu. Ritinio skerspjūvio plotą pažymėkime S . Tada paviršinės srovės sąlygotas ritinio magnetinis momentas sutinkamai su (5.36)

$$p_{m(\text{ritinio})} = I_p S.$$

Ritinio tūris $V = lS$, tad įmagnetėjimo vektoriaus modulis pagal (6.3)

$$J = \frac{p_{m(\text{ritinio})}}{V} = \frac{I_p S}{l S} = \frac{I_p}{l} = j_p. \quad (6.5)$$

I (6.5) įrašę vietoj j_p jam lygų J , gauname:

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}, \quad (6.6)$$

o (6.6) įrašę į (6.1), gausime, kad

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}} \quad (6.7)$$

Nors skaičiavimus atlikome tarę, kad magnetikas yra ilgo cilindro formos, tačiau jie tinka ir magnetiku užpildytai begalinei aplinkai.

2. Magnetinis jautris ir magnetinė skvarba

Medžiagos įmagnetėja veikiant išoriniam magnetiniam laukui, todėl $\vec{J} \sim \vec{B}_0$. Proporcionalumo koeficientas priklauso nuo medžiagos rūšies. Kad jis būtų nedimensinis dydis, užrašoma taip:

$$\boxed{\vec{J} = \frac{\chi}{\mu_0} \cdot \vec{B}_0} \quad (6.8)$$

χ vadinamas **magnetiniu jautriu** (magnetine juta). (6.8) įrašę į (6.7), gauname:

$$\vec{B} = (1 + \chi) \vec{B}_0. \quad (6.9)$$

Medžiagų magnetinėms savybėms apibūdinti naudojamas ir kitas dydis, vadinamas **magnetine skvarba** (μ). Jis parodo, kiek kartų magnetinio srauto tankis medžiagoje yra didesnis negu vakuume:

$$\boxed{\mu = \frac{\vec{B}}{\vec{B}_0}} \quad (6.10)$$

(6.10) palyginę su (6.9), matome, kad

$$\boxed{\mu = 1 + \chi} \quad (6.11)$$

3. Jėgos, veikiančios magnetikus nevienalyčiame magnetiniame lauke.

Magnetikų klasifikavimas

Magnetikas yra veikiamas panašiai, kaip kontūras su srove. Tegu magnetiko tūrio elemento dV įmagnetėjimas yra \vec{J} , o jo magnetinis momentas sutinkamai su (6.3)

$$d p_m = \vec{J} dV.$$

Tą tūrio elementą veikiančios jėgos modulis pagal (5.42)

$$d F = d p_m \operatorname{grad} B = J \operatorname{grad} B dV.$$

Įrašę čia J išraišką (6.8) ir pasinaudoję sąryšiu tarp χ ir μ (6.11) bei tarp B_0 ir B (6.10), apskaičiuojame, kad

$$J = \frac{\chi}{\mu_0} B_0 = \frac{\mu - 1}{\mu_0 \mu} B,$$

$$\boxed{d F = \frac{\mu - 1}{\mu_0 \mu} B \operatorname{grad} B dV = \frac{\mu - 1}{2 \mu_0 \mu} \operatorname{grad} B^2 dV} \quad (6.12)$$

Įvairių magnetikų tyrimai nevienalyčiame magnetiniame lauke rodo, kad vienus jų veikia jėga, nukreipta lauko stiprėjimo (t. y. $\operatorname{grad} B^2$) kryptimi, o kitus atvirkščiai – lauko silpnėjimo kryptimi. Kaip matyti iš (6.12), jėgos dF kryptis priklauso nuo magnetinės skvarbos μ didumo, nes jei $\mu > 1$, tai $dF > 0$ (magnetikas traukiamas lauko stiprėjimo kryptimi), o jei $\mu < 1$, tada $dF < 0$ (magnetikas stumiamas lauko silpnėjimo kryptimi). Be to, kaip matyti iš (6.10), $B > B_0$, kai $\mu > 1$, ir $B < B_0$, kai $\mu < 1$. Pagal šias savybes magnetikai skirstomi į paramagnetikus ir diamagnetikus.

Magnetikai, kuriuose $B > B_0$, vadinami **paramagnetikais**. Juose \vec{B}' ir \vec{B}_0 kryptys sutampa (t. y. $\vec{B}' \parallel \vec{B}_0$).

Magnetikai, kuriuose $B < B_0$, vadinami **diamagnetikais**. Juose \vec{B}' yra priešingos krypties negu \vec{B}_0 (t. y. $\vec{B}' \parallel -\vec{B}_0$).

Paramagnetikai, kuriuose $B \gg B_0$, vadinami **feromagnetikais**. Šie magnetikai turi didžiausią praktinį pritaikymą.

Kitaip sakant, paramagnetikų $\mu > 1$, $\chi > 0$, diamagnetikų $\mu < 1$, $\chi < 0$.

Feromagnetikų $\mu \gg 1$, $\chi \gg 0$. Skirtumas tarp μ ir χ feromagnetikuose neesminis, todėl dažniausiai naudojama magnetinė skvarba μ . Jos vertė gali siekti tūkstančius ir daugiau. Be to, ji nėra pastovi, o priklauso nuo B_0 , temperatūros ir kitų parametrų.

Labiausiai išreikštas diamagnetines savybes turi bismutas (Bi). Jo $\chi = -1,76 \cdot 10^{-4}$, $\mu = 0,999824$.

Paramagnetikų magnetinės skvarbos irgi esti artimos vienetai. Pavyzdžiui, skysto deguonies $\chi=3,4 \cdot 10^{-3}$, $\mu=1,0034$. Todėl, kai nesiekama ypač didelio tikslumo, visoms medžiagoms, išskyrus feromagnetikus, galima tarti, kad $\mu \approx 1$.

Skaiciuojant elektros srovės kuriamą magnetinį lauką magnetikuose vietoj μ_0 reikia įrašyti $\mu\mu_0$. Pavyzdžiui, Bio ir Savaro dėsnį (5.17) reikia užrašyti

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I(d\vec{l} \times \vec{r})}{4\pi r^3}, \quad (6.13)$$

o suminēs srovēs dēsni (5.32) –

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_k I_k. \quad (6.14)$$

4. Magnetinio lauko stiprio vektorius

Magnetinį lauką kuria tiek elektros srovė, tiek ir molekulinės srovės. Todėl jei kontūras L esti magneti-
ke, užrašant suminės srovės dėsnį reikia atsižvelgti į visas sroves, kertančias to kontūro plotą (111 pav.):

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (\sum_k I_k + \sum I_{\text{molek}}). \quad (6.15)$$

(6.15) išraiška mažai naudinga, nes praktiškai sunku nustatyti molekulinį srovių indėlį $\sum I_{\text{molek}}$. Jei nebūtų magnetiko su jo molekulinėmis srovėmis, tai (6.15) išraiškos kairėje pusėje vietoje B rašytume magnetinio srauto tankį vakuume B_0 , o dešinėje pusėje nebūtų nario $\sum I_{\text{molek}}$, t. y. (6.15) įgautų (5.32) pavidalą

$$\oint_{(L)} \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k. \quad (6.16)$$

Tačiau $\vec{B} = \mu \vec{B}_0$ (žr. 6.10), tad padauginę (6.16) abi puses iš magnetinės skvarbos μ ir įkėlę ją po integralo ženklų gautume

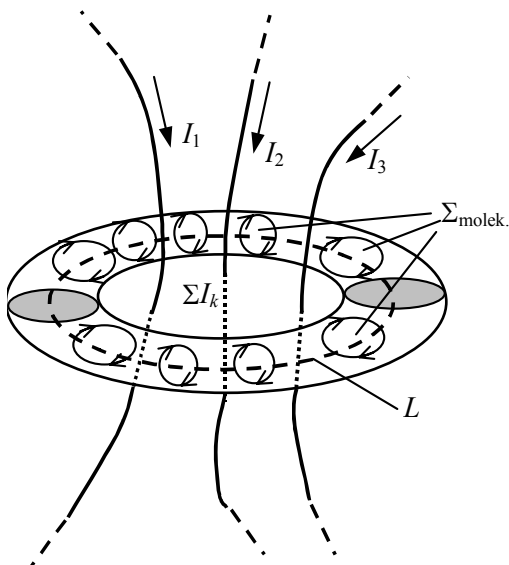
$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \sum_k I_k. \quad (6.17)$$

(6.17) galime naudotis, kai visas kontūras L esti vienalychiame magnetike, kurio magnetinė skvarba μ yra pastovi. Tuo atveju, kai kontūras L eina per kelis magnetikus, kurių mag-

netinės skvarbos skirtingos, (6.17) netinka. Ją pertvarkykime abi lygybės puses padalydami iš $\mu\mu_0$, kairėje pusėje $\mu\mu_0$ įkeldami po integralu:

$$\oint_{(L)} \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} \cdot d\vec{l} = \sum_k I_k.$$

Pažymėkime



111 pav.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}. \quad (6.18)$$

Fizikinis dydis \vec{H} buvo pavadintas **magnetinio lauko stiprio** vektoriumi. Jo SI vienetas yra 1 A/m ir sutampa su įmagnetėjimo vektoriaus \vec{J} vienetu.

Panaudojant magnetinio lauko stiprio vektorių, suminės srovės dėsnio integralinė išraiška užrašoma taip:

$$\oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k I_k, \quad (6.19)$$

o jo diferencialinė išraiška

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}. \quad (6.20)$$

Pastebėsime, kad magnetinio lauko stiprio vektoriaus \vec{H} reikšmė magnetizme panaši, kaip elektrinės slinkties vektoriaus \vec{D} elektrostатikoje.

5. Magnetinis laukas dvi aplinkas skiriančiame paviršiuje

Panagrinėkime, kaip pakinta vektoriai \vec{B} ir \vec{H} pereidami dvi skirtingas aplinkas skiriantį paviršių. 112 pav. tą paviršių vaizduoja vertikali tiesė. Tarkime, kad 1 aplinkos magnetinio srauto tankio vektorius \vec{B}_1 su aplinkas skiriančiu paviršiumi sudaro kampą α_1 , o 2 aplinkos – atitinkamai \vec{B}_2 ir α_2 . Tegu 1 aplinkos magnetinė skvarba didesnė negu 2 aplinkos ($\mu_1 > \mu_2$). Įsivaizduokime uždara paviršių (pavyzdžiui, cilindrinį, kurio vienas ΔS ploto pagrindas yra 1 aplinkoje, kitas – 2, o to cilindro ilgis Δh labai mažas) ir magnetinio srauto tankio vektoriui pritaikykime Gauso dėsnį (5.34). Dėl Δh mažumo nepaisydami srauto per cilindro šoninį paviršių nustatome, kad $-B_{1n} \cdot \Delta S + B_{2n} \cdot \Delta S = 0$, t. y.

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (6.21)$$

Taigi \vec{B} statmenoji paviršiu (normalinė) dedamoji išlieka nepakitusi.

Pasinaudodami (6.18), (6.21) galime užrašyti taip:

$$\mu_1 \mu_0 H_{1n} = \mu_2 \mu_0 H_{2n}.$$

Iš čia nustatome, kad

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (6.22)$$

Pagal suminės srovės dėsnį vektoriui \vec{H} (6.19) stačiakampiu kontūru, kurio viena lygiagreti su aplinkas skiriančiu paviršiumi kraštinė Δl yra vienoje aplinkoje, antra – kitoje, o statmenoji kraštinė Δh labai maža (jos įnašas nepaisome) nustatome, kad $H_{1t} \cdot \Delta l - H_{2t} \cdot \Delta l = 0$, nes srovių nėra. Iš čia matyti, kad

$$H_{1t} = H_{2t}, \quad (6.23)$$

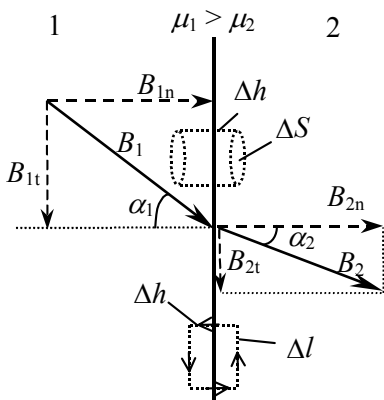
Taigi vektoriaus \vec{H} lygiagrečioji su paviršiumi (tangentinė) dedamoji išlieka nepakitusi.

Dar kartą pasinaudoję sąryšiu tarp vektorių \vec{B} ir \vec{H} (6.18), iš (6.23) nesunkiai įsitikiname, kad

$$\frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (6.24)$$

Nustatysime sąryšį tarp kampų ir magnetinių skvarbų. Iš 112 pav. matyti, kad

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{B_{1t}}{B_{1n}},$$

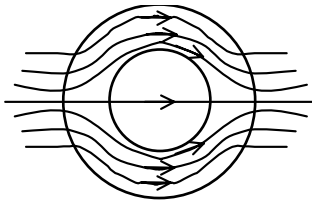


112 pav.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{B_{2t}}{B_{2n}} = \frac{B_{1t} \frac{\mu_2}{\mu_1}}{B_{1n}} = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \frac{\mu_2}{\mu_1}, \\ \boxed{\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} &= \frac{\mu_1}{\mu_2}}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Matome, kad kampų tangentai proporcingi aplinkų magnetinėms skvarboms.

Tas pats sąryšis (6.25) gaunamas ir vektoriui \vec{H} .



113 pav.

6. Magnetinis ekranavimas

Magnetinį lauką norimoje erdmėje galima gerokai susilpninti ją apsupant didelės magnetinės skvarbos magnetiniu apvalkalu – feromagnetiku. Iš (6.25) matyti, kad jei $\mu_2 \gg \mu_1$, tai ir $\alpha_2 \gg \alpha_1$. Dėl tokio lūžimo magnetinio lauko linijos daugiausia susikaupia apvalkale, neprasiskverbdamos į ertmės vidų (113 pav.). Taigi didelės skvarbos magnetiko apvalkalas veikia kaip ekranas, neleidamas magnetiniam laukui įsiskverbti į apvalkalo apgaubtą ertmę.

7. Induktyvumas ir abipusis induktyvumas

Jei laidžiu kontūru tekančios srovės stipris kinta, tos srovės kuriamas magnetinis laukas irgi kinta. Pagal elektromagnetinės indukcijos dėsnį šis kintamas magnetinis laukas erdvėje kuria sukurtinį elektrinį lauką, kuris sąlygoja indukcinės elektrovaros atsiradimą. Indukcinė elektrovara atsiranda tiek kitame kontūre, jeigu jis esti pirmojo kontūro magnetiniame lauke, tiek ir tame pačiame kontūre, kuriuo teka kintančioji srovė. Pirmuoju atveju turime *abipusės indukcijos* reiškinį, antruoju – *saviindukcijos* reiškinį, o kontūruose atsiranda atitinkamai abipusės indukcijos ir saviindukcijos elektrovaros.

Saviindukcijos atveju magnetinį lauką kuria tuo pačiu kontūru tekanti srovė, todėl kontūro ribojamą plotą kertantis magnetinis srautas yra proporcingas tos srovės stipriui I , nes magnetinio srauto tankis B pagal Bio ir Savaro dėsnį (žr. (5.17)) yra proporcingas I , o magnetinis srautas savo ruožtu proporcingas B . Taigi $\Phi \sim B \sim I$. **Proporcingumo koeficientas tarp srovės stiprio kontūre ir šios srovės sukurto šio kontūro ribojamą plotą kertančio magnetinio srauto vadinamas kontūro induktyvumu L :**

$$\Phi = LI. \quad (6.26)$$

Induktyvumas priklauso nuo laidininko matmenų ir formos, taip pat nuo aplinkos, kurioje yra laidininkas, magnetinių savybių. Induktyvumo SI vienetas yra *henris* (H). Jis apibrėžiamas remiantis (6.26) formule:

$$\boxed{L = \frac{\Phi}{I}}. \quad (6.27)$$

Sutinkamai su (6.27), 1 H lygus induktyvumui tokio kontūro, kuriuo tekanti 1 A stiprio srovė sukuria 1 Wb magnetinį srautą, kertantį šio kontūro ribojamą plotą: 1 H = 1 Wb/1 A.

Jei tas pats magnetinis srautas Φ kerta N nuosekliai sujungtų vijų (tarkime, ritę), tada induktyvumas

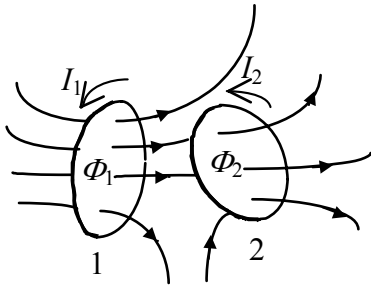
$$L = N \frac{\Phi}{I}. \quad (6.28)$$

Jei kontūro aplinkoje yra magnetikas, kurio magnetinė skvarba μ , tada tos srovės kuriamas magnetinio srauto tankis B padidėja μ kartų lyginant su srauto tankiu vakuume (žr. (6.10) formulę). μ kartų padidėja ir magnetinis srautas Φ , taigi μ kartų padidėja ir induktyvumas:

$$L = \mu L_0.$$

Čia L_0 – vakuume esančio kontūro induktyvumas. Paramagnetikų ir diamagnetikų $\mu \approx 1$, todėl $L \approx L_0$. Feromagnetikai, turintys dideles μ vertes, ženkliai padidina kontūro induktyvumą. Tačiau feromagnetikų atveju μ vertė nėra pastovi, o priklauso nuo B_0 , taigi ir nuo srovės stiprio. Todėl ir ritės su feromagnetine šerdimi induktyvumas priklauso nuo jos vijomis tekančios srovės stiprio.

Saviindukcijos ev \mathcal{E}_s galime išreikšti remdamiesi Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsniu ir (6.26) formule:



114 pav.

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (6.29)$$

Panagrinėkime dviejų kontūrų abipusę indukciją (114 pav.). Tarkime, 1 kontūru teka srovė I_1 , o 2 kontūru - I_2 . Aplinkoje nesant feromagnetikų kiekvieną kontūrą kertantį magnetinį srautą kuria abi srovės:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= L_{11}I_1 + L_{12}I_2, \\ \Phi_2 &= L_{21}I_1 + L_{22}I_2. \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

Čia L_1 ir L_2 - 1 ir 2 kontūrų induktyvumai, o L_{12} ir L_{21} - tų dviejų kontūrų **abipusiai induktyvumai**. Jų fizikinę prasmę nesunku išsiaiškinti remiantis (6.30) formulėmis. Pavyzdžiui,

$$\left. \begin{aligned} L_{12} &= \frac{\Phi_1}{I_2}, \text{ kai } I_1 = 0, \\ L_{21} &= \frac{\Phi_2}{I_1}, \text{ kai } I_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.31)$$

Kaip aiškėja iš (6.31), abipusiai induktyvumai sieja vienu kontūru tekančią srovę su jos kuriamu kitą kontūrą kertančiu magnetiniu srautu.

Jei yra N magnetiniu srautu susietų kontūrų, i -tąjį kontūrą kertantis magnetinis srautas išreiškiamas taip:

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^N L_{ik} I_k. \quad (6.32)$$

Atlikus sudėtingesnius skaičiavimus galima įrodyti, kad neferomagnetinėse aplinkose visada galioja lygybė

$$L_{ik} = L_{ki}.$$

Ši lygybė išreiškia **abipusiškumo teoremą**. Ją patvirtina ir eksperimentiniai matavimai.

Abipusis induktyvumas priklauso nuo abiejų kontūrų formos, matmenų, atstumo tarp jų, jų tarpusavio orientacijos bei aplinkos, kurioje yra kontūrai, magnetinės skvarbos.

Reikia pažymėti, kad kontūro induktyvumas L visada esti teigiamas dydis, o abipusis induktyvumas L_{ik} (ar L_{ki}) gali būti teigiamas, neigiamas, arba lygus nuliui. Jei abiejuose kontūruose srovių kryptys tokios,



$$L_{12} > 0$$

a)



$$L_{12} < 0$$

b)

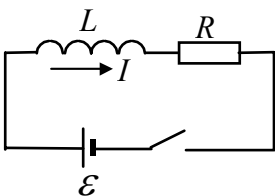
115 pav.

kad jų kuriami magnetiniai srautai vienas kitą stiprina, tada $L_{ik} > 0$, jei vienas kitą silpnina, tada $L_{ik} < 0$. Tai matyti ir iš (6.30) lygybių. Pavyzdžiui, jei abiejų srovių I_1 ir I_2 kuriamas 1 kontūrą kertantis magnetinis srautas Φ_1 yra mažesnis už srautą, kuriamą vien tik srovės I_1 , tai nariai $L_{11}I_1$ ir $L_{12}I_2$ turi būti priešingų ženklų, o tai galima esant $L_{12} < 0$. Pakeitus viename iš kontūrų srovės kryptį į priešingą, pasikeičia ir L_{12} ženklas.

Dviejų bendraašių kontūrų srovių kryptys, kai $L_{12} > 0$ ir $L_{12} < 0$, parodytos 115 pav.

8. Kontūrų su srovėmis magnetinio lauko energija

Prie grandinės, susidedančios iš nuosekliai sujungtų induktyvumo L ir varžos R , prijunkime nuolatinės įtamos šaltinį, kurio elektrovara \mathcal{E} (116 pav.). Grandinė ims tekėti srovė



116 pav.

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_s}{R}.$$

Įrašę čia \mathcal{E}_s išraišką (6.29), tą lygybę galime užrašyti šitaip:

$$\mathcal{E} = IR + L \frac{dI}{dt}.$$

Šios lygybės abi puses padauginę iš Idt , gausime:

$$\mathcal{E}Idt = I^2 R dt + LI dI.$$

Čia $\mathcal{E}Idt = dA_{\text{pas}}$ – šaltinio pašalinių jėgų per laiką dt atliktas darbas, $I^2 R dt = dQ$ – per tą patį laiką varžoje R išsiskyręs šilumos kiekis. Matome, kad

$$dA_{\text{pas}} = dQ + LI dI,$$

t. y. šaltinio pašalinių jėgų atliktas darbas yra didesnis už grandinėje išsiskyrusį šilumos kiekį per tą patį laiką. Šio darbo ir šilumos kiekio skirtumas $LI dI$ virto magnetinio lauko energija. Taigi

$$dW = LI dI = Id\Phi. \quad (6.33)$$

Jei srovės stipris grandinėje padidėjo nuo 0 iki I , integruodami (6.33) gauname:

$$W = \int_0^I LI' dI' = \frac{LI^2}{2}. \quad (6.34)$$

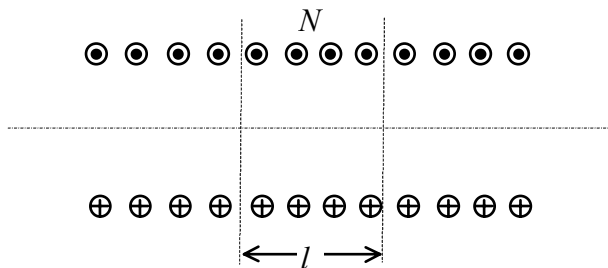
Atsižvelgdami į (6.26), kontūro su srove magnetinio lauko energiją galime apskaičiuoti pagal vieną iš šių formulių:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2I}. \quad (6.35)$$

N kontūrų su srovėmis magnetinio lauko energija

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N L_{ik} I_i I_k. \quad (6.36)$$

9. Magnetinio lauko energijos tūrinis tankis



117 pav.

Galima gauti ir kitokią magnetinio lauko energijos išraišką, į kurią įeitų ne srovės stipris I , o magnetinio srauto tankis B .

Žinome, kad ilgos ritės (solenoido) vijomis tekanti elektros srovė toli nuo ritės galų sukuria vienalytį magnetinį lauką. Išskirkime ilgoje ritėje toli nuo galų esančią l ilgio jos dalį, kurios vijų skaičius yra N (117 pav.). Ritės skerspjūvio plotą pažymėkime S . Tos dalies induktyvumą skaičiuosime pagal (6.28) formulę, kurioje magnetinis srautas

$$\Phi = BS,$$

o srauto tankis B sutinkamai su (5.24)

$$B = \mu_0 In = \mu_0 I \frac{N}{l}. \quad (6.37)$$

Šias išraiškas įrašę į (6.28), nustatome, kad induktyvumas

$$L = \frac{NBS}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}, \quad (6.38)$$

o jame sukaupta magnetinio lauko energija

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 N^2 SI^2}{2l}.$$

Pasinaudoję (6.37), nustatome, kad

$$I = \frac{Bl}{\mu_0 N},$$

taigi energija

$$W = \frac{\mu_0 N^2 S}{2l} \cdot \left(\frac{Bl}{\mu_0 N} \right)^2 = \frac{B^2 Sl}{2\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} V.$$

Čia $V = Sl$ – išskirtosios ritės dalies tūris. Matome, kad magnetinio lauko energija proporcinga tūriui erdvės, kurioje yra magnetinis laukas.

Apskaičiuosime energiją, tenkančią tūrio vienetui:

$$u_m = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (6.39)$$

Jeigu solenoide būtų magnetikas, tuo atveju

$$\boxed{u_m = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}}. \quad (6.40)$$

Dydis u_m vadinamas **magnetinės energijos tūriniu tankiu**.

Nevienalyčio magnetinio lauko atveju energijos tūrinį tankį reikėtų išreikšti taip:

$$u_m = \frac{dW}{dV}. \quad (6.41)$$

Tuo atveju tūryje V sukaupta magnetinio lauko energija turi būti skaičiuojama taip:

$$W = \int_{(V)} u_m dV. \quad (6.42)$$

Verta atkreipti dėmesį, kad pagal (6.27) formulę skaičiuoti iš storų laidininkų sudarytų kontūrų induktyvumą netikslu, nes skaičiuojant srautą Φ reikia atsižvelgti ir į magnetinį lauką laidininko viduje. Tuo atveju reikia pagal (6.40) ir (6.42) apskaičiuoti magnetinio lauko energiją, o induktyvumą remiantis (6.35) išreikšti taip:

$$L = \frac{2W}{I^2}. \quad (6.43)$$

10. Magnetinių jėgų skaičiavimas remiantis energijos išraiška

Panagrinėkime sistemą N kontūrų, kuriais teka elektros srovės. Tiems kontūrams judant ar deformuojantis, šaltinių pašalinės elektrovaros atlieka darbą. Jų energija eikvojama magnetiniam laukui sukurti ir mechaniniam darbui atlikti. Šaltinių atliekamas darbas nugalint saviindukcijos elektrovaras

$$dA = -\sum_{j=1}^N \mathcal{E}_{sj} I_j dt = \sum_{j=1}^N \frac{d\Phi_j}{dt} \cdot I_j dt = \sum_{j=1}^N I_j d\Phi_j,$$

o mechaninis darbas, pakitus sistemos konfigūraciją apibūdinančiam parametru x_j , lygus $\sum_{j=1}^N F_j dx_j$. Čia F_j

– mechaninė jėga. Pagal energijos tvermės dėsni

$$\sum_{j=1}^N I_j d\Phi_j = dW + \sum_{j=1}^N F_j dx_j. \quad (6.44)$$

Panagrinėsime du atvejus.

1) Procesai, kuriems vykstant magnetinis srautas nekinta ($\Phi_j = \text{const}$, $d\Phi_j = 0$). Tada pagal (6.44)

$$0 = dW + \sum_{j=1}^N F_j dx_j.$$

Iš čia nustatome, kad jėga

$$F_j = - \left(\frac{\partial W}{\partial x_j} \right)_{\Phi = \text{const}}. \quad (6.45)$$

Norint naudotis (6.45), reikia magnetinio lauko energiją užrašyti kaip nepriklausomų dydžių Φ_j ir x_j funkciją.

2) Procesai, kurių metu srovės nekinta ($I_j = \text{const}$). Šiuo atveju (6.36), atsižvelgiant į (6.32), virsta į

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Phi_j I_j,$$

$$dW = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j d\Phi_j,$$

o iš (6.44) šiuo atveju įgauna pavidalą

$$\frac{1}{2}dW = \sum_{j=1}^N F_j dx_j.$$

Iš čia nustatome, kad

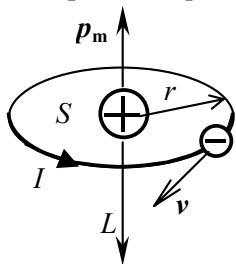
$$F_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x_j} \right)_{I=\text{const}}. \quad (6.46)$$

Norint naudotis (6.46), W reikia išreikšti srovių stipriais ir x_j parametrais.

11. Atomų ir molekulių magnetizmas. Giromagnetinis santykis

Jau buvo minėta, kad atomai turi orbitinius ir sukininius magnetinius momentus. Dabar panagrinėkime visa tai išsamiau.

Apskrita r spindulio orbita skriejančio elektrono orbitinis magnetinis momentas gali būti išreikštas taip:



118 pav.

$$p_m = IS = \frac{e}{T} \cdot \pi r^2. \quad (6.47)$$

Elektrono impulso momentas

$$L = mvr = m\omega r^2 = m \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot r^2. \quad (6.48)$$

Čia I – elektrono skriejimo sąlygotas srovės stipris, S – orbitos apjuosiamas plotas, T – orbitos apskriejimo periodas, e – elektrono krūvis, m – elektrono masė, v – jo greitis, ω – kampinis dažnis. (Atkreipkime dėmesį, kad dėl neigiamo elektrono krūvio vektorių p_m ir L kryptys yra priešingos).

Elektrono magnetinio momento p_m ir impulso momento L santykis vadinamas **giromagnetiniu santykiu**:

$$\Gamma = \frac{p_m}{L}. \quad (6.49)$$

I (6.49) įrašę (6.47) ir (6.48), įsitikiname, kad elektrono orbitiniam judėjimui

$$\Gamma = \frac{e}{2m}. \quad (6.50)$$

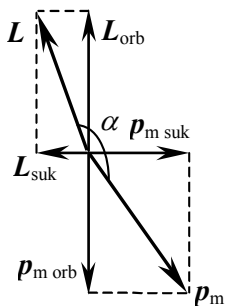
Idomu pastebėti, kad sukiniui šis santykis yra dvigubai didesnis:

$$\Gamma_{\text{suk}} = \frac{e}{m}. \quad (6.51)$$

Dažnai vietoje (6.50) ir (6.51) formulį rašoma

$$\Gamma = g \left(\frac{e}{2m} \right). \quad (6.52)$$

Elektrono orbitiniam judėjimui $g=1$, o sukininiam – $g=2$.



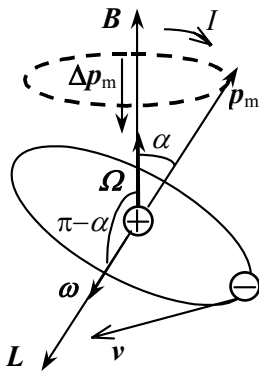
119 pav.

Jei atome yra daugiau nei vienas elektronas, atomo visas magnetinis momentas susideda iš elektronų orbitinio judėjimo magnetinių momentų ir jų sukininių magnetinių momentų. Panašiai susideda ir mechaniniai momentai. Tačiau esant skirtingoms orbitinio ir sukininio judėjimo g vertėms kampas tarp atomo pilnutinio magnetinio momento ir jo mechaninio momento α , apskritai imant, nėra lygus 180° (119 pav.).

Energiškai palankiausia atomo būseną susidaro tada, kai elektronai atome pasiskirsto į sluoksnius taip, kad pilnutinio momento vertė būtų kuo mažiausia. Todėl užpildytųjų sluoksnių pilnutiniai momentai esti lygūs nuliui. Atomo magnetinį momentą sukuria tik neužpildytųjų sluoksnių elektronai. Dažniausiai tokie sluoksniai yra išoriniai. Be to jų sukininiai ir orbitiniai momentai stengiasi orientuotis priešingomis kryptimis, kad kuo labiau vieni kitus kompensuotų. Dėl to atomo magnetinį momentą daugiausia lemia išorinių elektronų nekompensuoti sukiniai.

12. Diamagnetizmo prigimtis. Larmoro precesija

Žinome, kad kontūrą su srove išorinis magnetinis laukas stengiasi orientuoti taip, kad jo magnetinis momentas būtų nukreiptas magnetinio lauko kryptimi. Tada kontūro ir išorinio magnetinio lauko kryptys sutampa, t. y. laukas sustiprėja. Kodėl gi diamagnetikuose esti atvirkščiai?



120 pav.

Panagrinėkime elektrono orbitinio judėjimo pobūdį magnetiniame lauke. Tarkime, kad kampas tarp elektrono orbitinio magnetinio momento p_m ir magnetinio srauto tankio vektoriaus B lygus α (120 pav.). Magnetinis laukas stengiasi taip orientuoti orbitos plokštumą, kad būtų $p_m \parallel B$. Tačiau dėl elektrono impulso momento tai sukelia tik orbitos precesinį judėjimą apie B kryptį, panašiai, kaip atsitinka giroskopui, kai jį veikia jėgos momentas. Tegu elektrono skriejimo orbita kampinis greitis ω , o precesijos kampinis greitis Ω . Orbitinį magnetinį momentą veikiantis jėgos momentas pagal (5.37) ir (6.49) gali būti išreikštas taip:

$$M = p_m B \sin \alpha = \Gamma L B \sin \alpha. \quad (6.53)$$

Pagal apytikrę giroskopų teoriją, kai $\Omega \ll \omega$,

$$M = \Omega L \sin(\pi - \alpha) = \Omega L \sin \alpha. \quad (6.54)$$

Iš (6.53) ir (6.54) nustatome, kad precesijos kampinis dažnis

$$\boxed{\Omega = \Gamma B.} \quad (6.55)$$

Šis precesinis judėjimas sąlygoja papildomą magnetinį momentą Δp_m , nukreiptą prieš išorinio magnetinio lauko kryptį, o pati precesija vadinama Larmoro (*J. Larmor*) precesija.

Dėl Larmoro precesijos kiekvienas atomo elektronas sukuria apskritiminę srovę, kurios kryptis dėl neišvengiamo elektrono krūvio susijusi su lauko magnetinio srauto tankio kryptimi pagal kairinio sraigto taisyklę. Tos apskritiminės srovės sukurtas papildomas magnetinio srauto tankis esti nukreiptas prieš išorinio magnetinio lauko kryptį. Tai ir sudaro diamagnetizmo reiškinių esmę. Be abejo, diamagnetizmas būdingas kiekvienai medžiagai. Tačiau ne visos medžiagos yra diamagnetikai, nes dažnai šį silpną reiškinį užgožia kitokie reiškiniai. Dažniausiai diamagnetikais esti tos medžiagos, kurių atomų ar molekulių pilnutiniai magnetiniai momentai lygūs nuliui.

13. Paramagnetizmo prigimtis. Paramagnetinio jautrio priklausomybė nuo temperatūros.

Kiuri dėsnis

Paramagnetikai yra tokios medžiagos, kurių molekulės turi magnetinį momentą. Kai magnetinio lauko nėra, atomų magnetinių momentų orientacija dėl šiluminio judėjimo esti betvarkė, todėl tų magnetinių momentų vektorinė suma esti lygi nuliui. Išoriniame magnetiniame lauke B esančio magnetinio momento p_m energija esti mažiausia, kai $p_m \parallel B$. Tačiau, veikiant magnetiniam laukui, kampas tarp atomo magnetinio momento ir magnetinio srauto tankio krypties nesikeičia: magnetinis momentas tik precesuoja apie B kryptį, nekintant kampui tarp jų. Dėl atomų sąveikos ir susidūrimų šis precesinis judėjimas trumpam sutrinka. Tuomet magnetinis laukas ir orientuoja atomų magnetinius momentus taip, kad būtų $p_m \parallel B$, todėl magnetinis laukas paramagnetike sustiprėja. Šiluminis judėjimas trukdo šiam orientavimui, dėl to paramagnetikų magnetinis jautris mažėja temperatūrai didėjant.

Paramagnetikų įmagnetėjimas vyksta panašiai kaip polinių dielektrikų poliarizacija. Todėl įmagnetėjimui aprašyti tinka Lanževano funkcija (2.6), joje vietoj pE' rašant $p_m B$. Kai $p_m B \ll kT$, skleidime paėmę du narius, gauname tokią įmagnetėjimo išraišką:

$$J = \frac{\mu_0 N p_m^2}{3kT}. \quad (6.56)$$

Vietoj (6.56) dažnai užrašoma paprastesnė išraiška

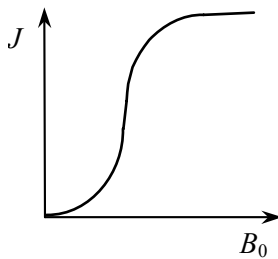
$$\boxed{J = \frac{C}{T}.} \quad (6.57)$$

Čia C vadinama Kiuri konstanta, o (6.57) priklausomybė – Kiuri dėsniu.

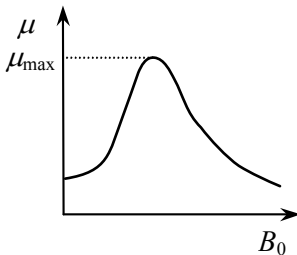
Geriau paramagnetizmą paaiškina kvantinė teorija.

14. Feromagnetizmas. Histerezės kilpa. Feromagnetinių savybių priklausomybė nuo temperatūros. Feromagnetiniai domenai.

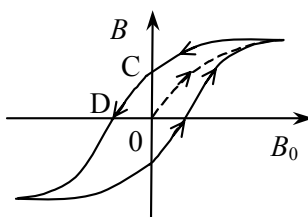
Feromagnetikai – tai medžiagos, kurių magnetinė skvarba bei magnetinis jautris labai dideli ($\mu \gg 1$, $\chi \gg 1$). Feromagnetikai yra kai kurie metalai (Fe, Ni, Co, Gd) bei junginiai (Fe_3O_4 , CrTe, MnSe ir kt.). Feromagnetikai pasižymi daugeliu savybių, nebūdingų kitiems magnetikams. Kai kurias jų pabandydysime trumpai aptarti.



121 pav.



122 pav.



123 pav.

Didėjant išorinio lauko magnetinio srauto tankiui B_0 , įmagnetėjimas didėja netiesiškai ir pasiekia sotį (121 pav.). Todėl ir magnetinis jautris χ bei magnetinė skvarba $\mu = \chi + 1$ irgi priklauso nuo B_0 .

Magnetinės skvarbos priklausomybė nuo B_0 pavaizduota 122 pav.

Tarkime, jog didindami išorinio magnetinio lauko srauto tankį B_0 magnetiname neįmagnetintą feromagnetiką. Tuo atveju magnetinio srauto tankis feromagnetike didės pagal 123 pav. punktyrinę liniją pavaizduotą kreivę. Jei pasiekę tam tikrą B vertę imtume mažinti B_0 , pastebėtume, kad B vertės lieka didesnės negu buvo anksčiau. Pasiekus $B_0=0$, feromagnetikas lieka įmagnetėjęs (atkarpa OC). Šis įmagnetėjimas vadinamas **likciniu įmagnetėjimu**. Norint išmagnetinti feromagnetiką, reikia sudaryti tam tikrą priešingos krypties išorinį magnetinį lauką (atkarpa OD), vadinamą **koerciniu lauku**.

Jeigu feromagnetiką permagnetiname periodiniame magnetiniame lauke, tai, visai panašiai į feroelektrikus, $B(B_0)$ priklausomybę vaizduoja kreivė, vadinama **histerezės kilpa**, kuri parodyta 123 pav.

Didinant temperatūrą feromagnetikai virsta paramagnetikais. Kiekvienam feromagnetikui yra būdinga temperatūros vertė (**Kiuri temperatūra**), kurią pereidamas jis virsta paramagnetiku. Pavyzdžiui, Fe Kiuri temperatūra lygi 770°C , Ni – 360°C , Gd – 17°C .

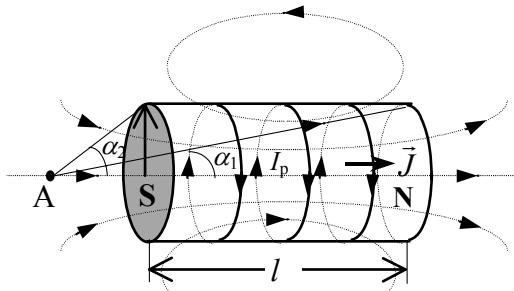
Įvairiais eksperimentais yra įrodyta, kad feromagnetikai susideda iš pakankamai mažų, tačiau makroskopinių, sričių, kuriose net ir nesant išorinio magnetinio lauko atomų magnetiniai momentai orientuoti ta pačia kryptimi. Tokios sritys vadinamos **feromagnetiniais domenais**. Domenai dažnai būna tokio dydžio, kad juos (atitinkamai paruošus feromagnetiko paviršių) galima matyti pro optinį mikroskopą. Taigi domeną sudaro milžiniškas atomų skaičius. Neįmagnetėjusio feromagnetiko domenai esti netvarkingai orientuoti, tad jų magnetiniai laukai apytikriai kompensuojasi. Išorinis magnetinis laukas orientuoja domenų taip, kad jų magnetiniai momentai būtų nukreipti lauko kryptimi, todėl magnetinis laukas ženkliai sustiprėja. Įmagnetėjimo sotis pasiekama, kai praktiškai visi domenai jau esti orientuoti. Mažėjant išoriniam magnetiniam laukui B_0 , dėl šiluminio poveikio domenų orientacijos laipsnis iš dalies susilpnėja, tačiau visai neišnyksta netgi pasiekus $B_0=0$, nes domenų matmenys gerokai didesni už atomų ar molekulių matmenis. Taip galima paaiškinti liktinį įmagnetėjimą. Įkaitinus feromagnetiką iki Kiuri temperatūros, domenai suyra.

Domenų susidarymui, taigi ir feromagnetizmui, paaiškinti reikalinga kvantinė teorija.

15. Nuolatiniai magnetai

Kai kurie feromagnetikai (pavyzdžiui, plienas) pasižymi dideliu **likciniu įmagnetėjimu**, t. y. jų $\vec{J} \neq 0$ net ir esant $\vec{B}_0 = 0$. Iš tokių feromagnetikų daromi nuolatiniai magnetai.

Tarkime, nuolatinis magnetas yra ritinio formos (124 pav.). Ritinio ilgį pažymėkime l , liktinį įmagnetėjimą J , skerspjūvio plotą S . Magnetinį lauką šiuo atveju kuria tik paviršinė srovė I_p , kuri pagal (6.4) yra $I_p = j_p l$, o jos tankis pagal (6.5) $j_p = J$. Magnetinio lauko jėgų linijos magneto viduje nukreiptos vektoriaus \vec{J} kryptimi. Tą magneto galą, iš kurio jėgos linijos išeina į išorę, priimta vadinti šiauriniu (N) poliumi, o į kurį įeina – pietiniu (S) poliumi. Magneto kuriamą magnetinio srauto tankį bet kokiam taške, esančiame ritinio ašyje šalia magneto, galime skaičiuoti pagal ritės formulę (5.23), vietoj IN/l įrašydami J :



124 pav.

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 J |(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)|. \quad (6.58)$$

Magneto magnetinis momentas sutinkamai su (6.3)

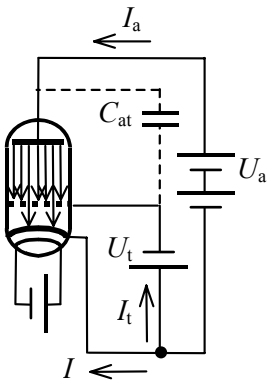
$$p_m = JV = SlJ. \quad (6.59)$$

Jėgą, kuria magnetas traukia ar stumia kitą magnetiką, kurio magnetinis momentas p_m , galime apskaičiuoti pagal (5.42) formulę.

(6.58) ir (6.59) formulės gali būti apytiksliai taikomos ne tik cilindriniam, bet ir kitokios formos (pvz., stačiakampio skerspjūvio) tiesiesiems magnetams.

16. Triodas

Vakuuminėse elektroninėse lempose elektronų pluoštą galima lengvai valdyti. Tam tikslui tarp katodo ir anodo įtaisoma vienas ar keli papildomi metaliniai elektrodai, vadinami tinkleliais. Jie dažniausiai daromi vielinės spiralės formos.



125 pav.

Triode estis katodas, anodas ir vienas tinklelis (125 pav.). Anodinės srovės stipris priklauso nuo anodo ir tinklelio įtampų: $I_a = f(U_a, U_t)$. Tinklelis esti arti katodo, todėl jo įtampos kitimas veikia anodinę srovę daug stipriau negu anodo įtampa. Pagal pirmąją Kirchofo taisyklę $I = I_a + I_t$. Dažniausiai tinklelio srovė būna maža: $I_t \ll I_a$, tad $I \approx I_a$.

Triodą apibūdina jo anodinės ir tinklelio charakteristikos. Anodinių charakteristikų pavyzdys pateikiamas 126 pav. Jose $U_{t1} > U_{t2} > U_{t3}$. Tinklelio charakteristikos, kai $U_{a1} > U_{a2} > U_{a3}$, pavaizduotos 127 pav. Iš šių charakteristikų galima nustatyti šiuos triodo parametrus:

a) vidinę varžą

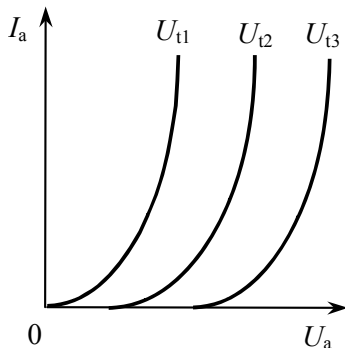
$$R_i = \left(\frac{\Delta U_a}{\Delta I_a} \right)_{U_t = \text{const}}, \quad (6.60)$$

b) tinklelio charakteristikos statumą

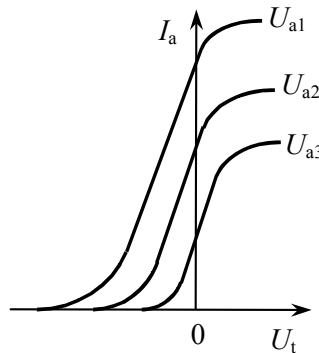
$$S = \left(\frac{\Delta I_a}{\Delta U_t} \right)_{U_a = \text{const}}, \quad (6.61)$$

c) stiprinimo koeficientą

$$\mu = \left(\frac{\Delta U_a}{\Delta U_t} \right)_{I_a = \text{const}}. \quad (6.62)$$



126 pav.



127 pav.

Sudauginant (6.60) ir (6.61), nesunku įsitikinti, kad

$$R_i S = \mu. \quad (6.63)$$

Paminėsime kai kuriuos triodo trūkumus. Pirmiausia, tai nelabai didelis stiprinimo koeficientas μ , nes tinklelis nepakankamai ekranuoja katodą. Padarius tankesnę tinklelį, susilpnėtų anodinė srovė I_a , padidėtų vidinė varža R_i . Antra, didelė talpa tarp anodo ir tinklelio C_{at} . Ji esti žalinga stiprinant aukštadažnius virpesius.

Siekiant išvengti šių trūkumų vietoj triodo naudojamos daugiau tinklelių turinčios elektroninės lempos (tetrodai bei pentodai).

17. Elektronų spindulio valdymas. Elektronų pluošto fokusavimo būdai

Panagrinėkime elektringųjų dalelių judėjimą vienalyčiuose elektriniame ir magnetiniame laukuose.

Elektriniame lauke dalelę, kurios krūvis q ir masė m , veikia jėga $\vec{F} = q\vec{E}$, o dalelė juda su pagreičiu $\vec{a} = q\vec{E}/m$. Jos judėjimas toks pat, kaip ir gravitaciniame lauke. Bendru atveju dalelė juda paraboline trajektorija.

Magnetiniame lauke dalelę veikia Lorencio jėga (5.11), kuri suteikia dalelei pagreitį

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m}(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.64)$$

Matome, kad pagreičio vektorius $\vec{a} \perp \vec{v}$ ir $\vec{a} \perp \vec{B}$.

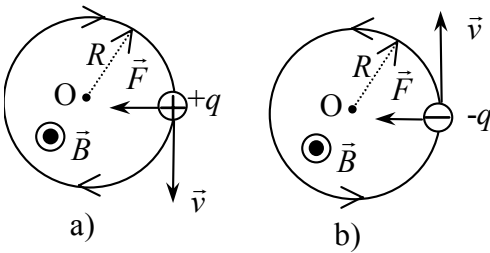
Jei dalelė įlekia į magnetinį lauką stačiu kampu (t. y. $\vec{v} \perp \vec{B}$, $F = qvB$), tai jos trajektorija esti apskritimas, kurio plokštuma statmena magnetiniam laukui, o jėga \vec{F} visą laiką nukreipta į to apskritimo centrą (įcentrinė jėga). To apskritimo spindulį R galime nustatyti prisiminę įcentrinės jėgos išraišką mv^2/R . Taigi

$$\frac{mv^2}{R} = qvB. \quad (6.65)$$

Iš čia nustatome, kad

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (6.66)$$

Matome, kad apskritimo spindulys tiesiai proporcingas dalelės greičiui v ir atvirkščiai proporcingas magnetinio srauto tankiui B . Žinodami v , B bei išmatavę R , galime iš (6.66) nustatyti dalelės krūvio ir masės santykį q/m (specifinį krūvį).



127 pav.

Teigiamą krūvį turinčios dalelės trajektorija vienalyčiame statmename brėžinio plokštumai į skaitytąją nukreiptame magnetiniame lauke pavaizduota 127 pav.,a) o neigiamą krūvį – 127 pav.,b). Sukimosi kryptis priklauso nuo krūvio ženklo. Kaip matyti iš 127 pav., neigiamą krūvį turinčios dalelės sukimosi kryptis susijusi su magnetinio lauko \vec{B} kryptimi pagal dešiniojo sraigto taisyklę, o teigiamą – pagal kairinio sraigto taisyklę. Taigi besisukančios dalelės magnetinis momentas abiem atvejais esti nukreiptas prieš lauką. Pasinaudoję (6.66), lengvai apskaičiuojame sukimosi apskritimu periodą:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (6.67)$$

Matome, kad periodas nepriklauso nei nuo dalelės greičio, nei nuo apskritimo spindulio, o priklauso tik nuo magnetinio srauto tankio B ir nuo santykio q/m .

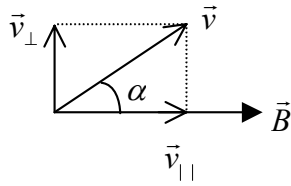
Dabar tarkime, kad dalelė įlekia į magnetinį lauką ne statmenai jam, o tam tikru kampu. Kampą tarp \vec{v} ir \vec{B} pažymėkime α . Greičio vektorių \vec{v} išskaidykime į dvi dedamąsias: lygiagrečią magnetiniam laukui \vec{v}_{\parallel} ir jam statmeną \vec{v}_{\perp} (128 pav.).

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}.$$

Krūvį veikianti Lorencio jėga

$$\vec{F} = q(\vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}) = q(\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}) + q(\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}) = q(\vec{v}_{\perp} \times \vec{B}), \quad (6.68)$$

nes $(\vec{v}_{\parallel} \times \vec{B}) = 0$. Matome, kad šiuo atveju Lorencio jėgos išraiška (6.68) sutampa su (5.11), tik joje vietoje \vec{v} reikia rašyti \vec{v}_{\perp} , kurios modulis $v_{\perp} = v \sin \alpha$. Todėl dalelė suksis apskritimu, kurio spindulys

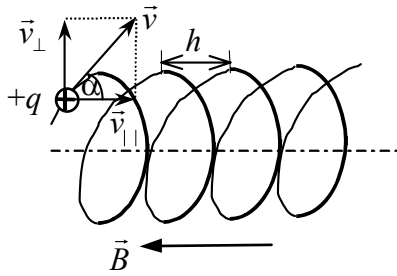


128 pav.

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}, \quad (6.69)$$

o jos sukimosi periodas aprašomas (6.67) formule. Lygiagrečioji magnetiniam laukui dedamoji $v_{\parallel} = v \cos \alpha$ nekinta, nes šia kryptimi veikiančios Lorencio jėgos dedamoji lygi nuliui. Taigi atstojamasis dalelės judėjimas šiuo atveju susideda iš sukimosi statmenoje magnetiniam laukui plokštumoje ir tolygaus judėjimo išilgai lauko. Tai reiškia, kad dalelė juda **spiraline linija**, kurios spindulys aprašomas (6.69), o žingsnis

$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qB}. \quad (6.70)$$

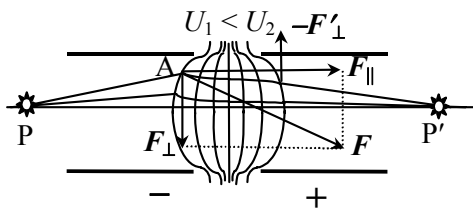


129 pav.

Spiralės ašis nukreipta magnetinio lauko kryptimi (129 pav.).

Elektringųjų dalelių judėjimo elektriniame ir magnetiniame laukuose dėsniniais remiamasi konstruojant elektrinius ir magnetinius lęšius, kuriais galima valdyti elektronų spindulius.

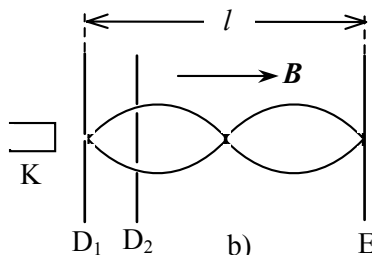
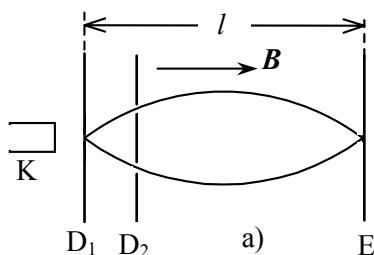
Paprasčiausią elektroninį lęšį sudaro du laidūs bendraašiai cilindrai, tarp kurių sudarytas potencialų skirtumas (130 pav.). Tarpe tarp cilindrų nubraižytos išlenktos linijos vaizduoja ekvipotencialinius paviršius. Tarkime, iš taško P lekiantis elektronas atsidūrė taške A. Ten jį veikia jėga F , nukreipta statmenai ekvipotencialiniam paviršiui. Statmenoji cilindrų ašiai tos jėgos dedamoji F_{\perp} kreipia elektrono trajektoriją ašies link. Tiesa, elektronui atsidūrus dešinėje tarpo tarp cilindrų pusėje jį veiks priešingos krypties jėga $-F'_{\perp}$ ir elektrono trajektorija kryptų priešinga kryptimi, tačiau šią kelio elektriniame lauke dalį elektronas pralėks greičiau (nes jam suteikia pagreitį ta pačia kryptimi nukreipta jėgos dedamoji F_{\parallel}), taigi trajektorija vistiek išliks nukreipta ašies link ir elektronas ją kirs taške P'. Ten ir bus taško P atvaizdas.



130 pav.

Apskritai elektrono judėjimas elektriniame lauke, kurio ekvipotencialinių paviršių forma tokia pati, kaip optinio lęšio forma, yra labai panašus į šviesos spindulio eigą lęsyje. Tokie elektroniniai lęšiai naudojami elektronų pluoštams fokusuoti.

Elektronų pluoštą fokusuoti galima ir panaudojant magnetinį lauką. Vieno fokusavimo būdo vienalyčiame magnetiniame lauke schema pavaizduota 131 pav. Kaitinamo katodo K emituojami elektronai pagreitinami elektrinio lauko, sudaryto tarp katodo ir diafragmos D_1 . Diafragmoje D_2 yra žiedo formos skylė. Pro



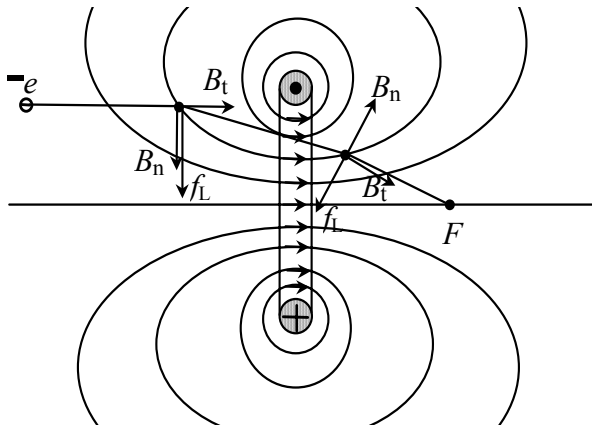
131 pav.

ją pralėkę elektronai su B kryptimi sudaro pastovų kampą α . Tarp diafragmos D_1 ir ekrano E elektronai juda magnetiniame lauke. Jų trajektorija yra spiralinė linija, kurios žingsnis h aprašomas (6.70) formule. Nulėkę sveiką žingsnių skaičių n , elektronai vėl susirinks tame pačiame taške. Taigi elektronų fokusavimo sąlygą šiuo atveju galima užrašyti taip:

$$l = nh = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{eB} \cdot n. \quad (6.71)$$

131 pav., a) pavaizduotu atveju $n=1$, o 131 pav., b) – $n=2$. Nuolatiniam magnetiniam laukui B sudaryti naudojamas solenoidas, į kurį įdedamas šis fokusavimo įrenginys.

Elektronų pluoštą galima sufokusuoti ir panaudojant trumpos ritės magnetinį lauką. Norėdami suprasti tokio magnetinio lęšio veikimo principą, panagrinėkime elektrono judėjimą vienos vijos su srove magneti-



132 pav.

niame lauke (132 pav.). Tegu iki lęšio elektronas juda statmenai vijos plokštumai. Įlėkusi į magnetinį lauką elektroną veikia Lorencio jėga. Magnetinio srauto tankio vektorių išskaidykime į lygiagrečiąją elektrono trajektorijai dedamąją B_t ir statmenąją jai B_n . Lorencio jėga yra statmena B_n ir nukreipta statmenai brėžinio plokštumai į mus (132 pav. neparodyta). Šiai jėgai veikiant elektronas įgyja į mus nukreiptą greitį v (paveiksle neparodytas), kuris yra statmenas magnetinio lauko dedamajai B_t , tad atsiranda lęšio ašies link nukreipta Lorencio jėga $f_L = evB_t$, ir elektronas ima artėti prie ašies. Kitoje vijos plokštumos pusėje (dešinėje 132 pav.) B_n kryptis priešinga, taigi Lorencio jėga mažina į mus nukreiptą greitį v . Tačiau kol šis greitis dar nelygus nuliui elektroną tebeveikia Lorencio jėga f_L , ir jo trajektorija dar labiau priartėja prie lęšio ašies. Elektronas kerta tą ašį tam tikrame taške F – magnetinio lęšio židinyje.

Praktikoje esti naudojama ne viena vija, o iš kelių vijų suvyniota trumpa ritė.

18. Magnetiniai veidrodžiai

Dabar panagrinėkime elektringųjų dalelių judėjimo nevienalyčiame magnetiniame lauke ypatumus. Nesunku įrodyti, kad bet kokiame magnetiniame lauke judančios elektringosios dalelės greičio modulis nekinta. Judėjimo lygtis veikiant Lorencio jėgai yra

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}).$$

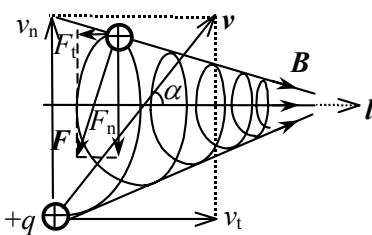
Šios lygties abi puses skalariškai padauginame iš \vec{v} :

$$m \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = q((\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}). \quad (6.72)$$

Matome, kad (6.72) lygties dešinė pusė lygi nuliui, nes $(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} \equiv 0$. Taigi

$$m \frac{d(v^2)}{dt} = 0,$$

arba $v^2 = \text{const.}$

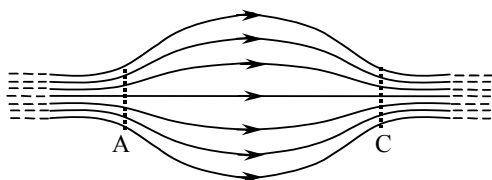


133 pav.

133 pav. pavaizduota elektringosios dalelės $+q$, įlėkusios į nevienalytį magnetinį lauką tam tikru kampu α , trajektorija. Dalelę veikianti Lorencio jėga F šiuo atveju gali būti išskaidyta į statmeną vidutinio magnetinio lauko kryptiai dedamąją F_n ir lygiagrečią jai F_t . Dedamoji F_t suteikia pagreitį, nukreiptą prieš magnetinio lauko kryptį, dėl to dalelės greičio dedamoji v_t , nukreipta B kryptimi, mažėja. Sutinkamai su (6.69) ir (6.70), didėjant B mažėja trajektorijos kreivumo spindulys R ir spiralinės žingsnis h . Kadangi pilnutinis greitis v nekinta, tai statmenoji magnetiniam laukui jo dedamoji didėja.

Jei kampas α nelabai mažas, gali pasidaryti $v_t \approx 0$, ir dalelė, veikiamą jėgos F_t , sukdamasi ims judėti magnetinio lauko silpnėjimo kryptimi. Šitoks nevienalytis magnetinis laukas vadinamas **magnetiniu veidrodžiu**, nes jis tartum atspindi elektringąją dalelę.

Jei magnetinio lauko konfigūracija tokia, kaip pavaizduota 134 pav. į jį nelabai mažo kampų įlėkusi elektringoji dalelė atsispindės nuo abiejų stipraus lauko sričių A ir C, t. y. visą laiką sukdamasi judės srityje tarp A ir C.



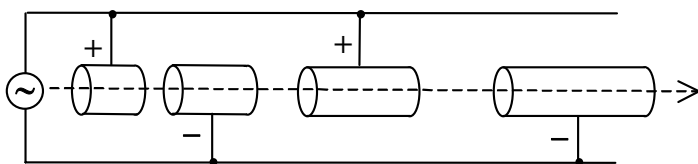
134 pav.

Tokius „dvigubo butelio“ formos magnetinius laukus bando panaudoti didelės energijos dalelių plazmai termobranduolinės sintezės metu laikyti. Tačiau dėl dalelių šiluminio judėjimo ir jų susidūrimų kai kurios jų atsitiktinai įgyja greičius, sudarančius mažą kampą su lauko kryptimi. Tokios dalelės išlekia iš magnetinio lauko srities.

19. Elektringųjų dalelių greitintuvai

Yra tiesiniai ir cikliniai greitintuvai.

Tiesiniame greitintuve vienoje tiesėje išdėstytai daug laidžių vamzdžių, prie kurių prijungtas kintamosios įtampos šaltinis (135 pav.). Dalelės greitamos tik tarp vamzdžių, nes jų viduje elektrinis laukas lygus nuliui. Kol dalelė lekia vamzdžiu, šaltinio polių ženklai turi pasikeisti. Dalelės greičiui didėjant, vamzdžių ilgai ir atstumas tarp jų irgi turi būti didesni.



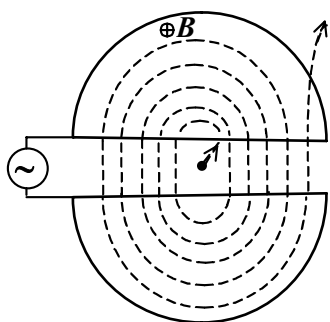
135 pav.

Plačiau taikomi cikliniai greitintuvai. Juose dalelių greitinimui naudojamas elektrinis, o jų trajektorijai valdyti – magnetinis laukas.

Priminsime statmenai magnetiniam laukui judančios elektringosios dalelės trajektorijos spindulio R ir apskriejimo periodo formules (6.66) ir (6.67):

$$R = \frac{mv}{qB},$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}.$$



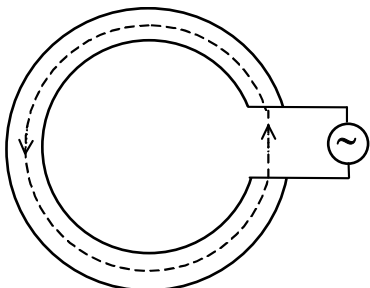
136 pav.

Ciklotrono schema pateikiama 136 pav. Jį sudaro du magnetiniame lauke esantys laidūs duantai, prie kurių prijungtas kintamosios įtampos šaltinis. Dalelės greitamos tik tarp duantų esančioje srityje, nes duantų viduje elektrinio lauko nėra. Todėl duantų viduje dalelės juda pusapskritimiais, kurių spindulys didėja didėjant dalelių greičiui (žr. (6.66)).

Ciklotrone gali būti naudojama pastovaus dažnio greitinančioji įtampa, nes dalelės apskriejimo periodas nepriklauso nuo jos greičio (žr. 6.67)). Tačiau jei pasiekiamas didelis (reliatyvistinis) greitis, dalelės masė padidėja, nes pagal reliatyvumo teoriją

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Masei didėjant, reikia didinti ir greitinančios įtampos periodą taip, kad santykis m/T išliktų pastovus. Tas daroma **fazotronu**.



137 pav.

Be to, pasiekus didelius greičius, dalelės trajektorijos magnetiniame lauke spindulys gali pasidaryti neleistinai didelis, nes, sutinkamai su (6.66), $R \sim v$. Kad nedidėtų R , reikia didinti ir magnetinio srauto tankį B taip, kad mv/B būtų pastovus dydis. Tai daroma **sinchrotrone**. Sinchrotronai paprastai daromi žiedo formos, nes juose R beveik nekinta (137 pav.).

Sinchrofazotronu sujungtos fazotronui ir sinchrotronui būdingos savybės. Jame keičiama ir greitinančios įtampos periodas, ir magnetinio srauto tankis.

7 skyrius ELEKTROMAGNETINĖ INDUKCIJA

1. Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnis. Elektrovaros atsiradimas magnetiniame lauke judančiame laidininke

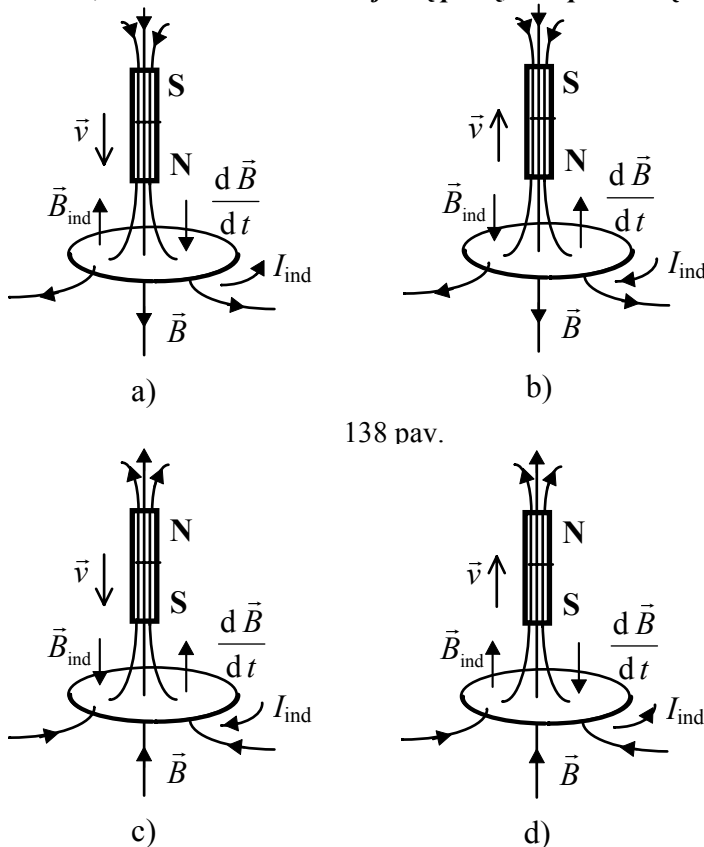
Jau žinome, kad elektros srovė sukuria magnetinį lauką. Ar nėra atvirkštinio reiškinių, kada magnetinis laukas sukuria elektros srovę? Pirmasis iš šių klausimų teigiamą bandymais pagrįstą atsakymą davė Faradėjus (*M. Faraday*) 1831 m. Jis pastebėjo, kad kintant uždara laidų kontūrą kertančiam magnetiniam laukui, tame kontūre atsiranda elektros srovė. Ji buvo pavadinta *indukuotąja srove*, o šis reiškinys - *elektromagnetinė indukcija*.

Bandymais buvo nustatyta, kad indukuotosios srovės stipris proporcingas magnetinio srauto kitimo spartai: $I_{\text{ind}} \sim d\Phi/dt$ nepriklausomai nuo to, dėl kokios priežasties kinta srautas

$$\Phi = \int_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{(S)} B dS \cos \alpha. \quad (7.1)$$

Srautas gali kisti judant kontūrai magneto atžvilgiu (kinta B), jam pasisukant (kinta α) arba jam deformuojantis (kinta S). Suprantama, jog vienu metu gali veikti du ar visi trys šie veiksniai.

Bandymai rodo, kad indukuotosios srovės kryptis priklauso nuo to, didėja ar mažėja kontūrą kertantis magnetinis srautas, taip pat nuo magnetinio srauto tankio vektoriaus krypties kontūro atžvilgiu. Apibendrintą taisyklę, pagal kurią galima nustatyti indukuotosios srovės kryptį, 1883 m. suformulavo Lencas (*E. Lenz*): *uždaramame kontūre indukuota elektros srovė teka tokia kryptimi, kad jos kuriamas magnetinis srautas, kertantis kontūro ribojamą plotą, kompensuotų magnetinio srauto, sukeliančio šią srovę, kitimą*.



138 pav.

Panagrinėkime keletą konkrečių atvejų. Tarkime, tiesusis magnetas šiauriniu poliumi artinamas prie uždaros vijos (138 pav., a). Šiuo atveju viją kertantis magnetinis srautas nukreiptas žemyn ir didėja, tad vijoje indukuotoji srovė I_{ind} tekės tokia kryptimi, kad jos kuriamas magnetinis srautas būtų nukreiptas į viršų ir kompensuotų magnetinio srauto didėjimą. Kontūro ribojamas plotas S šiuo atveju nekinta, taigi $\frac{d\Phi}{dt} = S \frac{dB}{dt}$. Vektoriaus \vec{B} mo-

duliui didėjant, jo išvestinės $\frac{d\vec{B}}{dt}$ kryptis

sutampa su \vec{B} kryptimi, t. y. $\frac{d\vec{B}}{dt}$ nukreiptas žemyn. Sutinkamai su Lenco taisykle indukuotoji srovė turi tekėti tokia kryptimi, kad jos kuriamo magnetinio lauko srauto tankis būtų nukreiptas į viršų. Priminsime, kad vektoriaus \vec{B}_{ind} kryptis susijusi su I_{ind} kryptimi dešiniojo sraigto taisykle.

Nesunku įsitikinti, kad tolinant magnetą nuo vijos (138 pav., b) magnetinis srautas, ker-

tantis vijos plotą, mažėja, tad $\frac{d\vec{B}}{dt}$ nukreipta prieš \vec{B} kryptį, t. y. į viršų. \vec{B}_{ind} ir šiuo atveju turi būti nukreipta prieš $\frac{d\vec{B}}{dt}$ kryptį, t. y. žemyn. Išsiaiškinę \vec{B}_{ind} kryptį, pagal dešiniojo sraigto taisyklę nustatome I_{ind} kryptį.

Panašiai samprotaujant lengva nustatyti indukuotosios srovės kryptį, kai magnetas pietiniu poliumi artėja prie vijos (138 pav., c) ar tolsta nuo jos (138 pav., d).

Atkreipsime dėmesį, kad **indukuotosios srovės kryptis susijusi su $\frac{d\vec{B}}{dt}$ vektoriaus kryptimi kairinio sraigto taisykle.**

Elektros srovės atsiradimas uždame kontūre rodo, kad kontūrą veikia neelektrostatinės kilmės pašalinis laukas, kuris sąlygoja indukcinę elektrovarą \mathcal{E}_{ind} . Remiantis Omo dėsnio indukuotosios srovės stipris

$$I_{\text{ind}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}}}{R}. \quad (7.2)$$

Čia R - kontūro varža.

Pagal Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnį

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (7.3)$$

Minusas ženklas čia rašomas atsižvelgiant į Lenco taisyklę.

Jei kontūras būtų superlaidus ($R=0$), tada jame indukuotųsi tokio stiprio srovė, kad jos sukurtas magnetinis srautas visiškai kompensuotų magnetinio srauto kitimą, t. y. superlaidaus kontūro ribojamą plotą kertantis magnetinis srautas nepakistų. Taigi superlaidaus kontūro atveju

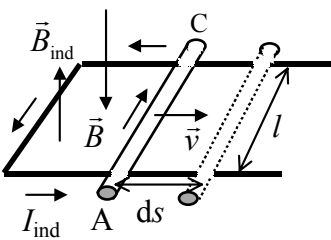
$$\Phi = \text{const.}$$

Jei kelis nuosekliai sujungtus kontūrus kerta tas pats magnetinis srautas, tada indukcinė ev lygi indukcinė ev kiekviename kontūre sumai. Pavyzdžiui, jei tas pats magnetinis srautas kerta ritę, turinčią N vijų, ritėje indukuojama ev

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (7.4)$$

Panagrinėkime, kokios kilmės yra pašalinis laukas, sąlygojantis indukcinę ev. Pasirodo, jog šio lauko kilmė gali būti dvejopa.

Kai magnetinis laukas pastovus, o kontūrą kertantis magnetinis srautas kinta dėl kontūro laidininkų judėjimo magnetiniame lauke, indukcinės ev priežastis esti Lorencio jėga. Panagrinėkime stačiakampį kontūrą, esantį vienalyčiame magnetiniame lauke, kurio srauto tankio vektorius \vec{B} statmenas kontūro plokštumai (139 pav.).



139 pav.

Tarkime, laidininkas AC greičiu \vec{v} šliaužia dviem kontūro laidais, tarp kurių atstumas l . Kartu su laidininku judančius jame esančius laisvuosius krūvininkus veikia Lorencio jėga

$$F_L = qvB,$$

kurios kryptį nustatome pagal kairiosios rankos taisyklę. Čia q - krūvininko krūvis. Kelyje l ši jėga atlieka darbą

$$A = F_L l = qvBl.$$

Nejudančiose kontūro dalyse $F_L = 0$, todėl visas darbas, kurį atlieka Lorencio jėga perkeldama krūvį q uždaru kontūru, lygus jos darbui A judančioje kontūro dalyje. Taigi

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \frac{A}{q} = vBl.$$

Bendru atveju, jei kampas tarp vektorių \vec{B} ir \vec{v} yra α , $F_L = qvB \sin \alpha$ ir

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = vBl \sin \alpha. \quad (7.5)$$

(7.5) formulę galime gauti ir kitokiu būdu, remdamiesi Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsniu (7.3). Per laiką dt judantis laidininkas AC paslenka atstumu $ds = vdt$, o kontūrą kertantis magnetinis srautas pakinta dydžiu $d\Phi = Bds = Blvdt$, taigi

$$\left| \mathcal{E}_{\text{ind}} \right| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = Blv.$$

139 pav. pavaizduotu atveju kontūrą kertantis magnetinis srautas didėja, todėl srovės I_{ind} kuriamas magnetinis laukas nukreiptas prieš išorinio magnetinio lauko \vec{B} kryptį.

2. Sūkurinis elektrinis laukas

Dabar smulkiau panagrinėkime indukcinės ev atsiradimą, kai kontūras ar jo dalys magnetiniame lauke nejuda, bet magnetinis srautas kinta dėl to, kad kinta magnetinio srauto tankis B . Sakykime, kad magnetinį lauką sukuria rite tekanti srovė I , o vija yra tos ritės magnetiniame lauke (140 pav.). Magnetinio srauto tankį galime keisti reostatu keisdami srovės I stiprį. Tarkime, jog I stiprėja. Tada kontūrą kertantis magnetinis srautas irgi didėja, o kontūre atsiranda indukuotoji srovė I_{ind} ,

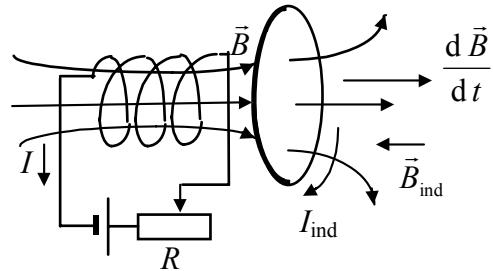
kurianti magnetinį lauką \vec{B}_{ind} , nukreiptą prieš $\frac{d\vec{B}}{dt}$ kryptį. Ko-

kios kilmės yra šią indukuotąją srovę sąlygojanti ev? Lorencio jėga šiuo atveju neveikia kontūro laidininko krūvių, nes laidininkas su krūvininkais nejuda. Atsakymą į šį klausimą pirmasis rado Maksvelas (*J. Ch. Maxwell*). Nejudančius krūvius gali veikti tiksliai elektrinis laukas. Vadinasi, **kintant magnetiniam laukui erdvėje atsiranda elektrinis laukas**. Jis veikia kontūro laidininke esančius laisvuosius krūvius, ir šie juda sukurdami indukuotąją srovę. Šis elektrinis laukas, skirtingai nuo elektros krūvių kuriamo elektrostatinio lauko, nėra potencialinis, todėl

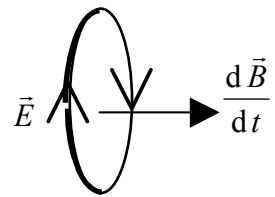
$$\oint_{(L)} (\vec{E}, d\vec{l}) = \mathcal{E}_{\text{ind}} \neq 0. \quad (7.6)$$

Kintamojo magnetinio lauko kuriamas elektrinis laukas vadinamas **sūkuriniu elektriniu lauku**. Jo stiprio linijos yra uždaros, panašiai, kaip magnetinio srauto tankio linijos.

Atkreipsime dėmesį, kad kintant magnetiniam laukui sūkurinis elektrinis laukas atsiranda ir nesant laidaus kontūro. Indukuotosios srovės tada, be abejo, nesti. Vektorius \vec{E} visais atvejais esti statmenas vektoriui \vec{B} ($\vec{E} \perp \vec{B}$), o \vec{E} **kryptis susijusi su $\frac{d\vec{B}}{dt}$ kryptimi kairinio sraigto taisykle** (140 pav.).



140 pav.



141 pav.

Į Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnio išraišką (7.3) vietoj \mathcal{E}_{ind} įrašykime (7.6):

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (7.7)$$

Tarkime, kad kontūras L labai mažas. Tada jo ribojamas plotas ΔS irgi bus labai mažas, magnetinis srautas $\Phi = B \cdot \Delta S$ ir (7.7) taps

$$\oint_{(L)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial B}{\partial t} \Delta S. \quad (7.8)$$

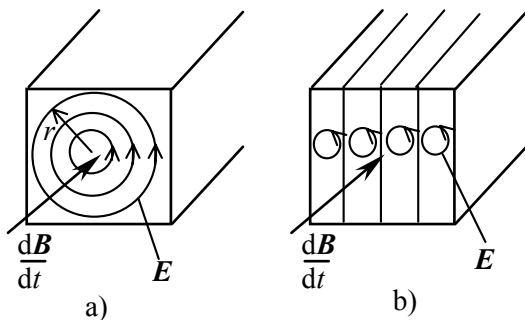
(7.8) užrašyta dalinė išvestinė, nes B gali būti ne tik laiko, bet ir erdviųjų koordinačių funkcija. (7.8) pritaikę (1.30), nustatome, kad

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}. \quad (7.9)$$

(7.9) yra **Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnio diferencialinė išraiška**. Ji aprašo elektrinio lauko atsiradimą tam tikrame taške dėl magnetinio srauto tankio pakitimo tame pat taške.

3. Fuko srovės

Masyviuose laidininkuose, esant jiems kintamame magnetiniame lauke, atsirandančios indukcinės srovės vadinamos **Fuko** (*L. Foucault*) **srovėmis**. Jos kartais esti naudingos, kartais žalingos. Fuko srovės naudingos asinchroninio variklio rotorijuose, nes jų dėka tie varikliai ir veikia. Fuko srovės išskiria Džaulio šilumą. Varikliuose – tai energijos nuostoliai, bet su jais tenka susitaikyti, tik reikia žiūrėti, kad per daug neperkaistų rotorius. O štai asinchroninių variklių elektromagnetų ar transformatorių šerdyse atsirandančios Fuko srovės esti žalingos, nes jos įkaitina tas šerdis ir tuo didina energijos nuostolius. Stengiantis to išvengti, šerdys daromos iš plonų viena nuo kitos izoliuotų plokštelių ir įtaisomos taip, kad Fuko srovės būtų nukreiptos skersai plokštelių.



142 pav.

Panagrinėkime Fuko srovių išskiriamos šilumos kiekio priklausomybę nuo laidininko matmenų. Tarkime, kad indukcinio sukurinio elektrinio lauko linijos yra apskritimai, kurių spindulys r . Pagal (7.8)

$$2\pi rE = \pi r^2 \cdot \frac{dB}{dt},$$

o iš čia

$$E = \frac{r}{2} \cdot \frac{dB}{dt}.$$

Jei magnetinio srauto tankio kitimas aprašomas lygtimi

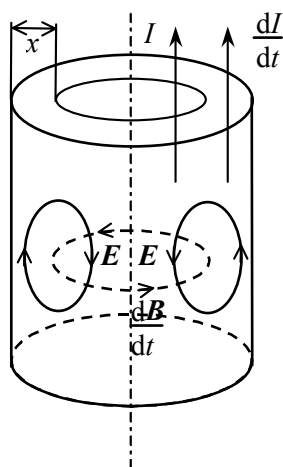
$$B = B_0 \sin \omega t, \text{ tada } \frac{dB}{dt} = B_0 \omega \cos \omega t, \text{ t. y. } \frac{dB}{dt} \sim \omega. \text{ Fuko sro-$$

vių išskiriamas šilumos kiekis tūrio vienetą per laiko vienetą pagal (3.56) $w = \sigma E^2$. Iš šių skaičiavimų matyti, kad $w \sim \sigma \omega^2$. Taigi kuo didesnis sukurinio elektrinio lauko linijų spindulys, kuo didesnis magnetinio lauko dažnis ir kuo geresnis medžiagos elektrinis laidumas, tuo daugiau šilumos išskiria Fuko srovės. Susidaro įvairių spindulių elektrinio lauko linijos (142 pav., a), tačiau didžiausią spindulį riboja statmeni magnetinio srauto tankio vektoriui laidininko matmenys. Jei laidininkas sudarytas iš atskirų izoliuotų plokštelių, didžiausias spindulys turi tilpti į plokštelės matmenis (142 pav., b), t. y. jį riboja plokštelių storis.

Esant dideliame dažniui, jei plokštelių medžiagos laidumas pakankamai didelis, Fuko srovių sąlygoti energijos nuostoliai gali pasidaryti neleistinai dideli net ir naudojant plonas plokšteles. Tais atvejais naudojami mažo elektrinio laidumo feromagnetikai – magnetodielektrikai, pavyzdžiui, feritai.

4. Skinefektas

Nuolatinės srovės tankis visame tiesaus laidininko skerspjūvyje esti vienodas. Kintamosios srovės tankis esti didžiausias prie laidininko paviršiaus. Šis **kintamosios srovės susitelkimas ties laidininko paviršiumi vadinamas skinefektu (paviršiaus efektu)**.



143 pav.

Panagrinėkime šio reiškinio priežastį ritinio pavidalo laidininke (143 pav.). Tegu tam tikru momentu srovė I nukreipta į viršų ir stiprėja, t. y. $\frac{dI}{dt}$ irgi nukreipta į viršų. Tos srovės kuriamas magnetinio srauto tankis B bei jo kitimo sparta $\frac{dB}{dt}$ susiję su I bei $\frac{dI}{dt}$ dešiniojo sraigto taisykle. Viena iš vektorių $\frac{dB}{dt}$ linijų laidininko viduje 143 pav. pavaizduota punktyru. Pagal elektromagnetinės indukcijos dėsnį kintamas magnetinis laukas kuria elektrinį lauką E , susijusį su $\frac{dB}{dt}$ kryptimi kairinio sraigto taisykle. Dvi to indukcinio elektrinio lauko linijos, esančios laidininko viduje, 143 pav. pavaizduotos apskritimais. Matome, kad prie laidininko paviršiaus šis indukcinis elektrinis laukas E nukreiptas $\frac{dI}{dt}$ kryptimi (į viršų) ir sustiprina srovę, o laidininko viduje

– atvirkščiai ir silpnina srovę.

Atlikus gana sudėtingus skaičiavimus, kurių čia nepateikiame, galima įsitikinti, kad srovės tankis einant gilyn į laidininko vidų nuo jo paviršiaus eksponentiškai mažėja:

$$j = j_0 \exp\left(-\frac{x}{\Delta}\right). \quad (7.10)$$

Čia j_0 – srovės tankis laidininko paviršiuje, x – atstumas nuo laidininko paviršiaus į jo vidų, Δ – parametras, priklausantis nuo laidininko savybių. Kaip matyti iš (7.10), gylyje $x=\Delta$ srovės tankis sumažėja $e=2,72\dots$ karto. Minėtieji skaičiavimai duoda tokią Δ išraišką:

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \nu \mu \mu_0 \sigma}}. \quad (7.11)$$

Iš (7.10) ir (7.11) aiškėja, kad srovė tuo labiau susitelkia paviršiuje, kuo didesnis dažnis ir kuo didesnis elektros laidumas. Pavyzdžiui, varyje, kurio $\sigma=6 \cdot 10^7$ S/m, magnetinė skvarba $\mu \approx 1$, esant $\nu=50$ Hz dažniui $\Delta=8$ mm, o esant $\nu=10$ kHz – $\Delta=0,65$ mm. Superlaidininke, kurio $\sigma=\infty$, bet kokio dažnio srovė teka tik paviršiumi.

Taigi kai dažnis pakankamai didelis, nelabai plonuose laidininkuose srovė teka tik nedidelėje laidininko skerspjūvio dalyje, arti jo paviršiaus. Tokiais atvejais geriausia naudoti tuščiavidurį laidininką (pavyzdys – televizijos antenos). Šiuo reiškiniu pasinaudojama, kai norima užgrūdinti metalinių laidininkų paviršių. Didelio dažnio srovė labiausiai įkaitina metalinės detalės paviršių. Nelaukiant, kol dėl šiluminio laidumo įkais visa detalė, ji greitai šaldoma.

Dėl skinefekto didėjant dažniui didėja laidininko elektrinė varža, nes mažėja skerspjūvio, kuriuo teka srovė, plotas. Taip pat didėjant dažniui šiek tiek mažėja laidininkų induktyvumas, nes paviršiniu sluoksniu tekanti srovė kuria magnetinį lauką tik šalia laidininko, o nuolatinė srovė, tekėdama visu skerspjūvio plotu, kuria lauką ir laidininko viduje. Dėl to nuolatinės srovės sukuriamas magnetinis srautas esti šiek tiek didesnis, negu didelio dažnio kintamosios srovės, taigi ir induktyvumas nuolatinės srovės atveju esti didesnis (žr. (6.27)). Varžos didėjimas ir induktyvumo mažėjimas blogina virpesių kontūro kokybę. Todėl kontūrų ritės daromos ne iš vieno storo laido, o iš daugelio plonų, izoliuotų vienas nuo kito galuose lygiagrečiai sujungtų laidų, nes skinefektas ploname laide esti gerokai mažesnis nei storame.

8 skyrius

KVAZINUOSTOVIOSIOS KINTAMOSIOS SROVĖS GRANDINĖS

1. Kvazinuostovumo sąlyga

Kintamosios elektros srovės stipris kinta laikui bėgant. Čia nagrinėsime tik tokias kintamąsias sroves, kurios kinta pagal harmoninį dėsnį, apibūdinamą lygtimis

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (8.1)$$

arba

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (8.2)$$

Čia I – srovės stiprio **momentinė** vertė, I_0 – jos **amplitudė**, $\omega t + \varphi$ – **fazė**, ω – **kampinis dažnis**, t – laikas, φ – **pradinė fazė**. Kampinis dažnis ω taip susijęs su **dažniu** ν bei **periodu** T :

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (8.3)$$

Kintamąją srovę grandinėje sukelia kintamoji elektrovara.

Tekant kintamajai srovei, jos stipris I , elektrinio lauko stipris E ir tūrinis krūvio tankis ρ taip pat kinta laikui einant: $I=I(t)$, $E=E(t)$, $\rho=\rho(t)$. Tolydumo lygtis (3.20) šiuo atveju gali būti užrašyta taip:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0.$$

Šiame skyriuje nagrinėsime tik pakankamai lėtai kintančius sroves bei laukus. Tarsime, kad laukas kinta tiek lėtai, kad grandinėje galima neatsižvelgti į vėlavimo reiškinius, sąlygojamus baigtinio elektromagnetinio lauko sklaidimo greičio.

Jei l – grandinės ilgis, laikas, per kurį laukas nusklinda šia grandine, yra

$$\tau = \frac{l}{c}. \quad (8.4)$$

Čia $c=3 \cdot 10^8$ m/s – elektromagnetinio lauko sklaidimo greitis.

Tegu laukas kinta periodiškai dėsniu

$$E = E_0 \sin \omega t = E_0 \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Šiuo atveju kvazinuostovumo sąlygą galima išreikšti taip:

$$\tau \ll T. \quad (8.5)$$

Taigi periodiškai kintančių srovių bei laukų atveju kvazinuostovumo sąlyga bus tenkinama, jei laikas, per kurį laukas nusklinda grandine, yra daug mažesnis už periodą.

Šią sąlygą galima suformuluoti ir kiek kitaip. Žinome, kad elektromagnetinės bangos ilgis $\lambda = cT = c/\nu$, t. y.

$$T = \frac{\lambda}{c}. \quad (8.6)$$

I (8.5) įrašę (8.4) ir (8.6), nustatome, kad

$$l \ll \lambda. \quad (8.7)$$

Taigi kvazinuostovumo sąlygai tenkinti reikia, kad grandinės matmenys būtų maži lyginant su duotąjį dažnį atitinkančiu elektromagnetinės bangos ilgiu.

Elektros laboratorijoje grandinių matmenys esti $l \approx 1$ m. $\lambda = 1$ m bangos ilgį atitinka dažnis $\nu = c/\lambda = 3 \cdot 10^8$ Hz = 300 MHz. Kvazinuostovumo sąlyga bus tenkinama, jei dažnis bus daug mažesnis už 300 MHz.

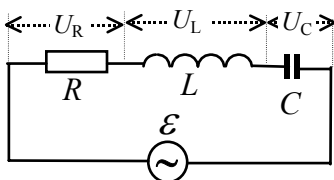
Kaip matome, kuo mažesni grandinės matmenys, tuo didesnio dažnio srovės tenkina kvazinuostovumo sąlygą.

2. Aktyvioji, talpinė ir induktyvioji varžos.

Kintamosios srovės grandinių skaičiavimas vektorinių diagramų ir kompleksinių dydžių metodais.

Omo dėsnis kintamosios srovės grandinei.

Impedansas



144 pav.

Nagrinėsime 144 pav. parodytą grandinę, susidedančią iš nuosekliai sujungtų aktyviosios varžos R , induktyvumo L , kondensatoriaus C ir kintamosios srovės šaltinio, kurio elektrovara

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \exp(i\omega t). \quad (8.8)$$

Esant tenkinamai kvazinuostovumo sąlygai

$$U_R + U_L + U_C = \mathcal{E}.$$

Pasinaudoję (3.23), (1.58), (6.29) ir (8.8) pastarąją lygtį užrašysime taip:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \exp(i\omega t).$$

Išdiferencijavę ir pasinaudoję (3.1), gauname

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = i\omega \mathcal{E}_0 \exp(i\omega t). \quad (8.9)$$

Diferencialinę lygtį (8.9) tenkina toks sprendinys:

$$I = I_0 \exp(i(\omega t + \varphi)) = I_0 \exp(i\varphi) \exp(i\omega t) = \dot{I}_0 \exp(i\omega t). \quad (8.10)$$

Nuo laiko nepriklausantis dydis

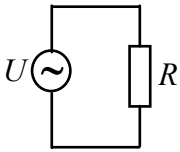
$$\dot{I}_0 = I_0 \exp(i\varphi) \quad (8.11)$$

vadinamas srovės **kompleksine amplitude**.

Diferencijuojame (8.10) ir išvestines įrašome į lygtį (8.9):

$$\frac{dI}{dt} = i\omega \dot{I}_0 \exp(i\omega t),$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -\omega^2 I_0 \exp(i\omega t),$$



24 pav.

Tarkime, kad prie kintamosios įtamos šaltinio prijungta varža R (24 pav.). Jei šaltinio gnybtų įtampa kinta pagal dėsnį

$$U = U_0 \sin \omega t, \quad (8.12)$$

grandine teka kintamoji srovė

$$I = I_0 \sin \omega t.$$

Pagal Omo dėsnį varžos įtampa

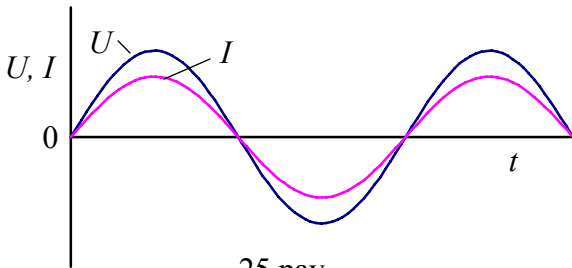
$$U_R = IR = I_0 R \sin \omega t.$$

Pagal antrąją Kirchhofo taisyklę šiuo atveju $U_R = U$. Taigi

$$I_0 R \sin \omega t = U_0 \sin \omega t,$$

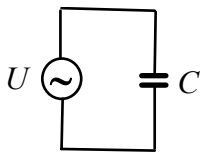
arba

$$I_0 = \frac{U_0}{R}. \quad (8.13)$$



25 pav.

Iš (8.13) matome, kad sąryšis tarp kintamosios srovės ir įtamos amplitudžių yra toks pat, kaip ir nuolatinės srovės grandinėje tarp srovės ir įtamos, o fazių skirtumas tarp srovės ir įtamos virpesių nesusidaro (25 pav.).



26 pav.

Dabar panagrinėkime kondensatorių, kurio talpa C , prijungtą prie kintamosios įtamos šaltinio U (26 pav.). Kondensatoriaus įtampą bet kokių laiko momentu t pažymėkime U_C . Pagal antrąją Kirchhofo taisyklę $U_C = U$. Kondensatoriaus įtampa U_C susijusi su jo krūviu taip:

$$U_C = \frac{q}{C},$$

taigi

$$\frac{q}{C} = U_0 \sin \omega t.$$

Šią lygybę išdiferencijavę pagal laiką t ir turėdami omenyje, kad $dq/dt = I$, gauname:

$$\frac{I}{C} = U_0 \omega \cos \omega t = U_0 \omega \sin(\omega t + \pi/2).$$

Iš čia nustatome, kad

$$I = U_0 \omega C \sin(\omega t + \pi/2), \quad (8.14)$$

o srovės stiprio amplitudė

$$I_0 = U_0 \omega C. \quad (8.15)$$

Pažymėkime

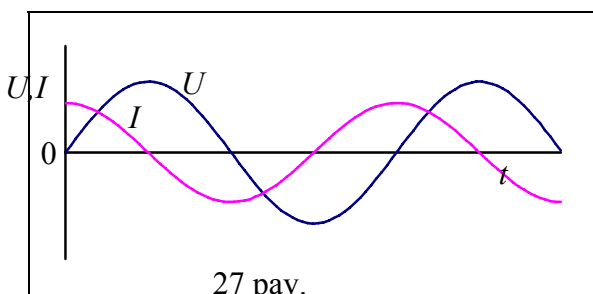
$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (8.16)$$

Tada (8.15) galima suteikti Omo dėsnio pavidalą:

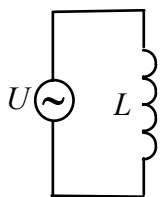
$$I_0 = \frac{U_0}{X_C}. \quad (8.17)$$

Dydis $X_C = 1/(\omega C)$ vadinamas **talpine varža**.

Iš (8.14) matome, kad **srovės stiprio kondensatoriuje fazė pralenkia jo įtamos fazę $\pi/2$ rad (arba 90°) kampu** (27 pav.).



27 pav.



28 pav.

Pagaliau tarkime, kad prie kintamosios įtampos šaltinio prijungta ritė, kurios induktyvumas L , o varža nuolatinei srovei labai maža (28 pav.). Kintant srovei ritėje atsiranda savii indukcijos ev (žr. (45)). Pagal antrąją Kirchhofo taisyklę $U=U_L$. Čia $U_L=-\varepsilon_s=L \frac{dI}{dt}$. Vietoj U įrašę (8.12) išraišką, gauname diferencialinę lygtį

$$U_0 \sin \omega t = L \frac{dI}{dt}.$$

Atskiriame kintamuosius:

$$dI = \frac{U_0}{L} \sin \omega t dt.$$

Integruodami gauname:

$$\begin{aligned} I &= \frac{U_0}{L} \int \sin(\omega t) dt = \frac{U_0}{\omega L} \int \sin(\omega t) d(\omega t) = -\frac{U_0}{\omega L} \cos \omega t = \\ &= -\frac{U_0}{\omega L} \sin(\pi/2 - \omega t) = \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2). \end{aligned} \quad (8.18)$$

Iš (8.18) matome, kad srovės stiprio amplitudė

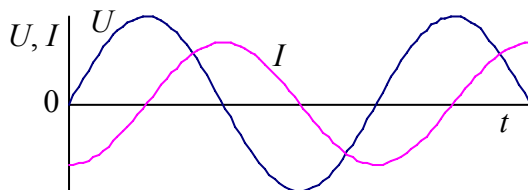
$$I_0 = \frac{U_0}{\omega L}. \quad (8.19)$$

Dydis

$$X_L = \omega L \quad (8.20)$$

vadinamas **induktyviaja varža**.

Iš (8.18) matome, kad **induktyviojoje varžoje srovės stiprio fazė atsilieka nuo įtampos fazės $\pi/2$ rad (arba 90°) kampu** (29 pav.).



29 pav.

Kaip išsiaiškinsime toliau, tekant srovei talpinėje ir induktyviojoje varžose neišsiskiria šiluma. Todėl tos varžos dar vadinamos **reaktyviosiomis varžomis**. Elektros energija virsta šilumine energija tik varžoje R , todėl ji vadinama **aktyviaja varža**.

3. Kintamosios srovės grandinių skaičiavimas vektorinių diagramų ir kompleksinių dydžių metodais. Impedansas

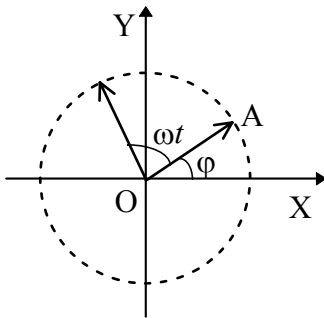
Nagrinėjant kintamosios srovės grandines, tenka sumuoti vienodo dažnio, bet nevienodų amplitudžių bei pradinių fazių harmoningai kintančias elektrovaras, įtampas ar sroves. Šis uždavinys gana paprastai ir vaizdžiai išsprendžiamas harmonines funkcijas atvaizduojant besisukančiais vektoriais. Pavyzdžiui, elektrovarą

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

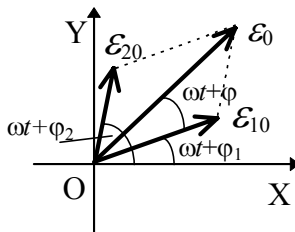
galima atvaizduoti taip. Pasirinksime stačiakampę koordinačių sistemą XOY ir susitarsime teigiamuosius kampus atidėti kryptimi, priešinga laikrodžio rodyklės sukimosi kryptčiai. Kampu φ į X ašį atidėsime vektorių **OA**, kurio ilgis pasirinktu masteliu lygus ev amplitudei ε_0 (30 pav).

Vektorių **OA** suksime apie koordinačių pradžią teigiamąja kryptimi pastoviu kampiniu greičiu ω , lygiu ev kampiniam dažniui. Praslinkus laikotarpiui t vektorius **OA** pasisuks kampu ωt ir su X ašimi sudarys kampą $\omega t + \varphi$. To vektoriaus projekcija į Y ašį bus lygi $O A \sin(\omega t + \varphi) = \varepsilon_0 \sin(\omega t + \varphi) = \varepsilon$, o jo projekcija į X ašį – $O a$

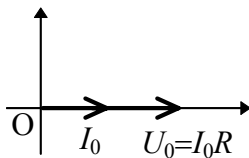
$$\cos(\omega t + \varphi) = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi).$$



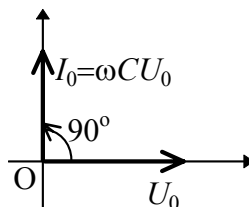
30 pav.



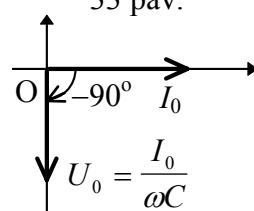
31 pav.



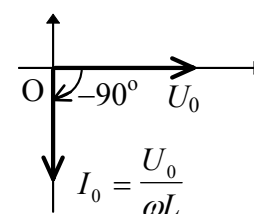
32 pav.



33 pav.



34 pav.



35 pav.

Tarkime, jog norime sudėti dvi to paties dažnio sinusines ev $\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} \sin(\omega t + \varphi_1)$ ir $\varepsilon_2 = \varepsilon_{20} \sin(\omega t + \varphi_2)$. Tuo pačiu masteliu nubrėžkime du vektorius, kurių ilgiai ε_{10} ir ε_{20} , sudarančius su X ašimi kampus $\omega t + \varphi_1$ ir $\omega t + \varphi_2$ atitinkamai ir juos geometriškai sudėkime (pavyzdžiui, pagal lygiagretainio taisyklę) (31 pav.).

Kadangi vektorių projekcijų į tą pačią ašį suma lygi tų vektorių sumos projekcijai į tą ašį, akivaizdu, kad vektorių ε_0 ilgis yra lygus pasirinktu masteliu atvaizduotų harmoninių funkcijų amplitudžių sumai ($\varepsilon_0 = \varepsilon_{10} + \varepsilon_{20}$), o kampas $\omega t + \varphi$ reiškia suminės ev fazę.

Jeigu mums rūpi tik ev, įtampų ar srovių amplitudės ir fazių skirtumo tarp jų kampai, kaip dažniausiai ir esti, tada svarbu tik kokius kampus vektoriai sudaro vienas su kitu, o kokius kampus jie sudaro su ašimis - nesvarbu. Šiuo atveju vieną vektorių galima nubrėžti bet koku kampu su X ašimi, tačiau visus kitus vektorius reikia brėžti taip, kad jie su laisvai pasirinktuoju vektoriumi sudarytų tikruosius jų fazių skirtumo kampus. Dažniausiai laisvai pasirenkamas vektorius brėžiamas horizontaliojoje (X) ašyje.

Nubraižysime ankstesniame paragrafe išnagrinėtų grandinių vektorių diagramas.

Kai grandinėje yra tik kintamosios įtampos šaltinis ir varža R (žr. 24 pav.), įtampos ir srovės vektorių diagrama gali būti tokia, kaip pavaizduota 32 pav. Šiuo atveju nėra fazių skirtumo tarp srovės stiprio ir įtampos, taigi abu vektoriai, vaizduojantys U_0 ir I_0 , brėžiami ta pačia, pavyzdžiui, horizontalia, kryptimi. Be abejo, U_0 ir I_0 masteliai gali būti skirtingi, nes šių dydžių matavimo vienetai yra skirtingi.

26 pav. grandinėje srovės stiprio fazė pralenkia įtampos fazę 90° kampu. Jei šaltinio įtampos amplitudę atvaizduotume vektoriumi horizontaliojoje ašyje, srovės stiprio amplitudę atitinkantį vektorių reikėtų brėžti vertikaliuojoje ašyje į viršų (33 pav.). Tačiau galima horizontaliojoje ašyje atvaizduoti ir I_0 . Tada įtampą U_0 vaizduojantį vektorių būtina brėžti vertikaliuojoje ašyje žemyn (34 pav.).

Abiejuose 33 ir 34 pav. pavaizduotos vektorių diagramos yra teisingos.

28 pav. pavaizduotos grandinės įtampos ir srovės stiprio vektorių diagrama gali būti tokia, kaip pavaizduota 35 pav.

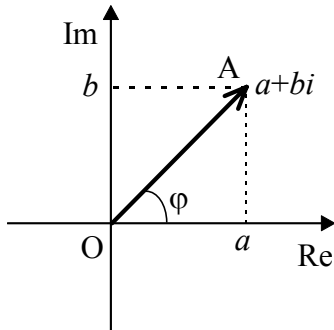
Kompleksinio skaičiaus algebrinė forma yra

$$a + bi.$$

Čia $i = \sqrt{-1}$ - menamasis vienetas. Jo sveikojo rodiklio laipsniai yra tokie: $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$. a vadinama **realiąja**, b - **menamąja** kompleksinio skaičiaus dalimis, $\sqrt{a^2 + b^2}$ - kompleksinio skaičiaus **moduliu**. Su kompleksiniais skaičiais galima atlikti sudėties, atimties, daugybos ir dalybos veiksmus pagal atitinkamas veiksmų su daugianariais taisykles atsižvelgiant į aukščiau nurodytus menamojo vieneto laipsnius.

Kompleksiniai skaičiai $a + bi$ ir $a - bi$, kurių realiosios dalys vienodos, o kompleksinių dalių skiriasi tik ženklai, vadinami **jungtiniais kompleksiniais skaičiais**. Jų sandauga yra realusis skaičius, lygus bet kurio iš tų dviejų skaičių modulio kvadratui: $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - iab + iab - i^2 b^2 = a^2 + b^2$.

Kompleksinius skaičius galima atvaizduoti geometriškai stačiakampėje koordinatinių sistemoje. Susitarime horizontaliąją (X) ašį vadinti realiąja ašimi (Re), o vertikaliąją (Y) ašį - menamąją ašimi (Im). Reliojoje ašyje tam tikru masteliu atidėkime atkarpą, lygią kompleksinio skaičiaus $a+bi$ realiajai daliai a , o menamojoje ašyje - tuo pačiu masteliu atkarpą, lygią menamajai daliai b , ir per tų atkarpų galus iškelkime statmenis ašims (36 pav.). Statmenų sankirtos taškas A yra kompleksinio skaičiaus $a+bi$ geometrinis vaizdas. Sujungę koordinatinių pradžių tašką O su tašku A, galime nubrėžti vektorių \vec{OA} , kurio dedamosios yra (a, b) , o modulis (ilgis) $\sqrt{a^2 + b^2}$.



36 pav.

Kampas φ tarp šio vektoriaus ir realiosios ašies remiantis stačiojo trikampio trigonometrija gali būti lengvai išreikštas per a , b bei modulį $\sqrt{a^2 + b^2}$:

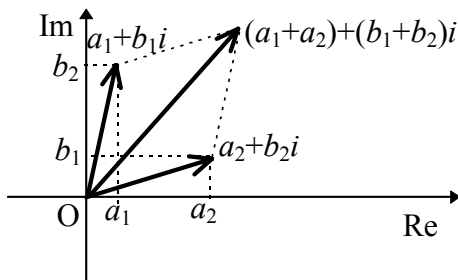
$$\varphi = \arctg \frac{b}{a} = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Tarkime, norime sudėti du kompleksinius skaičius a_1+b_1i ir a_2+b_2i . Sudėję algeбриškai gausime:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i.$$

Tą pat galime atlikti ir nubrėžę tuos skaičius atitinkančius vektorius ir juos sudėdami geometriškai (37 pav.).

Taigi kompleksinius skaičius galime panaudoti kintamosios srovės grandinėms skaičiuoti. Jei grandinėje yra tik vienas kintamosios įtampos šaltinis, galima tarti, kad jo ev pradinė fazė lygi nuliui ir jo ev yra išreiškiamas realiuoju skaičiumi. Jei to paties dažnio šaltinių būtų daugiau, vieno iš jų ev pasirinkus realia, kitų šaltinių ev tektų išreikšti kompleksiniais skaičiais, kurių moduliai būtų lygūs jų ev, o jų realiosios dalys būtų lygios moduliams, padaugintiems iš $\cos\varphi_i$, menamosios dalys - moduliams, padaugintiems iš $\sin\varphi_i$ (žr. 36 pav.). Čia φ_i - fazių skirtumas tarp to šaltinio, kurio ev pasirinkta realia, ir i-tojo šaltinio ev.



37 pav.

Kaip matėme (žr. 32 pav.) aktyviojoje varžoje fazių skirtumo tarp įtampos ir srovės stiprio nesti. Todėl aktyvioji varža R yra realus dydis. Tuo tarpu talpinė ir induktyvioji varžos esti menamos.

Esant grandinėje kondensatoriui, pagal (8.16) ir (8.17)

$$I_0 = \frac{U_0}{X_C} = \omega C U_0.$$

Jei U_0 pasirinktas realia, I_0 turi su realiąja ašimi sudaryti $+90^\circ$ kampą (žr. 33 pav.), t. y. būti menama. Kad taip būtų, talpinę varžą tenka tarti esant menama ir lygia

$$\boxed{\dot{X}_C = -\frac{i}{\omega C}} \quad (8.21)$$

Tada

$$\dot{I}_0 = \frac{U_0}{\dot{X}_C} = \frac{U_0}{-\frac{i}{\omega C}} = \frac{U_0 \omega C}{-i} = \frac{U_0 \omega C i}{-i \cdot i} = U_0 \omega C i.$$

(Čia ir toliau kompleksinius dydžius žymėsime atitinkamais simboliais su tašku virš jų, o jų modulius - be taško).

Esant grandinėje induktyvumui, I_0 su realiąja ašimi sudaro -90° kampą (žr. 35 pav.) ir yra lygi (žr. (8.18) ir (8.19) formules)

$$I_0 = \frac{U_0}{X_L} = \frac{U_0}{\omega L}.$$

Šios sąlygos bus patenkinamos, jei tarsime, kad

$$\boxed{\dot{X}_L = i \omega L} \quad (8.22)$$

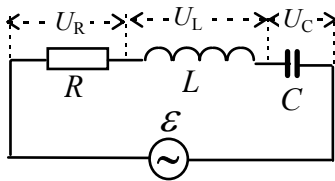
Iš tikrųjų,

$$\dot{I}_0 = \frac{U_0}{\dot{X}_L} = \frac{U_0}{i\omega L} = \frac{U_0 i}{i^2 \omega L} = \frac{U_0}{i\omega L}.$$

Bendresniu atveju grandinėje gali būti keletas skirtingų tipų (aktyviųjų, talpinių, induktyviųjų) varžų, sujungtų įvairiai (nuosekliai, lygiagrečiai, mišriai). Tokios grandinės varža išreiškiama kompleksiniu skaičiumi ir vadinama **kompleksine varža**, arba **impedansu**. Ją galima apskaičiuoti pagal tas pačias taisykles, kaip ir nuolatinės srovės grandinių atveju, tik talpines ir induktyvias varžas reikia tarti esant menamosioms. Kompleksines varžas žymėsime simboliu \dot{Z} , o jų modulius - Z .

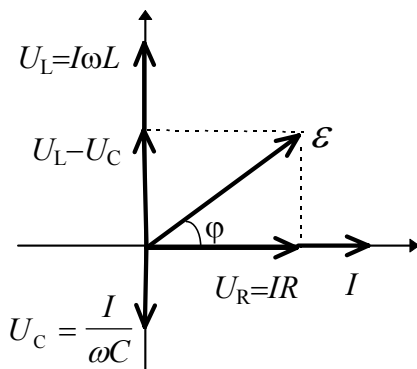
Kaip pavyzdį panagrinėkime grandinę, sudarytą iš nuosekliai sujungtų varžos R , L induktyvumo ritės, C talpos kondensatoriaus ir kintamosios srovės generatoriaus, kurio elektrovaros amplitudė ε_0 , kampinis dažnis ω . Generatoriaus vidinę varžą manysime esant mažą ir į ją neatsižvelgsime. Skaičiuosime dviem būdais.

1. Vektoriinių diagramų būdas. Nuosekliai sujungtoje grandinėje (38 pav.) srovės stipris visose jos dalyse esti tas pats. Todėl braižydami vektoriinę diagramą srovės stiprį I vaizduojantį vektorių pasirinkime laisvai ir nubrėšime jį horizontaliojoje ašyje (39 pav.). Tada varžos R įtampą $U_R = IR$ vaizduojantis vektorius irgi bus nukreiptas ta pačia kryptimi. Įtampą $U_L = I\omega L$ vaizduojantis vektorius sudarys $+90^\circ$ kampą, nes srovės stipris atsilieka nuo įtamos 90° kampu, t. y. įtampa pralenkia srovės stiprį tokiu pat kampu. Įtampa $U_C = \frac{I}{\omega C}$ atsilieka nuo I 90° kampu. Pagal antrąją Kirchhofo taisyklę



38 pav.

$U_R + U_L + U_C = \varepsilon$,
todėl vektoriškai sudedame U_R , U_L ir U_C vaizduojančius vektorius. Iš pradžių apskaičiuojame



39 pav.

$$U_L - U_C = I\omega L - \frac{I}{\omega C} = I\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

paskui pagal Pitagoro teorema

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{I^2 R^2 + I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \\ &= I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \end{aligned}$$

Iš čia nustatome, kad

$$I = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (8.23)$$

Fazių skirtumą tarp srovės stiprio ir įtamos apskaičiuojame žinodami stačiojo trikampio statinius:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{I\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{IR} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (8.24)$$

2. Kompleksinių dydžių būdas. Grandinės impedansas

$$\dot{Z} = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Kompleksinis srovės stipris grandinėje (ε pasirenkame realia):

$$\dot{I} = \frac{\varepsilon}{\dot{Z}} = \frac{\varepsilon}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Norėdami apskaičiuoti $|\dot{I}| = I$, turime pasiekti, kad trupmenos vardiklis būtų realusis skaičius. Tam tikslui skaitiklį ir vardiklį dauginame iš jungtinio skaičiaus:

$$\dot{I} = \frac{\mathcal{E} \left[R - i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \frac{\mathcal{E} R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} - i \cdot \frac{\mathcal{E} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}.$$

Šio kompleksinio skaičiaus modulis

$$I = \sqrt{\left[\frac{\mathcal{E} R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \right]^2 + \left[\frac{\mathcal{E} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \right]^2} =$$

$$= \frac{\mathcal{E} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$

Gavome tą patį rezultatą (8.23), kaip ir skaičiuodami vektorinių diagramų būdu.

Kompleksinio srovės stiprio menamosios dalies santykis su realiąja dalimi lygus fazių skirtumo tarp srovės stiprio ir įtampos tangentui. Šis rezultatas irgi sutampa su (8.24) formule.

Panašiai kaip nuolatinės srovės grandinėms, galima suformuluoti Kirchhofo taisyklės ir kintamosios srovės grandinėms, tik reikia naudoti kompleksinius dydžius.

Pirmoji Kirchhofo taisyklė užrašoma taip:

$$\boxed{\sum_k \dot{I}_k = 0}, \quad (8.25)$$

o antroji -

$$\boxed{\sum_k \dot{I}_k \dot{Z}_k = \sum_j \dot{\mathcal{E}}_j}. \quad (8.26)$$

Kirchhofo taisyklėmis tenka naudotis šakotinių grandinių, taip pat grandinių su abipusiu induktyvumu atvejais.

4. Įtampos rezonansas

Išsamiau panagrinėkime grandinę, pavaizduotą (38 pav.). Iš (8.24) matome, kad fazių skirtumas tarp srovės stiprio ir įtampos esti lygus nuliui, kai

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0. \quad (8.27)$$

Grandinė tekančios srovės stipris tada esti didžiausias ir lygus (žr. (8.23))

$$I_{\text{rez}} = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (8.28)$$

Iš (8.27) išreiškę ω , nustatome rezonansinį kampinį dažnį

$$\omega_{\text{rez}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.29)$$

bei dažnį

$$\nu_{\text{rez}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (8.30)$$

Apskaičiuosime varžos R , ritės L ir kondensatoriaus C įtampas esant rezonansui. Pagal Omo dėsnį grandinės daliai

$$U_{R\text{rez}} = I_{\text{rez}} R = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot R = \mathcal{E}, \quad (8.31)$$

$$U_{L\text{rez}} = I_{\text{rez}} \omega_{\text{rez}} L = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot L = \frac{\mathcal{E}}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (8.32)$$

$$U_{C\text{rez}} = I_{\text{rez}} \cdot \frac{1}{\omega_{\text{rez}} C} = \frac{\mathcal{E}}{R} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot C} = \frac{\mathcal{E}}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (9.32)$$

Matome, kad esant rezonansui ritės ir kondensatoriaus įtampos esti vienodos. Santykis

$$Q = \frac{U_{L\text{rez}}}{\mathcal{E}} = \frac{U_{C\text{rez}}}{\mathcal{E}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8.33)$$

vadinamas **grandinės (kontūro) kokybe**. Jei grandinės aktyvioji varža maža, kokybė gali būti gana didelė ($Q \gg 1$). Tuo atveju $U_{L\text{rez}} = U_{C\text{rez}} \gg \mathcal{E}$. Taigi kintamosios srovės grandinės ritės bei kondensatoriaus įtampa gali ženkliai viršyti generatoriaus įtampą. Šis reiškinys vadinamas **įtampos rezonansu**.

Tiksliau ritės ir kondensatoriaus įtampos pasiekia maksimumą esant ne rezonansiniam dažniui, bet arti jo. U_L ir U_C priklausomybės nuo kampinio dažnio, nustatomos pagal Omo nėsį, yra tokios:

$$U_L = I \cdot \omega L = \frac{\mathcal{E} \omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}, \quad (8.34)$$

$$U_C = I \cdot \frac{1}{\omega C} = \frac{\mathcal{E}}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (8.35)$$

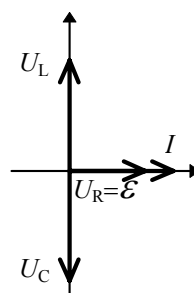
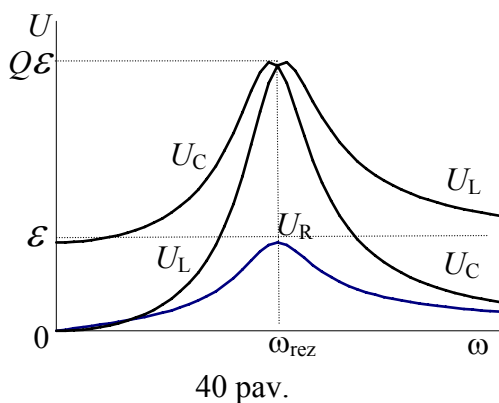
Kampiniai dažniai, kuriems esant U_L ir U_C esti didžiausi, apskaičiuojami (8.34) ir (8.35) išvestines pagal ω prilyginant nuliui. Atlikę šiuos skaičiavimus, gauname:

$$\omega_{L\text{max}} = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{C^2 R^2}{2}}}, \quad (8.36)$$

$$\omega_{C\text{max}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}. \quad (8.37)$$

Palyginę (8.29), (8.36) ir (8.37) formules, prieiname išvadą, kad $\omega_{C\text{max}} < \omega_{\text{rez}} < \omega_{L\text{max}}$. Jei grandinės aktyvioji

varža maža ($R \ll \sqrt{\frac{2L}{C}}$), tada $\omega_{C\text{max}} \approx \omega_{\text{rez}} \approx \omega_{L\text{max}}$.

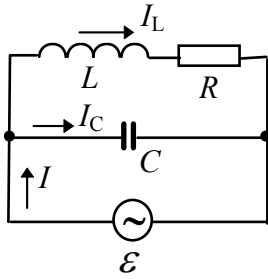


U_R , U_L ir U_C priklausomybių nuo kampinio dažnio grafikai pavaizduoti 40 pav. o vektorinė diagrama esant įtampos rezonansui – 41 pav.

5. Srovės rezonansas

Srovės rezonansas esti grandinėse, kuriose ritė ir kondensatorius sujungti lygiagrečiai.

Panagrinėkime 42 pav. parodytą grandinę. Grandinė tekančios srovės stiprius skaičiuosime kompleksinių dydžių metodu, tarę, kad \mathcal{E} yra reali:



42 pav.

$$\begin{aligned} \dot{I}_L &= \frac{\mathcal{E}}{R + i\omega L} = \frac{\mathcal{E}(R - i\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2}, \\ I_L &= \frac{\mathcal{E}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

$$\dot{I}_C = \frac{\mathcal{E}}{-\frac{i}{\omega C}} = \frac{\mathcal{E}\omega C}{-i} = i\omega C\mathcal{E}, \quad (8.39)$$

$$I_C = \omega C\mathcal{E}. \quad (8.40)$$

Pagal pirmąją Kirchhofo taisyklę

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C = \frac{\mathcal{E}(R - i\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} + i\omega C\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}[R + i\omega(\omega^2 CL^2 - L + CR^2)]}{R^2 + (\omega L)^2}, \quad (8.41)$$

$$I = \frac{\mathcal{E}\sqrt{R^2 + \omega^2(\omega^2 CL^2 - L + CR^2)^2}}{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (8.42)$$

Fazių skirtumas tarp tekančios šaltinio srovės stiprio I ir jo ev pagal (8.41)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega(\omega^2 CL^2 - L + CR^2)}{R}. \quad (8.43)$$

Rezonansas ir šiuo atveju esti, kai $\varphi=0$, t. y. kai $\omega^2 CL^2 - L + CR^2 = 0$.

Iš čia nustatome, kad rezonansinis kampinis dažnis šiuo atveju

$$\omega_{\text{rez}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}. \quad (8.44)$$

Palyginę (8.44) su (8.28), nustatome, kad bendru atveju $\omega_{\text{rez}}^{(\text{srovės})} < \omega_{\text{rez}}^{(\text{itamos})}$.

$\omega_{\text{rez}}^{(\text{srovės})} \approx \omega_{\text{rez}}^{(\text{itamos})}$ tik kai aktyvioji varža R maža ($R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$). Be to iš (8.44) aiškėja, kad srovės rezonansas

galimas tik jei $R < \sqrt{\frac{L}{C}}$, nes priešingu atveju (8.44) pošaknis pasidaro neigiamas.

Pagal (8.42), (8.38) ir (8.40) apskaičiuosime grandinės srovių stiprius esant rezonansui:

$$I_{\text{rez}} = \frac{\mathcal{E}R}{R^2 + (\omega_{\text{rez}}L)^2} = \frac{\mathcal{E}R}{R^2 + L^2\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right)} = \frac{\mathcal{E}RC}{L}, \quad (8.45)$$

$$I_{L\text{rez}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega_{\text{rez}}L)^2}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + L^2\left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}\right)}} = \mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (8.46)$$

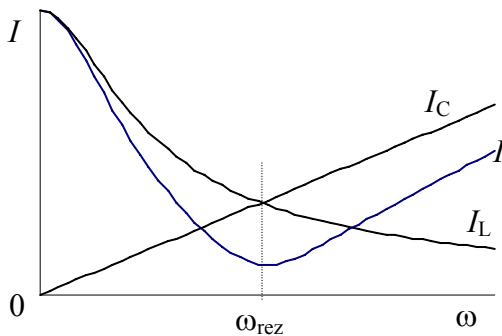
$$I_{C\text{rez}} = \omega_{\text{rez}}C\mathcal{E} = C\mathcal{E}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}}. \quad (8.47 \text{ 105})$$

Jei $R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$, $I_{C\text{ rez}} \approx I_{L\text{ rez}} = \mathcal{E} \sqrt{\frac{C}{L}}$, t. y. esant pakankamai mažai aktyviajai varžai

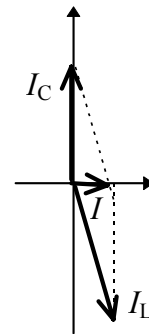
$$\frac{I_{L\text{ rez}}}{I_{\text{ rez}}} = \frac{I_{C\text{ rez}}}{I_{\text{ rez}}} = \frac{\mathcal{E} \sqrt{\frac{C}{L}}}{\frac{\mathcal{E} R C}{L}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q. \quad (8.48 \text{ 106})$$

(106) išreiškia srovės rezonanso grandinės kokybę. Jei kokybė gera (Q - didelė), srovės stipris ritėje ir kondensatoriuje gali ženkliai viršyti srovės stiprį neišsišakojusioje grandinės dalyje, t. y. šaltinyje. Todėl šis reiškinys vadinamas **srovės rezonansu**.

I , I_L ir I_C priklausomybės nuo kampinio dažnio ω , aprašomos (8.42), (8.38) ir (8.40) formulėmis pavaizduotos 43 pav., o grandinės vektorinė diagrama esant srovės rezonansui - 44 pav.



43 pav.



44 pav.

6. Kintamosios elektros srovės darbas ir galia

Žinome, kad tekant grandine nuolatinei elektros srovei atliekamas darbas

$$A = UI t,$$

o galia

$$P = UI.$$

Šias formules galima panaudoti ir kintamajai srovei. Šiuo atveju tarp įtampos ir srovės stiprio gali būti fazių skirtumas φ . Taigi tarkime, kad

$$U = U_0 \sin \omega t,$$

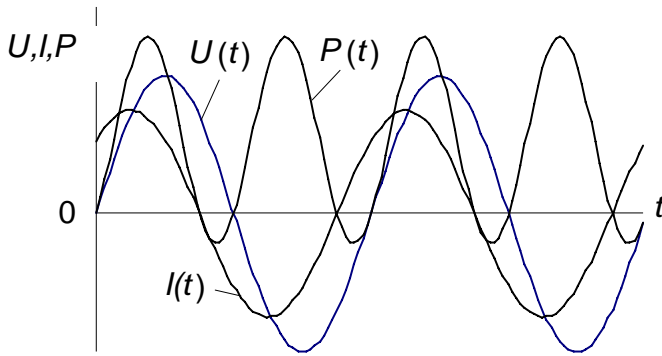
$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Įtampos ir srovės stiprio sandauga

$$P(t) = UI = U_0 I_0 \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (8.49)$$

vadinama **momentine** (akimirkine) **galia**. Ji yra periodinė laiko t funkcija; jos periodas lygus įtampos ir srovės periodui $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Be to, esant fazių skirtumui $\varphi \neq 0$, kai kuriais laikotarpiais esti $P(t) < 0$ (45 pav.). Tais

laikotarpiais grandinė tiekia energiją įtampos šaltiniui (generatoriui). Ta energija buvo sutelkta elektriniame (kondensatorių) bei magnetiniame (ričių) laukuose.



45 pav.

Momentinė galia praktiškai retai ką nors domina. Kalbant apie kintamosios srovės galią paprastai turima galvoje vidutinė galia P . Ji vadinama **aktyviąja galia**, nes ji virsta kitų rūšių energija (šilumine, mechanine, chemine ir kt.). Aktyvioji galia apskaičiuojama vidurkinant momentinę galią:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi) dt = \\ &= \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T \sin \omega t (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) dt = \\ &= \frac{U_0 I_0}{T} \left(\cos \varphi \int_0^T \sin^2 \omega t dt + \sin \varphi \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt \right). \end{aligned} \quad (8.50)$$

(8.50) formulės integralus apskaičiuosime atskirai.

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin^2 \omega t dt &= \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = \int_0^T \frac{dt}{2} - \int_0^T \frac{\cos 2\omega t}{4\omega} d(2\omega t) = \frac{T}{2} + \\ &+ \frac{1}{4\omega} \cdot \sin 2\omega t \Big|_0^T = \frac{T}{2} + \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \cdot T}{4\omega} - \frac{\sin \frac{2\pi}{T} \cdot 0}{4\omega} = \frac{T}{2}. \end{aligned} \quad (8.51)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin \omega t \cdot \cos \omega t dt &= \frac{1}{\omega} \int_0^T \sin \omega t d(\sin \omega t) = \frac{\sin^2 \omega t}{2\omega} \Big|_0^T = \\ &= \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{T} \cdot T}{2\omega} \Big|_0^T = \frac{\sin^2 2\pi - \sin^2 0}{2\omega} = 0. \end{aligned} \quad (8.52)$$

(8.51) ir (8.52) įrašę į (8.50), gauname tokią aktyviosios galios išraišką:

$$P = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi. \quad (8.53)$$

Kintamosios srovės grandinėje esant tik reaktyviosioms varžoms, esti $\varphi = \pm 90^\circ$, $\cos \varphi = 0$, taigi ir $P = 0$. Reaktyviosiose varžose šiluma neišsiskiria. Aktyviojoje varžoje esti $\varphi = 0$ (žr. 25 arba 32 pav.), $\cos \varphi = 1$ ir joje išsiskirianti galia

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0. \quad (8.54)$$

Pritaikę Omo dėsnį $U_0 = I_0 R$, šiluma virstančią aktyviąją galią galima ir kitaip išreikšti:

$$P = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{U_0^2}{2R}. \quad (8.55)$$

7. Srovės stiprio ir įtampos efektinės vertės

Kaip jau žinome, kintamosios įtampos ar srovės dydis periodiškai kinta įgydamas teigiamas ir neigiamas vertes. Įtampos ar srovės stiprio dydį iki šiol apibūdindavome didžiausia (amplitudine) verte. Tačiau amplitudinės vertės praktikoje retai naudojamos. Dažniausiai naudojamos srovės stiprio ir įtampos efektinės vertės. **Kintamosios srovės stiprio efektinė vertė lygi tokiai nuolatinės srovės stipriui, kuri aktyviojoje varžoje išskiria tokią pat galią, kaip ir kintamoji srovė.** Varža R tekėdama nuolatinė srovė išskirtų $P = I^2 R$ šiluminę galią, o kintamoji - $\frac{1}{2} I_0^2 R$. Taigi rašome tokią lygybę:

$$I_{\text{ef}}^2 R = \frac{1}{2} I_0^2 R. \quad (8.56)$$

Iš (8.56) išreiškę I_{ef} , gauname tokį sąryšį tarp efektinės ir amplitudinės srovės stiprio verčių:

$$I_{\text{ef}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (8.57)$$

Panašiai apskaičiuojama ir efektinė įtampa:

$$U_{\text{ef}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (8.58)$$

Panaudojant įtampos ir srovės stiprio efektnes vertes, aktyvioji kintamosios srovės galia išreiškiama taip:

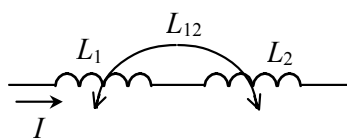
$$P = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi. \quad (8.59)$$

Pastebėsime, kad sąryšis tarp efektnių ir amplitudinių verčių (8.57) ir (8.58) formulėmis nusakomas tik tuo atveju, jei srovės stipris ar įtampa kinta harmoningai, t. y. (8.1) ar (8.2) formulėmis nusakomu dėsniu. Bendru atveju **bet kokio periodiškai kintančio dydžio $\xi(t)$ efektinė vertė ξ_{ef} lygi kvadratinei šakniai iš jo kvadrato vidurkio per periodą:**

$$\xi_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt}. \quad (8.60)$$

Pavyzdžiui, (8.57) išraišką gautume ir pagal (8.60) formulę, vietoj $\xi(t)$ įrašydami $I(t)$ pagal (8.1) ar (8.2) formules.

8. Grandinė su abipuse indukcija. Transformatoriai ir autotransformatoriai

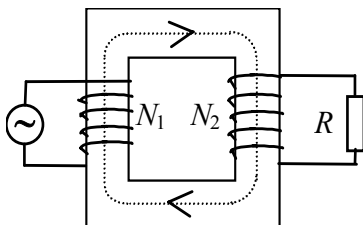


164 pav.

Tekant kintamajai srovei I rite, kurios induktyvumas L , ritės įtampa esti $\dot{U}_L = \dot{I} \dot{X}_L = i\omega L \dot{I}$. Jei yra kelios turinčios bent dalį bendro magnetinio srauto ritės, prie šios įtampos reikia pridėti įtampas, kurias indukuoja kitomis ritėmis tekančios srovės. Pavyzdžiui, esant dviem nuosekliai sujungtoms ritėms, kurių induktyvumai L_1 ir L_2 , o abipusis induktyvumas L_{12} (164 pav.), tekant I stiprio srovei ričių įtampos esti

$$\dot{U}_1 = i\omega L_1 \dot{I} + i\omega L_{12} \dot{I} = i\omega (L_1 + L_{12}) \dot{I},$$

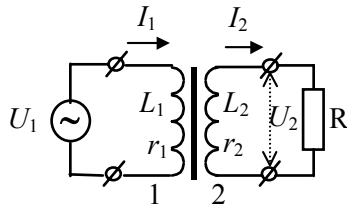
$$\dot{U}_2 = i\omega L_2 \dot{I} + i\omega L_{12} \dot{I} = i\omega (L_2 + L_{12}) \dot{I}.$$



165 pav.

Paprasčiausias kintamosios srovės transformatorius sudarytas iš dviejų ričių, turinčių abipusį induktyvumą. Kad būtų didesnis abipusis induktyvumas, tos ritės dažniausiai esti įtaisytos ant uždaro feromagnetinės šerdies (165 pav.). Transformatoriaus su šerdimi sutartinis žymėjimas pavaizduotas (166) pav.

Viena tų ričių, kurios galai prijungiami prie kintamosios įtampos šaltinio, vadinama pirmine rite (apvija), kita - antrine rite (apvija).



166 pav.

Pažymėkime prie pirminės apvijos prijungto šaltinio įtampą U_1 , srovės stiprį pirminėje apvijoje I_1 , antrinėje I_2 , pirminės apvijos induktyvumą L_1 , jos aktyviąją varžą r_1 , antrinės apvijos - atitinkamai L_2 ir r_2 , apvijų abipusį induktyvumą L_{12} . Tarkime, kad prie antrinės apvijos prijungta tik aktyvioji apkrovos varža R . Pagal antrąją Kirchhofo taisyklę galime užrašyti tokią transformatoriaus darbą aprašančią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dot{I}_1(r_1 + i\omega L_1) + \dot{I}_2 i\omega L_{12} = U_1, \\ \dot{I}_2(R + r_2 + i\omega L_2) + \dot{I}_1 i\omega L_{12} = 0. \end{cases} \quad (8.61)$$

Priėmus prielaidą, kad transformatoriuje magnetinio srauto sklaidos nėra, t. y. tas pats magnetinis srautas Φ kerta abi apvijas (tą didžia dalimi užtikrina feromagnetinė šerdis, kurios magnetinė skvarba μ didelė), galima rasti sąryšį tarp abipusio induktyvumo L_{12} ir induktyvumų L_1 ir L_2 . Pirminės apvijos vijų skaičių pažymėkime N_1 , antrinės – N_2 . Pagal (6.28) galime užrašyti:

$$L_1 = N_1 \frac{\Phi}{I_1}, \quad L_2 = N_2 \frac{\Phi}{I_2}. \quad (8.62)$$

Remdamiesi (6.31), taip pat užrašome:

$$L_{12} = N_1 \frac{\Phi}{I_2}, \quad L_{21} = N_2 \frac{\Phi}{I_1}. \quad (8.63)$$

Kadangi pagal abipusiškumo teoremą $L_{12}=L_{21}$, dauginami panariui vieną iš kitos (8.63) lygybes, gauname:

$$L_{12}^2 = N_1 N_2 \frac{\Phi^2}{I_1 I_2}. \quad (8.64)$$

Analogiškai dauginami (8.62) lygybes, gauname:

$$L_1 L_2 = N_1 N_2 \frac{\Phi^2}{I_1 I_2}. \quad (8.65)$$

Iš (8.64) ir (8.65) matome, kad

$$L_{12}^2 = L_1 L_2,$$

taigi

$$L_{12} = \pm \sqrt{L_1 L_2}. \quad (8.66)$$

(8.66) „+“ ženklą reikia naudoti, kai ričių magnetiniai srautai vienas kitą stiprina, o „–“ – kai silpnina. Transformatoriuje tie srautai vienas kitą silpnina, taigi, atsižvelgdami į (8.66), (8.61) lygčių sistemą perrašome taip:

$$\begin{cases} \dot{I}_1(r_1 + i\omega L_1) - \dot{I}_2 i\omega \sqrt{L_1 L_2} = U_1, \\ \dot{I}_2(R + r_2 + i\omega L_2) - \dot{I}_1 i\omega \sqrt{L_1 L_2} = 0. \end{cases} \quad (8.67)$$

Kai antrinės apvijos grandinė nesujungta, transformatorius dirba *tuščiąja eiga*, t. y. $\dot{I}_2 = 0$. Tuo atveju magnetinį srautą sukuria tik pirminė apvija tekanti srovė, kurios stipris

$$\dot{I}_1 = \frac{U_1}{r_1 + i\omega L_1}, \quad I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{r_1^2 + (\omega L_1)^2}}.$$

Darant transformatorius siekiama, kad būtų $r_1 \ll \omega L_1$. Tai pasiekti galima parenkant pakankamai didelį pirminės ritės vijų skaičių, nes $r_1 \sim N_1$, o $L_1 \sim N_1^2$ (žr. (6.38)). Tada

$$U_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad U_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (8.68)$$

Iš (8.68) gauname, kad pirminės ir antrinės ričių įtampų santykis

$$k = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}. \quad (8.69)$$

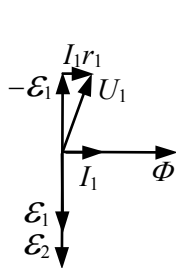
Dydis k vadinamas *transformacijos koeficientu*. Aukštinimo transformatoriaus $k < 1$, o žeminimo $k > 1$.

(Pastaba. Literatūroje kartais transformacijos koeficientu vadinamas atvirkštinis dydis, t. y. $k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}$).

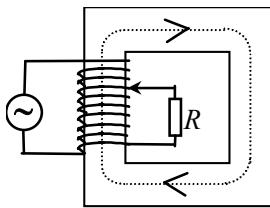
Reikia atkreipti dėmesį, kad čia pateiktos lygtys transformatoriui su feromagnetine šerdimi tinka tik apytiksliai, nes feromagnetikų magnetinė skvarba μ , taigi ir ričių induktyvumai, nėra pastovūs, o priklauso nuo srovės stiprio. Be to, reikėtų atsižvelgti į magnetinio srauto šerdyje sklaidos, feromagnetiko permagnetinimo, sūkurinių srovių sąlygotus ir kitokius nuostolius. Tuo atveju transformatoriaus darbo analizė esti gerokai sudėtingesnė.

Pateiksime transformatoriaus tuščiosios eigos ir su aktyviąja apkrova vektorines diagramas. Kad būtų paprasčiau, į magnetinio srauto vėlavimą srovės atžvilgiu, atsirandančio dėl šerdies medžiagos permagnetinimo inercijos, neatsižvelgsime.

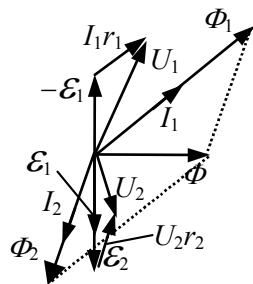
Tuščiosios eigos vektorinė diagrama pateikta 167 pav. Šiuo atveju antrinėje apvijoje srovės nėra, taigi magnetinį srautą Φ sukuria tik pirminės apvijos srovė I_1 . Pirminėje ir antrinėje apvijose indukuojamos elektromotinės jėgos



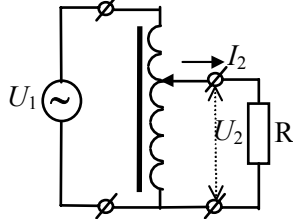
167 pav.



169 pav.



168 pav.



170 pav.

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \text{ ir } \mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

atsilieka nuo srauto Φ 90° kampu. Jei nekreiptume dėmesio į pirminės apvijos aktyviąją varžą r_1 , prijungta išorinė įtampa U_1 būtų lygi \mathcal{E}_1 , o jų fazės būtų priešingos, t. y. $U_1 = -\mathcal{E}_1$. Atsižvelgiant į r_1 , $U_1 = -\mathcal{E}_1 + I_1 r_1$, t. y. turi būti $|U_1| > |\mathcal{E}_1|$.

Esant apkrautam aktyviąja varža transformatoriui magnetinį srautą kuria pirminės ir antrinės grandinių srovės I_1 ir I_2 , tačiau bendras srautas išlieka maždaug toks pat, kaip ir tuščiosios eigos atveju. Taigi pirminės ir antrinės grandinių srautai Φ_1 ir Φ_2 turi būti beveik priešingų fazių, o vektorinė diagrama atrodo taip, kaip pavaizduota 168 pav.

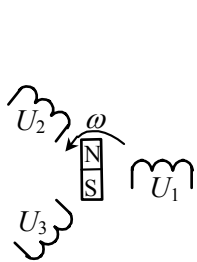
Kai kada transformatoriaus antrinę apviją sudaro pirminės apvijos dalis, arba atvirkščiai, pirminė

apvija esti antrinės apvijos dalis. Toks transformatorius vadinamas **autotransformatoriumi** (169 pav.). Žeminimo autotransformatoriaus sutartinis žymėjimas pavaizduotas 170 pav. Viena iš apvijų dažnai daroma su slankiu kontaktu. Tada galima tolydžiai keisti antrinės grandinės įtampą.

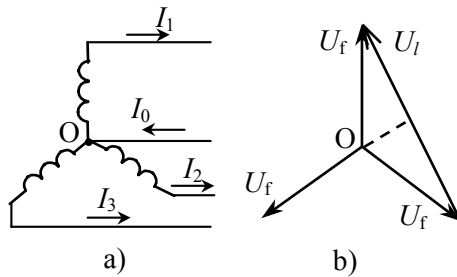
9. Pagrindinės žinios apie trifazę srovę ir jos naudojimą

Iki šiol nagrinėta kintamoji srovė buvo apibūdinama amplitude ir faze. Tai **vienfazė** kintamoji srovė.

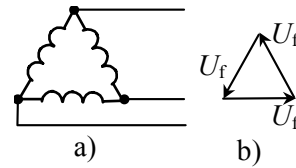
Rinkinys trijų vienodų vienfazių srovių, kurių fazės viena kitos atžvilgiu pasislinkusios trečdaliu periodo, vadinamas **trifaze** srove. Jos gavimo principą paaiškina 171 pav. Jame trys 120° kampu viena kitos atžvilgiu išdėstytos vienodos apvijos, tarp kurių kampiniu greičiu ω sukasi nuolatinis magnetas. Besisukantis magnetinis laukas generatoriaus apvijose sukuria vienodus, bet skirtingų fazių įtampas $U_1 = U_0 \sin \omega t$, $U_2 = U_0 \sin(\omega t + 2\pi/3)$, $U_3 = U_0 \sin(\omega t + 4\pi/3) = U_0 \sin(\omega t - 2\pi/3)$. Kai apvijos tarpusavyje niekaip nesujungtos, turime tris atskirus vienfazių generatorius. Norint iš jų tiekti elektros energiją, reikėtų nutiesti liniją iš šešių laidų. Tačiau jei tas tris generatoriaus apvijas tam tikrais būdais sujungsime, gausime vieną trifazės srovės generatorių. Galimi du generatoriaus apvijų jungimo būdai – **žvaigždinis** ir **trikampis**. Žvaigždinis generatoriaus apvijų sujungimo būdas pavaizduotas 172 pav., a), įtampų vektorinė diagrama – 172 pav., b), o trikampis – 173 pav., a) ir b) atitinkamai (besisukantis magnetas čia ir toliau nebevaizduojamas).



171 pav.



172 pav.



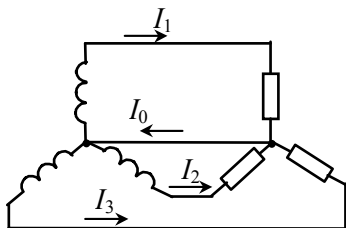
173 pav.

Žvaigždinio jungimo atveju esti bendras taškas O, kuriame sujungtos visos trys apvijos. Su šiuo tašku sujungtas laidas vadinamas **nuliniu laidu**. Dažniausiai šis laidas įžeminamas. Su kitais apvijų galais sujungti laidai vadinami **faziniais laidais**. Kiekvienos apvijos įtampa (t. y. įtampa tarp fazinio ir nulinio laidų) U_f vadinama **fazine įtampa**. Įtampa tarp fazinių laidų U_l vadinama **linijine įtampa**. Iš 172 pav., b) matyti, kad

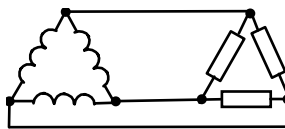
$$U_l = 2U_f \sin 60^\circ = \sqrt{3}U_f. \quad (8.70)$$

Naudodamiesi (8.70) nustatome, kad jei $U_f = 220$ V, tai $U_l = 380$ V, o jei $U_l = 127$ V, tai $U_f = 220$ V.

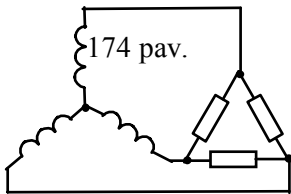
Apkrovas tarpusavyje taip pat galima sujungti žvaigžde ir trikampi, o po to prijungti prie trifazio generatoriaus, kurio apvijos sujungtos žvaigžde arba trikampi. Taigi yra keturios generatoriaus ir apkrovų jungimo galimybės. Jų schemas pavaizduotos 174 – 177 pav.



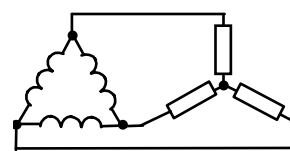
174 pav.



175 pav.



176 pav.



177 pav.

Jungiant žvaigždę su žvaigžde (174 pav.), kiekvienos apkrovos įtampa lygi fazinei įtampai. Kai apkrovos maždaug vienodos, nuliniu laidu teka labai maža srovė, nes $\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3$, o fazių skirtumas tarp srovių I_1 , I_2 ir I_3 lygus 120° . Taigi nulinis laidas gali būti plonesnis negu faziniai laidai.

Jungiant trikampį su trikampi (175 pav.), kiekvienos apkrovos įtampa taip pat lygi fazinei įtampai. Šiuo atveju linija susideda tik iš trijų laidų.

Jungiant žvaigždę su trikampi (176 pav.), kiekvieną apkrovą veikia $U_l = \sqrt{3}U_f$

įtampa, o jungiant trikampį su žvaigžde (177 pav.) įtampa kiekvienoje apkrovoje lygi $U_f / \sqrt{3}$.

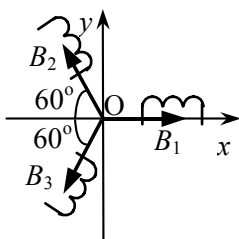
Kaip matyti, naudojant trifazę srovę sutaupoma metalo, nes reikia mažiau laidų. Taip pat labai svarbu, kad šiuo atveju gana paprastai galima gauti sukamąjį magnetinį lauką, reikalingą efektyviam elektros variklių panaudojimui.

10. Sukamasis magnetinis laukas

Tarkime, kad elektros variklio statoriuje yra trys apvijos, išdėstytos taip, kad kampas tarp jų lygus 120° (178 pav.). Prijungus jas prie trifazės srovės tinklo, tomis apvijomis tekės srovės, tarp kurių fazių skirtumas 120° . Toks pat fazių skirtumas bus ir tarp tų srovių kurių magnetinio srauto tankių:

$$\begin{aligned} B_1 &= B_0 \sin \omega t, \\ B_2 &= B_0 \sin(\omega t + 120^\circ), \\ B_3 &= B_0 \sin(\omega t - 120^\circ). \end{aligned}$$

Apskaičiuosime suminį magnetinio srauto tankį taške erdvės taške O tarp apvijų. Parinkę stačiakampę koordinatinių sistemą taip, kad x ašis būtų nukreipta išilgai apvijos, kurios magnetinio srauto tankis B_1 , nustatome, kad visų trijų apvijų magnetinių



178 pav.

srauto tankių projekcijų į x ašį suma

$$\begin{aligned} B_x &= B_0 [\sin \omega t - \sin(\omega t + 120^\circ) \cos 60^\circ - \sin(\omega t - 120^\circ) \cos 60^\circ] = \\ &= [\sin \omega t - \cos 60^\circ (\sin \omega t \cos 120^\circ + \cos \omega t \sin 120^\circ + \sin \omega t \cos 120^\circ + \\ &\quad - \cos \omega t \sin 120^\circ)] = B_0 (\sin \omega t - 2 \sin \omega t \cos 120^\circ \cos 60^\circ) = 1,5 B_0 \sin \omega t, \\ B_y &= 0. \end{aligned}$$

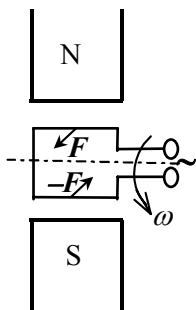
Matome, kad magnetinio srauto tankis, kurio amplitudė lygi $1,5B_0$, sukasi kintamosios srovės dažniu. Šis reiškinys panaudojamas elektros srovės rotoriams sukti.

11. Elektros varikliai

Elektros varikliai elektros energiją paverčia mechaniniu darbu. Jų veikimas pagrįstas laidininką su srove magnetiniame lauke veikiančios Ampero jėgos panaudojimu. Judamoji elektros variklio dalis vadinama **rotoriumi**, o nejudamoji – **statoriumi**.

Glaustai aptarsime kintamosios srovės sinchroninių ir asinchroninių variklių veikimo principą ir konstrukcijos ypatumus.

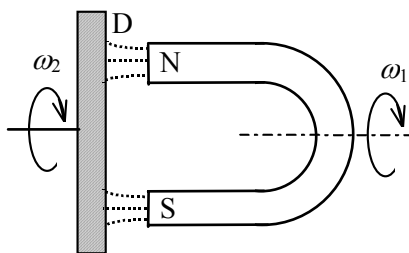
Sinchroniniai varikliai. Tarkime, kad nuolatiniam magnetiniame lauke yra įtaisyta galintis sukis rėmelis, kuriuo teka kintamoji elektros srovė (179 pav.). Rėmelio laidus veikiančios magnetinio lauko statmenos Ampero jėgos F sukuria sukamąjį momentą. Pasikeitus srovės tekėjimo kryptčiai, pasikeis ir Ampero jėgų krypttis. Todėl įjungtas į kintamosios srovės tinklą toks variklis pats negali pradėti sukis. Kad sukamasis momentas visą laiką veiktų viena kryptimi, reikia, kad rėmelio sukimosi dažnis būtų lygus jo laidais tekančios kintamosios srovės dažniui, t. y. turi būti išlaikomas sinchroniškumas. Taigi sinchroninį variklį pirmiausia reikia įsukti iki kintamosios srovės dažnio ω ir tik tada jungti į tinklą. Dažniausiai tam naudojamas pagalbinis nuolatinės srovės variklis. Pasiekus sinchronizaciją, toliau ji palaikoma automatiškai, nes padidėjus variklio apkrovai padidėja ir srovės stipris jo rotoriaus apvijoje, taigi ir sukamasis momentas.



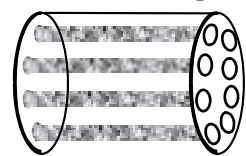
179 pav.

Sinchroninių variklių privalumas – pastovus sukimosi dažnis, lygus tinklo dažniui. Pagrindiniai jų trūkumai – sunku paleisti (nes reikia įsukti), taip pat, per daug apkrovus, galima prarasti sinchroniškumą ir variklis sustos. Nepaisant šių trūkumų, sinchroniniai varikliai naudojami, kai reikia užtikrinti pastovų sukimosi dažnį.

Asinchroniniai varikliai. Jų veikimas pagrįstas magnetinio lauko sąveika su Fuko srovėmis. Tarkime, kad ω_1 dažniu sukamo pasagiškojo magneto magnetiniame lauke įtaisyta galintis sukis iš bet kokio laidininko padarytas skritulys D (180 pav.). Magnetui judant kiekviename skritulio D taške sukuriamas kintamasis magnetinis laukas ir atsiranda Fuko srovės, kurias magnetinis laukas veikia Ampero jėga. Pagal Lenco taisyklę indukcinės srovės stengiasi sumažinti veikimą tų veiksnų, kurie jas kuria. Šiuo atveju Fuko srovės sukuriantis veiksnys yra santykinis magneto ir skritulio judėjimas. Todėl skritulį veikiančios jėgos stengiasi mažinti santykinį šio judėjimo greitį, t. y. skritulys ima sukis ta pačia kryptimi, kaip ir magnetas, tik mažesniu už ω_1 kampiniu greičiu ω_2 . (Jei tie greičiai būtų lygūs, Fuko srovės neatsirastų, nebūtų ir skritulį D veikiančių jėgų). Didinant skritulio apkrovą, jo greitis ω_1 turi mažėti, nes reikia didesnės Ampero jėgos, tuo pačiu ir stipresnių Fuko srovių, tai apkrovai įveikti.



180 pav.

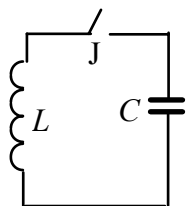


181 pav.

Asinchroniniuose elektros varikliuose vietoje sukamo nuolatinio magneto panaudojamas sukamasis magnetinis laukas. Jį sukuria statoriuje įrengtos apvijos, išdėstytos panašiu būdu, kaip pavaizduota 178 pav. Rotoriumi gali būti bet koks laidus cilindras. Dažnai jis esti tuščiaaviduris arba net daromas iš atskirų trumpai sujungtų laidžių virbų (181 pav.).

Asinchroninių variklių privalumas – sukimosi greitį galima tolydžiai reguliuoti keičiant srovės stiprį statoriaus apvijoje. Trūkumas – paleidimo metu, kol inkaras dar neįgavęs greičio, variklio apvijomis teka labai stipri srovė, kuri gali sugadinti variklį ar net elektros tinklą. Kad taip neatsitiktų, nuosekliai su varikliu jungiamas paleidimo reostatas, kuris sumažina srovę paleidimo metu. Variklio sukimosi dažniui didėjant, reostato varža mažinama iki nulio.

12. Virpesių kontūras. Laisvieji elektromagnetiniai virpesiai



48 pav.

Išnagrinėsime elektrimagnetinius procesus, vykstančius 48 pav. pavaizduotoje grandinėje. Tarkime, kad kondensatorius C įelektrintas krūviu q_0 esant išjungtam jungikliui J . Įjungus jungiklį, kondensatorius pradės išsikrauti, grandinė ims tekėti srovė. Pagal antrąją Kirchhofo taisyklę

$$U_L + U_C = 0, \quad (8.71)$$

nes grandinėje nėra pašalinių šaltinių. Žinome, kad

$$U_L = L \frac{dI}{dt}, \quad (8.72)$$

$$U_C = \frac{q}{C}. \quad (8.73)$$

Taigi

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (8.74)$$

Prisiminę, kad $I = \frac{dq}{dt}$ ir įrašę tai į (8.74), gauname antrosios eilės diferencialinę lygtį, aprašančią kondensatoriaus krūvio q kitimą:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0. \quad (8.75)$$

Šios diferencialinės lygties sprendinys yra

$$q = q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} = q_0 \cos \omega_0 t \quad (8.76)$$

(tai lengva patikrinti (8.76) įrašius į (8.75)).

Matome, kad kondensatoriaus krūvis kinta harmoningai. Čia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.77)$$

kontūro savasis kampinis dažnis. Kontūro savųjų elektromagnetinių virpesių periodas

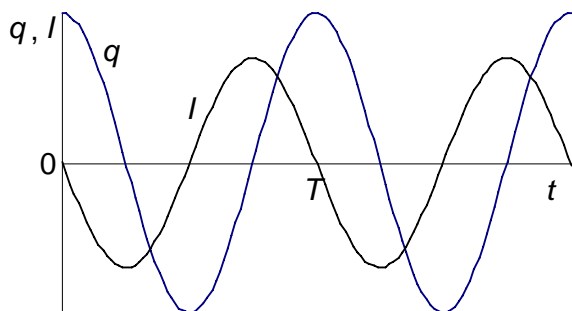
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (8.78)$$

Srovės stiprį kontūre galime nustatyti diferencijuodami (8.76):

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega_0 \sin \omega_0 t = q_0 \omega_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (8.79)$$

Sugretinę (8.76) ir (8.79) išraiškas, nustatome, kad fazių skirtumas tarp kondensatoriaus krūvio (arba jo įtampos, kuri susijusi su krūviu (8.73) lygybe) ir kontūro tekančios srovės stiprio lygus $\frac{\pi}{2}$ (arba 90°). Šis fazių skirtumo kampas atitinka $\frac{1}{4}$ periodo.

Krūvio ir srovės stiprio virpesių grafikas pateiktas 49 pav.



49 pav.

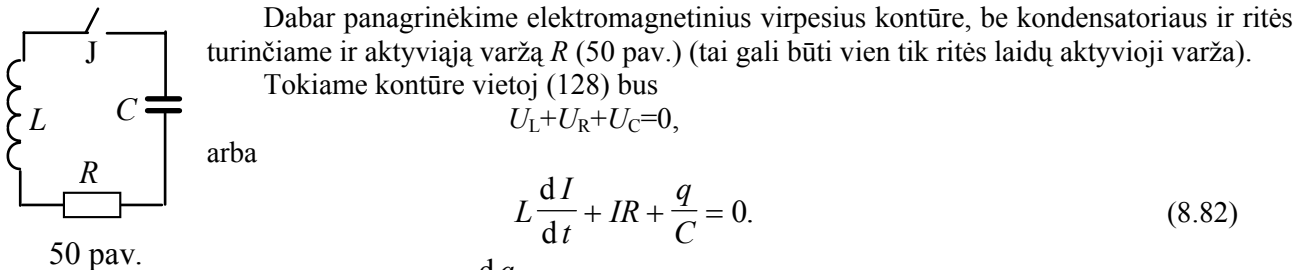
Šie virpesiai yra neslopinamieji, t. y. jų amplitudė laikui bėgant nekinta. Kai $t=0$, kondensatoriaus elektrinio lauko energija

$$W_C = \frac{q_0^2}{2C}, \quad (8.80)$$

o ritės energija $W_L=0$, nes $I=0$. Kai $t=\frac{1}{4}T$, $\cos\omega_0 t = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $W_C=0$, o ritės energija

$$W_L = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{Lq_0^2\omega_0^2}{2} = \frac{Lq_0^2}{2LC} = \frac{q_0^2}{2C}. \quad (8.81)$$

Iš (8.80) ir (8.81) matome, kad per laikotarpį $t=\frac{1}{4}T$ visa kondensatoriaus elektrinio lauko energija pavirsta ritės magnetinio lauko energija ir atvirkščiai.



Dabar panagrinėkime elektromagnetinius virpesius kontūre, be kondensatoriaus ir ritės turinčiame ir aktyviąją varžą R (50 pav.) (tai gali būti vien tik ritės laidų aktyvioji varža).

Tokiame kontūre vietoj (128) bus

$$U_L + U_R + U_C = 0,$$

arba

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0. \quad (8.82)$$

Irašę į (8.82) $I = \frac{dq}{dt}$, gauname tokią antrosios eilės diferencialinę lygtį:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (8.83)$$

(8.83) lygties sprendinys yra toks:

$$q = q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot t\right) = q_0 e^{-\beta t} \cos\omega t. \quad (8.84)$$

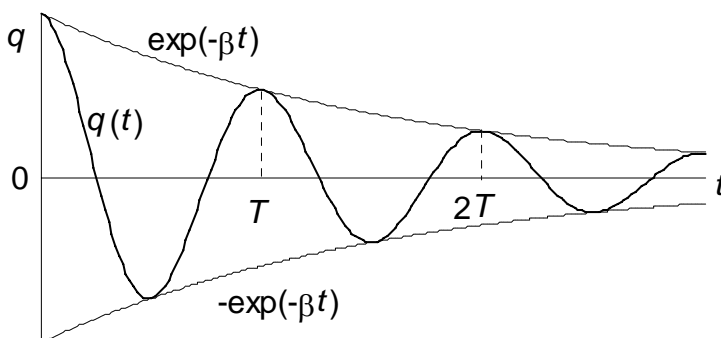
Čia

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad (8.85)$$

vadinamas **slopinimo koeficientu**,

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (8.86)$$

kontūro kampiniu **laisvųjų virpesių dažniu**. Šis dažnis yra mažesnis už savąjį dažnį ω_0 (žr. (8.77)).



51 pav.

(8.84) funkcijos grafikas nubraižytas 51 pav. Kaip aiškėja iš (8.84) ir 51 pav., šiuo atveju kontūre vyksta slopinamieji elektromagnetiniai virpesiai, nes aktyviojoje varžoje tekant srovei elektromagnetinė energija virsta šiluma.

Jei (8.82) išdiferencijuotume laiko t atžvilgiu, gautume

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (8.87)$$

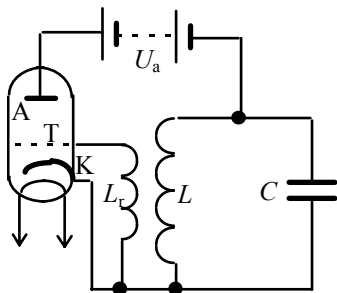
(8.87) lygties pavidalas toks pat, kaip ir (8.83), taigi ir jos sprendinys analogiškas (8.84) sprendiniui:

$$I = I_0 e^{-\beta t} \cos \omega t. \quad (8.88)$$

Srovės stiprio, kaip ir kondensatoriaus krūvio ar įtampos, amplitudė laikui bėgant eksponentiškai mažėja.

13. Grįžtamojo ryšio generatorius

Kiekvienas virpesių kontūras, jei jo ritė ir jungiamieji laidai nėra superlaidūs, turi tam tikrą aktyviąją varžą. Todėl laisvieji virpesiai esti slopinamieji. Norint gauti neslopinamuosius virpesius, būtina koku nors būdu papildyti kontūro elektromagnetinę energiją tokiu kiekiu, kiek jos netenkama dėl Džaulio šilumos ir elektromagnetinės spinduliuotės. Tai galima atlikti panaudojant elektroninę lempą triodą.



52 pav.

Panagrinėsime vieną paprasčiausių lempinio generatoriaus schemų, parodytą 52 pav. Į jos anodinę grandinę, maitinamą iš nuolatinės įtampos U_a šaltinio, įjungtas virpesių kontūras, sudarytas iš kondensatoriaus C ir ritės L . Tas kontūras ryšio rite L_r induktyviai susietas su tinklelio grandine. Todėl kintant anodo įtampai kinta ir tinklelio įtampa, t. y. yra grįžtamas ryšys. Grįžtamojo ryšio ritė L_r turi būti įjungta taip, kad didėjant srovės stipriui anodo grandinėje tinklelio potencialas katodo atžvilgiu būtų teigiamas, o mažėjant - neigiamas. Tada srovės stipris anodo grandinėje padidėja daugiau negu nesant ryšio ritės. Tokiu būdu kontūras periodiškai gauna iš šaltinio U_a papildomą energijos kiekį. Toks ryšys vadinamas **teigiamuoju grįžtamoju ryšiu**. Tokioje grandinėje virpesiai sužadunami savaime. Tarkime, kad pradiniu momentu kondensatorius turi tam tikrą nedidelį krūvį, atsiradusį, pavyzdžiui, dėl šiluminės fluktuacijos.

Kondensatoriui išsikraunant per ritę, kontūre atsiranda mažos amplitudės laisvieji elektromagnetiniai virpesiai, kurie, esant teigiamajam grįžtamajam ryšiui, stiprėja. Triodo anodo srovės priklausomybė nuo tinklelio įtampos netiesinė, todėl, kai tinklelio įtampos virpesių amplitudė pasiekia tam tikrą vertę, anodo srovės amplitudė nustoja didėti, t. y. nusistovi neslopinamieji pastovios amplitudės elektromagnetiniai virpesiai.

9 skyrius

MAKSVELO LYGTYS.

PAGRINDINĖS ELEKTROMAGNETINIŲ BANGŲ SAVYBĖS

1. Slinkties srovė

Nagrinėdami elektromagnetinės indukcijos dėsnius sužinojome, kad kintamasis magnetinis laukas kuria elektrinį lauką. Dar Maksvelas priėjo prie išvados, kad turėtų būti ir atvirkštinis reiškinys: kintamasis elektrinis laukas turi kurti magnetinį lauką. Jis atkreipė dėmesį į tą faktą, jog tolydumo lygtis (žr. 3.20)

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ir suminės srovės dėsnį aprašanti diferencialinė lygtis (žr. 5.33)

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{j}$$

kintamųjų srovių atveju yra prieštaringos. Paėmę pastarosios lygties abiejų pusių divergenciją, gauname:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \mu_0 \operatorname{div} \vec{j}.$$

Iš vektorių analizės žinome, kad bet kokio vektoriaus $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0$, vadinasi, turi būti ir $\operatorname{div} \vec{j} = 0$. Tačiau kintamosios srovės atveju tas prieštarauja tolydumo lygčiai. Dėl tolydumo lygties, išreiškiančios ir krūvio tvermės dėsnį, abejonių nekyla. Vadinasi, suminės srovės dėsnio lygtis yra nepilna. Ją reikia papildyti.

Pagal Gauso dėsnį (žr. 1.101)

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

Šią ρ išraišką įrašę į tolydumo lygtį nustatome, kad

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

arba

$$\operatorname{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0. \quad (9.1)$$

Jei suminės srovės dėsnį užrašytume taip:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu\mu_0 \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), \quad (9.2)$$

prieštaringumo nebebūtų, nes (9.2) lygties abiejų pusių divergencija iš tikrųjų būtų lygi nuliui. Panaudodami magnetinio lauko stiprio vektorių \vec{H} (9.2) užrašysime taip:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (9.3)$$

Srovės tankio dimensiją turintis dydis $\frac{\partial D}{\partial t}$ vadinamas **slinkties srovės tankiu**:

$$\vec{j}_{sl} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (9.4)$$

Slinkties srovė I_{sl} susijusi su jos tankiu taip pat, kaip ir laidumo srovė (žr. 3.12):

$$I_{sl} = j_{sl} S = \frac{\partial D}{\partial t} \cdot S. \quad (9.5)$$

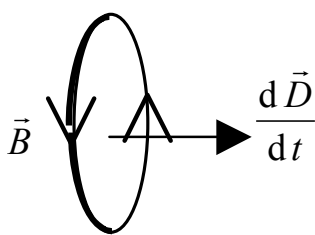
Atsižvelgiant į slinkties srovę suminės srovės dėsnio integralinę išraišką reikia užrašyti taip:

$$\oint_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \left(\sum_k I_k + S \frac{dD}{dt} \right) \quad (9.6)$$

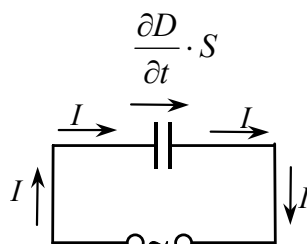
arba

$$\oint_{(L)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k I_k + S \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (9.7)$$

Čia S – kontūro L apjuosiamas plotas, kurį kerta vektorius $\frac{d\vec{D}}{dt}$.



182 pav.



183 pav.

Reikia pastebėti, kad slinkties srovė iš tikrųjų tai nėra srovė, nes ji nesusijusi su kryptingu krūvių judėjimu. Tačiau jai būdinga viena iš srovės savybių – kurti magnetinį lauką. Kaip ir laidumo srovės atveju kintamojo elektrinio lauko sukurtas magnetinis laukas susijęs su $\frac{d\vec{D}}{dt}$ vektoriumi pagal dešiniojo sraigto taisyklę (182 pav.).

Panagrinėkime kintamosios srovės grandinę, kurioje yra nuosekliai įjungtas kondensatorius (183 pav.). Žinome, kad kintamoji srovė tokia grandine prateka. Laidais teka su elektronų judėjimu susijusi laidumo srovė I , o tarp kondensatoriaus plokštelių – jai lygi slinkties srovė, kuri tartum uždaro grandinę. Taigi, atsižvelgiant į slinkties srovę, srovės tankio linijos visada esti uždaros, jų divergencija lygi nuliui (žr. 9.1).

2. Maksvelo lygčių sistema ir atskirų tos sistemos lygčių fizikinė prasmė

Maksvelo lygčių sistemą sudaro jau anksčiau užrašytos lygtys (9.3), (7.9), (5.34a) ir (1.101). Užrašysime jas dar kartą ir sunumeruosime:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (\text{IV})$$

Šios lygtys vadinamos lauko lygtimis. Jos tinka bet kokiems makroskopiniams elektromagnetiniams reiškiniams aprašyti. Nagrinėjant tuos reiškinius medžiagose, reikia atsižvelgti į konkrečių medžiagų elektromagnetines savybes. Tais atvejais prie keturių Maksvelo lygčių pridedami mums jau žinomi sąryšiai (1.99), (6.18) ir (3.30):

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E},$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H},$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Panaudojant šiuos sąryšius galima užrašyti Maksvelo lygčių sistemą, į kurią įeina tik du pagrindiniai vektoriai \vec{E} ir \vec{B} :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \mu_0 \sigma \vec{E} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}. \quad (\text{IV})$$

(I) lygtis išreiškia suminės srovės dėsnį, pagal kurį magnetinį lauką kuria laidumo ir slinkties srovės.

(II) lygtis išreiškia Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnį.

(III) lygtis atspindi tą faktą, kad magnetinis laukas neturi šaltinių, o jo linijos neturi nei pradžios, nei pabaigos.

(IV) lygtis yra Gauso dėsnio diferencialinė išraiška ir rodo, kad krūviai yra elektrinio lauko šaltiniai.

3. Elektromagnetinės bangos

Žinome, kad kintamasis magnetinis laukas kuria kintamąjį elektinį lauką (žr. Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnį). Maksvelas 1864 m. iškėlė hipotezę, kad turi egzistuoti ir atvirkštinis reiškinys: **kintamasis elektrinis laukas kuria kintamąjį magnetinį lauką**. Taigi kintamieji elektriniai ir magnetiniai laukai yra tarpusavy susiję, nes vienas laukas gali virsti kitu ir atvirkščiai. Apibūdinęs šiuos laukų virsmus diferencialinėmis lygtimis, Maksvelas priėjo išvadą, kad turi egzistuoti ypatingos bangos, kurios gali skliti ne tik medžiaga, bet ir vakuume. Šias bangas Maksvelas pavadino elektromagnetinėmis bangomis. **Elektromagnetinė banga - tai kintamojo elektrinio ir magnetinio laukų sklidimas aplinka.**

Eksperimentiškai elektromagnetines bangas praėjus daugiau kaip 20 metų po teorinio jų buvimo numatymo 1887 m. pirmą kartą aptiko Hercas (*H. Hertz*). (8.89) lygybės dešinės pusės skliaustuose esantis antrasis narys turi srovės stiprio dimensiją ir vadinamas **slinkties srove**. Nelaidžioje elektrai aplinkose, kuriose nėra laisvųjų elektros krūvių, srovė tekėti negali, tačiau magnetinį lauką gali kurti slinkties srovė. Būdinga tai, kad kartą prasidėjęs elektrinio ir magnetinio laukų tarpusavio kitimo procesas tęsiasi, apimdamas vis naujas erdves sritis, t. y. erdve sklinda elektromagnetinė banga.

Iš Maksvelo elektromagnetizmo teorijos lygčių išplaukia, kad elektromagnetinių bangų sklidimo greitis susijęs su aplinkos dielektrine ir magnetine skvarbomis taip:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}}. \quad (9.8)$$

Vakuume $\epsilon=1$, $\mu=1$, ir

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (9.9)$$

Neferomagnetinėse aplinkose $\mu \approx 1$, $\epsilon > 1$ (feromagnetikai dažniausiai esti elektrai laidūs ir jais neslops-tančios elektromagnetinės bangos sklisti negali), taigi

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}. \quad (9.10)$$

Elektromagnetinės bangos sklaidimo vakuumė greičio santykis su jos greičiu medžiagoje vadinamas medžiagos *absoliutiniu lūžio rodikliu*:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon}. \quad (9.11)$$

Esant dideliems dažniams medžiagų dielektrinė skvarba ϵ priklauso nuo dažnio. Tai lemia lūžio rodiklio n ir elektromagnetinės bangos sklaidimo greičio v priklausomybę nuo dažnio. **Elektromagnetinės bangos sklaidimo greičio priklausomybė nuo dažnio vadinama dispersija**. Dispersiją sąlygoja ϵ priklausomybė nuo dažnio.

Kaip ir bet kokios bangos, elektromagnetinės bangos sklaidimo greitis v susijęs su bangos ilgiu λ , periodu T , dažniu ν bei kampiniu dažniu ω taip:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \frac{\lambda\omega}{2\pi}. \quad (9.12)$$

Jei sklisdama elektromagnetinė banga pereina iš vienos aplinkos į kitą, jos greitis pakinta sutinkamai su (9.10). Pakinta ir bangos ilgis, o jos dažnis lieka nepakitęs ir lygus bangą sukėlusio virpiklio virpesių dažniui.

Elektromagnetinės bangos elektrinio lauko stiprio vektorius \vec{E} yra statmenas magnetinio srauto tankio vektoriui \vec{B} . Savo ruožtu šie du vektoriai yra statmeni bangos sklaidimo greičio vektoriui \vec{v} :

$$\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{v}. \quad (9.13)$$

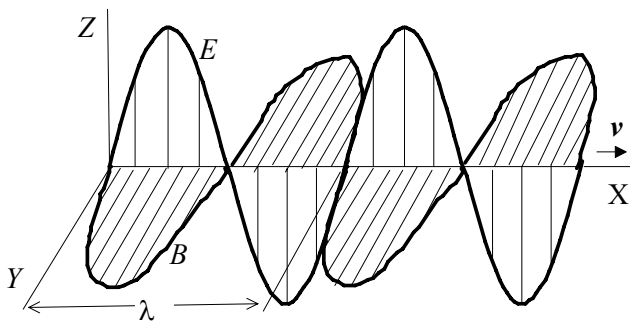
Tarkime, kad elektromagnetinės bangos vektoriai \vec{E} ir \vec{B} kinta harmoningai:

$$E = E_0 \sin \omega t,$$

$$B = B_0 \sin \omega t.$$

Tada sąryšį tarp šių vektorių virpesių plokštumų ir bangos sklaidimo greičio galima pavaizduoti grafiškai erdvinėje stačiakampėje koordinatų sistemoje taip, kaip parodyta 54 pav.

Sklisdama elektromagnetinė banga neša su savimi energiją. Ji sutelkta bangos elektriniame ir magnetiniame laukuose. Kadangi bangoje elektrinis laukas virsta magnetiniu ir atvirkščiai, šių laukų energijos turi būti vienodos. Galima sulyginti energijas, esančias erdvės, kur sklinda banga, tūrio vienetu, t. y. elektrinės ir magnetinės energijos tūrinius tankius u_e ir u_m :



54 pav.

$$u_e = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2},$$

(žr. "Elektrostatika", (1.120)),

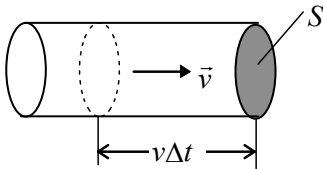
$$u_m = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

Taigi

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (9.14)$$

Iš (9.14), atsižvelgus į (9.8), aiškėja, kad elektromagnetinės bangos \vec{E} ir \vec{B} vektorių moduliai susiję taip:

$$E = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \nu B. \quad (9.15)$$



55 pav.

Apskaičiuosime, kiek energijos perneša elektromagnetinė banga per laiko vienetą pro vienetinį plotą, statmeną bangos sklidimo kryptčiai, t. y. energijos srauto tankį.

Bangos kelyje įsivaizduokime cilindą, kurio ašis nukreipta bangos greičio vektoriaus \vec{v} kryptimi, o skerspjūvio plotas S (55 pav.). Per laikotarpį Δt pro plotą S praeis energija, esanti šio cilindro $\nu\Delta t$ ilgyje:

$$W = (u_e + u_m)V = (u_e + u_m)\nu S\Delta t.$$

Kadangi $u_e = u_m$, šią formulę atsižvelgus į (9.15) galima perrašyti taip:

$$W = 2u_m \nu S\Delta t = \frac{B^2 \nu S\Delta t}{\mu\mu_0} = \frac{EB S\Delta t}{\mu\mu_0}.$$

Energijos srauto tankis

$$\Pi = \frac{W}{S\Delta t} = \frac{EB}{\mu\mu_0}. \quad (9.16)$$

Patogumo dėlei įvedamas elektromagnetinės energijos srauto tankio vektorius $\vec{\Pi}$:

$$\vec{\Pi} = \frac{[\vec{E}, \vec{B}]}{\mu\mu_0}. \quad (9.17)$$

Vektorius $\vec{\Pi}$ vadinamas Pointingo (*J. H. Poynting*) vektoriumi. Jis nukreiptas energijos sklidimo kryptimi, kuri sutampa su \vec{v} arba $[\vec{E}, \vec{B}]$ kryptimi. Per bet koki paviršių S elektromagnetinės bangos pernešamą galią tada galima išreikšti taip:

$$P = \int_{(S)} (\vec{\Pi}, d\vec{S}). \quad (9.18)$$

Pavyzdžiui, norint apskaičiuoti kokio nors radijo bangų siųstuvo spinduliuojamą galią galima mintyse apgaubti jį bet koku uždaru paviršiumi ir apskaičiuoti (9.18) integralą tuo paviršiumi (žinoma, jei nėra elektromagnetinių bangų sugerties jų kelyje nuo siųstuvo iki to paviršiaus).

Kai E ir B kinta harmoningai, tada

$$\Pi = \frac{E_0 B_0}{\mu\mu_0} \sin^2 \omega t. \quad (9.19)$$

Jei paviršius sugeria į jį krintančias elektromagnetines bangas, jų energija virsta šiluma. (9.19) tuo atveju išreiškia momentinę vienetiniam plotui tenkančią šiluminę galią. Kaip ir kintamosios srovės galios atveju, paprastai domina ne momentinė, o vidutinė šiluminė galia. Norint ją apskaičiuoti, reikia (9.19) formulėje naudoti efektines E ir B vertes E_{ef} ir B_{ef} , o jei naudojamos amplitudinės vertės E_0 ir B_0 , vardiklyje nepamiršti parašyti 2:

$$\Pi = \frac{E_{ef} B_{ef}}{\mu\mu_0} = \frac{E_0 B_0}{2\mu\mu_0}. \quad (9.20)$$